

Politecnico di Torino



Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Gestionale

**Ottimizzazione di portafoglio:
benefici dell'approccio bayesiano di Black & Litterman**

Relatore

Franco Varetto

Candidato

Giorgio Aprile

Luglio 2020

[...] Qualunque cosa farai, amala,
come amavi la cabina del Paradiso quando eri picciriddu.
(dal film *Nuovo Cinema Paradiso*)

*Alla mia Famiglia
Il mio porto sicuro
In cui trovo sempre consiglio, confronto e conforto*

INDICE

INTRODUZIONE.....	1
1 MODELLO DI MARKOWITZ.....	5
1.1 Rendimento e rischio del portafoglio	6
1.2 Frontiera efficiente	9
1.3 La scelta del portafoglio ottimo.....	12
1.4 Vantaggi e fragilità del modello	14
2 CAPITAL ASSET PRICING MODEL	18
2.1 Metodologia di Fama-MacBeth	22
2.2 Limiti del Modello CAPM	22
3 MODELLO DI BLACK E LITTERMAN.....	24
3.1 Reverse Optimization.....	25
3.2 View dell'investitore	27
3.3 Il teorema di Bayes	28
4 ELABORAZIONE E ANALISI DEI RISULTATI.....	35
4.1 Analisi dei dati.....	35
4.2 Elaborazione dei test statistici.....	40
4.3 Considerazioni conclusive sull'analisi dei dati e sui risultati dei test statistici..	100
4.4 Correlazione dei dati storici.....	104
4.5 Modello di Markowitz	108
4.6 Modello di Black & Litterman.....	117
4.7 View dell'investitore	122
4.8 Rendimenti di Black & Litterman	131
5 CONCLUSIONI.....	145
Bibliografia	149
Sitografia.....	150
Indice delle Figure.....	151
Indice delle Tabelle	153

Allegati	1535
Ringraziamenti	163

INTRODUZIONE

Nell'era del capitalismo oltre il 98% del capitale circolante è destinato alla speculazione: esso, infatti, non ha alcuna finalità produttiva e non è direttamente legato all'andamento dell'economia "reale", ma serve esclusivamente come "materia prima" per generare altro denaro nel più breve tempo possibile. Queste masse gigantesche di capitale circolante condizionano enormemente l'andamento dell'economia e le strategie di mercato. Nel corso degli anni, infatti, si è registrato un ribaltamento completo delle priorità: l'economia si è "finanziarizzata" e la finanza si è trasformata da mezzo a fine, la finanza non è più al servizio dell'economia ma, al contrario, influenza e guida gli scenari del mondo economico. L'economia e la finanza, quindi, sono due ambiti strettamente connessi e dominati dalla speculazione e dall'instabilità intrinseca del mercato finanziario stesso.

La strategia dell'economia classica, rappresentata in particolare dalla "Teoria dei Mercati Efficienti" di Fama e French, è stata messa in discussione e smentita dall'approccio "Random Walk" di Bachelier e soprattutto dalla "Modern Portfolio Theory" formulata da Harry Markowitz. Inoltre, il "Metodo Valutativo" delle opzioni Black e Scholes ha evidenziato come l'andamento a breve termine dei mercati sia casuale e quindi non prevedibile. Il mercato, infatti, è condizionato da una miriade di fattori perlopiù casuali che influenzano domanda e offerta; a differenza di quanto formulato dalla "Teoria dei Mercati Efficienti", non esiste, un prezzo "oggettivamente e razionalmente" giusto. Questo significa che i mercati finanziari sono autoreferenziali e, per loro stessa natura, seguono comportamenti che si autoamplificano e previsioni che si autorealizzano. I prezzi non vengono determinati dai fondamentali economici ma suggeriti dal comportamento della massa degli investitori, ovvero dal mercato stesso.

Il comportamento razionale del singolo investitore prima di comprare un'azione prevede che l'investitore stesso, più che accertarsi dello stato di salute dell'azienda, tenti piuttosto di prevedere e capire il comportamento degli altri investitori. L'obiettivo dell'investitore che alloca la propria ricchezza tra i vari titoli azionari presenti sul mercato è quello di raggiungere un prefissato rendimento atteso e, contemporaneamente, assicurarsi di minimizzare la differenza tra le attese e i risultati effettivi. Il primo contributo formale e di supporto per l'investitore che si trova ad effettuare delle scelte finanziarie finalizzate alla costruzione di un portafoglio di titoli efficiente, è stato offerto dalla "Modern Portfolio Theory" – "Teoria di portafoglio" – di Markowitz che fornisce un modello matematico statistico. In precedenza, gli investitori adottavano tecniche empiriche basate, in gran parte, su valutazioni intuitive circa il rischio e il rendimento delle diverse operazioni. Inoltre, l'analisi era condotta titolo per titolo e non sull'intero portafoglio, come invece presuppone lo studio di Markowitz. I risultati ottenuti dalla "Modern Portfolio Theory" si fondano sul concetto di diversificazione finanziaria, cioè sulla riduzione della rischiosità del rendimento di un portafoglio di titoli grazie all'utilizzo di più strumenti finanziari i cui rendimenti non sono perfettamente correlati. Markowitz, infatti, afferma che se l'investitore individua le correlazioni tra gli assets di un portafoglio, è possibile costruire portafogli migliori che producano, cioè, un rendimento atteso maggiore con lo stesso livello di rischio oppure che offrano un rischio minore a parità di rendimento. In sintesi, la teoria di Markowitz non è altro che un modello statistico in cui i rendimenti sono considerati come variabili aleatorie casuali continue, cioè dipendenti da un fenomeno aleatorio e che possono assumere valori diversi in base all'evoluzione dei fattori da cui dipendono. Di queste variabili, che si ipotizzano distribuite normalmente, si possono analizzare i valori attesi, le deviazioni standard e le correlazioni. Mentre il valore atteso quantifica il rendimento atteso del portafoglio, la deviazione standard esprime il rischio ed è nota anche come volatilità. Inserendo come dati di input anche la covarianza, oltre al rendimento e al rischio, è possibile disegnare un'iperbole – la frontiera efficiente – che individua l'insieme delle combinazioni di titoli che danno il maggior rendimento atteso dato un certo livello di rischio (o allo stesso modo il minor rischio dato un certo livello di rendimento). È possibile affermare che non esiste un portafoglio ideale (che soddisfa le esigenze e gli obiettivi di tutti gli investitori) ma infiniti possibili portafogli ideali, commisurati alle differenti preferenze al rischio dell'investitore.

Successivamente alla "Modern Portfolio Theory" sono stati proposti altri modelli statistici che descrivono il rischio secondo distribuzioni asimmetriche. Tali

modelli, nati come osservazioni o critiche alla teoria di Markowitz, compongono la “Post Modern Portfolio Theory”. Sharpe, Lintner e Mossin, in particolare, hanno determinato l’approccio “Capital Asset Pricing Model” (CAPM) in cui il rischio viene misurato correttamente attraverso il coefficiente β di un titolo che esprime la variazione dei rendimenti dei titoli stessi al variare dei rendimenti del mercato. Tuttavia i limiti che caratterizzano sia il modello di Markowitz sia il CAPM hanno successivamente favorito l’implementazione del “Modello di Black e Litterman” realizzato nei primi anni ’90 da Fisher Black e Robert Litterman, analisti della Goldman Sachs. L’aspetto innovativo del modello risiede nella capacità di combinare due diverse tipologie di informazione grazie al Teorema di Bayes, ovvero le aspettative del mercato (basate su dati di dominio pubblico) e le aspettative (views) dell’investitore. Il punto di partenza è quindi rappresentato dall’analisi del mercato e delle sue prospettive, da cui l’investitore, in base alle proprie valutazioni, può decidere se discostarsene o meno. Il portafoglio finale ottenuto sarà il risultato della media pesata delle due informazioni prima descritte: tanto maggiore sarà la fiducia riposta dall’investitore nelle views, tanto più il portafoglio finale sarà sbilanciato verso le stesse; al contrario, se le aspettative si discostano poco dai rendimenti di equilibrio o è basso il livello di fiducia in esse riposto, allora il portafoglio finale risulterà molto vicino a quello di equilibrio. Nel caso estremo in cui l’investitore non esprima alcuna valutazione, il portafoglio ottimo finale detenuto sarà uguale al portafoglio di mercato composto dai differenti assets in misura proporzionale alla loro capitalizzazione di mercato. Uno dei punti di forza del “Modello di Black e Litterman” è dato dal fatto che si basa su solidi modelli economici e, per tale motivo, fornisce risultati fortemente credibili. Infatti, oltre ad affidarsi all’ottimizzazione media-varianza per trovare il portafoglio ottimo finale, la trattazione sfrutta la tecnica dell’ottimizzazione inversa derivata dal CAPM per trovare i rendimenti di equilibrio utilizzati come punto di riferimento dal modello.

Il seguente lavoro di tesi si pone come obiettivo l’applicazione dei modelli statistico-matematici di ottimizzazione di un portafoglio azionario, al fine di individuare strategie di investimento efficienti e utili agli investitori, ricercando il miglior compromesso tra rischi e profitti. In particolare, nella trattazione si analizzeranno due diversi modelli di selezione del portafoglio, quello di Markowitz e quello di Black-Litterman, di cui si evidenzieranno i punti di forza e le criticità in modo da individuare soluzioni adeguate in linea con le strategie di mercato e gli interessi degli investitori stessi.

Nello specifico l’elaborato si articolerà in quattro capitoli.

Dopo una breve introduzione, il Capitolo 1 sarà dedicato alla presentazione della “Modern Portfolio Theory” – “Teoria di Portafoglio Moderna” – sviluppata dall’economista H. Markowitz. In particolare, si analizzeranno nel dettaglio le ipotesi di partenza e gli strumenti di natura matematico-statistica del valore atteso, della varianza, della covarianza e della correlazione di un portafoglio di titoli. Si procederà con la ricerca della frontiera efficiente in modo da individuare le combinazioni di titoli vincenti secondo le strategie di mercato e il portafoglio ottimo, la cui determinazione dipende esclusivamente dalla propensione al rischio del singolo investitore.

A partire dai limiti evidenziati dallo studio della “Teoria di Portafoglio” di Markowitz, nel Capitolo 2 si descriverà l’approccio “Capital Asset Pricing Model” (CAPM). In dettaglio si introdurranno i concetti di investimento privo di rischio e di portafoglio di mercato e si metterà in luce la dipendenza lineare tra le variabili di rischio e quelle di rendimento dei titoli.

Il Capitolo 3 tratterà, a livello teorico, il “Modello di Black-Litterman” che supera i limiti del modello di Markowitz ottenendo portafogli più stabili. In particolare, si farà riferimento al punto di forza del modello rappresentato dall’introduzione delle aspettative dell’investitore nella determinazione dei rendimenti attesi di equilibrio.

Il Capitolo 4 presenterà sia l’applicazione di alcuni test statistici – con l’obiettivo di verificare l’efficienza del mercato a partire dalle quotazioni azionarie – sia l’applicazione dei modelli di Markowitz e Black-Litterman, in modo da poter confrontare i portafogli risultanti e confermare, da un punto di vista pratico, le analogie, le differenze, i limiti e i punti di forza di ciascun approccio.

Il Capitolo 5 sarà dedicato alle considerazioni conclusive sui risultati ottenuti e sugli obiettivi raggiunti.

1 MODELLO DI MARKOWITZ

Nel 1952 Harry Markowitz presentò, con un articolo pubblicato sul “The Journal of Finance”, il modello media-varianza per la creazione di un portafoglio titoli ottimale. L’articolo aveva il titolo “Portfolio Selection” e spiegava, in modo matematico, le ragioni per le quali risulta vantaggioso diversificare un portafoglio di investimento tra più titoli. Lo studio di Markowitz si basava sull’analisi del processo che genera la domanda e l’offerta di attività finanziarie in funzione del rapporto rischio/rendimento da esse espresso. Secondo il principio base della teoria di Markowitz, al fine di costruire un portafoglio efficiente, è necessario individuare una combinazione di titoli tale da minimizzare il rischio e massimizzare il rendimento complessivo compensando gli andamenti asincroni dei singoli titoli. Per far sì che ciò accada, i titoli che compongono il portafoglio devono risultare incorrelati o, meglio, non perfettamente correlati.

Di seguito si riportano gli assunti fondamentali della “Teoria di portafoglio” secondo Markowitz:

- Gli investitori sono razionali ed avversi al rischio, desiderano massimizzare la ricchezza finale (valore atteso) e minimizzare il rischio (espresso dalla deviazione standard);
- Il mercato è perfettamente concorrenziale e l’asimmetria informativa è assente;
- I costi di transazione e le imposte sono trascurabili;
- Gli investitori hanno accesso illimitato al capitale, cioè possono prendere in prestito denaro a un tasso d’interesse privo di rischio (risk-free rate);
- Il periodo di investimento considerato è valido per tutti i partecipanti al mercato è unico.

La novità introdotta da Markowitz consiste nella capacità di sintetizzare la complessa architettura del mercato in poche variabili quantitative che, inserite in un modello di ottimizzazione, permettono di individuare i portafogli ottimi. In particolare, per ogni strumento finanziario è necessario calcolare una coppia di indicatori che ne definiscano a pieno le caratteristiche: il rendimento atteso e il rischio.

- Il rendimento atteso è la performance complessiva che un investitore può ragionevolmente attendersi dall'investimento.
- Il rischio rappresenta la futura variabilità della performance, la potenziale ampiezza delle sue oscillazioni.

Noti questi due parametri, ogni investitore è in grado di effettuare le proprie scelte: a parità di rischio vengono scelti i portafogli che presentano il maggior rendimento atteso, a parità di rendimento atteso, invece, quelli che presentano il minor rischio. L'insieme dei portafogli così costruiti determina la cosiddetta frontiera efficiente che individua, in ogni suo punto, le combinazioni di titoli che danno il maggior rendimento atteso dato un certo livello di rischio. Si può affermare che non esiste un portafoglio ideale tra i portafogli della frontiera tale da soddisfare le esigenze e gli obiettivi di tutti gli investitori ma infiniti portafogli ottimi, commisurati alle differenti preferenze al rischio dell'investitore.

Quindi, il processo che porta alla selezione del portafoglio ottimo si articola in due fasi:

- Il processo di ottimizzazione volto a determinare la frontiera efficiente;
- La scelta soggettiva tra i portafogli efficienti in base all'avversione al rischio dell'investitore, ovvero a secondo della sua funzione di utilità.

1.1 Rendimento e rischio del portafoglio

Un'ipotesi basilare del modello di Markowitz riguarda la distribuzione delle probabilità dei rendimenti, che si ipotizza essere normale: si assume che i prezzi siano generati da un processo casuale che esprime un valore medio atteso uguale a μ e una varianza pari a σ^2 . Poichè i rendimenti degli asset presenti nel portafoglio sono distribuiti normalmente, indipendentemente dalla funzione di utilità, anche il portafoglio risultante avrà un rendimento che si distribuisce secondo una normale. L'ipotesi di normalità semplifica il processo di ottimizzazione che porta alla determinazione dei portafogli efficienti ma, al

contempo, non sempre si rivela adatta alla rappresentazione dei rendimenti a causa della frequente presenza del fenomeno di leptocurtosi (code grasse).

Il rendimento atteso di un portafoglio μ_{Π} è dato dalla somma (ponderata per i pesi ω_i con cui i titoli partecipano all'aggregato) dei rendimenti μ_i dei titoli che compongono il portafoglio:

$$\mu_{\Pi} = E(R_{\Pi}) = E\left(\sum_{i=1}^n \omega_i \cdot R_i\right) = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot E(R_i) = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \mu_i$$

L'espressione precedente può essere riscritta in forma più compatta utilizzando la notazione matriciale:

$$\mu_{\Pi} = \Omega \cdot \theta^T$$

dove:

- $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ è il vettore dei pesi la cui sommatoria si assume pari ad 1;
- $\theta = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ è il vettore dei rendimenti dei singoli titoli;
- θ^T è il vettore dei rendimenti trasposto (vettore colonna).

Diversamente dal rendimento, il rischio di un portafoglio è legato, oltre che al rischio dei singoli titoli, anche al legame tra gli stessi. In altri termini, il rischio di un portafoglio dipende:

- Dai rischi specifici dei singoli titoli (misurati dalle loro varianze);
- Dal rischio sistematico complessivo che deriva dal legame (misurato dalla covarianza) fra le coppie dei rendimenti dei titoli presi a due a due.

Per il calcolo della varianza del portafoglio bisogna quindi innanzitutto definire la matrice di varianze e covarianze di ordine n :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

dove:

- $\sigma_{kj} = Cov(R_k, R_j) = E[(R_k - \mu_k) \cdot (R_j - \mu_j)]$ sono le covarianze;
- $\sigma_{kk} = Var(R_k) = \sigma_k^2$ sono le varianze presenti sulla diagonale principale.

Applicando le proprietà della varianza e tenendo conto che Σ è una matrice simmetrica, si ottiene la seguente espressione della varianza:

$$\begin{aligned} \text{Var}(R_{\Pi}) &= \sigma_{\Pi}^2 = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n \omega_i \cdot R_i\right) = \\ &= \sum_{k,j=1}^n \omega_k \cdot \omega_j \cdot \sigma_{kj} = \sum_{k=1}^n \omega_k^2 \cdot \sigma_k^2 + 2 \sum_{k < j=1}^n \omega_k \cdot \omega_j \cdot \sigma_{kj} \end{aligned}$$

L'espressione precedente può essere Sintetizzata nella seguente forma matriciale:

$$\sigma_{\Pi}^2 = \Omega \cdot \Sigma \cdot \Omega^T$$

dove:

- Ω è il vettore dei pesi;
- Σ è la matrice di varianza-covarianza;
- Ω^T è il vettore trasposto dei pesi (vettore colonna).

È interessante analizzare la variazione della varianza del portafoglio in funzione del coefficiente di correlazione ρ_{kj} :

$$\rho_{kj} = \frac{\sigma_{kj}}{\sigma_k \cdot \sigma_j}$$

In particolare, a seconda dei valori del coefficiente di correlazione, è possibile individuare diversi scenari:

- **Perfetta correlazione negativa** $\rho_{kj} = -1$: il portafoglio ha varianza nulla;
- **Perfetta correlazione positiva** $\rho_{kj} = 1$. In particolare:
 - Se sono ammesse vendite allo scoperto il portafoglio ha varianza nulla;
 - Se non sono ammesse vendite allo scoperto la varianza del portafoglio non si annulla, quindi risulta conveniente collocare l'intera disponibilità sul titolo meno rischioso;
- **Indipendenza** $\rho_{kj} = 0$: il portafoglio ha varianza positiva.

Il vantaggio della correlazione deriva dal fatto che il coefficiente di correlazione si muove entro un range definito da +1 a -1. Infatti, diversamente dalla covarianza (il cui valore dipende dal legame positivo o negativo fra i titoli e dall'entità dei singoli scarti rispetto alla media), la correlazione dipende unicamente dal legame

fra gli asset che può essere perfetto (correlazione +1 o -1), blando (correlazione < +1 o > -1) o nullo (correlazione 0).

1.2 Frontiera efficiente

La frontiera efficiente è composta dai portafogli, disposti lungo una curva (ovvero la frontiera), che hanno minor rischio per un dato rendimento e maggior rendimento per un determinato grado di rischio. Per individuare la frontiera efficiente è necessario risolvere uno dei seguenti problemi di ottimizzazione vincolata:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\omega_1, \dots, \omega_n} E(R_{\Pi}) \\ \sigma_{\Pi}^2 = \tilde{\sigma} \\ \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_{\omega_1, \dots, \omega_n} \sigma_{\Pi}^2 \\ E(R_{\Pi}) = \tilde{R} \\ \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \end{array} \right.$$

Nel seguente lavoro di tesi, per ricostruire la forma analitica della frontiera efficiente si è scelto di minimizzare la varianza dati un vincolo sul rendimento e un vincolo di bilancio, esprimendo il problema di ottimizzazione vincolata in forma vettoriale in modo tale da poter generalizzare l'applicazione al caso di n titoli rischiosi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{\Pi}^2 = \frac{1}{2} \Omega^T \cdot \Sigma \cdot \Omega \\ \Omega^T \cdot e = \mu \\ \Omega^T \cdot u = 1 \end{array} \right.$$

dove:

- $\Omega^T \cdot e = \mu$ è il vincolo di rendimento;
- $\Omega^T \cdot u = 1$ è il vincolo di bilancio;
- e rappresenta il vettore colonna dei rendimenti degli n titoli;
- u rappresenta il vettore colonna unità a n componenti;
- Ω è il vettore colonna delle quote e Ω^T è il suo vettore trasposto;
- Σ è la matrice di varianza e covarianza di ordine n ;
- μ è il rendimento atteso;
- $\frac{1}{2}$ è uno scalare introdotto per comodità di calcolo.

La funzione lagrangiana del problema di ottimizzazione assume la seguente espressione:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \Omega^T \cdot \Sigma \cdot \Omega - \lambda_1 \cdot (\Omega^T \cdot e - \mu) - \lambda_2 \cdot (\Omega^T \cdot u - 1)$$

Le condizioni necessarie del primo ordine sono di seguito riportate:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega} = \Sigma \cdot \Omega - \lambda_1 \cdot e - \lambda_2 \cdot u = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \mu - \Omega^T \cdot e = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = 1 - \Omega^T \cdot u = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava l'espressione $\Omega = \lambda_1 \cdot (\Sigma^{-1} \cdot e) + \lambda_2 \cdot (\Sigma^{-1} \cdot u)$ che verrà sostituita nelle ultime due equazioni. Ipotesizzato che la matrice Σ , oltre ad essere definita positiva, è anche non degenere e perciò invertibile, si ottiene un sistema lineare con incognite λ_1 e λ_2 :

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot (\Sigma^{-1} \cdot e)^T \cdot e + \lambda_2 \cdot (\Sigma^{-1} \cdot u)^T \cdot e = \mu \\ \lambda_1 \cdot (\Sigma^{-1} \cdot e)^T \cdot u + \lambda_2 \cdot (\Sigma^{-1} \cdot u)^T \cdot u = 1 \end{cases}$$

Applicando il teorema di Cramer si ottengono i valori di λ_1 e λ_2 che vengono successivamente utilizzati per determinare Ω :

$$\lambda_1 = \frac{\mu \cdot C - A}{D} \qquad \lambda_2 = \frac{B - \mu \cdot A}{D}$$

$$\Omega = \frac{\mu \cdot C - A}{D} \cdot (\Sigma^{-1} \cdot e) + \frac{B - \mu \cdot A}{D} \cdot (\Sigma^{-1} \cdot u)$$

Mettendo μ in evidenza si ricava la seguente espressione:

$$\Omega = F + \mu \cdot G$$

dove:

- $A = u^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot e$
- $B = e^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot e$
- $C = u^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot u$
- $D = B \cdot C - A^2$
- $F = \frac{B \cdot (\Sigma^{-1} \cdot u) - A \cdot (\Sigma^{-1} \cdot e)}{D}$
- $G = \frac{C \cdot (\Sigma^{-1} \cdot e) - A \cdot (\Sigma^{-1} \cdot u)}{D}$

Sostituendo i valori così ricavati nell'espressione della varianza, si ottiene la seguente formulazione analitica della frontiera efficiente che lega la varianza al rendimento atteso:

$$\sigma_{\Pi}^2 = \Omega^T \cdot \Sigma \cdot \Omega = F^T \cdot \Sigma \cdot F + \mu \cdot (F^T \cdot \Sigma \cdot G + G^T \cdot \Sigma \cdot F) + \mu^2 \cdot (G^T \cdot \Sigma \cdot G)$$

Essendo Σ una matrice definita positiva, il termine $(G^T \cdot \Sigma \cdot G) > 0$. Sostituendo i valori di F e G , l'equazione può essere riscritta come segue:

$$\sigma_{\Pi}^2 = \frac{C}{D} \cdot \mu^2 - 2 \frac{A}{D} \cdot \mu + \frac{B}{D}$$

In conclusione:

- Nel piano $(\sigma; \mu)$ si ottiene l'equazione di un'iperbole (Figura 1) con le seguenti caratteristiche:
 - Centro nel punto di coordinate $(0; A/C)$;
 - Vertice nel punto di coordinate $(\sqrt{1/C}; A/C)$;
 - Asintoti $\mu = \frac{A}{c} \pm \sqrt{\frac{D}{c}} \cdot \sigma$.

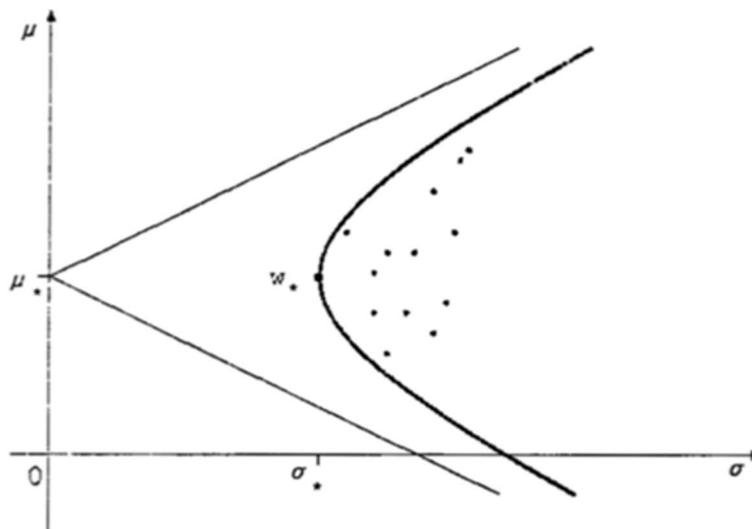


Figura 1. Esempio di frontiera efficiente nel piano $(\sigma; \mu)$

- Nel piano $(\sigma^2; \mu)$ si ottiene l'equazione di una parabola con asse orizzontatale e concavità verso destra (Figura 2) con il vertice nel punto di coordinate $(1/C; A/C)$.

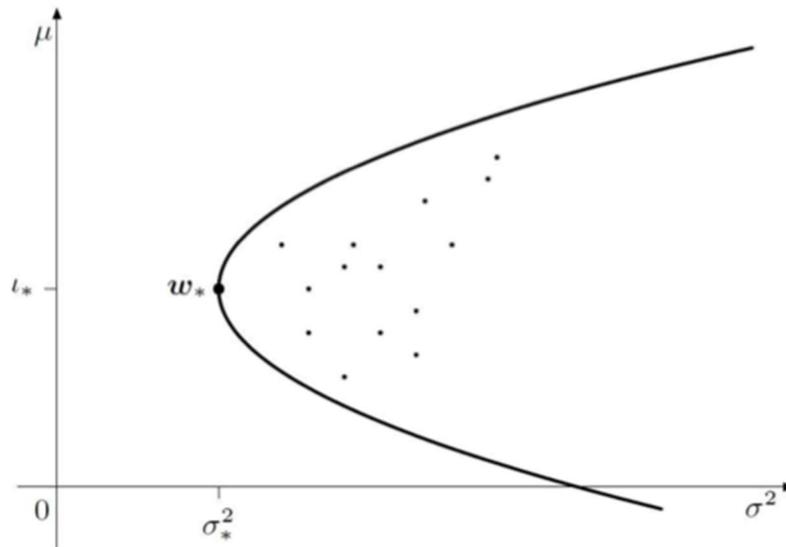


Figura 2. Esempio di frontiera efficiente nel piano $(\sigma^2; \mu)$

Un investitore razionale sceglie la posizione da mantenere sulla frontiera efficiente a seconda della sua propensione al rischio, tenendo conto che i punti che stanno sopra tale curva rappresentano portafogli impossibili poichè, per costruzione, per un dato rendimento non esistono portafogli con volatilità inferiore a quella espressa sulla frontiera. I punti sotto l'iperbole, invece, sono portafogli possibili ma non ottimali poichè esiste sempre un portafoglio sulla frontiera con minor rischio o con maggior rendimento medio.

1.3 La scelta del portafoglio ottimo

Costruita la frontiera efficiente, il passo finale consiste nella determinazione del portafoglio ottimo che, come già detto precedentemente, non rappresenta un punto univoco della frontiera per ciascun investitore ma dipende dalla propensione al rischio di ognuno di essi. Per individuare il portafoglio ottimo è necessario massimizzare l'utilità attesa che risulta dipendente dall'avversione al rischio dell'investitore. Nello specifico la trattazione proposta da Markowitz ricorre

ad una funzione di utilità attesa quadratica, ossia ad una funzione che sintetizza le preferenze dell'individuo utilizzando le variabili rischio e rendimento atteso di portafoglio e che tiene conto della sua avversione al rischio:

$$U(\mu, \sigma) = \mu - \gamma \cdot (\mu^2 + \sigma^2)$$

dove:

- μ è la media;
- σ^2 è la varianza;
- γ è il coefficiente di avversione al rischio scelto in maniera arbitraria in base alla propensione dell'investitore.

In particolare si osserva che al crescere del coefficiente di avversione al rischio si ottengono portafogli che convergono al titolo risk free.

Le curve di indifferenza, fissato un livello di utilità \bar{u} , sono date dalla seguente equazione:

$$U(\mu, \sigma) = \bar{u}$$

Le curve di indifferenza presentano le seguenti caratteristiche:

- Sono curve convesse;
- Maggiore è il livello di utilità \bar{u} più le curve si posizionano in alto;
- Maggiore è l'avversione al rischio più aumenta la convessità delle curve;
- I portafogli che appartengono alla stessa curva di indifferenza risultano equivalenti nella scelta dell'investitore.

Per identificare il portafoglio ottimale è necessario trovare il punto di tangenza della frontiera efficiente con la curva d'indifferenza avente il massimo valore di \bar{u} , come riportato nella Figura 3.

Per applicare il procedimento appena presentato è necessario attribuire un valore numerico al grado di avversione al rischio λ . È quindi opportuno che l'investitore sia in grado di tradurre in termini analitici le sue preferenze. Anche se ciò non è sempre di facile realizzazione, il metodo fornito dalla funzione di utilità attesa è sicuramente il più utilizzato nella finanza moderna.

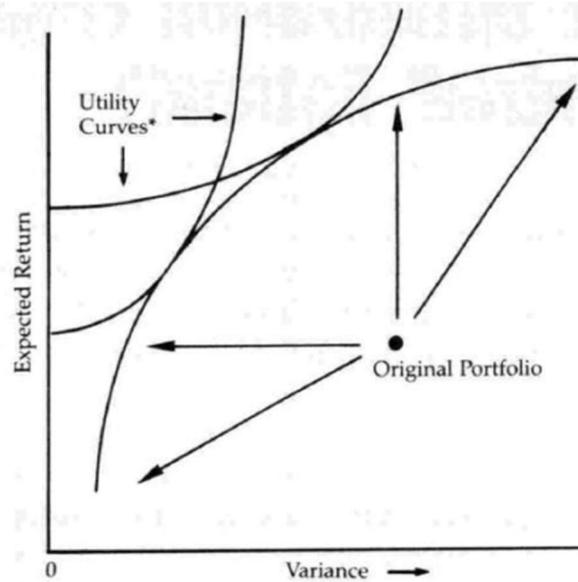


Figura 3. Condizione di tangenza tra frontiera efficiente e curve di indifferenza

1.4 Vantaggi e fragilità del modello

Il punto di forza del modello è quello di essere stato pionieristico per l'analisi dei portafogli mobiliari. In precedenza l'analisi dei money manager era prevalentemente incentrata sui singoli titoli e il "portafoglio" – inteso come entità sintetica del rendimento e del rischio delle attività detenute – non era percepito come essenziale. Ciò implicava che il mercato professionale, non tenesse conto dell'esistenza della correlazione tra le variabili e dei benefici della diversificazione. Il modello di Markowitz si presentava e si presenta, quindi, come un modello normativo che stabilisce le regole per la corretta rappresentazione delle opportunità di investimento e per la selezione di portafogli efficienti. Il modello di Markowitz offre la possibilità di stabilire una relazione tra rischio e rendimento atteso, "concepire" la figura dell'investitore razionale nell'obiettivo di massimizzazione dell'utilità attesa e identificare l'obiettivo finale nella realizzazione di portafogli efficienti.

Tuttavia, nella forma iniziale proposta da Markowitz, il modello ha presentato evidenti punti di debolezza, emersi prevalentemente negli anni più recenti in cui l'industria del risparmio gestito ha avuto una spinta particolarmente forte. I "limiti" dell'approccio markowiziano standard sono sintetizzati dai seguenti punti:

Elevata sensibilità dell'output ai dati di input utilizzati

Il risultato ottenuto (il portafoglio ottimo) è fortemente instabile in quanto legato a filo doppio ai dati storici utilizzati per la stima del rendimento atteso e del rischio

degli asset presenti nel mercato. Una lieve modifica di tali dati (ad esempio aggiornamento delle serie storiche utilizzate o inserimento di altri titoli) determina una fluttuazione considerevole degli asset da inserire nel portafoglio ottimo e dei loro pesi. Le variazioni risultano dunque molto frequenti e l'investitore si trova a dover ricalcolare ogni volta il portafoglio ottimo, provocando in questo mondo un aumento dei costi di transazione che erodono direttamente i profitti.

Generazione di soluzioni estreme

Spesso l'ottimizzazione "alla Markowitz" fornisce soluzioni d'angolo: se l'obiettivo unico è l'ottimizzazione, il calcolatore tende naturalmente a selezionare poche attività, in genere due, una migliore e una peggiore nell'ottica rendimento/rischio. Identificati gli asset, il software markowitziano venderà allo scoperto una quota "enorme" del titolo inefficiente (basso rendimento atteso in relazione al rischio elevato) e investirà tutto in quello efficiente. Si comprende facilmente che tale soluzione "estrema" è fortemente instabile: l'aggiornamento giornaliero dei dati, infatti, modifica facilmente la identificazione del "migliore" e del "peggiore" dei titoli e quindi determina una radicale modifica del portafoglio "ottimo" che risulterà essere sempre una soluzione d'angolo che lavora su due/quattro asset diversi da quelli precedenti. Il gestore si troverebbe davanti a soluzioni "pseudo-ottime" che cambiano radicalmente anche a distanza di pochi giorni e che non rispondono all'obiettivo primario della diversificazione.

Problematiche evidenti nella selezione dei dati

Dal punto precedente emerge una problematica evidente di scelta delle serie storiche e di campionamento; una "cattiva" scelta ha effetti negativi importanti sulle funzioni "previsive" dei rendimenti attesi che non possono essere corretti attraverso l'intervento del gestore, a causa della rigidità della soluzione di ottimizzazione.

Assenza di un livello di confidenza dei rendimenti attesi

Il modello non fornisce alcun livello di confidenza che possa fornire indicazioni in merito ai possibili scostamenti dai valori attesi.

Limite dell'indicatore di rischio deviazione standard

L'utilizzo della varianza o della deviazione standard non è ottimale e si rivela prevalentemente una scelta di comodo. La deviazione standard, infatti, non è una "buona" misura del rischio finanziario in quanto fornisce solo la volatilità del rendimento atteso. Una migliore misura del rischio di chi investe in attività finanziarie è, invece, quella che definisce un livello di perdita massimo o un riferimento alla probabilità di un movimento negativo o positivo dei rendimenti.

Assenza di diversificazione

A differenza di quello che credono i più, l'ottimizzazione alla Markowitz non restituisce sempre portafogli diversificati (come esplicitato in precedenza). La soluzione classica prevede la determinazione di portafogli poco diversificati. Questo accade perché l'algoritmo ha come obiettivo unico quello di massimizzare la redditività a parità di rischio e, per far questo, identifica i gruppi di asset migliori e "riempie" i portafogli di questi mercati. Il modello, quindi, genera soluzioni di portafoglio concentrate su poche attività estreme e non un portafoglio diversificato tra i principali segmenti del mercato finanziario.

Esclusione di attività valide

La logica dell'ottimizzazione spinta tende ad escludere totalmente asset o mercati di poco meno redditizi (a parità di rischio) di altri già selezionati: se A è l'asset efficiente (che massimizza il rendimento con il minimo rischio), l'ottimizzatore "punterà" tutto su tale asset ed escluderà un eventuale mercato B che, a parità di rischio, presenta un rendimento atteso di poco inferiore.

Massimizzazione degli errori di stima

L'ottimizzazione alla Markowitz produce la massimizzazione dei rendimenti ma causa inevitabilmente la massimizzazione degli errori di stima. I valori reali di rendimento atteso, varianza e covarianza possono essere osservati solo ex-post e, per poterli inserire nel modello, risulta necessario stimarli. Il modello tende a sovrastimare i titoli che presentano un elevato rendimento atteso, bassa varianza e correlazioni negative, realizzando portafogli composti prevalentemente da titoli con queste caratteristiche che risultano maggiormente soggetti ad un elevato errore di stima.

La teoria finanziaria fin qui esposta ha senza dubbio il pregio di orientare gli investitori nelle loro scelte di allocazione dei capitali nel modo più razionale ed oggettivo possibile ma risente di alcune limitazioni. Il modello infatti, non fornisce all'investitore la possibilità di fare delle previsioni personali riguardo l'andamento futuro dei titoli ma si limita a rilevare la modalità con cui le quotazioni incorporano le informazioni e le opinioni della maggioranza degli investitori. Inoltre, il modello non permette di confrontare i portafogli di due investitori aventi propensioni al rischio diverse.

Il portafoglio ottimo, che rappresenta comunque una combinazione efficiente di titoli, è soggettivo e, di conseguenza, non può essere confrontato con nessun'altra combinazione scelta da un altro investitore che abbia una propensione al rischio, e quindi una curva di utilità, diversa rispetto al primo

investitore. Ciò è spiegabile dal fatto che Markowitz, nel definire la frontiera efficiente, considera solamente titoli rischiosi.

Grazie ad altri modelli sviluppati negli anni successivi, come il Capital Asset Pricing Model (CAPM), le fragilità del Modello di Makowitz verranno superate includendo tra gli asset che possono essere scelti da un investitore anche il titolo risk free.

2 CAPITAL ASSET PRICING MODEL

Il Capital Asset Pricing Model (CAPM) è un modello proposto per la prima volta nel 1964 dall'economista finanziario e premio Nobel per l'economia William Sharpe e, in seguito, sviluppato indipendentemente da Lintner (1965) e Mossin (1966). Tale modello stabilisce una relazione tra il rendimento di un titolo e la sua rischiosità espressa tramite un unico fattore di rischio, detto beta, che misura statisticamente l'elasticità del rendimento di un singolo titolo o del portafoglio rispetto all'andamento generale del mercato. Tra i principali vantaggi, il CAPM permette di mostrare che, dato un titolo, non tutto il rischio viene remunerato dal mercato sotto forma di un maggiore rendimento atteso, ma solo quella parte che non può essere eliminata attraverso la diversificazione. Esistono infatti due diverse tipologie di rischio: il rischio diversificabile, eliminabile grazie al principio di diversificazione, e il rischio sistemico, detto anche rischio di mercato, che non può essere eliminato con la diversificazione. Di seguito si riporta la formula analitica del beta di un titolo:

$$\beta_k = \frac{Cov(R_k, R_M)}{\sigma_M^2}$$

dove $Cov(R_k, R_M)$ è la covarianza tra il rendimento del titolo k-esimo (o portafoglio) e il rendimento del portafoglio di mercato, mentre σ_M^2 è la varianza del portafoglio di mercato.

Di seguito si elencano le ipotesi di partenza del modello:

- Gli investitori sono avversi al rischio e massimizzano l'utilità attesa;
- Gli investitori selezionano i portafogli in base al criterio media-varianza;
- L'orizzonte temporale è uniperiodale;

- Gli investitori possono prendere o dare a prestito al medesimo tasso risk free;
- Non ci sono imposte né costi di transazione;
- Gli investitori hanno aspettative omogenee sui valori attesi, le varianze e le covarianze dei rendimenti dei titoli.

Dalla combinazione tra le ipotesi precedenti e le aspettative omogenee dei singoli investitori in ordine ai rendimenti attesi, alle varianze e alle covarianze dei rendimenti di tutte le attività nelle quali essi possono investire, si evince che la frontiera efficiente stimata è la stessa per tutti gli investitori. Il modello CAPM prende in considerazione un portafoglio di due titoli, uno rischioso e uno non rischioso, e tale combinazione individua una retta rappresentata dalla seguente equazione:

$$E(R_{\Pi}) = i + \frac{E(R_M) - i}{\sigma_M} \cdot \sigma_{\Pi}$$

dove:

- $E(R_{\Pi})$ e σ_{Π} sono rispettivamente il valore atteso e la deviazione standard del portafoglio;
- $E(R_M)$ e σ_M sono rispettivamente il valore atteso e la deviazione standard del portafoglio di mercato;
- i è il rendimento del titolo risk free;
- $\frac{E(R_M) - i}{\sigma_M}$ è il coefficiente angolare chiamato prezzo per il rischio (noto anche come indice di Sharpe) e misura quanto l'investitore è premiato in termini di rendimento per il rischio assunto (maggiore rendimento per ogni punto in più di rischio);
- $E(R_M) - i$ è il premio per il rischio.

Il punto di tangenza tra la retta e la frontiera efficiente (che esprime i portafogli efficienti di attività rischiose) individua il portafoglio di mercato, composto da tutti i titoli rischiosi presenti sul mercato in proporzione tale da riflettere il loro valore di mercato. La retta, detta Capital Market Line (CML), descrive la frontiera efficiente lineare che mostra le combinazioni tra titoli risk free e portafoglio di mercato; essa è formata dall'insieme dei portafogli in grado di offrire il più alto rendimento atteso per unità di rischio. In sintesi, combinando N con il portafoglio di tangenza M si ottiene l'effetto della linearizzazione della frontiera efficiente

(come mostrato in Figura 4), in quanto i portafogli efficienti risultano essere proprio sulla semiretta che collega N al portafoglio M . Tutti i portafogli che si trovano a sinistra del portafoglio M si ottengono con una quota negativa del titolo N , cioè per investire nel portafoglio di tangenza oltre l'effettiva disponibilità ($\omega_i > 1$). Se la componente risk free diventa negativa significa che l'investitore si indebita a tasso fisso per sfruttare l'effetto della leva finanziaria.

Il modello CAPM differisce dal modello di selezione di portafoglio di Markowitz proprio per la presenza del titolo risk che permette di eliminare la componente soggettiva definita dalle curve di utilità in relazione all'avversione al rischio dell'investitore. In questo modo tutti gli investitori acquisiscono il portafoglio M e l'unico elemento che può cambiare, in linea di massima, è la distribuzione dei pesi all'interno del portafoglio stesso. Tale osservazione permette di ottenere il teorema di separazione secondo cui le decisioni di ogni investitore vengono prese in due tempi:

- In un primo momento l'investitore raccoglie le informazioni sulle attività presenti sul mercato, ne valuta il rischio e il rendimento e costruisce la frontiera efficiente;
- In un secondo momento l'investitore decide come ripartire il proprio portafoglio tra le attività rischiose (punto M) e le attività non rischiose.

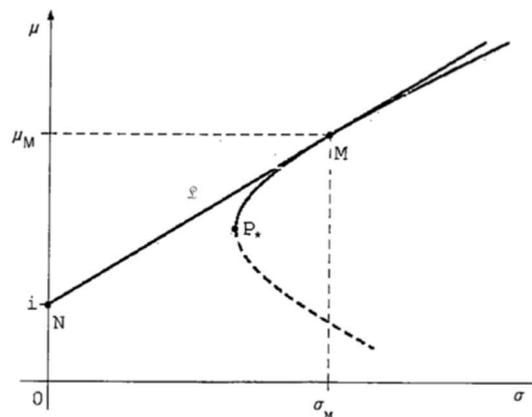


Figura 4. Frontiera efficiente nel piano $(\sigma; \mu)$ in presenza del titolo risk free

La CML risulta valida unicamente per portafogli efficienti che, essendo perfettamente diversificati, presentano rischio sistematico coincidente con il rischio totale. Per valutare portafogli generici è necessario inserire nell'espressione analitica della CML il coefficiente di correlazione tra i rendimenti

del singolo titolo o portafoglio e il rendimento di mercato, in modo tale da determinare il rischio sistematico del portafoglio:

$$\sigma_{sist.\Pi} = \rho_{\Pi,M} \cdot \sigma_{\Pi}$$

Ponendo:

$$\beta = \rho_{\Pi,M} \cdot \frac{\sigma_{\Pi}}{\sigma_M}$$

Sostituendo tale espressione nell'equazione della CML, si ottiene l'espressione della Security Market Line (SML):

$$\mu_{\Pi} = i + (\mu_M - i) \cdot \beta_{\Pi}$$

La Security Market Line rappresenta la relazione di equilibrio di mercato tra il rendimento e il rischio, attraverso una retta contenuta in un grafico che ha sull'asse delle ascisse il "beta" del titolo e sull'asse delle ordinate il rendimento atteso del titolo, come mostrato nella Figura 5. La sua intercetta è pari al tasso privo di rischio ("risk-free"), mentre la sua pendenza rappresenta il Premio Per il Rischio di Mercato (MPR).

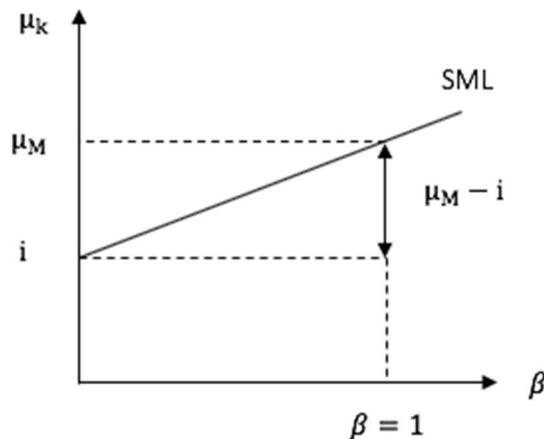


Figura 5. Esempio di Security Market Line

La funzione della Security Market Line è rilevante soprattutto dal punto di vista pratico poiché può essere utilizzata per individuare le attività finanziarie il cui valore non è allineato con le attese di rendimento corrette per il loro rischio sistematico; il coefficiente beta, infatti, quantifica la reattività del rendimento di un titolo ai movimenti del mercato. Tanto maggiore è il beta, tanto maggiore è

l'inclinazione della retta e, conseguentemente, il rendimento atteso del titolo che possiede un maggior grado di rischio non diversificabile. In relazione al valore di beta, è possibile sintetizzare le seguenti condizioni:

- $0 < \beta_k < 1$: titoli difensivi che realizzano rendimenti inferiori in valore assoluto rispetto a quelli del mercato;
- $\beta_k > 1$: titoli aggressivi che realizzano rendimenti superiori in valore assoluto rispetto a quelli del mercato;
- $\beta_k = 1$: titoli che seguono il mercato.

2.1 Metodologia di Fama-MacBeth

Nel modello CAPM il coefficiente β_{im} deve essere stimato perché non è possibile osservarlo direttamente. Nel 1973 Fama e MacBeth hanno sviluppato una metodologia chiamata "Two-step Methodology" che permette di ricavare il coefficiente β_{im} in due differenti fasi:

- Nella prima fase si ottengono i coefficienti β_{im} attraverso la stima di modelli lineari:

$$R_{it} = \alpha + \beta_{im}R_{mt} + \eta_{it}$$

- Nella seconda fase si utilizzano le stime $\widehat{\beta}_{im}$ come osservazioni dei regressori nei modelli di regressione lineare nella dimensione cross-section:

$$R_i = a + b\widehat{\beta}_{im} + \varepsilon_i$$

Il modello CAPM non viene rifiutato se il coefficiente a è pari al tasso risk free e se il coefficiente b è pari al premio per il rischio del portafoglio di mercato.

2.2 Limiti del Modello CAPM

Il modello del Capital Asset Pricing Model è stato oggetto di diverse critiche sintetizzate nei punti di seguito riportati:

- Il CAPM non spiega la variabilità dei rendimenti nella dimensione cross-section, è stato infatti rilevato che i titoli caratterizzati da beta minori offrono rendimenti maggiori di quelli previsti dal modello;
- Tutti gli investitori hanno un'opinione comune sulla rischiosità e sul rendimento atteso degli asset presenti sul mercato;

- Non ci sono restrizioni nel prendere o dare a prestito al tasso risk free;
- Non ci sono imposte o altre imperfezioni di mercato;
- Non esiste una preferenza tra i mercati e le attività da parte degli investitori individuali, poichè il portafoglio di mercato consiste di tutte le attività finanziarie scambiate su tutti i mercati, ciascuna pesata per la propria capitalizzazione di mercato;
- Il CAPM non può essere soggetto di una verifica empirica (critica di Roll);
- Il CAPM modella i prezzi come variabili casuali lognormali, con la conseguenza di poter ottenere rendimenti inferiori a -100% e di non riflettere l'evidenza empirica secondo cui i mercati sarebbero sistemi caotici (con la possibilità di più ampie e frequenti fluttuazioni rispetto a quanto predetto da una variabile casuale normale).

Nonostante le critiche mosse, il modello CAPM risulta comunque vincente per la sua semplicità e la capacità di ricondurre il valore di un titolo a un singolo fattore di rischio, rappresentato, appunto, dal rischio legato al portafoglio di mercato.

3 MODELLO DI BLACK E LITTERMAN

Nei primi anni '90 Fischer Black e Robert Litterman hanno sviluppato, all'interno della Goldman Sachs, un modello per il calcolo dei pesi ottimali di portafoglio, al fine di trovare una soluzione ai diversi punti critici del Modello di Markowitz e, conseguentemente, ottenere maggiore stabilità nel portafoglio ottimo finale. In generale, il Modello di Black & Litterman (B&L) permette di combinare in maniera efficace i rendimenti attesi di equilibrio e le opinioni dell'investitore, ottenendo i cosiddetti rendimenti di Black-Litterman. I rendimenti attesi degli asset così calcolati sono utilizzati come input nella classica procedura di ottimizzazione media-varianza di Markowitz, in modo da ricavare il rendimento atteso, la varianza e la composizione interna del portafoglio ottimo. Il Modello B&L, nella sua formulazione originaria, sottolinea l'impraticabilità dei portafogli risultanti dai vari approcci quantitativi e postula la necessità di fissare un riferimento, un paniere di assets neutrale, coincidente solitamente con il benchmark di mercato, attorno al quale strutturare gli output del processo di massimizzazione. Il punto di partenza dell'analisi è dunque rappresentato dal mercato con le sue aspettative, da cui l'investitore, in base alle proprie views, deciderà se discostarsi o meno. Il Modello di B&L, inoltre, permette agli investitori di formulare le opinioni solo su quegli asset su cui sono in grado di esprimersi mentre, per tutti gli altri, prevede l'approccio "equilibrio di mercato", su cui poggia la teoria dei mercati efficienti.

I pesi del portafoglio finale, quindi, si discosteranno dai valori di equilibrio di riferimento e tali scostamenti dipenderanno sia dal livello di confidenza associato alle singole views sia dal weight-on-views (τ), che specifica il peso delle view riguardo all'equilibrio di mercato. Nel caso in cui le aspettative dell'investitore sono allineate con quelle di mercato, egli non esprime alcuna view e il portafoglio ottimo finale detenuto sarà uguale al portafoglio di mercato composto dagli asset

in misura proporzionale alla loro capitalizzazione di mercato. Come già detto nel capitolo introduttivo di questa trattazione, il Modello di Black-Litterman si basa su solidi modelli economici affidandosi all'ottimizzazione media-varianza per trovare il portafoglio ottimo finale e, sfruttando la tecnica dell'ottimizzazione inversa derivata dal Capital Asset Pricing Model, permette di ottenere i rendimenti di equilibrio utilizzati come punto di riferimento dal modello stesso.

3.1 Reverse Optimization

Il modello di Black-Litterman si propone di superare i limiti della Modern Portfolio Theory di Markowitz derivanti, soprattutto, dall'utilizzo dei rendimenti storici come input del processo di ottimizzazione. Il modello risulta, infatti, caratterizzato da una forte sensibilità in relazione ai dati in input che porta alla costruzione di portafogli troppo concentrati e instabili. Al fine di ottenere portafogli più equilibrati e stabili, Black e Litterman identificano nei rendimenti attesi di equilibrio gli input da inserire nel processo di ottimizzazione. Ogni investitore può sviluppare le proprie opinioni circa la valutazione di alcuni asset rispetto al valore corrente di mercato, ma appare irrealistico che lo stesso investitore possa formulare delle aspettative sull'extra-rendimento di ogni singola attività finanziaria presente sul mercato. In questo contesto, i rendimenti di equilibrio offrono all'investitore un naturale punto di riferimento per la definizione dei rendimenti attesi, la cui utilità risulta più evidente se si considera che l'investitore potrebbe non avere alcuna view riguardo il futuro andamento degli assets. In tal caso il portafoglio ottimo detenuto dall'investitore coincide con il portafoglio di mercato. In altre parole, Black e Litterman suggeriscono un approccio di equilibrio nell'implementazione del processo di ottimizzazione, utilizzando i rendimenti che derivano dall'uguaglianza tra la domanda e l'offerta, nell'ipotesi che tutti gli investitori abbiano le stesse informazioni a disposizione.

L'equilibrio di mercato rappresenta chiaramente una situazione ideale nel mondo finanziario che risulta caratterizzato dalla continua evoluzione dei prezzi e delle transazioni. Tuttavia, gli scostamenti dei prezzi dai loro valori di equilibrio rappresentano opportunità di arbitraggio e tendono ad attrarre gli investitori verso la costante ricerca di profitti. Quando i prezzi sono troppo bassi, sono a generare un aumento della domanda; quando, invece, i prezzi sono troppo alti, le opportunità di profitto aumentano l'offerta: in questo modo i prezzi di mercato raggiungono velocemente una situazione d'equilibrio. Tecnicamente l'approccio di equilibrio consiste nella scelta ex-ante di un'allocatione di equilibrio e nella

determinazione delle previsioni neutrali sui rendimenti futuri in modo che, una volta che le previsioni sono introdotte nei tradizionali circuiti di ottimizzazione, restituiscano proprio l'allocazione di riferimento. In altre parole, il Modello B&L suggerisce di utilizzare i rendimenti in eccesso attesi (in grado di restituire esattamente il portafoglio di riferimento) e di tralasciare l'implementazione della massimizzazione con i rendimenti storici (che danno origine a scelte prive di buon senso economico). Il processo mediante il quale si estrapolano i rendimenti attesi dal portafoglio neutrale di riferimento è chiamato "reverse optimization" perché sfrutta il processo di ottimizzazione non per ottenere la composizione ottimale di portafoglio, ma, al contrario, per ricavare i rendimenti attesi a partire dalla composizione ottimale stessa.

La tecnica dell'ottimizzazione inversa, che si basa sull'assunzione secondo cui il portafoglio ottimo coincide con quello di mercato, è derivata dal Capital Asset Pricing Model. Essa prevede la massimizzazione della funzione di utilità quadratica dell'investitore ponendo come incognita i rendimenti attesi piuttosto che i pesi di portafoglio, secondo l'espressione di seguito riportata:

$$\max_{\Omega} \left[\Omega^T \Theta - \frac{\lambda \cdot \Omega^T \Sigma \Omega}{2} \right]$$

dove:

- Ω è il vettore delle quote di portafoglio;
- Θ è il vettore dei rendimenti attesi;
- λ è il coefficiente di avversione al rischio;
- Σ è la matrice di varianza – covarianza.

La massimizzazione della funzione di utilità quadratica è perfettamente compatibile con il criterio media-varianza di Markowitz, dal momento che tale funzione contiene sia il rendimento atteso che la varianza del portafoglio obiettivo. Il meccanismo di massimizzazione di Markowitz (discusso in precedenza) è dunque solo apparentemente differente da quello appena citato; il processo di Markowitz, infatti, suggerisce di minimizzare la varianza del portafoglio imponendo come vincoli l'unità delle quote e un determinato rendimento atteso, mentre il processo B&L indica la massimizzazione direttamente del trade-off rendimento-varianza. Definendo i vincoli di unità e di rendimento nella massimizzazione della funzione di utilità quadratica, il risultato finale del modello B&L è esattamente coincidente con quello ottenuto tramite Markowitz.

Dal processo di ottimizzazione si ottiene che:

$$\Omega = (\lambda \cdot \Sigma)^{-1} \Theta$$

Applicando la reverse optimization si ricava la seguente formulazione:

$$\Theta = \lambda \cdot \Sigma \cdot \Omega_B$$

dove il coefficiente di avversione al rischio λ , che sintetizza il trade-off rischio/rendimento atteso dal mercato, è stato definito da Idzorek come il rapporto tra il premio al rischio di mercato e il rischio stesso:

$$\lambda = \frac{E(R_p) - r_f}{\sigma^2}$$

Il termine Ω_B rappresenta, invece, il vettore delle quote pari alla capitalizzazione di mercato degli asset che compongono il portafoglio.

I rendimenti impliciti ottenuti in questo modo dal benchmark scelto dall'asset manager forniscono un punto di riferimento "neutrale" da cui partire per incorporare le view soggettive dell'investitore riguardo ai rendimenti futuri. Se l'investitore non dispone di alcuna aspettativa sui rendimenti attesi, egli potrà semplicemente acquistare un portafoglio composto secondo la capitalizzazione di mercato. Se, invece, l'investitore possiede delle aspettative a proposito dei rendimenti futuri, il compito ambizioso è quello di rintracciare la migliore combinazione di tali view coerentemente con l'equilibrio di mercato.

Black e Litterman forniscono all'investitore la possibilità di esprimere il proprio grado di fiducia per ciascuna view. Nel Modello B&L, dunque, sia i rendimenti attesi di equilibrio che le aspettative dell'investitore sono espresse in termini probabilistici. Intuitivamente è possibile affermare che il peso relativo dell'equilibrio rispetto alle view è funzione del livello di confidenza indicato dall'investitore. Una minore sicurezza delle aspettative soggettive dell'investitore determina una maggiore tendenza del portafoglio finale verso i pesi del portafoglio di mercato; al contrario, le quote di portafoglio di un investitore che ripone fiducia nei rendimenti di mercato si scosteranno parecchio dai rispettivi valori d'equilibrio. In conclusione, l'approccio di equilibrio riconosce nel benchmark di mercato un punto di riferimento neutrale a cui ancorare il portafoglio.

3.2 View dell'investitore

L'aspetto innovativo del Modello B&L risiede nella capacità di combinare due tipologie di informazione grazie al teorema di Bayes, ovvero le aspettative del mercato (basate sulle informazioni di dominio pubblico) e le view dell'investitore (cui è associato un livello di confidenza).

Le view espresse possono essere:

- Assolute: esprimono l'opinione che il rendimento di un dato asset sia maggiore o minore rispetto al rendimento del medesimo in un periodo di riferimento;
- Relative: esprimono l'opinione che il rendimento di un dato asset sia maggiore o minore di quello assunto da un altro asset nel medesimo periodo di riferimento.

A ciascuna view, sia essa assoluta o relativa, l'investitore può assegnare un livello di confidenza in termini di probabilità che può oscillare tra 0% e 100%: quanto più è alta la fiducia che egli ripone nella sua aspettativa, tanto più elevato sarà il livello di confidenza che assegnato, e viceversa. Un alto livello di confidenza determina significativi scostamenti dal portafoglio di mercato. Bisogna precisare, però, che l'ampiezza degli scostamenti dai valori d'equilibrio, e quindi dal portafoglio "neutrale", dipende non soltanto dal livello di confidenza che si ripone nell'aspettativa ma anche dalla view stessa, nonché dal parametro τ . La letteratura definisce tale parametro "weight-on-views" perchè esso ha il potere di condizionare in parte il valore delle quote di portafoglio (secondo le aspettative espresse dall'investitore). Per la determinazione del parametro τ Black e Litterman non propongono una precisa formula di calcolo ma considerando un valore costante che deve essere fissato prossimo allo zero.

3.3 Il teorema di Bayes

Come detto nel paragrafo precedente, per combinare l'informazione proveniente dal mercato con quella espressa dall'investitore Black e Litterman utilizzano un approccio di tipo bayesiano. La formula che esprime il teorema di Bayes è la seguente:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

dove A è l'evento che rappresenta i rendimenti attesi dell'investitore e B quello che rappresenta i rendimenti di equilibrio. Dalla formulazione precedente si ricava che:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Come si evince dalla formula, la funzione di densità di probabilità dei rendimenti attesi condizionata ai rendimenti di equilibrio, $P(A|B)$, è uguale al prodotto tra la funzione di densità di probabilità dell'evento A e la funzione di densità di probabilità dei rendimenti di equilibrio condizionata ai rendimenti attesi $P(B|A)$. I termini sono riferiti all'unità di probabilità marginale dei rendimenti di equilibrio $P(B)$. Indicando con $E(R) = E(R_{t+1}|I_t)$ il vettore dei rendimenti attesi dall'investitore al tempo t per il periodo successivo (t+1) e con θ il vettore dei rendimenti impliciti (ottenuti tramite reverse optimization), il teorema di Bayes può essere riscritto come segue:

$$P(E(R)|\theta) = \frac{P(\theta|E(R)) \cdot P(E(R))}{P(\theta)}$$

Ipotizzando che la probabilità dei rendimenti attesi $P(E(R)|\theta)$ assuma la forma di k vincoli lineari sul vettore di n rendimenti attesi $E(R)$, i rendimenti attesi possono essere espressi con una matrice P di dimensione $k \times n$:

$$P \cdot E(R) = q + \varepsilon$$

essendo q un vettore composto da $k \times 1$ elementi che esprimono le view dell'investitore in termini di sopra/sotto rendimento previsto e ε un vettore i cui elementi rappresentano l'incertezza delle view:

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_k \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{pmatrix}$$

La distribuzione di ε , essendo ε un termine d'errore, ha media pari a 0 e varianza pari a Ψ . La varianza è una matrice diagonale poiché si suppone che le view formulate dall'investitore siano indipendenti tra loro ed è costituita dalle varianze dei singoli termini di errore Ψ_i :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_k \end{pmatrix}$$

Poiché $\varepsilon \sim N(0, \Psi)$ si deduce che:

$$P \cdot E(R) \sim N(q, \Psi)$$

Come si nota dall'espressione sopra riportata, la matrice Ψ influenza la distribuzione di probabilità dei rendimenti attesi; per tale motivo, al diminuire della varianza dei singoli termini di errore, le aspettative vengono formulate con maggiore certezza. Infine, il termine P è una matrice con un numero di righe pari

al numero di view espresse (k) e di colonne pari al numero di asset presenti in portafoglio (n):

$$P = \begin{pmatrix} P_{1,1} & \cdots & P_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{k,1} & \cdots & P_{k,n} \end{pmatrix}$$

Una delle ipotesi di partenza del modello BL prevede che i rendimenti teorici di equilibrio si distribuiscano secondo una normale multivariata con valore atteso pari al vettore dei rendimenti impliciti e matrice delle covarianze teoriche proporzionale alla matrice delle covarianze storiche secondo lo “shrinkage factor” τ :

$$E(R) \sim N(\theta, \tau \cdot \Sigma)$$

Da ciò deriva che la funzione di densità di probabilità dei rendimenti di equilibrio può essere rappresentata secondo l’espressione di seguito riportata:

$$\theta | E(R) \sim N(E(R), \tau \cdot \Sigma)$$

Anche i rendimenti di equilibrio si distribuiscono secondo una normale multivariata con valore atteso pari al vettore dei rendimenti teorici di equilibrio e matrice delle covarianze teoriche proporzionale alla matrice delle covarianze storiche secondo lo *shrinkage factor* τ .

Sfruttando il teorema di Bayes si ottengono la media e la varianza della funzione di densità $P(E(R)|\theta)$:

- media: $[(\tau \cdot \Sigma)^{-1} + P^T \Psi^{-1} P]^{-1} [(\tau \cdot \Sigma)^{-1} \theta + P^T \Psi^{-1} q]$;
- varianza: $[(\tau \cdot \Sigma)^{-1} + P^T \Psi^{-1} P]^{-1}$.

Lo schema riportato nella Figura 6 sintetizza i passaggi logici della costruzione del modello di Black e Litterman.

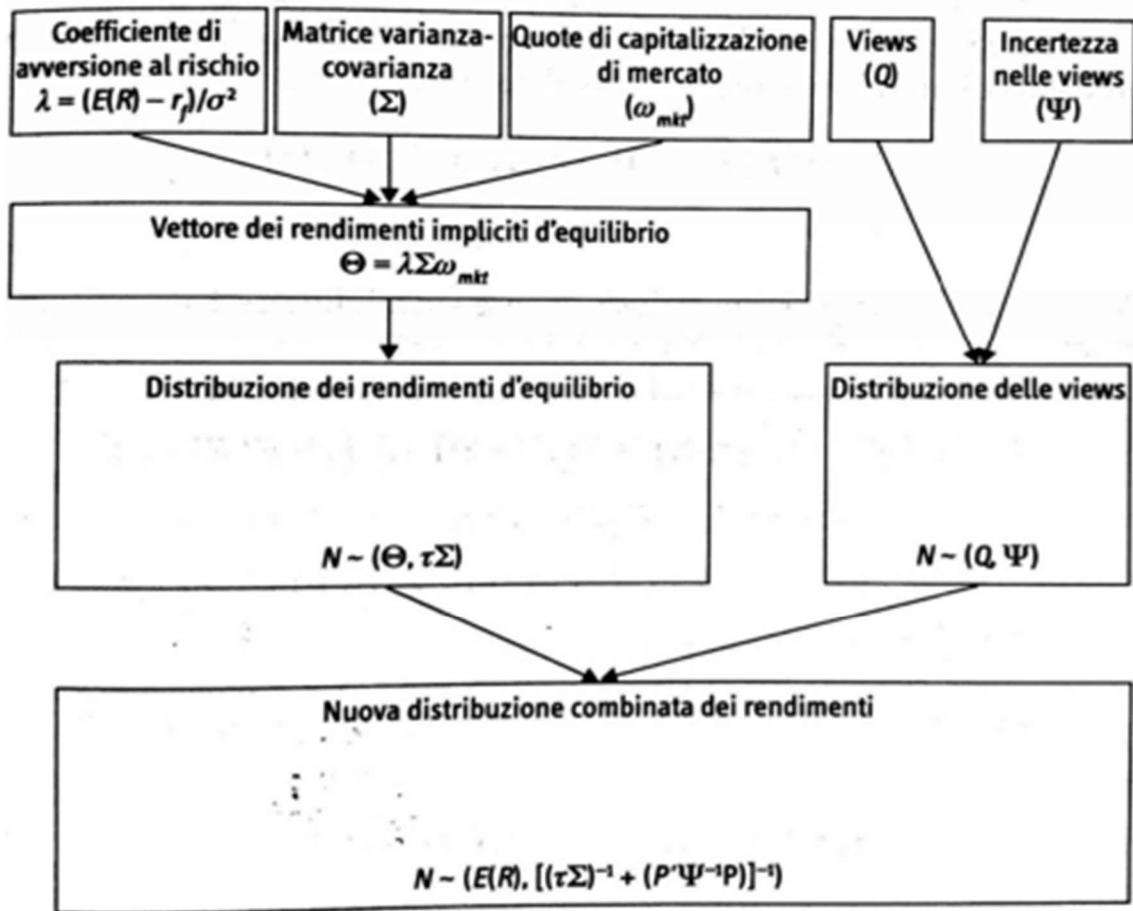


Figura 6. Schema del modello di Black-Litterman

La media così ottenuta permette il calcolo dei rendimenti di Black-Litterman che diventano gli input del tradizionale processo di ottimizzazione di Markowitz nella definizione della frontiera efficiente, della media e della varianza del portafoglio e della sua allocazione ottimale. Il punto di arrivo del modello è costituito esattamente dalle due statistiche descrittive principali di un portafoglio composto dal pool di strumenti finanziari selezionato dall'investitore. Media e varianza tengono conto sia dell'andamento effettivo del mercato sia delle aspettative dell'investitore; per tale motivo, gli elementi da cui dipende l'andamento delle strategie finanziarie sono la matrice di varianza-covarianza del portafoglio di mercato ed il livello di fiducia che il gestore del fondo ripone nel proprio punto di vista.

Chi decide la modalità dell'investimento è perciò parte attiva nel modello, abbandonando la più arcaica e fragile soluzione di Markowitz nella quale l'investitore è relegato a mero spettatore delle dinamiche di mercato. Inoltre, sfruttando la correlazione tra i diversi titoli di riferimento è possibile godere di un

beneficio di diluizione dell'errore; l'incertezza intrinseca nelle opinioni formulate viene ripartita su tutti gli asset presenti in portafoglio, mitigando gli errori di stima presenti nel modello di Markowitz. Il meccanismo di B&L consente dunque di condurre una gestione equilibrata della composizione di un portafoglio, evitando escursioni troppo ampie nei pesi (al variare delle informazioni disponibili); occorre però tener presente che, rispetto ad un portafoglio di equilibrio, gli asset i cui pesi varieranno maggiormente sono proprio quelli su cui il manager ha espresso delle view.

Prendendo in considerazione quest'ultimo aspetto, Black e Litterman suggeriscono l'utilizzo di un approccio di equilibrio al problema, al fine di implementare il processo di ottimizzazione con i rendimenti in eccesso che uguagliano domanda ed offerta di mercato, nell'ipotesi che tutti gli investitori abbiano le stesse aspettative. L'approccio di equilibrio consiste nella scelta ex-ante di un'allocazione di equilibrio e nella determinazione delle previsioni neutrali sui rendimenti futuri in modo che, una volta introdotte nei tradizionali circuiti di ottimizzazione, le previsioni stesse restituiscano proprio l'allocazione di riferimento. In altre parole, piuttosto che implementare la massimizzazione con i rendimenti storici (che danno origine a scelte prive di buon senso economico), il Modello B&L suggeriscono di utilizzare rendimenti in eccesso attesi (in grado di restituire come risultato esattamente il portafoglio di riferimento).

Uno dei punti di forza del Modello B&L è lo scostamento dei pesi del portafoglio finale da quello di mercato (considerato quello neutrale, di equilibrio) in relazione all'estremità delle opinioni siano estreme e alla fiducia che l'investitore ripone nelle view. Quindi se il manager non avesse nessuna aspettativa avrebbe in mano una fetta del portafoglio di mercato, poiché il portafoglio di equilibrio viene calcolato attraverso il Capital Asset Pricing Model e la tecnica di ottimizzazione inversa. Il Modello B&L può essere inteso come la combinazione di due regressioni lineari: la prima tra i rendimenti attesi di equilibrio (derivati con la teoria del CAPM) e i rendimenti attesi dall'investitore (che rappresentano le opinioni sul futuro andamento del mercato) e la seconda tra i rendimenti attesi calcolati dalla prima regressione lineare e i rendimenti attesi che nel tempo si verificheranno. In questo modo è possibile costruire un portafoglio sempre prossimo ai dati reali.

Il Modello B&L utilizza l'approccio bayesiano per calcolare i rendimenti attesi degli asset. Il teorema di Bayes è utilizzato da Black e Litterman per unire i due tipi di input, le view dell'investitore e l'equilibrio di mercato, e ottenere il set di rendimenti

attesi dei titoli considerati. Tale approccio potrebbe essere criticato perché ritenuto non abbastanza oggettivo. Tuttavia, contemporaneamente, è possibile affermare che ogni approccio sia da intendersi soggettivo perché è impossibile testare ogni singola combinazione di variabili, considerando nella pratica, invece, soltanto quelle che si ritengono più “sensate”. Inoltre, nello specifico, il Modello B&L supera la criticità della soggettività perché prende a riferimento un modello di equilibrio (CAPM).

Rispetto all’approccio proposto da Markowitz, il modello di Black e Litterman risolve alcuni limiti nel calcolo del portafoglio ottimo e delle quantità d’investimento. Per prima cosa, infatti, il Modello B&L considera le capitalizzazioni di mercato dei vari titoli, questo perché il modello di equilibrio è il CAPM che identifica nel portafoglio di equilibrio quello di mercato: tale portafoglio è composto da asset con una quantità proporzionale alla propria capitalizzazione di mercato. In secondo luogo il Modello B&L considera il grado di fiducia dell’investitore espresso tramite la matrice di confidenza; invece, prendendo in considerazione il portafoglio di equilibrio, il grado di fiducia è rappresentato dalla sua varianza, quindi maggiore è il rischio minore è il suo peso all’interno del portafoglio ottimo una volta uniti i vari input.

Riassumendo quanto prima detto, si sottolinea che il processo con cui si arriva alla specificazione dei rendimenti attesi e della matrice di varianza-covarianza rappresenta l’elemento innovativo che permette di prediligere il Modello B&L nella teoria di scelta di portafoglio generale. In sintesi, quindi, per l’implementazione del Modello B&L, l’investitore prende come riferimento la distribuzione della stima della media dei rendimenti $\mu \sim N(\Pi, \Sigma)$ e ne calcola la media e la varianza utilizzando il modello CAPM e la tecnica dell’ottimizzazione inversa. Black e Litterman, infatti, fanno delle assunzioni secondo le quali il portafoglio di mercato rappresenta il portafoglio di equilibrio che tutti gli individui arrivano ad ottenere avendo le stesse informazioni. Contemporaneamente, l’analista calcola la distribuzione dei rendimenti a seguito delle proprie opinioni sul futuro andamento del mercato. Anche in questo caso i rendimenti si distribuiscono come $N \sim (Q, \Omega)$, dove Q è un vettore che incorpora le view dell’investitore e Ω è una matrice diagonale che esprime la sua fiducia nei confronti delle view espresse. Unendo le due distribuzioni con il teorema di Bayes si ottiene un vettore di rendimenti attesi dei titoli che l’investitore ha considerato per il proprio portafoglio e che è più sbilanciato verso i rendimenti di equilibrio o le view a seconda di quanta fiducia l’analista ha riposto nelle stesse e di quanto le view siano estreme. Il vettore di rendimenti attesi e la matrice di varianza-

covarianza così ottenuti vengono quindi immesse nel classico processo di ottimizzazione di Markowitz che produce la frontiera efficiente e la definizione del portafoglio ottimo. Se l'investitore ritiene necessario aggiornare i dati per esprimere nuove previsioni, la distribuzione calcolata precedentemente, a cui si aggiungono le view, diventa il nuovo punto di partenza del Modello B&L. In questo modo, con il passare del tempo e l'aumentare degli update, si otterranno dei rendimenti sempre più stabili, con risultati più concentrati intorno alla media. La media può essere intesa come rendimento a lungo termine per l'assunzione che i rendimenti di tutti i titoli tendono al proprio valore di equilibrio.

4 ELABORAZIONE E ANALISI DEI RISULTATI

4.1 Analisi dei dati

Ai fini della trattazione è importato scegliere gli strumenti finanziari che verranno utilizzati come set di partenza per l'implementazione dei modelli di Markowitz e Black-Litterman e la conseguente composizione del portafoglio. Nel presente lavoro di tesi la scelta è ricaduta su singoli titoli azionari prendendo come riferimento l'EURO STOXX 50. Quest'ultimo è un indice azionario di titoli dell'eurozona creato nel 1998 dalla STOXX Limited, una joint venture creata da Deutsche Börse AG, Dow Jones & Company e SWX Group nel 1997. L'indice è composto dalle principali aziende dell'Eurozona e comprende una rappresentazione dei principali settori industriali dell'area. In esso sono presenti 50 titoli appartenenti a 16 paesi della zona Euro, ovvero Austria, Belgio, Danimarca, Finlandia, Francia, Germania, Irlanda, Italia, Lussemburgo, Paesi Bassi, Norvegia, Polonia, Portogallo, Spagna, Svezia e Svizzera. L'EuroStoxx 50 è ponderato in base alla capitalizzazione di mercato corretta per il flottante, vale a dire che le società più valide e liquide hanno il peso maggiore nel calcolo dell'indice. Tra le 50 aziende che compongono l'indice sono state scelte le prime 20 con la maggiore capitalizzazione di mercato, come riportato nella Tabella 1.

Tabella 1. Composizione del portafoglio di titoli azionari

N°	Nome	Simbolo	Settore
1	ENI S.p.A.	ENI.MI	Energetico
2	IBERDROLA S.A.	IBE.MC	Energetico
3	ENEL S.p.A.	ENEL.MI	Energetico
4	DEUTSCHE TELEKOM AG	DTE.DE	Telecomunicazioni
5	VOLKSWAGEN	VOW3.DE	Automobilistico
6	BAYER AG	BAYN.DE	Chimico-farmaceutico
7	SIEMENS AG	SIE.DE	Tecnologico
8	ALLIANZ SE	ALV.DE	Assicurativo

9	LINDE PLC	LIN.DE	Chimico
10	SAP SE	SAP.DE	Tecnologico
11	AIRBUS SE	AIR.PA	Aeronautica
12	L'OREAL S.A.	OR.PA	Chimico
13	AIR LIQUIDE S.A.	AI.PA	Chimico
14	KERING S.A.	KER.PA	Lusso
15	ANHEUSER-BUSCH INBEV SA/NV	ABI.BR	Alimentare
16	UNILEVER	UNA.AS	Alimentare
17	SANOFI	SAN.PA	Farmaceutico
18	LVMH MOËT HENNESSY LOUIS VUITTON	MC.PA	Lusso
19	TOTAL SA	FP.PA	Petroliero
20	ASML HOLDING N.V.	ASML.AS	Tecnologico

Dal sito di Yahoo Finance sono stati scaricati i prezzi di chiusura giornalieri “aggiustati”, ovvero al netto di dividendi e frazionamenti che influenzano profondamente le quotazioni e di conseguenza anche gli operatori finanziari; pertanto essi appaiono più adatti per una corretta stima dei rendimenti. Analizzando le serie storiche si è notato come, a seconda del Paese di appartenenza, i giorni di trading non siano esattamente uguali per tutti i titoli e ciò fa sì che la lunghezza stessa delle serie sia variabile provocando una desincronizzazione. E' stato quindi svolto un lavoro di filtraggio al fine di ottenere per tutti i titoli lo stesso numero di dati disponibili. Le serie storiche prese in considerazione coprono un orizzonte temporale di 14 anni, precisamente dal 03/04/2007 al 02/04/2020, per un totale di 3294 osservazioni per titolo. Il punto di partenza è rappresentato dal calcolo dei rendimenti logaritmici:

$$r_t = \ln\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right)$$

dove:

- r_t è il rendimento logaritmico al tempo t ;
- p_t è il prezzo di chiusura registrato al tempo t ;
- p_{t-1} è il prezzo di chiusura registrato al tempo $t - 1$.

L'utilizzo dei rendimenti logaritmici si spiega con l'assunzione fondamentale del mondo markowitziano, secondo cui la distribuzione di probabilità sulla quale si regge il meccanismo di formazione dei rendimenti si ipotizza essere di tipo Gaussiano. Ciò significa considerare che i prezzi siano generati da un processo

casuale che esprime un valore medio atteso pari a μ e una varianza pari a σ^2 , assunzione assai utile dato che le variabili casuali distribuite normalmente sono descritte in modo completo dalle sole funzioni media e varianza. Dai rendimenti logaritmici che rappresentano la variabile aleatoria di riferimento, oltre ai valori di media e varianza, è possibile inoltre estrapolare altre statistiche descrittive quali l'asimmetria e la curtosi. Più specificatamente la media rappresenta il parametro di centratura della distribuzione mentre la deviazione standard altro non è che una misura di dispersione. L'asimmetria fornisce, invece, indicazioni sulla scentratura mentre la curtosi indica la pesantezza delle code (fat tails). Tali parametri, insieme al "test di normalità" svolto per ciascun titolo, ha permesso di analizzare più approfonditamente la distribuzione dei rendimenti e capire se quest'ultimi sono approssimabili o meno ad una distribuzione normale. Il test di normalità consta di due ulteriori test, quello di Kolmogorov-Smirnov e quello di Shapiro-Wilk.

Il test di Kolmogorov-Smirnov è un test non parametrico che verifica la forma delle distribuzioni campionarie e nel nostro caso è utilizzato per verificare che i campioni provengano da una distribuzione di tipo normale. Si considera come riferimento la Gaussiana avente media e deviazione standard pari a quelle sperimentali ottenute dal campione e si esegue quindi il test di K-S tra il campione stesso e la gaussiana di riferimento. In astratto, data una variabile aleatoria X con c.d.f. (cumulative distribution function) $F(x)$ e un campione x_1, \dots, x_n , ci si chiede se tale campione provenga ragionevolmente da X oppure no. Si riporta di seguito la procedura utilizzata per la verifica del test:

1. Disporre le n osservazioni x_1, \dots, x_n in ordine crescente tale che $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$;
2. Calcolare la funzione di distribuzione cumulativa empirica secondo l'espressione di seguito riportata:

$$\hat{F}_x(x) = \frac{\max \{j: x_{(j)} < x\}}{n}$$

3. Calcolare il valore del test statistico:

$$D_0 = \sup_x \{|\hat{F}_x(x) - F_x(x)|\}$$

Più precisamente, D_0 è calcolato come $D_0 = \max\{D^+, D^-\}$ dove:

$$D^+ = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \left| \frac{j}{n} - F_x(x_{(j)}) \right| \right\} \quad \text{e} \quad D^- = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \left| F_x(x_{(j)}) - \frac{j-1}{n} \right| \right\}$$

4. Scegliere il livello di significatività α del test e trovare il corrispondente valore critico $D_{\alpha, n}$ dalle tavole di Kolmogorov-Smirnov;

5. Impostare il test nel seguente modo:

H_0 = la variabile casuale X è conforme alla distribuzione ipotizzata i cui parametri sono stimati a partire dai dati in input.

H_1 = la variabile casuale X non è conforme alla distribuzione ipotizzata.

6. L'ipotesi nulla H_0 è rifiutata se $D_0 > D_{\alpha, n}$.

Il test di Shapiro-Wilk, introdotto nel 1965 da Samuel Shapiro e Martin Wilk, è uno dei test più potenti per la verifica della normalità. Tale verifica avviene confrontando due stimatori alternativi della varianza σ^2 :

- Uno stimatore non parametrico basato sulla combinazione lineare ottimale della statistica d'ordine di una variabile aleatoria normale al numeratore;
- Il consueto stimatore parametrico, ossia la varianza campionaria, al denominatore.

I pesi per la combinazione lineare sono disponibili sulle apposite tavole. La statistica W può essere interpretata come il quadrato del coefficiente di correlazione in un diagramma quantile-quantile:

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^m a_i (X_{n+1-i} - X_i))^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

I passi in cui si articola il test sono i seguenti:

1. Ordinare le osservazioni in modo crescente;
2. Per n osservazioni, poniamo $m=n/2$ se n è pari e $m = (n - 1)/2$ se n è dispari;
3. Calcolare la statistica del test di Shapiro-Wilk W , la cui formula è esposta sopra;
4. Impostare ipotesi nulla (H_0) e ipotesi alternativa (H_1);
5. Se W è piccolo rifiuto l'ipotesi che i valori siano distribuiti come una variabile casuale normale. Più W è vicino a 1, più i nostri dati si distribuiscono secondo una normale.

Per ogni titolo, infine, è stato tracciato il Q-Q plot, ovvero la rappresentazione grafica dei quantili di una distribuzione. Esso confronta la distribuzione cumulata della variabile osservata con la distribuzione cumulata della normale. Se la variabile osservata presenta una distribuzione normale, i punti di questa distribuzione congiunta si addensano sulla diagonale che va dal basso verso l'alto e da sinistra verso destra.

Prima di procedere con la verifica dei test, dopo aver calcolato i rendimenti logaritmici, bisognerebbe calcolare l'extrarendimento, ovvero la differenza tra il rendimento del titolo r_t e il rendimento dell'asset risk free al tempo t . L'asset risk free preso in considerazione è l'Euribor con scadenza a tre mesi che presenta attualmente sul mercato un rendimento negativo. Il modello di Markowitz, implementato nel 1952, non teneva conto della possibilità di un tasso risk free negativo, dal momento che una situazione simile non si era mai presentata sul mercato. Dunque, sia per coerenza con le caratteristiche del modello sia considerando realisticamente che per un investitore privato i tassi di interesse non possono essere negativi, si è scelto di porre il rendimento dell'asset risk free a zero. La Tabella 2 seguente mostra, quindi, la media e la deviazione standard ottenute dai rendimenti logaritmici:

Tabella 2. Media e deviazione standard dei titoli azionari

Titolo	Media	Deviazione standard
ENI.MI	-0,000035235	0,018380099
IBE.MC	0,000180975	0,017950299
ENEL.MI	0,000199353	0,017886703
DTE.DE	0,000242661	0,015384829
VOW3.DE	0,00016872	0,02496301
BAYN.DE	0,000141581	0,018899766
SIE.DE	0,000124873	0,01892156
ALV.DE	0,000178755	0,020389611
LIN.DE	0,000496563	0,033717597
SAP.DE	0,000376493	0,015431869
AIR.PA	0,000292002	0,023056307
OR.PA	0,000394707	0,014867545
AI.PA	0,000355583	0,014939554
KER.PA	0,000543766	0,021006477
ABI.BR	0,000161398	0,019775929
UNA.AS	0,000352532	0,014615305
SAN.PA	0,000235288	0,015579401
MC.PA	0,0004953	0,018490651
FP.PA	0,000114858	0,017276479
ASML.AS	0,000809207	0,020992201

4.2 Elaborazione dei test statistici

Si riportano di seguito i grafici dell'andamento dei rendimenti logaritmici e i risultati dei test statistici per ciascuno dei venti titoli presi in esame per la composizione del portafoglio azionario.

ENI S.p.A.

La Figura 7 mostra l'andamento del titolo ENI negli ultimi 14 anni e più precisamente nel periodo che va dal 03/04/2007 al 02/04/2020. Come emerge dal grafico, i rendimenti cominciano ad oscillare significativamente nel lasso di tempo che va dal 18/09/2008 fino al 09/03/2009, per poi stabilizzarsi ad eccezione di piccole variazioni tra il 02/01/2015 e il 23/06/2016. Un'ulteriore oscillazione consistente si verifica, infine, a partire dal 06/03/2020.

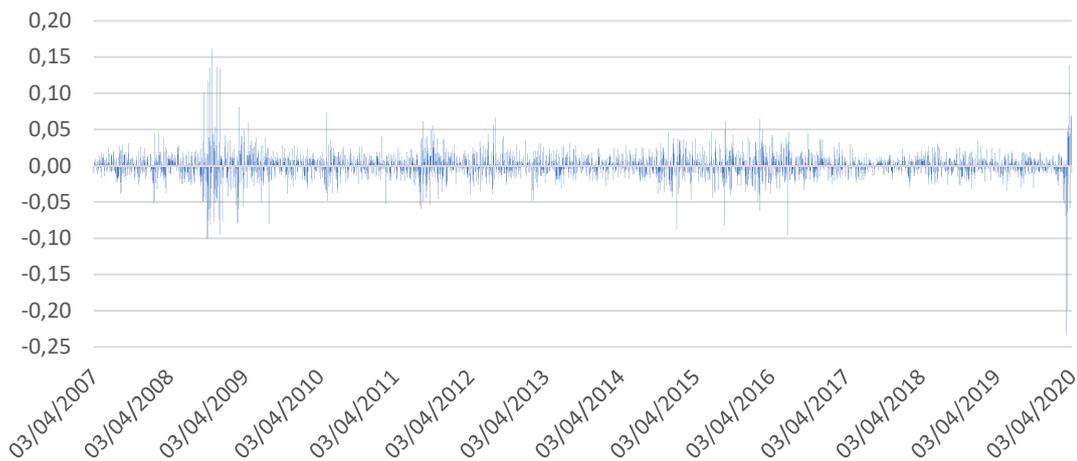


Figura 7. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo ENI

Dall'analisi dei dati si sono ricavate le statistiche descrittive riportate nella Tabella 3.

Tabella 3. Statistiche descrittive ENI

Media	-3,5E-05	Asimmetria	-0,5863
Errore standard	0,00032	Intervallo	0,395287
Mediana	0,000535	Minimo	-0,23385
Moda	0	Massimo	0,161436
Deviazione standard	0,01838	Somma	-0,11606
Varianza campionaria	0,000338	Conteggio	3294
Curtosi	20,16058		

La Figura 8 sintetizza i risultati del test di K-S per il titolo azionario ENI.

Numero totale di casi		3294
Differenze più estreme	Assoluta	0,082
	Positiva	0,078
	Negativa	-0,082
Statistica del test		0,082
Sign. asintotica (test a 2 vie)		,000 ^a

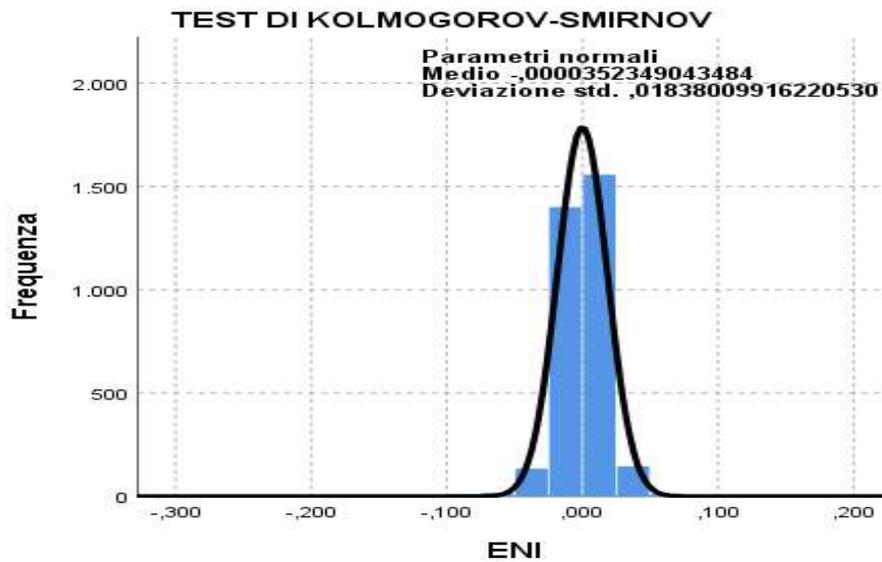


Figura 8. Applicazione del test di K-S al titolo azionario ENI

La Tabella 4 riassume i risultati del test di normalità condotto secondo K-S e Shapiro-Wilk.

Tabella 4. Applicazione del test di normalità al titolo azionario ENI

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistica	gl	Sign.	Statistica	gl	Sign.
ENI	0,082	3294	,000	0,869	3294	,000

Dal test di normalità e dal grafico Q-Q plot (Figura 9) è possibile affermare che i rendimenti del titolo ENI seguono una distribuzione normale con parametri NORM(-3,5E-05; 0,01838). La curva, decentrata verso sinistra, presenta code particolarmente grasse con un valore di curtosi circa pari a 20.

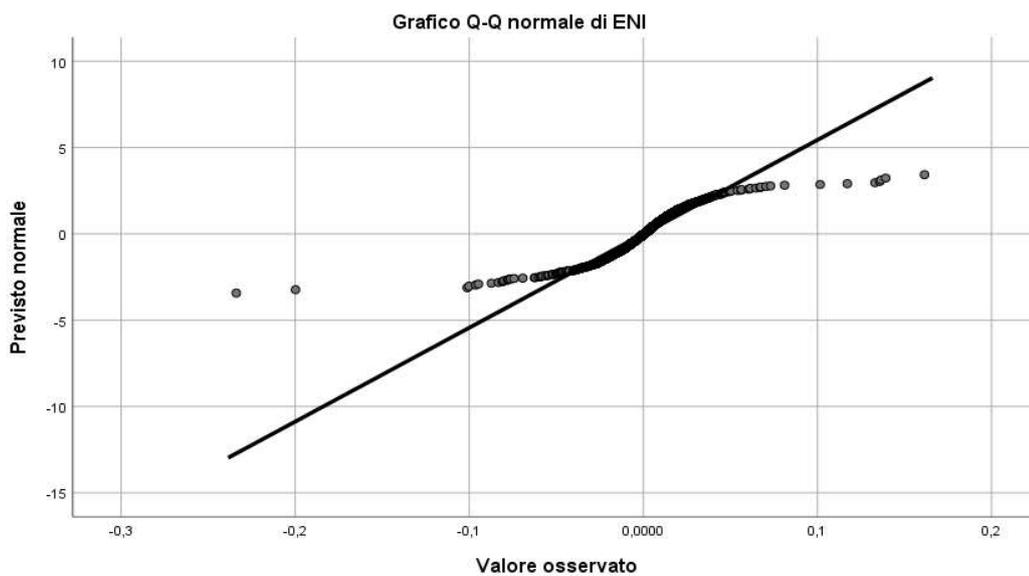


Figura 9. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario ENI

IBERDROLA S.A.

La Figura 10 mostra le variazioni del titolo Iberdrola dal 03/04/2007 al 02/04/2020, registrando la massima oscillazione tra i giorni 18/01/2008 e 23/01/2008. Tali oscillazioni proseguono per tutto il 2008 fino al 09/03/2009, data a partire dalla quale i rendimenti cominciano a stabilizzarsi ad eccezione dei mesi di maggio 2010 e giugno 2016 per i quali si segnalano variazioni significative. I rendimenti iniziano ad oscillare nuovamente in modo consistente a partire dal 11/03/2020.

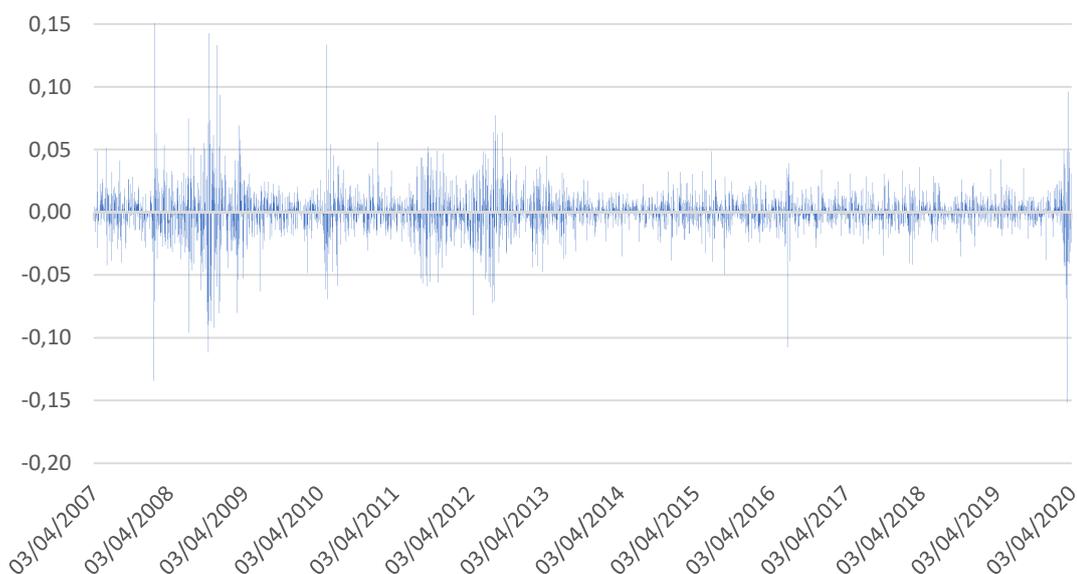


Figura 10. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo IBERDROLA

Dall'analisi dei dati si sono ricavate le statistiche descrittive riportate nella Tabella 5.

Tabella 5. Statistiche descrittive IBERDROLA

Media	0,000181	Asimmetria	-0,13614
Errore standard	0,000313	Intervallo	0,305888
Mediana	0,000639	Minimo	-0,15155
Moda	0	Massimo	0,154334
Deviazione standard	0,01795	Somma	0,596133
Varianza campionaria	0,000322	Conteggio	3294
Curtosi	10,81241		

La Figura 8 sintetizza i risultati del test di K-S per il titolo azionario ENI.

Numero totale di casi		3294
Differenze più estreme	Assoluta	0,090
	Positiva	0,087
	Negativa	-0,090
Statistica del test		0,090
Sign. asintotica (test a 2 vie)		,000 ^a

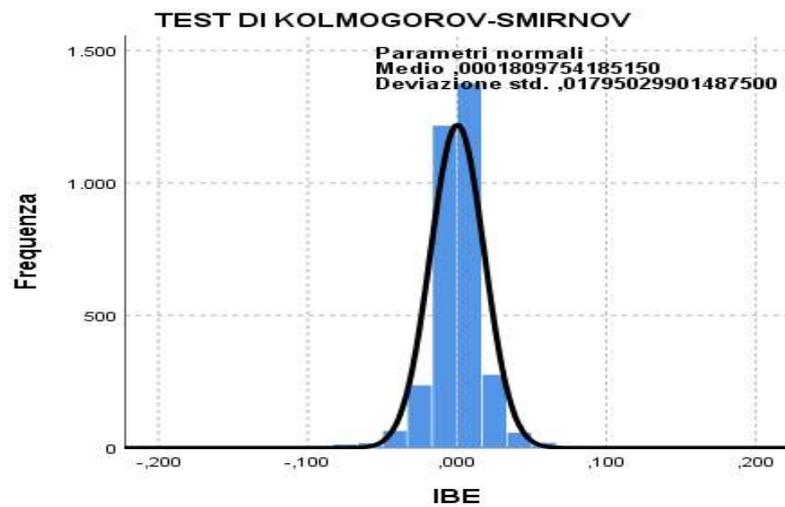


Figura 11. Applicazione del test di K-S al titolo azionario IBERDROLA

La Tabella 6 riassume i risultati del test di normalità condotto secondo K-S e Shapiro-Wilk.

Tabella 6. Applicazione del test di normalità al titolo azionario IBERDROLA

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistica	gl	Sign.	Statistica	gl	Sign.
IBE	0,090	3294	,000	0,889	3294	,000

Le statistiche ottenute per il test di normalità e il Q-Q plot (Figura 12) confermano l'ipotesi nulla di normalità dei rendimenti logaritmici espressa come NORM(0,000181; 0,01795).

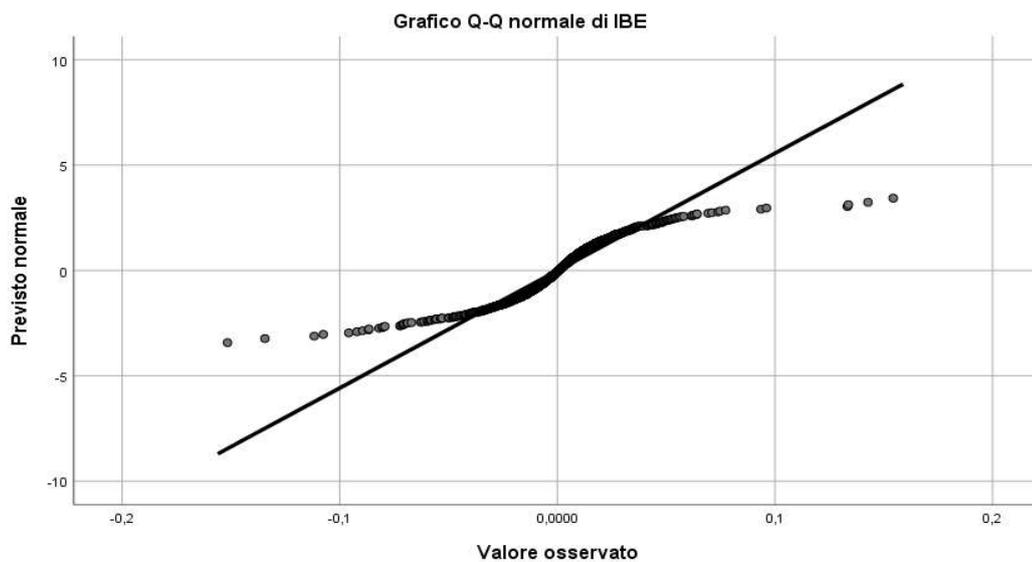


Figura 12. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario IBERDROLA

ENEL S.p.A.

La Figura 13 mostra l'andamento del titolo ENEL. I rendimenti del titolo iniziano a variare da gennaio 2008 raggiungendo il picco tra settembre e novembre dello stesso anno. Da gennaio 2009 fino a gennaio 2020 le variazioni sono piuttosto contenute fatta eccezione per giugno 2016, in cui si assiste ad un'oscillazione verso il basso dei rendimenti. Da febbraio 2020 si torna ad avere una volatilità elevata.

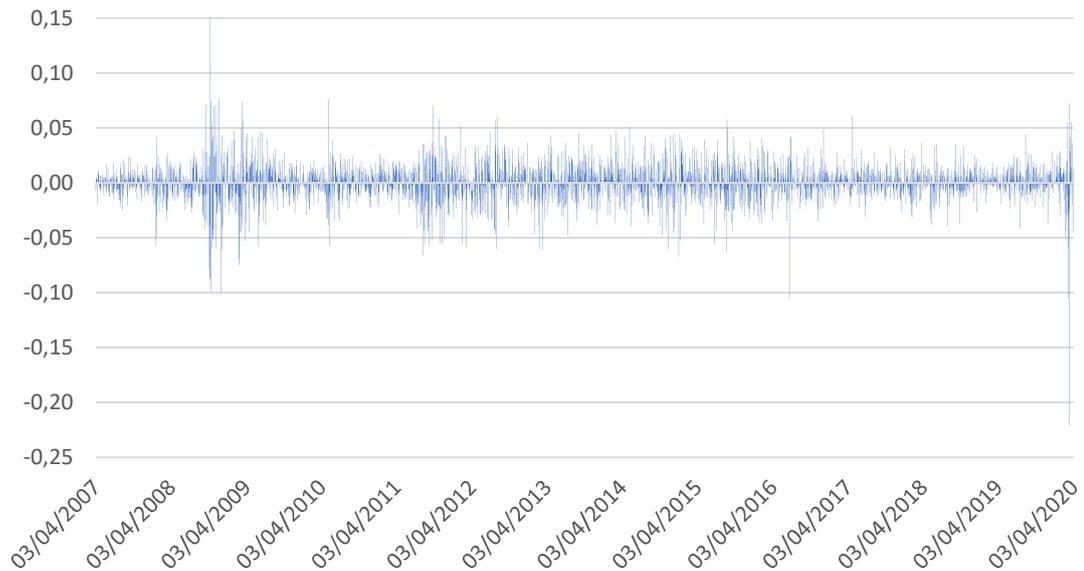


Figura 13. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo ENEL

Dall'analisi dei dati si sono ricavate le statistiche descrittive riportate nella Tabella 7.

Tabella 7. Statistiche descrittive ENEL

Media	0,000199	Asimmetria	-0,65717
Errore standard	0,000312	Intervallo	0,389869
Mediana	0,000503	Minimo	-0,22123
Moda	0	Massimo	0,168641
Deviazione standard	0,017887	Somma	0,656668
Varianza campionaria	0,00032	Conteggio	3294
Curtosi	12,27467		

La Figura 14 sintetizza i risultati del test di K-S per il titolo azionario ENEL.

Numero totale di casi		3294
Differenze più estreme	Assoluta	0,067
	Positiva	0,056
	Negativa	-0,067
Statistica del test		0,067
Sign. asintotica (test a 2 vie)		,000 ^a

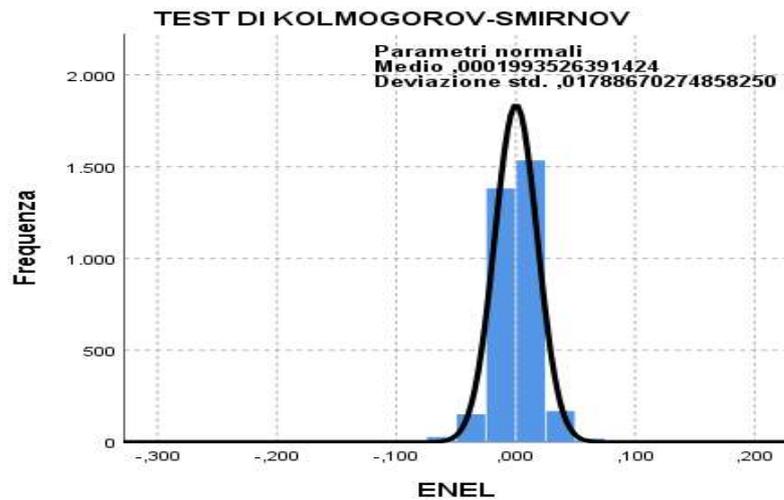


Figura 14. Applicazione del test di K-S al titolo azionario ENEL

La Tabella 8 riassume i risultati del test di normalità condotto secondo K-S e Shapiro-Wilk.

Tabella 8. Applicazione del test di normalità al titolo azionario ENEL

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistica	gl	Sign.	Statistica	gl	Sign.
ENEL	0,067	3294	,000	0,925	3294	,000

Le statistiche ottenute per il test di normalità e il Q-Q plot (Figura 15) confermano che i logrendimenti del titolo Enel seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono stati accettati e la curva ha espressione NORM(0,000199; 0,017887).

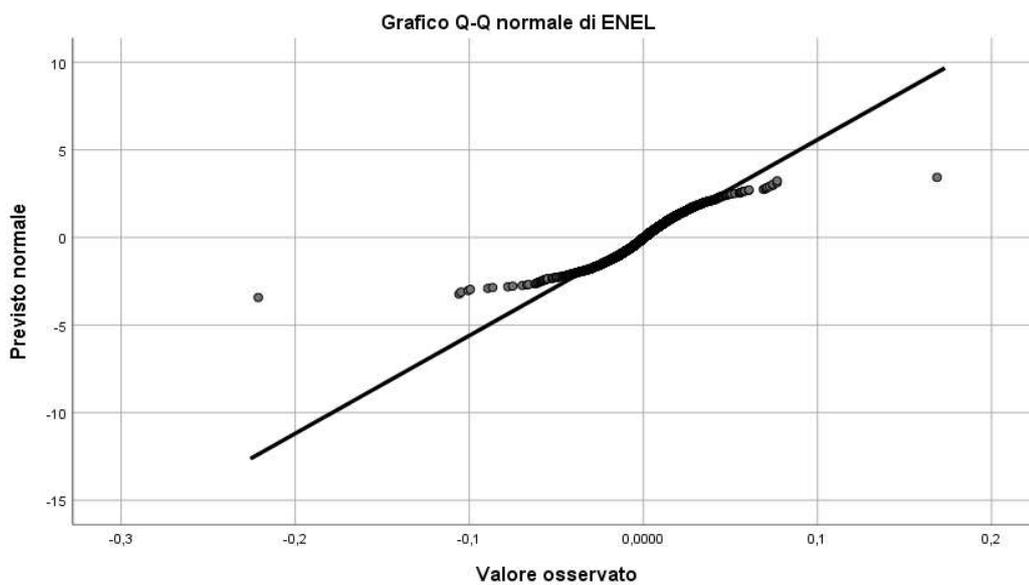


Figura 15. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario ENEL

DEUTSCHE TELEKOM AG

La Figura 16 mostra l'andamento del titolo DTE. I rendimenti del titolo Deutsche Telekom iniziano a subire variazioni a partire da gennaio 2008 raggiungendo la massima oscillazione verso il basso il 09/10/2008 e verso l'alto il 28/10/2008. Da segnalare il periodo che va da marzo ad agosto 2011, caratterizzato da variazioni significative ma comunque contenute. I rendimenti rimangono stabili fino al 2019 con nuove oscillazioni nel primo trimestre 2020.

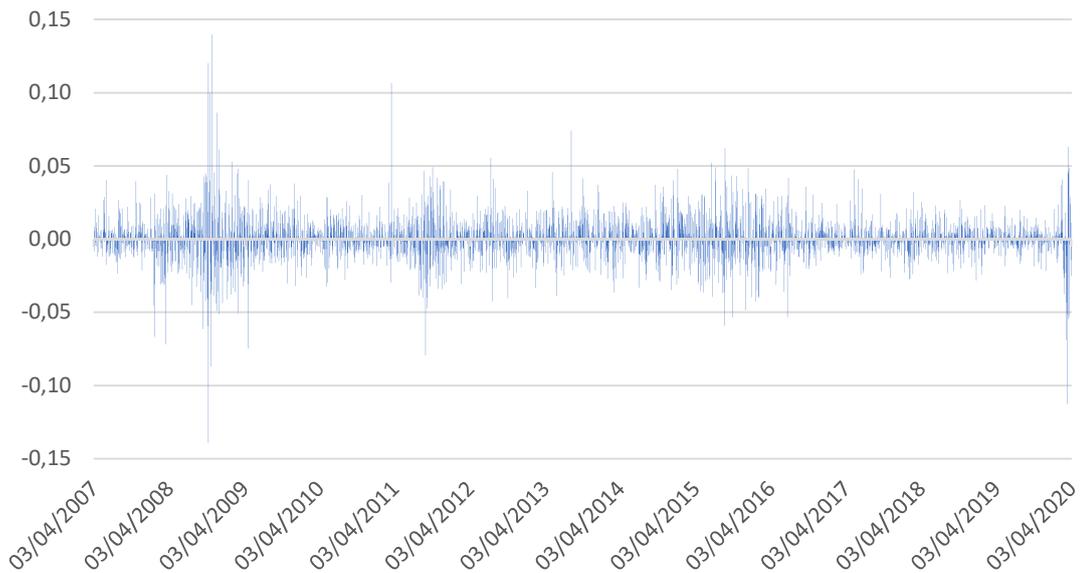


Figura 16. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo Deutsche Telekom

Dall'analisi dei dati si sono ricavate le statistiche descrittive riportate nella Tabella 9.

Tabella 9. Statistiche descrittive DTE

Media	0,000243	Asimmetria	0,131423
Errore standard	0,000268	Intervallo	0,279169
Mediana	0	Minimo	-0,13928
Moda	0	Massimo	0,13989
Deviazione standard	0,015385	Somma	0,799326
Varianza campionaria	0,000237	Conteggio	3294
Curtosi	9,314307		

La Figura 17 sintetizza i risultati del test di K-S per il titolo azionario DTE.

Numero totale di casi		3294
Differenze più estreme	Assoluta	0,073
	Positiva	0,073
	Negativa	-0,073
Statistica del test		0,073
Sign. asintotica (test a 2 vie)		,000 ^a

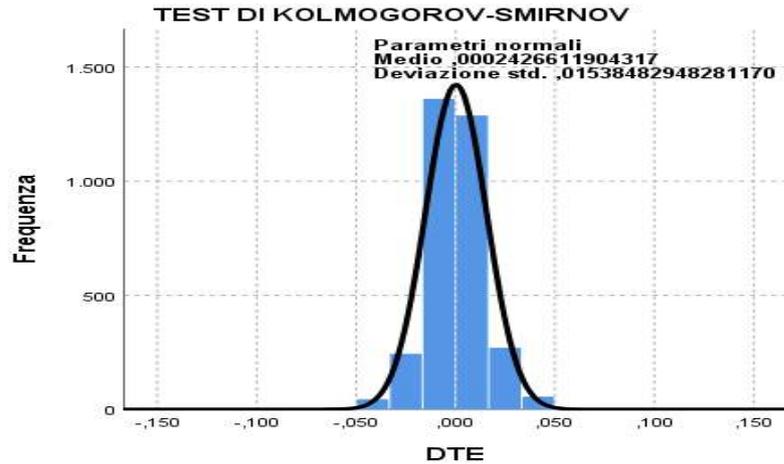


Figura 17. Applicazione del test di K-S al titolo azionario DTE

La Tabella 10 riassume i risultati del test di normalità condotto secondo K-S e Shapiro-Wilk.

Tabella 10. Applicazione del test di normalità al titolo azionario DTE

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistica	gl	Sign.	Statistica	gl	Sign.
DTE	0,073	3294	,000	0,922	3294	,000

Il test di Kolmogorov-Smirnov congiuntamente al test di Shapiro-Wilk e al Q-Q plot (Figura 18) permette di affermare che i logrendimenti del titolo si distribuiscono secondo una normale con media pari a 0,000243 e deviazione standard pari a 0,015385. La curva è decentrata verso destra e presenta code grasse.

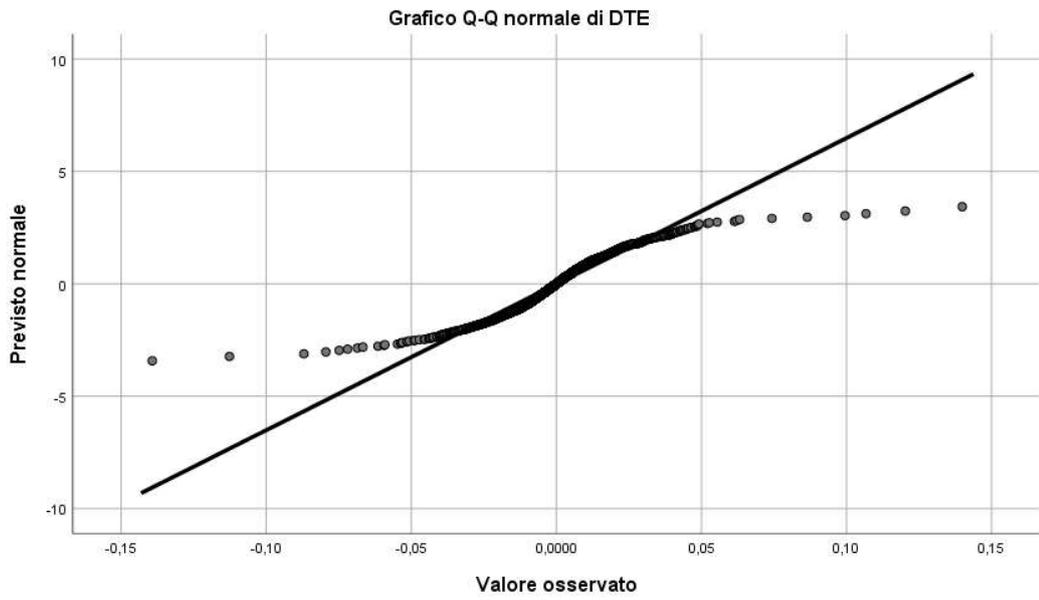


Figura 18. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario DTE

VOLKSWAGEN

La Figura 19 riporta l'andamento del titolo Volkswagen (VOW3). Il grafico mostra ampie fluttuazioni a partire da ottobre 2008 fino a novembre 2009 in seguito alla crisi finanziaria di proporzioni mondiale. L'andamento del titolo risulta pressoché stabile con un picco negativo a settembre del 2015. Ciò è dovuto allo scandalo Dieselgate, o scandalo emissioni, consistente nella scoperta della falsificazione delle emissioni di vetture munite di motore diesel vendute negli Stati Uniti e in Europa. La manipolazione avveniva tramite un software che consentiva così alle auto di emettere sostanze inquinanti superiori ai limiti imposti per legge. Tale scandalo vide tra le case automobilistiche più colpite le tedesche Audi e Volkswagen. I rendimenti del titolo VOW3 tornano ad oscillare in maniera significativa da marzo 2020.

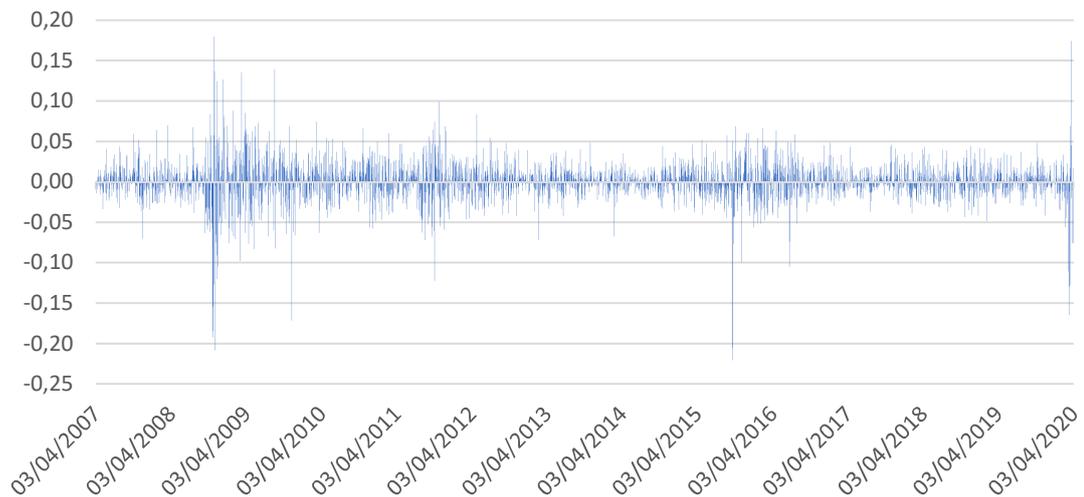


Figura 19. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo VOW3

Dall'analisi dei dati si sono ricavate le statistiche descrittive riportate nella Tabella 11.

Tabella 11. Statistiche descrittive VOW3

Media	0,000169	Asimmetria	-0,88783
Errore standard	0,000435	Intervallo	0,4006
Mediana	0,000266	Minimo	-0,22088
Moda	0	Massimo	0,179723
Deviazione standard	0,024963	Somma	0,555763
Varianza campionaria	0,000623	Conteggio	3294
Curtosi	12,15898		

La Figura 20 sintetizza i risultati del test di K-S per il titolo azionario VOW3.

Numero totale di casi		3294
Differenze più estreme	Assoluta	0,081
	Positiva	0,075
	Negativa	-0,081
Statistica del test		0,081
Sign. asintotica (test a 2 vie)		,000 ^a

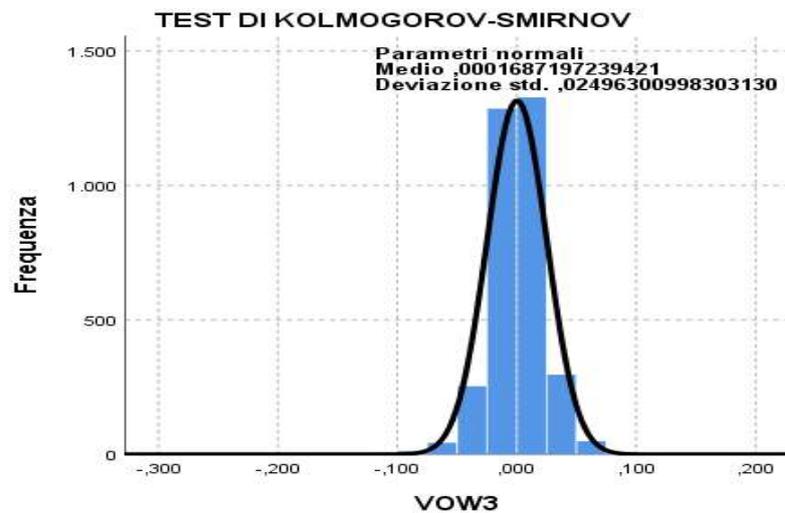


Figura 20. Applicazione del test di K-S al titolo azionario VOW3

La Tabella 10 riassume i risultati del test di normalità condotto secondo K-S e Shapiro-Wilk.

Tabella 12. Applicazione del test di normalità al titolo azionario VOW3

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistica	gl	Sign.	Statistica	gl	Sign.
VOW3	0,081	3294	,000	0,888	3294	,000

Il test di Kolmogorov-Smirnov congiuntamente al test di Shapiro-Wilk e al Q-Q plot (Figura 21) permette di affermare che i logrendimenti del titolo Volkswagen seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso sinistra e presenti delle code grasse.

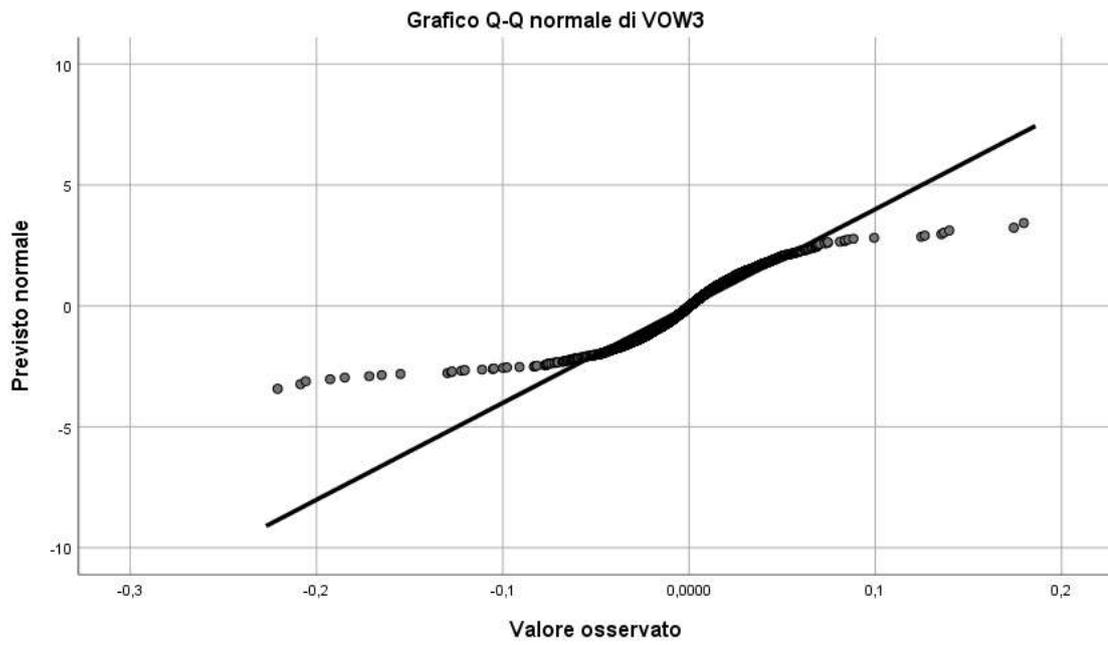


Figura 21. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario VOW3

BAYER AG

La Figura 22 mostra l'andamento del titolo Bayer (BAYN). Come per i titoli precedenti, l'andamento dei rendimenti logaritmici è particolarmente turbolento tra settembre 2008 e settembre 2009. Dopodiché il titolo presenta un andamento regolare con bassa variabilità fino a luglio 2018. Da agosto 2018 fino a marzo 2019 si verificano diverse oscillazioni negative. A pesare è l'acquisizione di Monsanto che provoca svalutazioni di oltre tre miliardi di euro e oneri straordinari per due miliardi. Ampie fluttuazioni si verificano, infine, ad inizio marzo 2020 a causa dell'emergenza Covid-19.

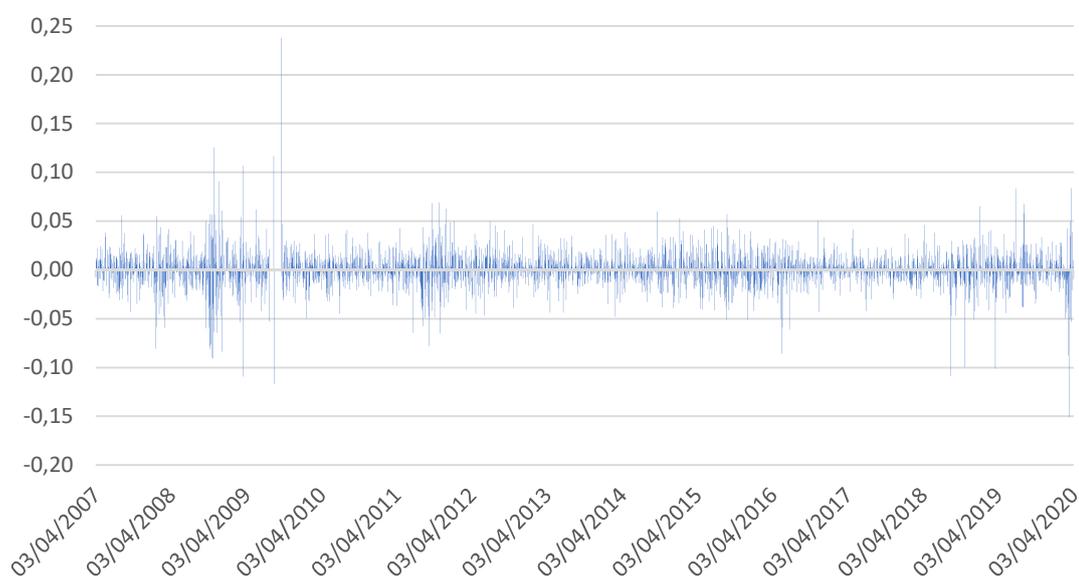


Figura 22. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo BAYER

Dall'analisi dei dati si sono ricavate le statistiche descrittive riportate nella Tabella 13.

Tabella 13. Statistiche descrittive BAYER

Media	0,000142	Asimmetria	0,227164
Errore standard	0,000329	Intervallo	0,389129
Mediana	0	Minimo	-0,15114
Moda	0	Massimo	0,237991
Deviazione standard	0,0189	Somma	0,466366
Varianza campionaria	0,000357	Conteggio	3294
Curtosi	13,08154		

La Figura 23 sintetizza i risultati del test di K-S per il titolo azionario BAYER.

Numero totale di casi		3294
Differenze più estreme	Assoluta	0,069
	Positiva	0,062
	Negativa	-0,069
Statistica del test		0,069
Sign. asintotica (test a 2 vie)		,000 ^a

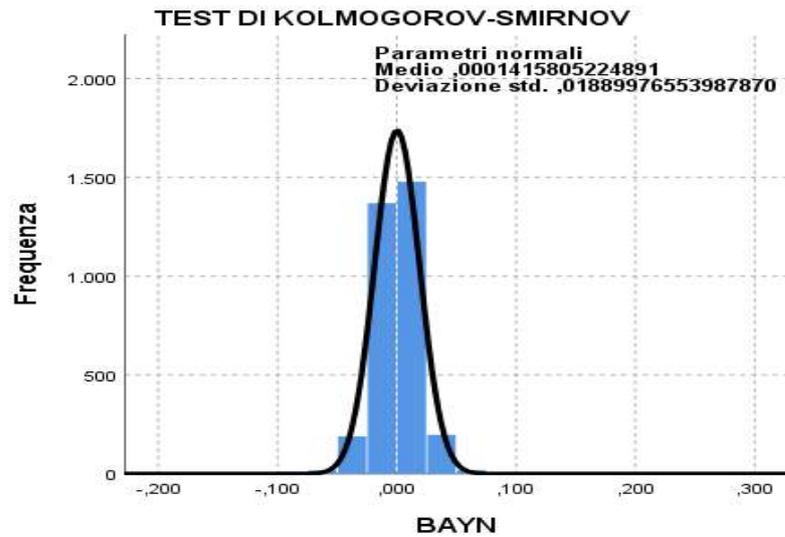


Figura 23. Applicazione del test di K-S al titolo azionario BAYER

La Tabella 14 riassume i risultati del test di normalità condotto secondo K-S e Shapiro-Wilk.

Tabella 14. Applicazione del test di normalità al titolo azionario BAYER

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistica	gl	Sign.	Statistica	gl	Sign.
BAYN	0,069	3294	,000	0,914	3294	,000

Entrambi i test sulle distribuzioni campionarie sono accettati e, come visibile anche dal Q-Q plot (Figura 24), la curva ha espressione NORM(0,000142; 0,0189). Essa presenta code grasse e risulta decentrata verso destra.

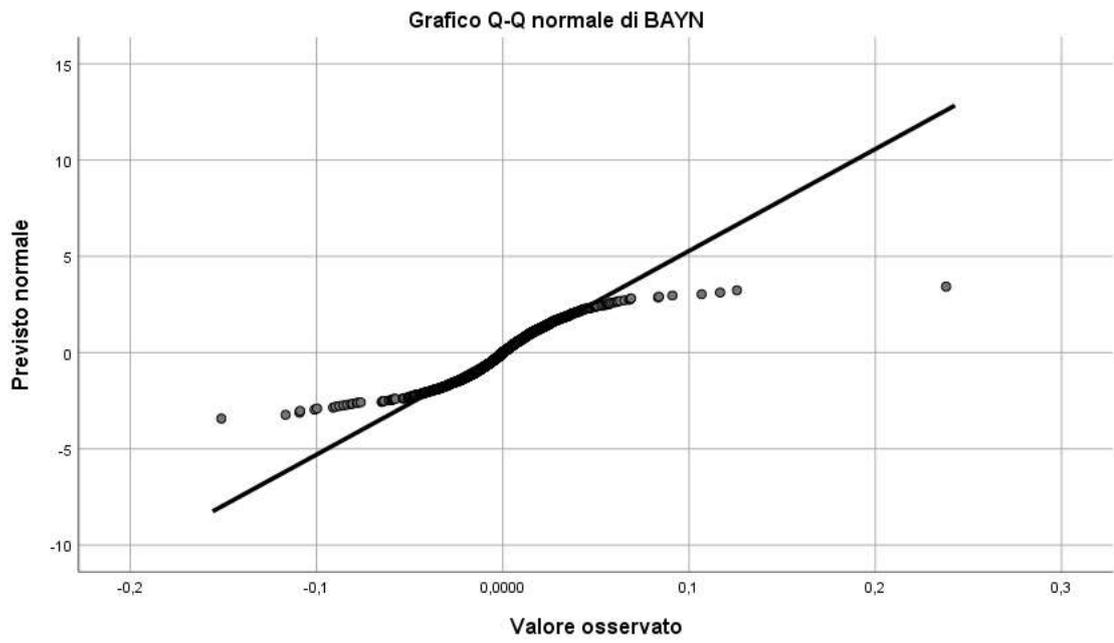


Figura 24. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario BAYER

SIEMENS AG

Come si evince dalla Figura 25, i rendimenti del titolo Siemens iniziano a variare a partire dal 14/03/2008, raggiungendo il picco il 28/10/2008. Le fluttuazioni sui rendimenti rimangono pressoché contenute fino a dicembre 2019, per poi riprendere in maniera significativa a febbraio 2020 in seguito all'emergenza sanitaria.

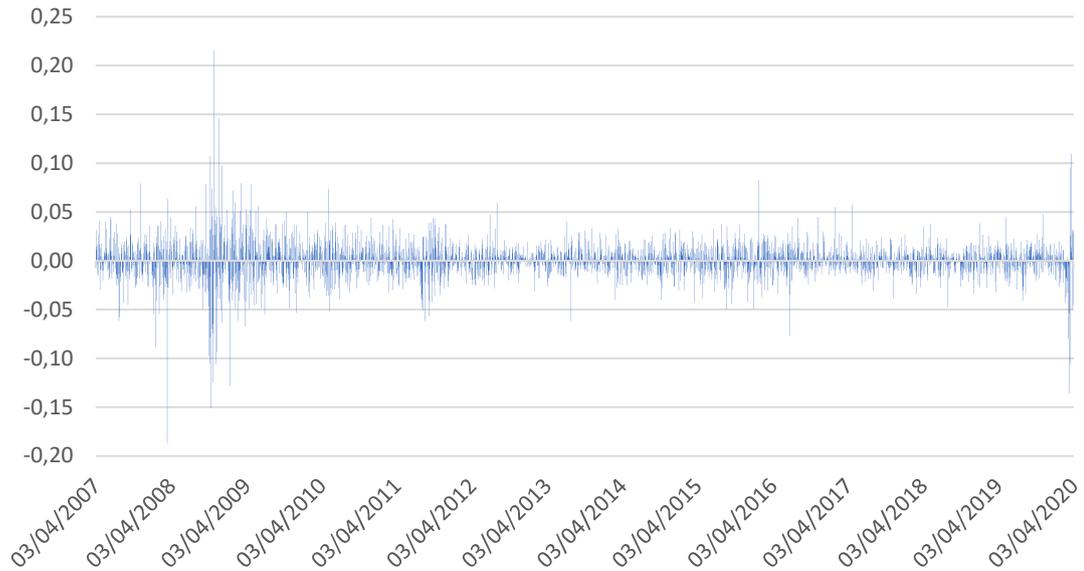


Figura 25. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo SIEMENS

Dall'analisi dei dati si sono ricavate le statistiche descrittive riportate nella Tabella 15.

Tabella 15. Statistiche descrittive SIEMENS

Media	0,000125	Asimmetria	-0,20603
Errore standard	0,00033	Intervallo	0,402961
Mediana	0,000307	Minimo	-0,18728
Moda	0	Massimo	0,215684
Deviazione standard	0,018922	Somma	0,411333
Varianza campionaria	0,000358	Conteggio	3294
Curtosi	15,26421		

La Figura 26 sintetizza i risultati del test di K-S per il titolo azionario SIEMENS.

Numero totale di casi		3294
Differenze più estreme	Assoluta	0,075
	Positiva	0,073
	Negativa	-0,075
Statistica del test		0,075
Sign. asintotica (test a 2 vie)		,000 ^a

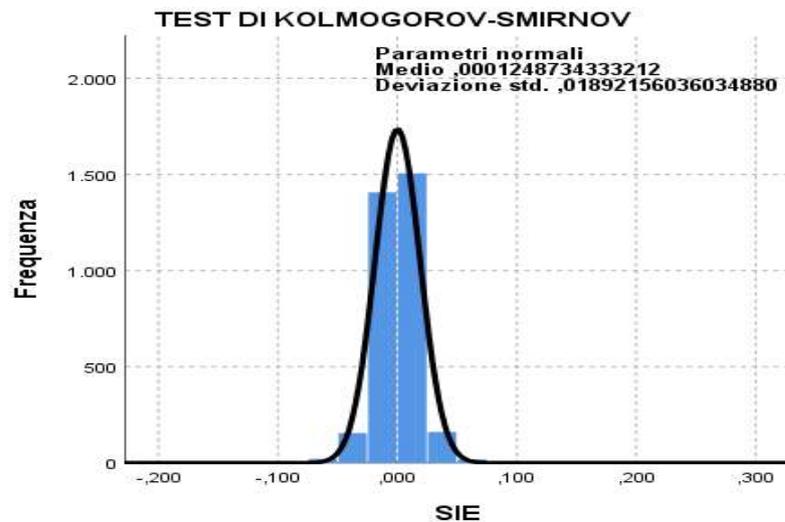


Figura 26. Applicazione del test di K-S al titolo azionario SIEMENS

La Tabella 16 riassume i risultati del test di normalità condotto secondo K-S e Shapiro-Wilk.

Tabella 16. Applicazione del test di normalità al titolo azionario SIEMENS

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistica	gl	Sign.	Statistica	gl	Sign.
SIE	0,075	3294	,000	0,885	3294	,000

Il test di normalità e il Q-Q plot (Figura 27) permettono di mostrare che i logrendimenti del titolo Siemens seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono stati accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso sinistra e presenti delle code grasse. L'espressione della curva è $NORM(0,000125; 0,018922)$.

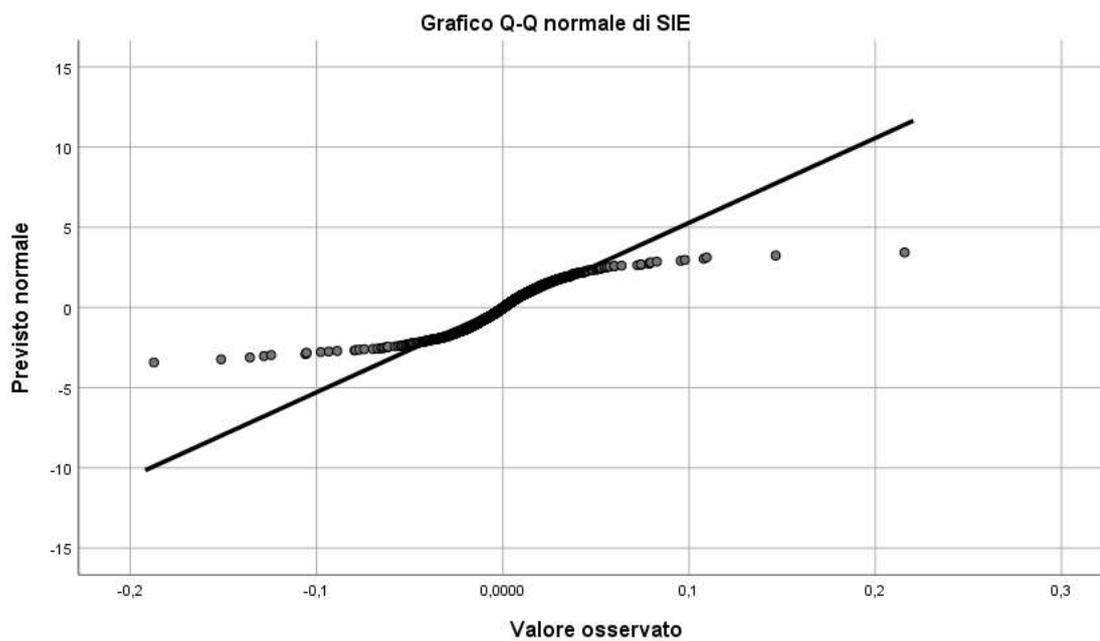


Figura 27. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario SIEMENS

ALLIANZ SE

Come riportato nella Figura 28, i rendimenti del titolo Allianz subiscono delle variazioni rilevanti nel periodo compreso tra gennaio 2008 e maggio 2010. Le fluttuazioni diminuiscono per poi variare nel periodo compreso tra luglio 2011 e luglio 2012. Il titolo si stabilizza fino a dicembre 2019 registrando solo un picco a luglio 2016. La volatilità aumenta drasticamente nel mese di marzo 2020 a causa dell'emergenza Coronavirus.

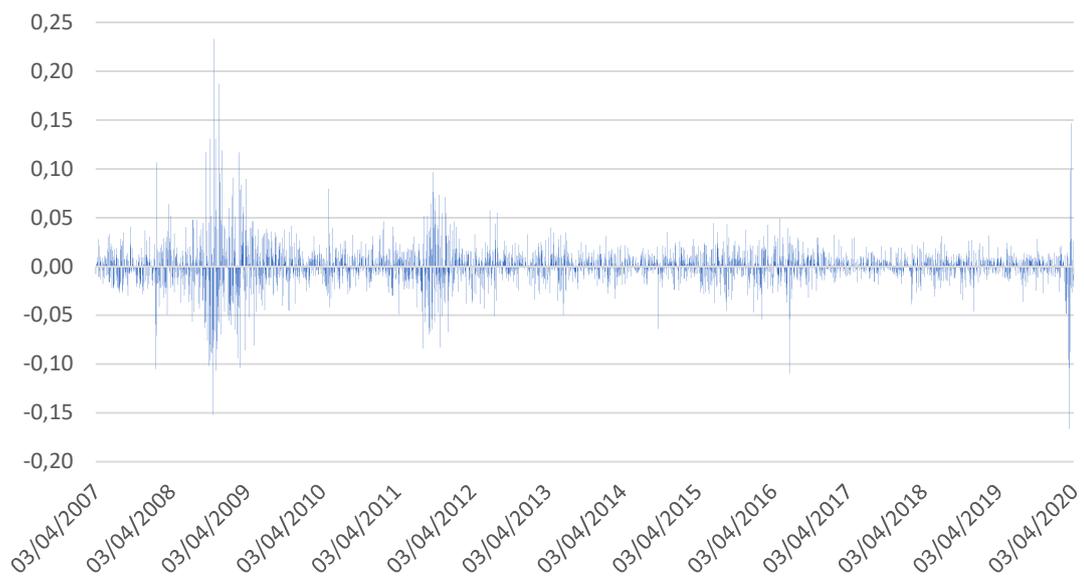


Figura 28. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo ALLIANZ

Dall'analisi dei dati si sono ricavate le statistiche descrittive riportate nella Tabella 17.

Tabella 17. Statistiche descrittive ALLIANZ

Media	0,000179	Asimmetria	0,418848
Errore standard	0,000355	Intervallo	0,399435
Mediana	0,000476	Minimo	-0,16638
Moda	0	Massimo	0,233053
Deviazione standard	0,02039	Somma	0,588819
Varianza campionaria	0,000416	Conteggio	3294
Curtosi	15,87442		

La Figura 29 sintetizza i risultati del test di K-S per il titolo azionario ALLIANZ.

Numero totale di casi		3294
Differenze più estreme	Assoluta	0,108
	Positiva	0,105
	Negativa	-0,108
Statistica del test		0,108
Sign. asintotica (test a 2 vie)		,000 ^a

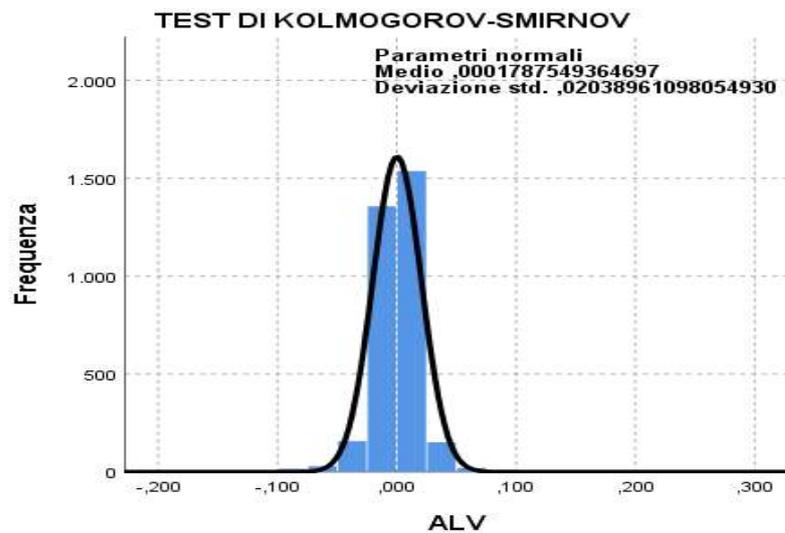


Figura 29. Applicazione del test di K-S al titolo azionario ALLIANZ

La Tabella 18 riassume i risultati del test di normalità condotto secondo K-S e Shapiro-Wilk.

Tabella 18. Applicazione del test di normalità al titolo azionario ALLIANZ

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistica	gl	Sign.	Statistica	gl	Sign.
ALV	0,108	3294	,000	0,848	3294	,000

Dal test di normalità e dal grafico del Q-Q plot (Figura 30) è possibile dedurre che i rendimenti seguono una distribuzione normale. La curva, con espressione $NORM(0,000179; 0,02039)$, risulta decentrata verso destra e con code grasse.

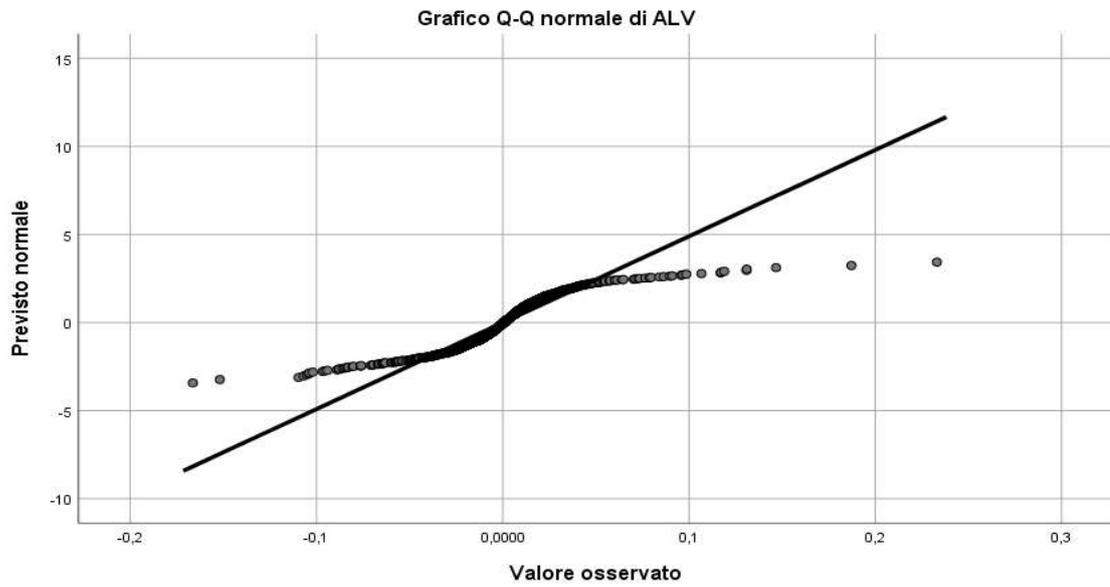


Figura 30. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario ALLIANZ

LINDE PLC

Il grafico in Figura 31 riporta le variazioni nel tempo dei rendimenti logaritmico del titolo Linde. L'andamento del titolo risulta regolare con una bassa volatilità per tutto l'arco temporale che va dal 03/04/2007 al 02/04/2020. Le uniche oscillazioni repentine e significative si verificano da agosto 2008 a gennaio 2010 e dal 07/09/2011 al 21/09/2011. Il titolo sembra invece non aver risentito particolarmente della crisi legata alla pandemia da Coronavirus.

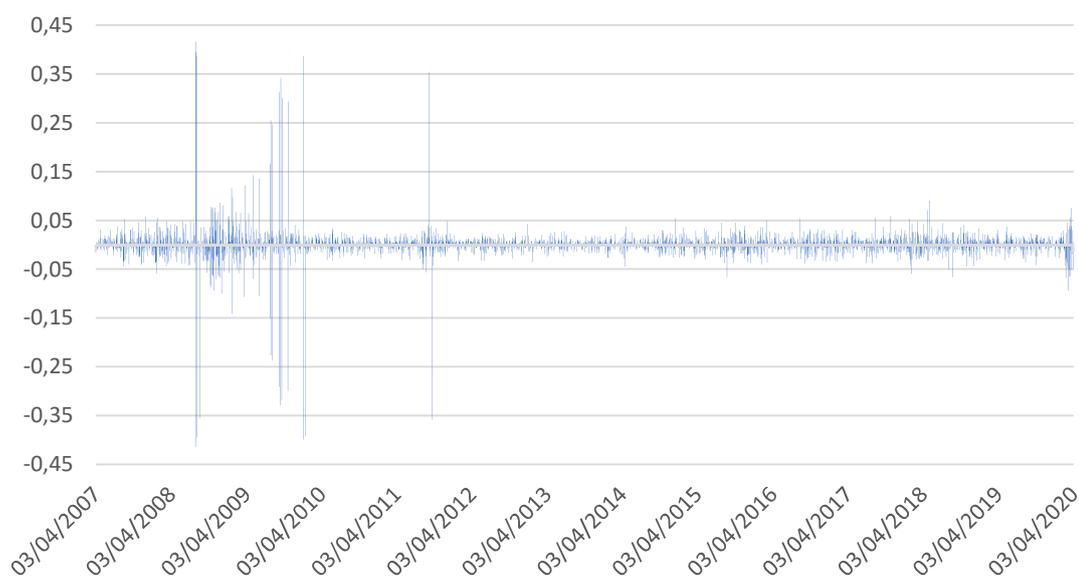


Figura 31. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo LINDE PLC

Dall'analisi dei dati si sono ricavate le statistiche descrittive riportate nella Tabella 19.

Tabella 19. Statistiche descrittive LINDE

Media	0,000497	Asimmetria	-0,34246
Errore standard	0,000587	Intervallo	0,830685
Mediana	0,000515	Minimo	-0,41442
Moda	0	Massimo	0,41626
Deviazione standard	0,033718	Somma	1,635678
Varianza campionaria	0,001137	Conteggio	3294
Curtosi	18,23656		

La Figura 32 sintetizza i risultati del test di K-S per il titolo azionario LINDE.

Numero totale di casi		3294
Differenze più estreme	Assoluta	0,197
	Positiva	0,197
	Negativa	-0,191
Statistica del test		0,197
Sign. asintotica (test a 2 vie)		,000 ^a

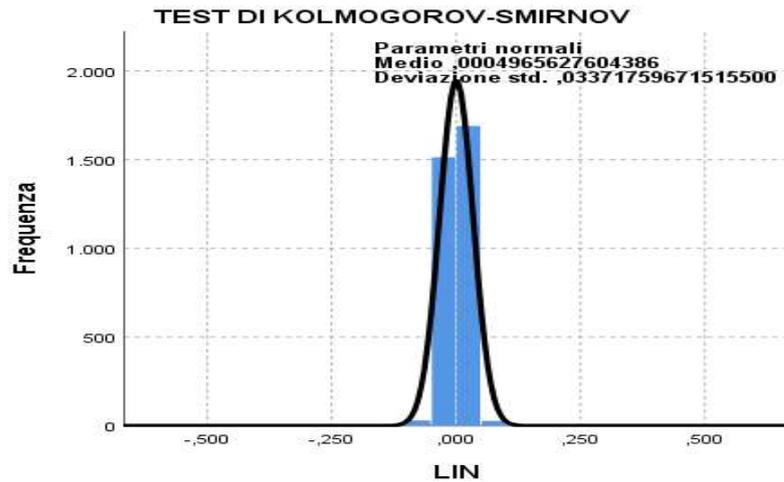


Figura 32. Applicazione del test di K-S al titolo azionario LINDE

La Tabella 20 riassume i risultati del test di normalità condotto secondo K-S e Shapiro-Wilk.

Tabella 20. Applicazione del test di normalità al titolo azionario LINDE

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistica	gl	Sign.	Statistica	gl	Sign.
LIN	0,197	3294	,000	0,787	3294	,000

Come confermato anche dal Q-Q plot riportato in Figura 33m i rendimenti logaritmici del titolo Linde PLC seguono una distribuzione normale (NORM(0,000497;0,033718)).

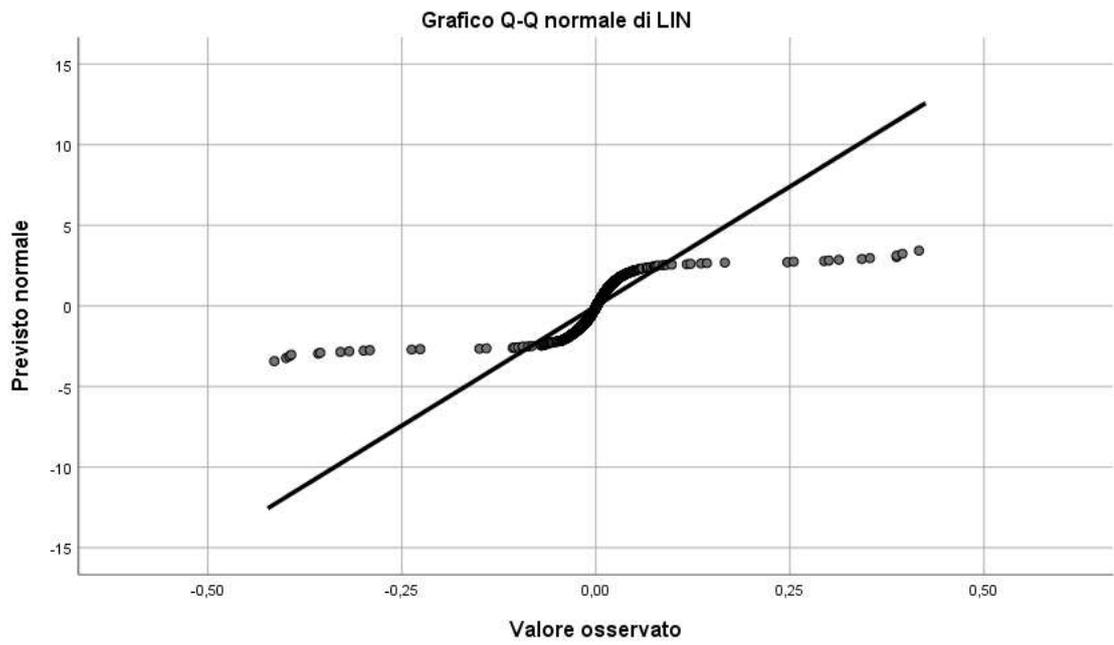


Figura 33. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario LINDE

SAP SE

La Figura 34 riporta l'andamento dei rendimenti logaritmici del titolo SAP che risultano variabili già da luglio 2007 registrando diversi picchi tra cui, il più consistente, a novembre 2008. Il titolo SAP, appartenente ad un settore turbolento, risulta instabile registrando sempre delle variazioni repentine. Altri picchi rilevanti si sono registrati ad aprile e ottobre 2019. A marzo 2020 la variabilità torna ad essere particolarmente elevata.

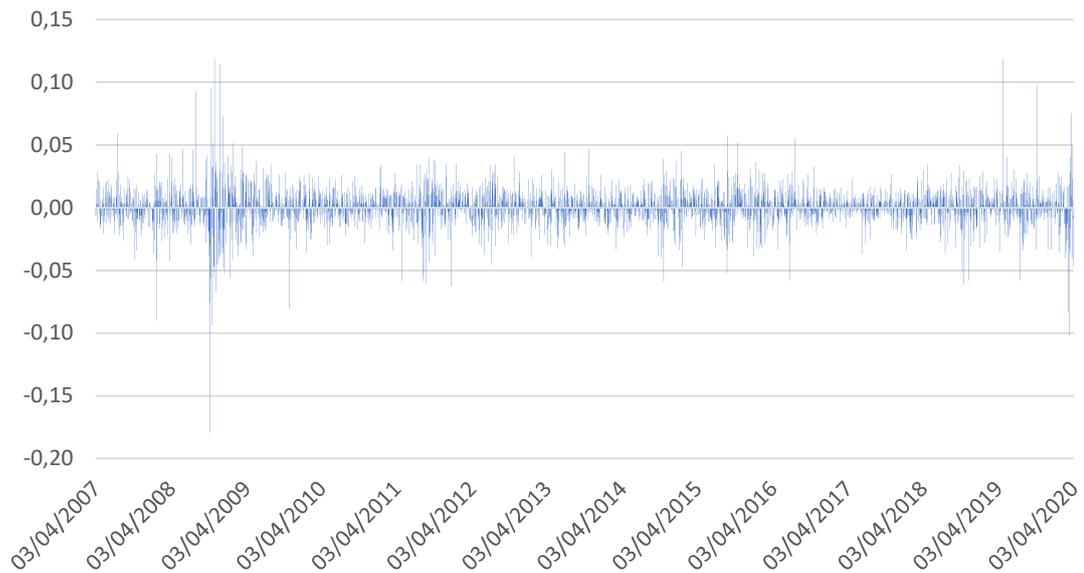


Figura 34. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo SAP

Dall'analisi dei dati si sono ricavate le statistiche descrittive riportate nella Tabella 21.

Tabella 21. Statistiche descrittive SAP

Media	0,000376	Asimmetria	-0,41026
Errore standard	0,000269	Intervallo	0,297415
Mediana	0,00078	Minimo	-0,1792
Moda	0	Massimo	0,118219
Deviazione standard	0,015432	Somma	1,240167
Varianza campionaria	0,000238	Conteggio	3294
Curtosi	12,61494		

La Figura 35 sintetizza i risultati del test di K-S per il titolo azionario SAP.

Numero totale di casi		3294
Differenze più estreme	Assoluta	0,071
	Positiva	0,061
	Negativa	-0,071
Statistica del test		0,071
Sign. asintotica (test a 2 vie)		,000 ^a

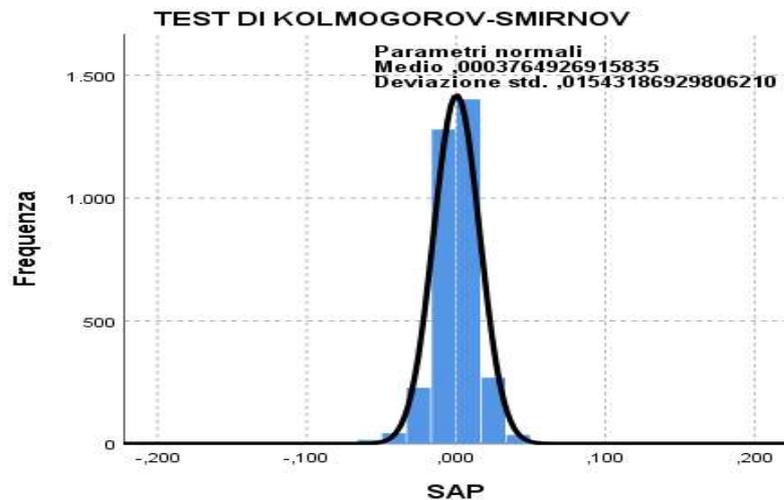


Figura 35. Applicazione del test di K-S al titolo azionario SAP

La Tabella 22 riassume i risultati del test di normalità condotto secondo K-S e Shapiro-Wilk.

Tabella 22. Applicazione del test di normalità al titolo azionario SAP

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistica	gl	Sign.	Statistica	gl	Sign.
SAP	0,071	3294	,000	0,904	3294	,000

I logrendimenti del titolo SAP seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono stati accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso sinistra e presenti delle code grasse. Si riporta di seguito in Figura 36 il Q-Q plot relativo al titolo SAP.

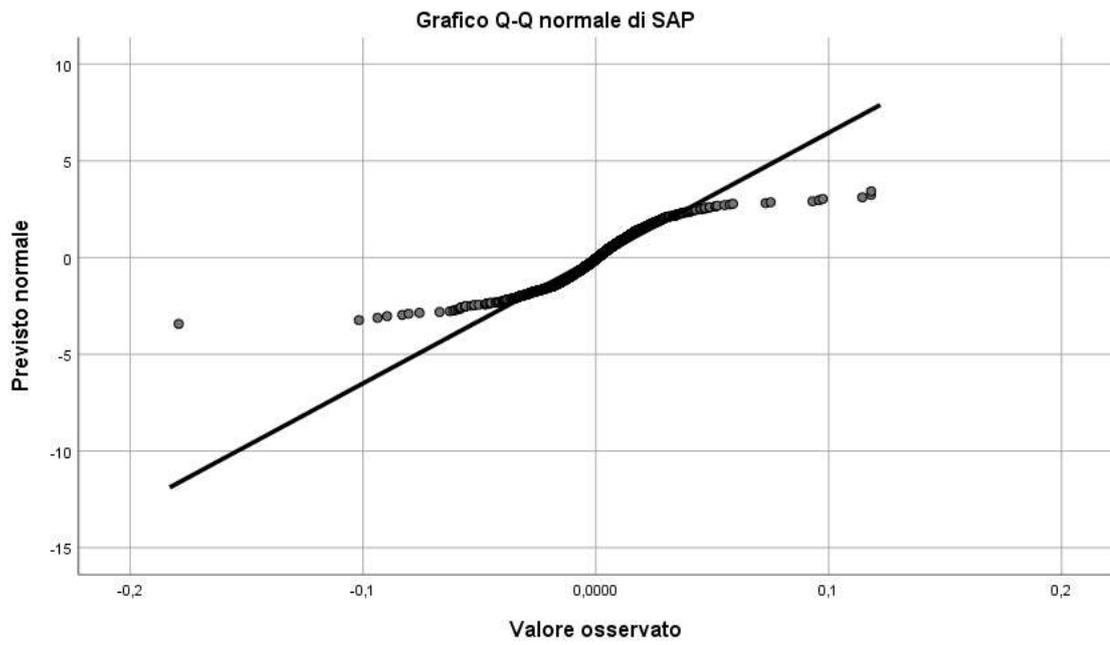


Figura 36. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario SAP

AIRBUS SE

Quello aerospaziale è sicuramente uno dei settori maggiormente colpiti dal lockdown imposto dai governi di tutto il mondo in seguito all'emergenza Coronavirus. Come si può notare dal grafico riportato in Figura 37, i rendimenti presentano, infatti, una variabilità altissima a partire da marzo 2020. Variazioni significative si verificano anche nel periodo compreso dal 2007 al 2009, con diversi picchi nel 2012, 2014 e 2018.

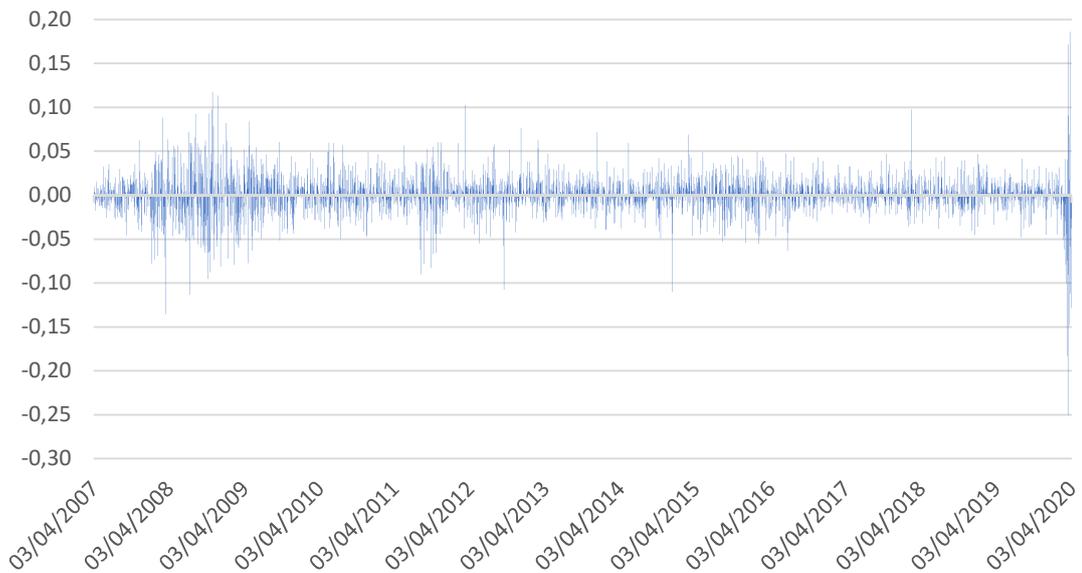


Figura 37. Andamento dei rendimenti del titolo AIRBUS

Dall'analisi dei dati si sono ricavate le statistiche descrittive riportate nella Tabella 23.

Tabella 23. Statistiche descrittive AIRBUS

Media	0,000292	Asimmetria	-0,52229
Errore standard	0,000402	Intervallo	0,436798
Mediana	0,000544	Minimo	-0,25062
Moda	0	Massimo	0,186175
Deviazione standard	0,023056	Somma	0,961855
Varianza campionaria	0,000532	Conteggio	3294
Curtosi	10,64024		

La Figura 38 sintetizza i risultati del test di K-S per il titolo azionario AIRBUS.

Numero totale di casi		3294
Differenze più estreme	Assoluta	0,072
	Positiva	0,066
	Negativa	-0,072
Statistica del test		0,072
Sign. asintotica (test a 2 vie)		,000 ^a

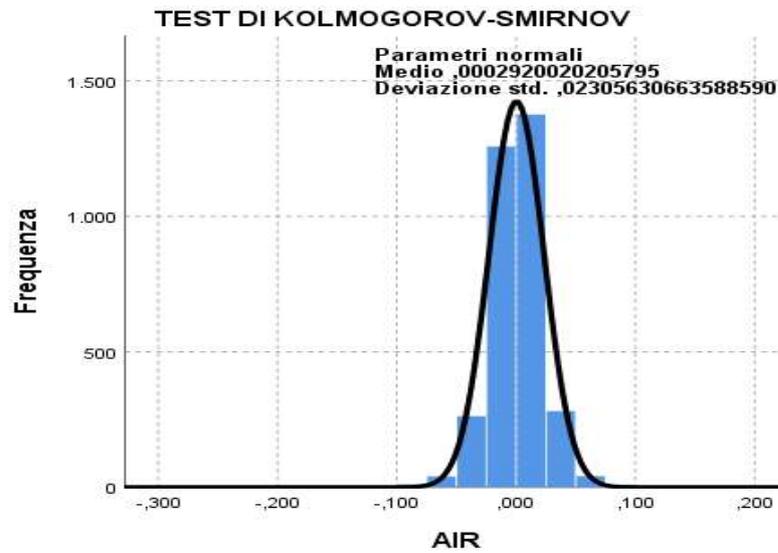


Figura 38. Applicazione del test di K-S al titolo azionario AIRBUS

La Tabella 24 riassume i risultati del test di normalità condotto secondo K-S e Shapiro-Wilk.

Tabella 24. Applicazione del test di normalità al titolo azionario AIRBUS

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistica	gl	Sign.	Statistica	gl	Sign.
AIR	0,072	3294	,000	0,918	3294	,000

Dal test di normalità e dal Q-Q plot riportato in Figura 39 è possibile dedurre che i rendimenti seguono una distribuzione normale, nonostante la curva risulti decentrata verso sinistra e presenti code grasse consistenti.

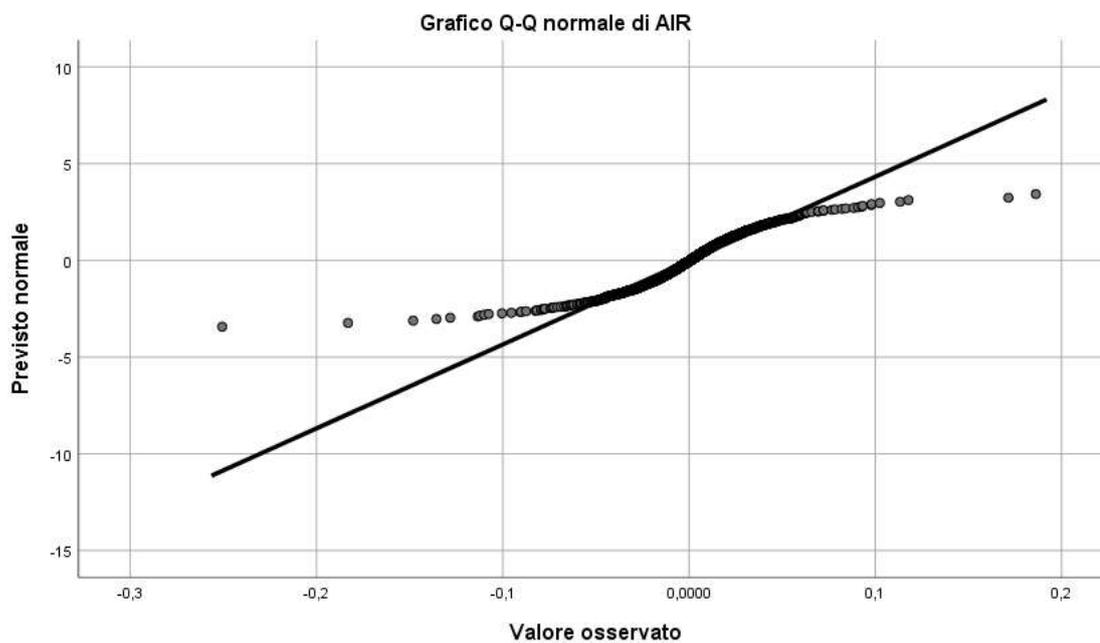


Figura 39. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario AIRBUS

L'OREAL S.A.

L'Oreal (OR), operante nel settore beauty & cosmetici, sembra aver retto meglio, rispetto ad aziende operanti in altri settori, all'impatto della pandemia. I rendimenti riportati in Figura 40 appaiono volatili ma tutto sommato contenuti nel primo trimestre 2020. La più alta oscillazione dei rendimenti si registra tra il 14/10/2008 e il 28/10/2008 in seguito alla crisi finanziaria di proporzioni mondiale.

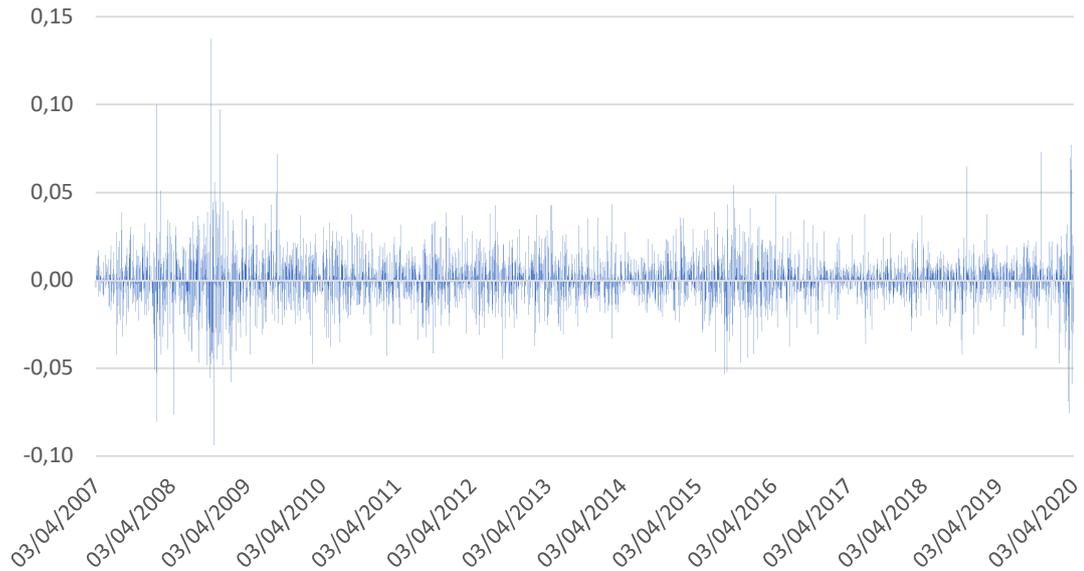


Figura 40. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo L'OREAL

Dall'analisi dei dati si sono ricavate le statistiche descrittive riportate nella Tabella 25.

Tabella 25. Statistiche descrittive OR

Media	0,000395	Asimmetria	0,211258
Errore standard	0,000259	Intervallo	0,231352
Mediana	0,000483	Minimo	-0,09386
Moda	0	Massimo	0,137489
Deviazione standard	0,014868	Somma	1,300165
Varianza campionaria	0,000221	Conteggio	3294
Curtosi	5,898722		

La Figura 41 sintetizza i risultati del test di K-S per il titolo azionario OR.

Numero totale di casi		3294
Differenze più estreme	Assoluta	0,057
	Positiva	0,054
	Negativa	-0,057
Statistica del test		0,057
Sign. asintotica (test a 2 vie)		,000 ^a

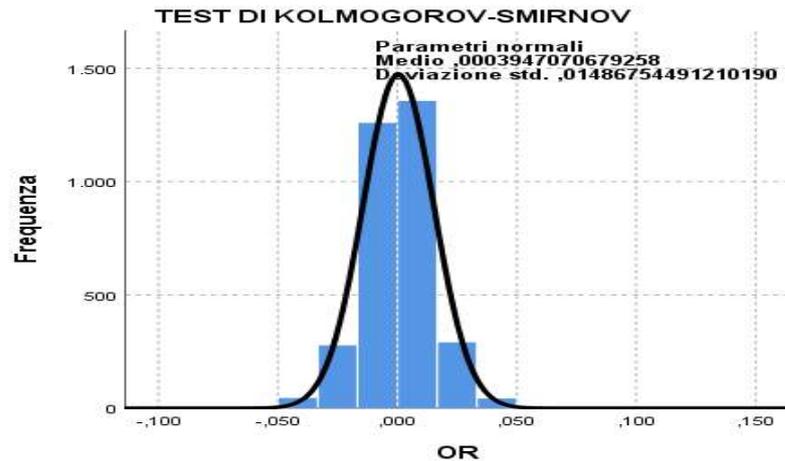


Figura 41. Applicazione del test di K-S al titolo azionario OR

La Tabella 26 riassume i risultati del test di normalità condotto secondo K-S e Shapiro-Wilk.

Tabella 26. Applicazione del test di normalità al titolo azionario OR

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistica	gl	Sign.	Statistica	gl	Sign.
OR	0,057	3294	,000	0,950	3294	,000

Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono accettati e il grafico Q-Q plot (Figura 42) risulta coerente con l'ipotesi nulla di normalità. La curva, avente espressione $NORM(0,000395; 0,014868)$, appare decentrata verso destra ma con code grasse poco significative.

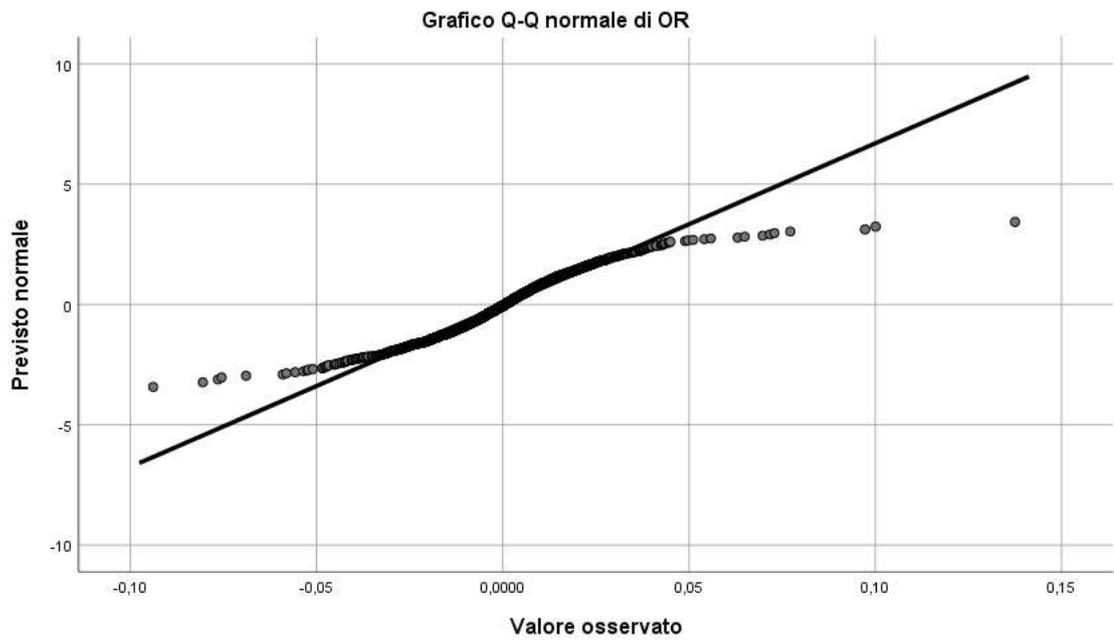


Figura 42. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario OR

AIR LIQUIDE S.A.

Dal grafico riportato in Figura 43, i logrendimenti appaiono particolarmente variabili nell'arco temporale che va da gennaio 2008 fino ad aprile 2009. Dopodiché risultano pressoché stabili fino a gennaio 2020, con un picco verso il basso il 02/10/2017. Essi tornano ad oscillare in maniera consistente a marzo 2020.

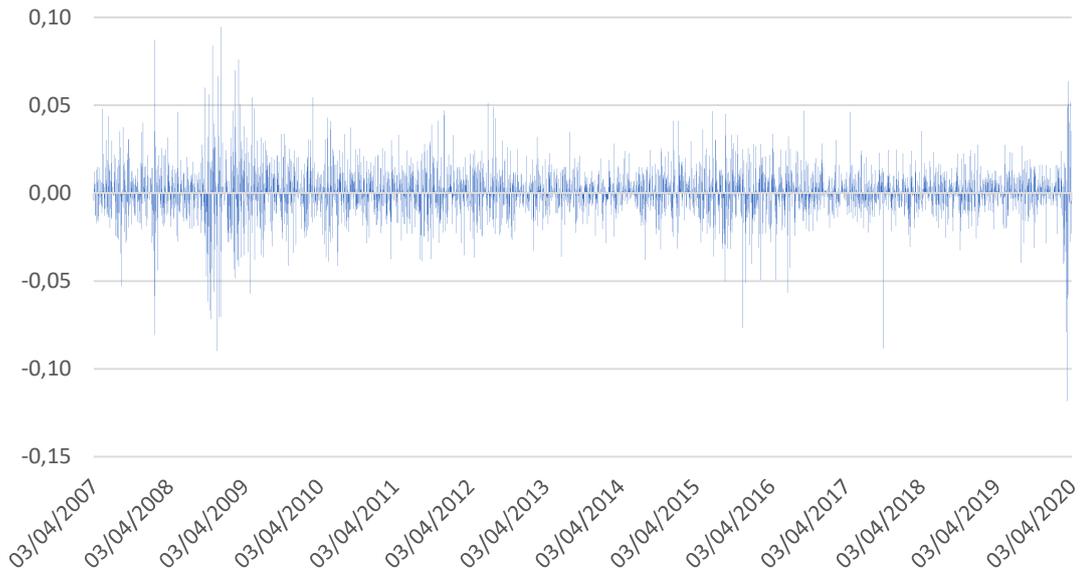


Figura 43. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo AIR LIQUIDE

Dall'analisi dei dati si sono ricavate le statistiche descrittive riportate nella Tabella 27.

Tabella 27. Statistiche descrittive AI

Media	0,000356	Asimmetria	-0,28792
Errore standard	0,00026	Intervallo	0,212876
Mediana	0,00051	Minimo	-0,11834
Moda	0	Massimo	0,094539
Deviazione standard	0,01494	Somma	1,171292
Varianza campionaria	0,000223	Conteggio	3294
Curtosi	5,530351		

La Figura 44 sintetizza i risultati del test di K-S per il titolo azionario AI.

Numero totale di casi		3294
Differenze più estreme	Assoluta	0,059
	Positiva	0,053
	Negativa	-0,059
Statistica del test		0,059
Sign. asintotica (test a 2 vie)		,000 ^a

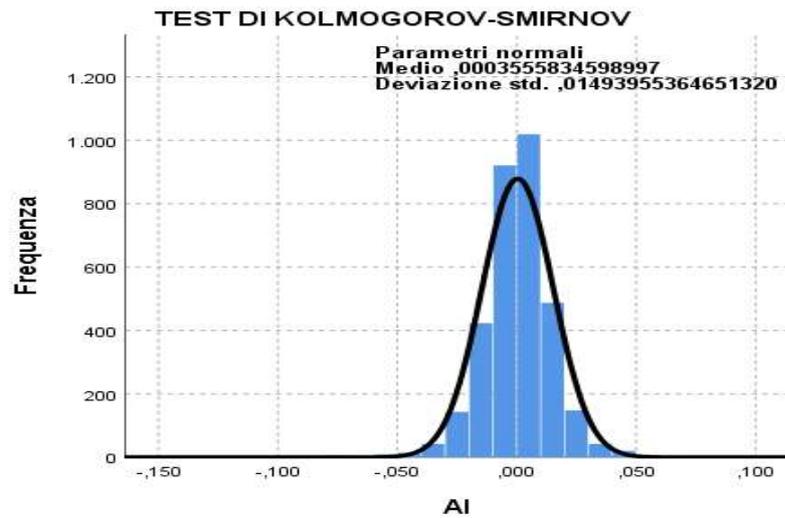


Figura 44. Applicazione del test di K-S al titolo azionario AI

La Tabella 28 riassume i risultati del test di normalità condotto secondo K-S e Shapiro-Wilk.

Tabella 28. Applicazione del test di normalità al titolo azionario AI

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistica	gl	Sign.	Statistica	gl	Sign.
AI	0,059	3294	,000	0,944	3294	,000

I logrendimenti del titolo Air Liquide seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso sinistra con code grasse contenute. In Figura 45 si riporta il grafico Q-Q plot relativo al titolo Air Liquide.

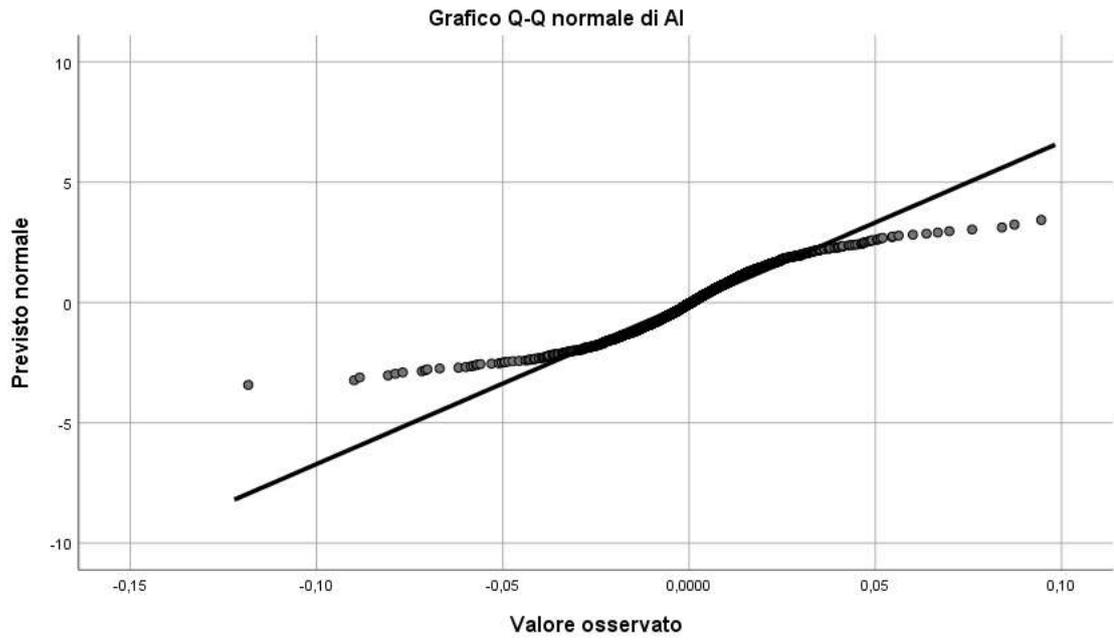


Figura 45. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario AI

KERING S.A.

Come riportato in Figura 46, l'andamento dei rendimenti del titolo è caratterizzato da frequenti oscillazioni per tutto l'orizzonte temporale di riferimento. Dopo le fluttuazioni dovute alla crisi finanziaria, sono osservabili diversi picchi probabilmente riconducibili alle numerose acquisizioni operate dal gruppo. Nel 2014, infatti, Kering acquisì il Gruppo Sowind (proprietario del marchio di alta gioielleria svizzero Girard-Perregaux), il marchio italiano di alta sartoria Brioni (2011), il Gruppo italiano Pomellato (Pomellato e Dodo), il marchio di gioielleria cinese Qeelin (2012), il marchio britannico Christopher Kane e il marchio di orologi di lusso Ulysse Nardin (2014). Kering fece il suo ingresso anche nel ramo dello sport&lifestyle con l'acquisizione di Puma nel 2007, Golf di Cobra nel 2010 e Volcom nel 2011. A maggio 2019 si registra una fluttuazione verso il basso dovuta all'inchiesta per evasione fiscale da parte del marchio Gucci di un miliardo di euro tra il 2011 e il 2017 attraverso le proprie sedi nel Canton Ticino. Il 2020 è caratterizzato da ampie oscillazioni.

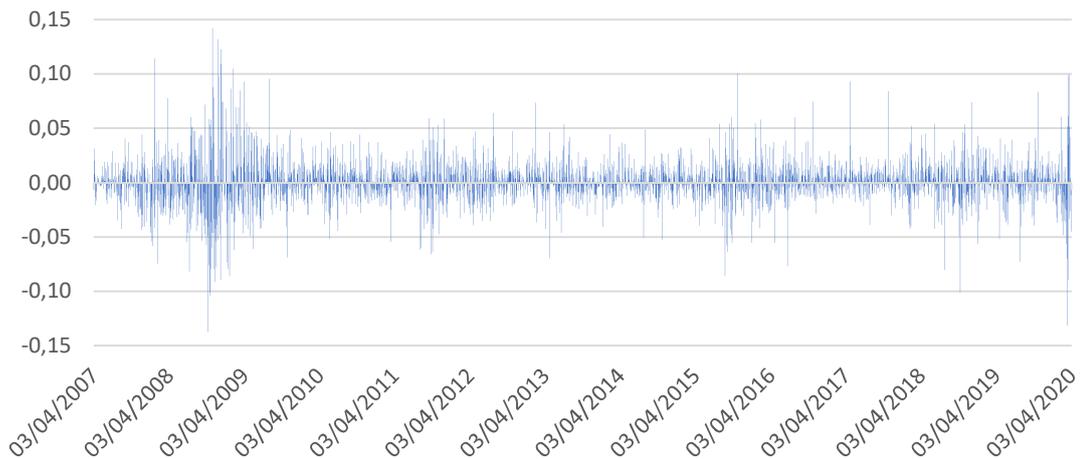


Figura 46. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo KERING

Dall'analisi dei dati si sono ricavate le statistiche descrittive riportate nella Tabella 29.

Tabella 29. Statistiche descrittive KER

Media	0,000544	Asimmetria	0,198547
Errore standard	0,000366	Intervallo	0,279519
Mediana	0,00035	Minimo	-0,13724
Moda	0	Massimo	0,142274
Deviazione standard	0,021006	Somma	1,791164
Varianza campionaria	0,000441	Conteggio	3294
Curtosi	5,861627		

La Figura 47 sintetizza i risultati del test di K-S per il titolo azionario KER.

Numero totale di casi		3294
Differenze più estreme	Assoluta	0,076
	Positiva	0,074
	Negativa	-0,076
Statistica del test		0,075
Sign. asintotica (test a 2 vie)		,000 ^a

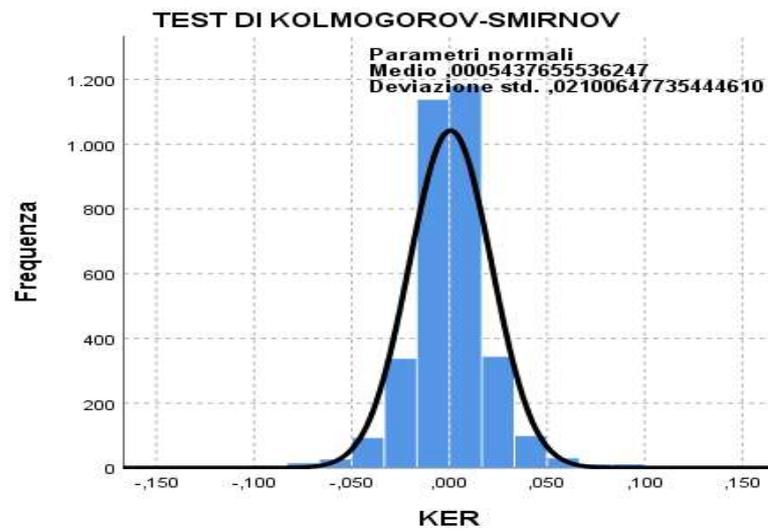


Figura 47. Applicazione del test di K-S al titolo azionario KER

La Tabella 30 riassume i risultati del test di normalità condotto secondo K-S e Shapiro-Wilk.

Tabella 30. Applicazione del test di normalità al titolo azionario KER

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistica	gl	Sign.	Statistica	gl	Sign.
KER	0,076	3294	,000	0,926	3294	,000

I rendimenti del titolo Kering sono approssimabili con una distribuzione normale la cui curva ha media pari a 0,000544 e deviazione standard pari a 0,021006. Il Q-Q plot è riportato in Figura 48.

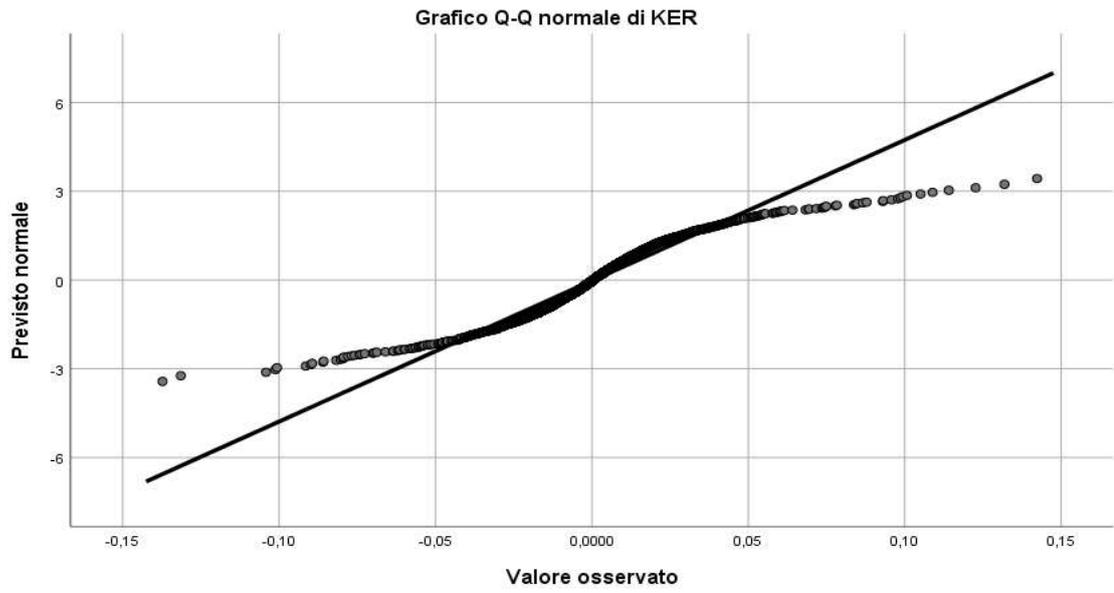


Figura 48. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario KER

ANHEUSER-BUSCH INBEV SA/NV

Il grafico riportato in Figura 49 mostra che i rendimenti del titolo ABI sono piuttosto stabili per tutto l'arco temporale che va dal 03/04/2007 al 02/04/2020. La volatilità aumenta in maniera significativa durante il periodo di crisi finanziaria (2008) e durante la pandemia da Coronavirus (2020).

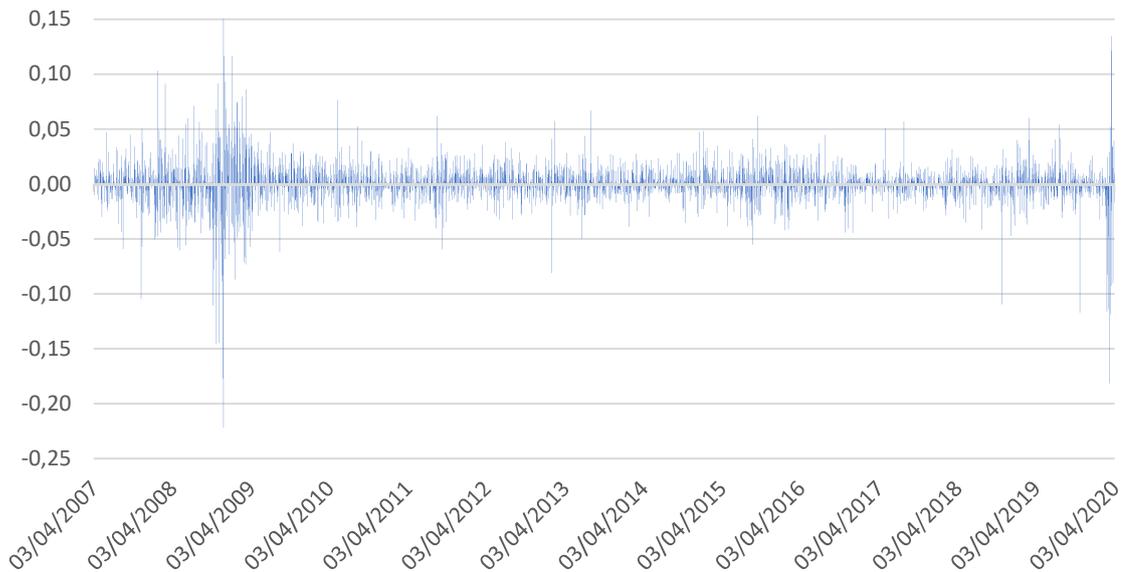


Figura 49. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo ANHEUSER-BUSCH INBEV

Dall'analisi dei dati si sono ricavate le statistiche descrittive riportate nella Tabella 31.

Tabella 31. Statistiche descrittive ABI

Media	0,000161	Asimmetria	-1,05636
Errore standard	0,000345	Intervallo	0,373197
Mediana	0,000388	Minimo	-0,22193
Moda	0	Massimo	0,151269
Deviazione standard	0,019776	Somma	0,531644
Varianza campionaria	0,000391	Conteggio	3294
Curtosi	17,00809		

La Figura 50 sintetizza i risultati del test di K-S per il titolo azionario ABI.

Numero totale di casi		3294
Differenze più estreme	Assoluta	0,097
	Positiva	0,085
	Negativa	-0,097
Statistica del test		0,097
Sign. asintotica (test a 2 vie)		,000 ^a

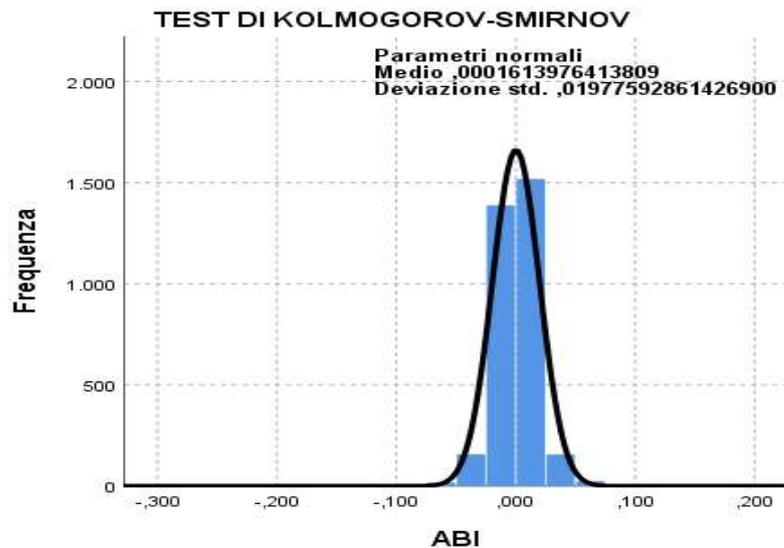


Figura 50. Applicazione del test di K-S al titolo azionario ABI

La Tabella 32 riassume i risultati del test di normalità condotto secondo K-S e Shapiro-Wilk.

Tabella 32. Applicazione del test di normalità al titolo azionario ABI

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistica	gl	Sign.	Statistica	gl	Sign.
ABI	0,097	3294	,000	0,853	3294	,000

Il grafico Q-Q plot è riportato in Figura 51. I logrendimenti del titolo Anheuser-Busch InBev seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso sinistra e presenti delle code grasse.

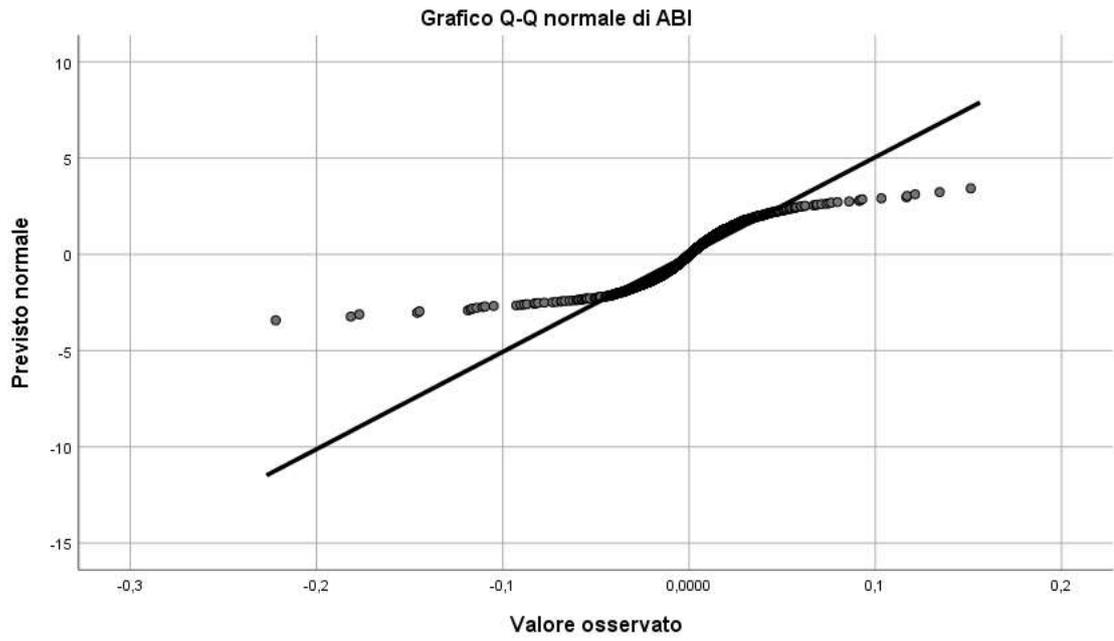


Figura 51. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario ABI

UNILEVER

L'andamento dei rendimenti del titolo UNA sono riportati in Figura 52. I rendimenti del titolo presentano delle variazioni rilevanti nel periodo compreso tra luglio 2007 e agosto 2009. Per un breve periodo si stabilizzano per poi ritornare a variare tra maggio e novembre 2010. Successivamente i rendimenti risultano stabili con delle variazioni ad agosto 2012, agosto 2014, settembre 2015, febbraio 2017 e marzo 2018. Unilever è stata bersaglio di diverse critiche nel corso degli anni; nel 2008, infatti, è stata accusata da Greenpeace per avere contribuito alla deforestazione della foresta pluviale indonesiana acquistando olio di palma da fornitori che non si occuperebbero di salvaguardare l'ambiente. In India la filiale di Unilever Hindustan Lever è stata accusata di inquinamento ambientale in una zona protetta del sud del paese per avere abusivamente scaricato scarti tossici di mercurio derivanti dalla produzione di termometri. Altre critiche riguardano i salari e le condizioni di lavoro in India.



Figura 52. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo UNILEVER

Dall'analisi dei dati si sono ricavate le statistiche descrittive riportate nella Tabella 33.

Tabella 33. Statistiche descrittive UNA

Media	0,000353	Asimmetria	0,015753
Errore standard	0,000255	Intervallo	0,204327
Mediana	0,000254	Minimo	-0,08816
Moda	0	Massimo	0,116166
Deviazione standard	0,014615	Somma	1,161239
Varianza campionaria	0,000214	Conteggio	3294
Curtosi	4,809493		

La Figura 53 sintetizza i risultati del test di K-S per il titolo azionario UNA.

Numero totale di casi		3294
Differenze più estreme	Assoluta	0,061
	Positiva	0,059
	Negativa	-0,061
Statistica del test		0,061
Sign. asintotica (test a 2 vie)		,000 ^a

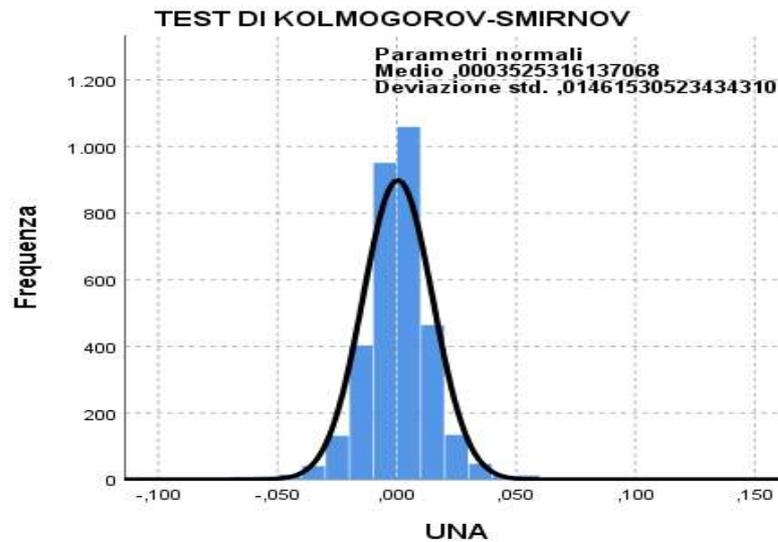


Figura 53. Applicazione del test di K-S al titolo azionario UNA

La Tabella 34 riassume i risultati del test di normalità condotto secondo K-S e Shapiro-Wilk.

Tabella 34. Applicazione del test di normalità al titolo azionario UNA

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistica	gl	Sign.	Statistica	gl	Sign.
UNA	0,061	3294	,000	0,949	3294	,000

Dal test di normalità e dal grafico Q-Q plot in Figura 54 è possibile asserire che i rendimenti logaritmici seguono una distribuzione normale. La curva, con espressione $NORM(0,000353; 0,014615)$, risulta lievemente decentrata verso destra e con code grasse poco consistenti.

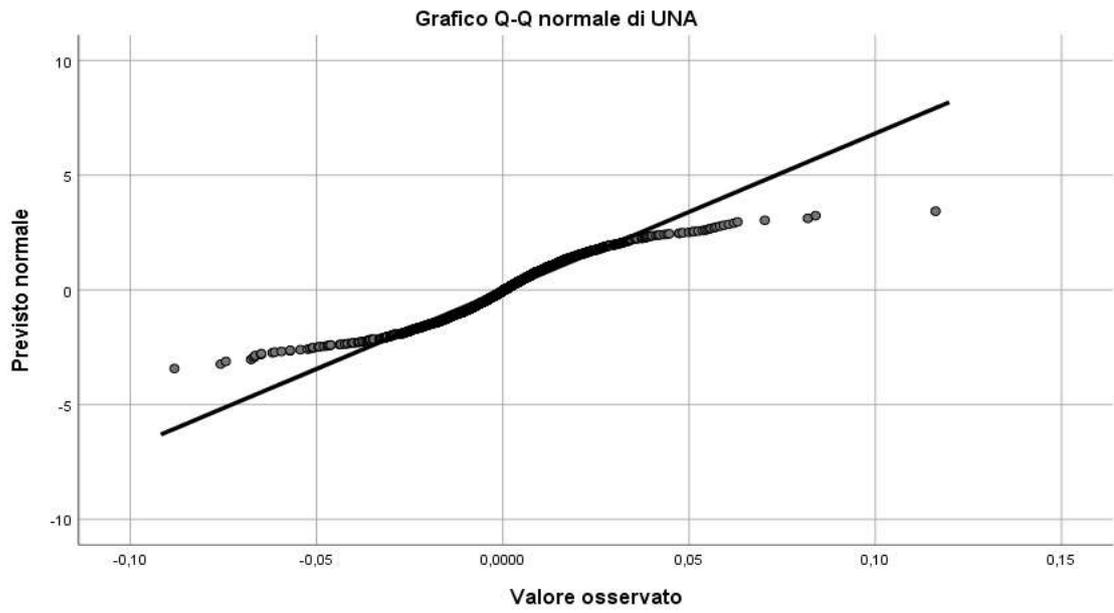


Figura 54. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario UNA

SANOFI

L'andamento dei rendimenti del titolo SANOFI è riportato in Figura 55. Il titolo registra una prima oscillazione a giugno 2007 che prosegue fino a giugno 2009 per poi stabilizzarsi. Altre variazioni significative si registrano ad agosto 2011 e ottobre 2014. Nel contesto della pandemia è una delle aziende che ha risposto meglio essendo in lizza per lo sviluppo di un vaccino contro il Covid.

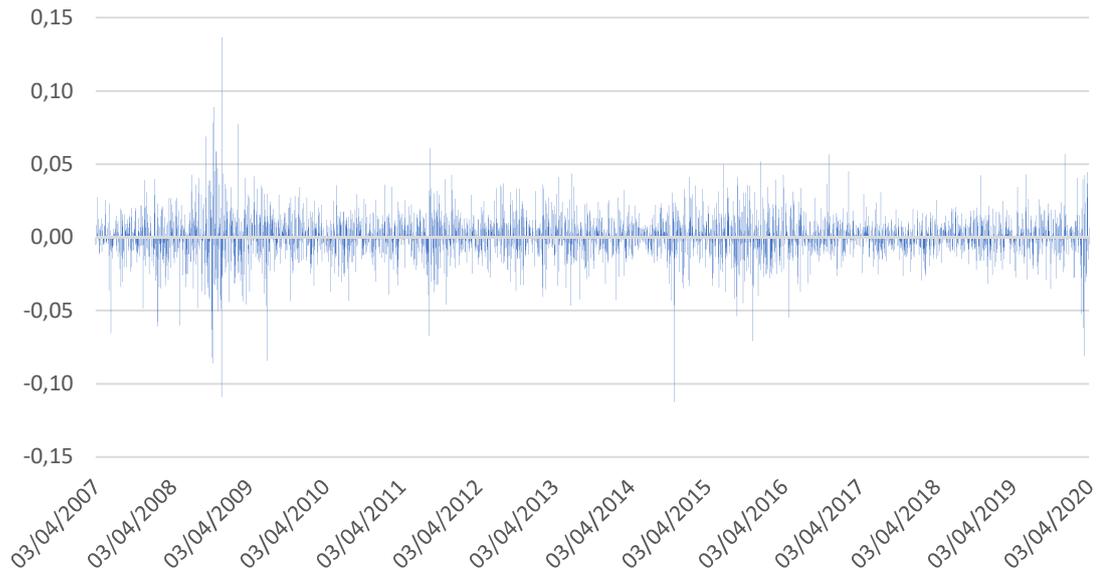


Figura 55. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo SANOFI

Dall'analisi dei dati si sono ricavate le statistiche descrittive riportate nella Tabella 35.

Tabella 35. Statistiche descrittive SAN

Media	0,000235	Asimmetria	-0,22619
Errore standard	0,000271	Intervallo	0,249258
Mediana	0,000562	Minimo	-0,11245
Moda	0	Massimo	0,136811
Deviazione standard	0,015579	Somma	0,775038
Varianza campionaria	0,000243	Conteggio	3294
Curtosi	5,928124		

La Figura 56 sintetizza i risultati del test di K-S per il titolo azionario SAN.

Numero totale di casi		3294
Differenze più estreme	Assoluta	0,055
	Positiva	0,048
	Negativa	-0,055
Statistica del test		0,055
Sign. asintotica (test a 2 vie)		,000 ^a

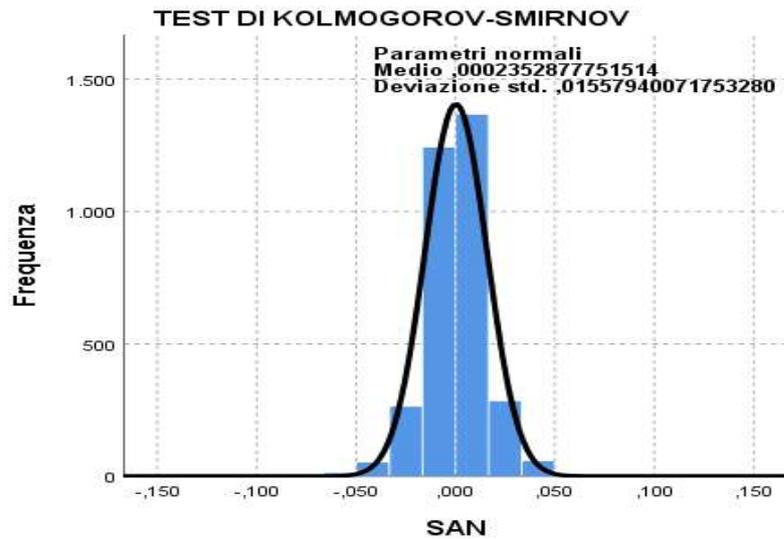


Figura 56. Applicazione del test di K-S al titolo azionario SAN

La Tabella 36 riassume i risultati del test di normalità condotto secondo K-S e Shapiro-Wilk.

Tabella 36. Applicazione del test di normalità al titolo azionario SAN

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistica	gl	Sign.	Statistica	gl	Sign.
SAN	0,055	3294	,000	0,948	3294	,000

I logrendimenti del titolo Sanofi seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono stati accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso sinistra e presenti delle code grasse. Il grafico Q-Q plot è riportato in Figura 57.

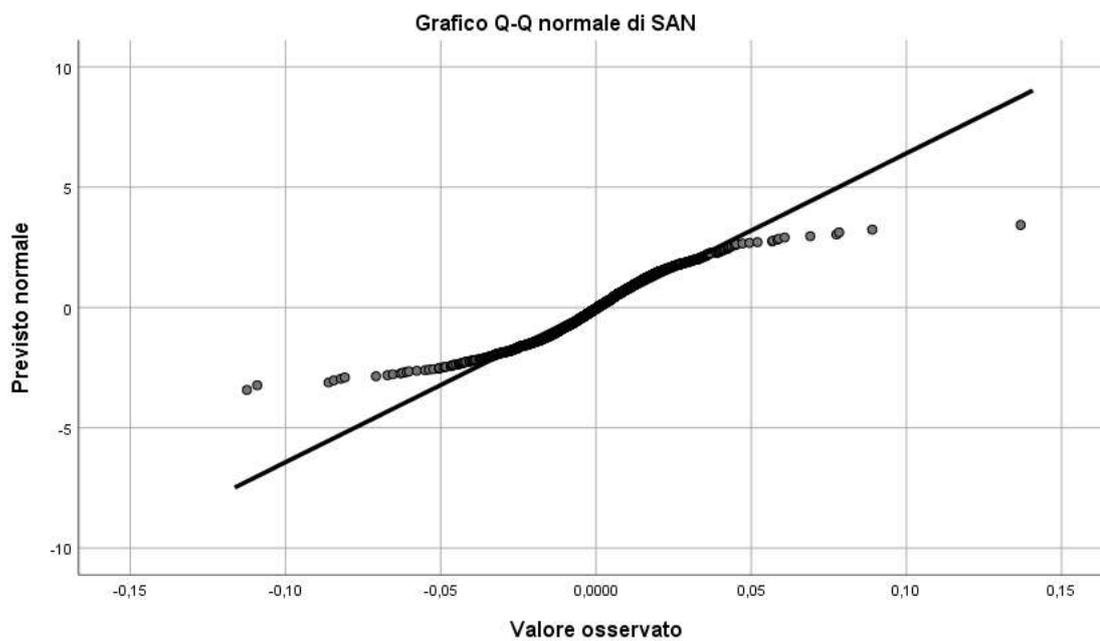


Figura 57. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario SAN

LVMH MOËT HENNESSY LOUIS VUITTON

L'andamento dei rendimenti del titolo LVMH è riportato in Figura 58. Il titolo mostra un andamento piuttosto turbolento per tutta la finestra temporale con pochi periodi a volatilità contenuta. I periodi a maggiore variabilità sono legati alla crisi finanziaria del 2008 e alla pandemia da Coronavirus nel primo trimestre 2020.

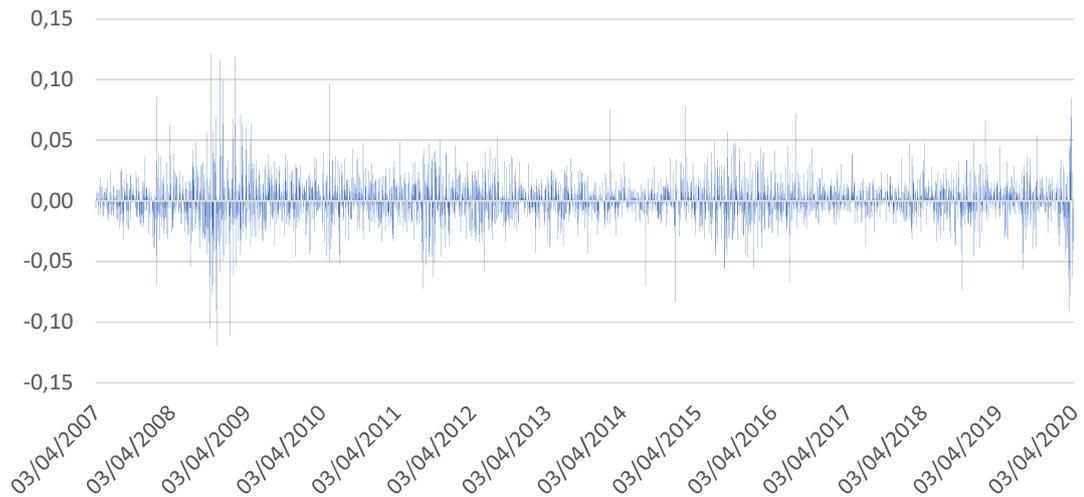


Figura 58. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo LVMH

L'andamento dei rendimenti del titolo LVMH è riportato in Figura 58. Il titolo mostra un andamento piuttosto turbolento per tutta la finestra temporale con pochi periodi a volatilità contenuta. I periodi a maggiore variabilità sono legati alla crisi finanziaria del 2008 e alla pandemia da Coronavirus nel primo trimestre 2020.

Dall'analisi dei dati si sono ricavate le statistiche descrittive riportate nella Tabella 37.

Tabella 37. Statistiche descrittive LVMH

Media	0,000495	Asimmetria	0,031173
Errore standard	0,000322	Intervallo	0,240683
Mediana	0,000668	Minimo	-0,11931
Moda	0	Massimo	0,121377
Deviazione standard	0,018491	Somma	1,63152
Varianza campionaria	0,000342	Conteggio	3294
Curtosi	4,923103		

La Figura 59 sintetizza i risultati del test di K-S per il titolo azionario LVMH.

Numero totale di casi		3294
Differenze più estreme	Assoluta	0,060
	Positiva	0,060
	Negativa	-0,057
Statistica del test		0,060
Sign. asintotica (test a 2 vie)		,000 ^a

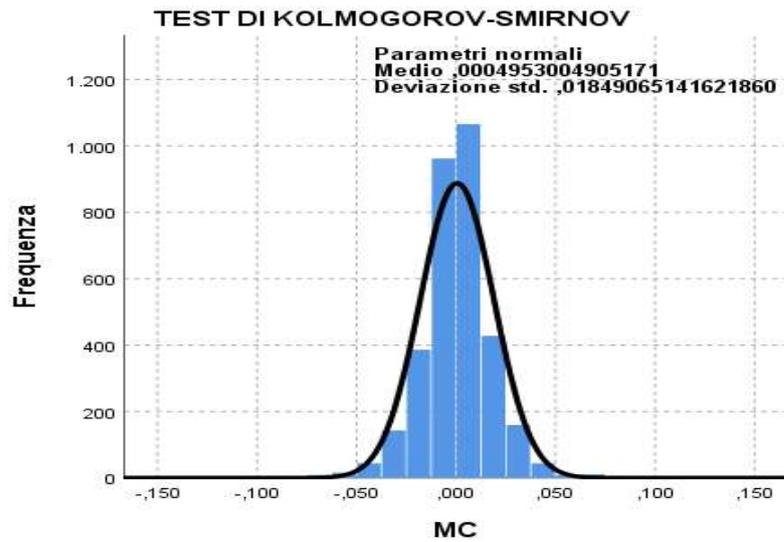


Figura 59. Applicazione del test di K-S al titolo azionario LVMH

La Tabella 38 riassume i risultati del test di normalità condotto secondo K-S e Shapiro-Wilk.

Tabella 38. Applicazione del test di normalità al titolo azionario LVMH

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistica	gl	Sign.	Statistica	gl	Sign.
LVMH	0,060	3294	,000	0,949	3294	,000

I logrendimenti seguono una distribuzione normale con curva avente media pari a 0,000495 e deviazione standard pari a 0,018491. Il grafico Q-Q plot è riportato in Figura 60.

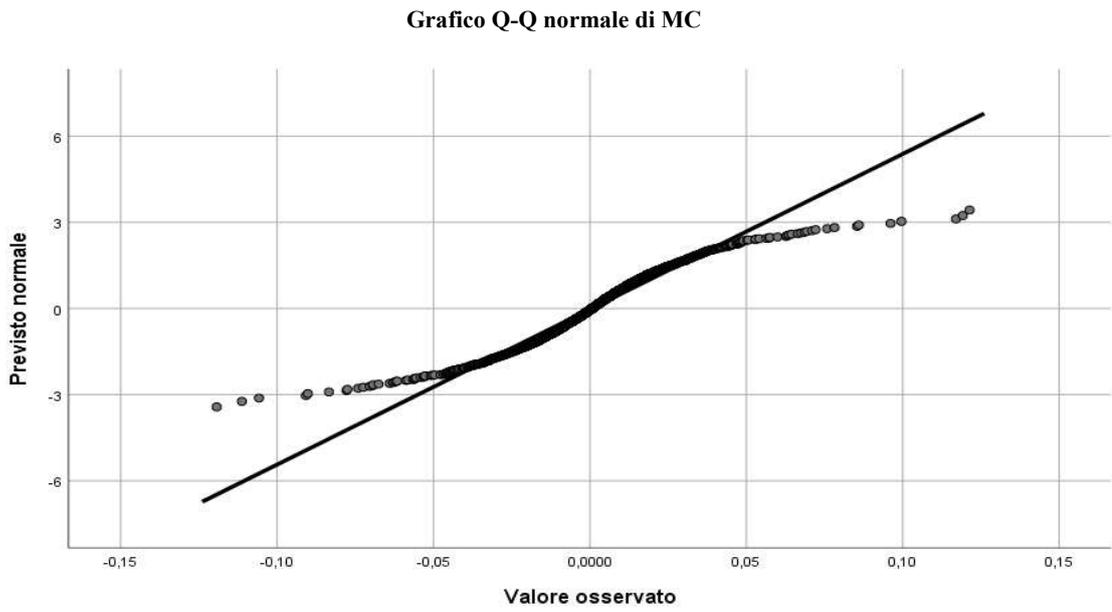


Figura 60. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario LVMH

TOTAL SA

Total è un'azienda che opera nel settore petrolifero in cui il prezzo della commodity dipende da questioni geopolitiche ed economiche. L'andamento del titolo (Figura 61), tuttavia, risulta tutto sommato stabile con poche oscillazioni significative (agosto 2015 e febbraio/giugno 2016). Inoltre il settore petrolifero è stato duramente colpito dal lockdown imposto dai governi, come si evince dal grafico.

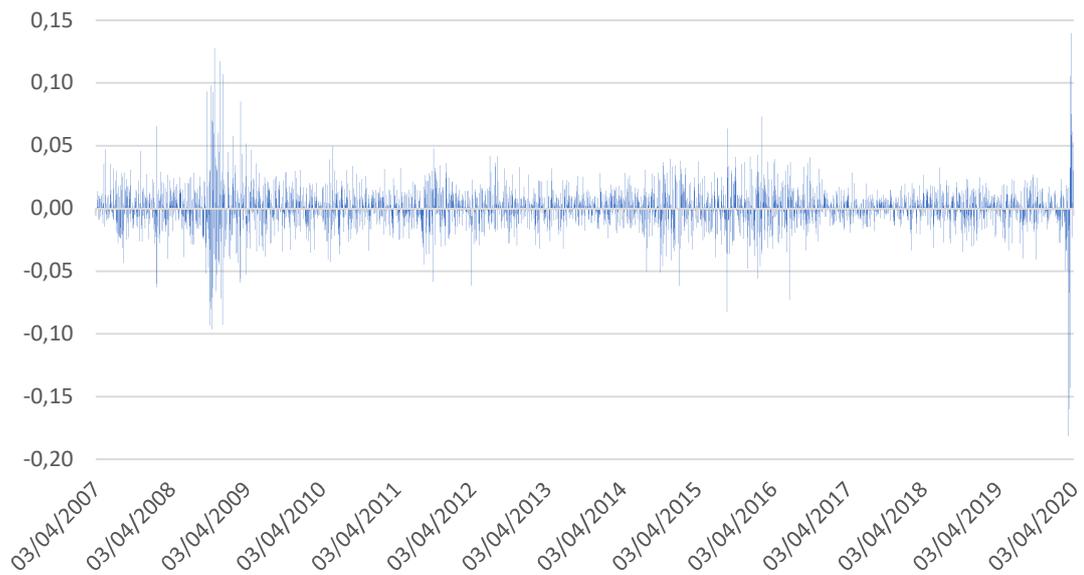


Figura 61. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo TOTAL

Dall'analisi dei dati si sono ricavate le statistiche descrittive riportate nella Tabella 39.

Tabella 39. Statistiche descrittive TOTAL

Media	0,000115	Asimmetria	-0,39665
Errore standard	0,000301	Intervallo	0,321384
Mediana	0,00053	Minimo	-0,18162
Moda	0	Massimo	0,139762
Deviazione standard	0,017276	Somma	0,378343
Varianza campionaria	0,000298	Conteggio	3294
Curtosi	13,59871		

La Figura 62 sintetizza i risultati del test di K-S per il titolo azionario TOTAL.

Numero totale di casi		3294
Differenze più estreme	Assoluta	0,072
	Positiva	0,072
	Negativa	-0,069
Statistica del test		0,072
Sign. asintotica (test a 2 vie)		,000 ^a

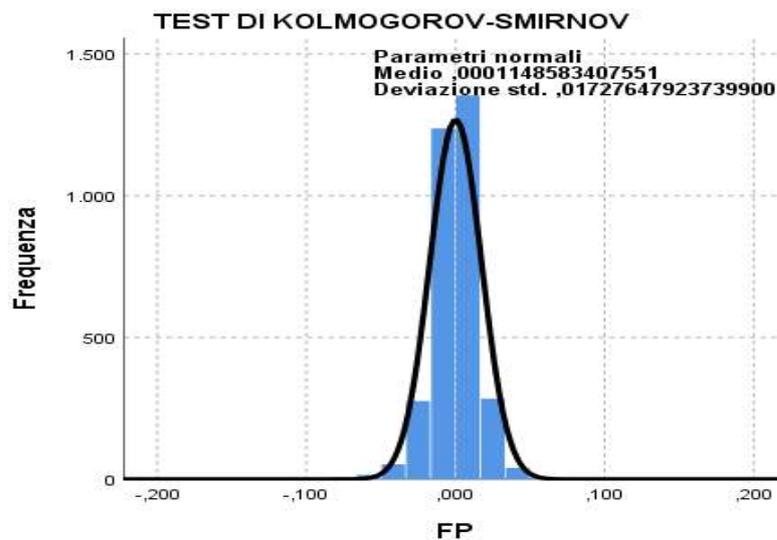


Figura 62. Applicazione del test di K-S al titolo azionario TOTAL

La Tabella 40 riassume i risultati del test di normalità condotto secondo K-S e Shapiro-Wilk.

Tabella 40. Applicazione del test di normalità al titolo azionario TOTAL

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistica	gl	Sign.	Statistica	gl	Sign.
TOTAL	0,072	3294	,000	0,892	3294	,000

I logrendimenti del titolo Total SA seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono stati accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso sinistra e presenti delle code grasse. Il grafico Q-Q plot è riportato in Figura 63.

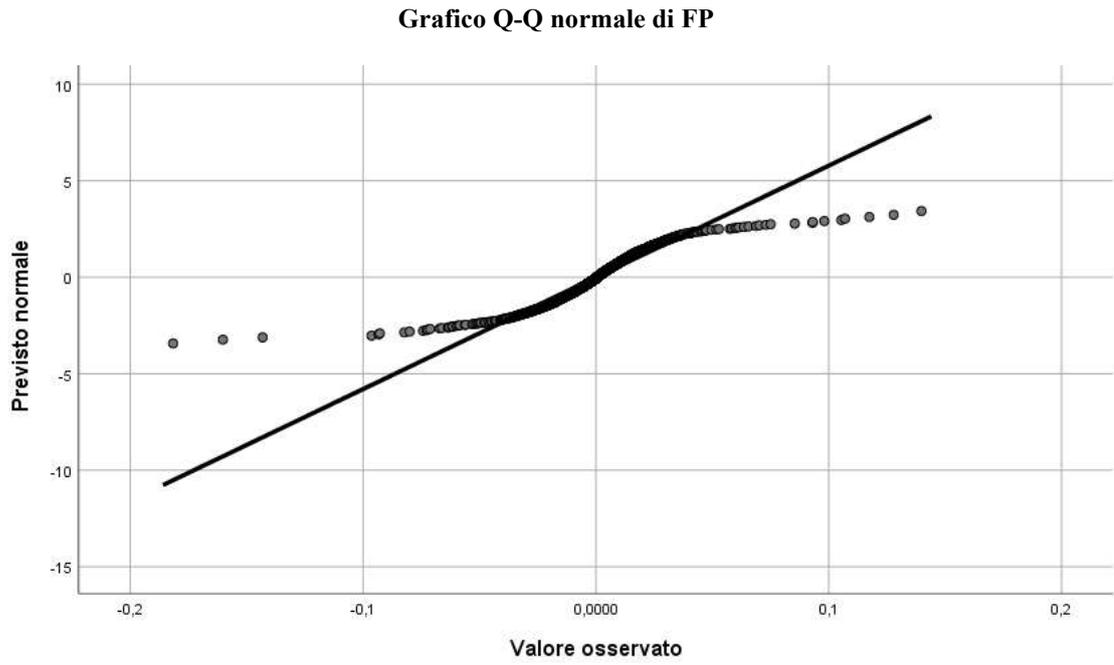


Figura 63. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario TOTAL

ASML HOLDING N.V.

L'andamento dei rendimenti del titolo ASML è riportato in Figura 64. I rendimenti risultano variabili già da maggio del 2007 registrando diversi picchi, di cui il più significativo il 26/11/2012.

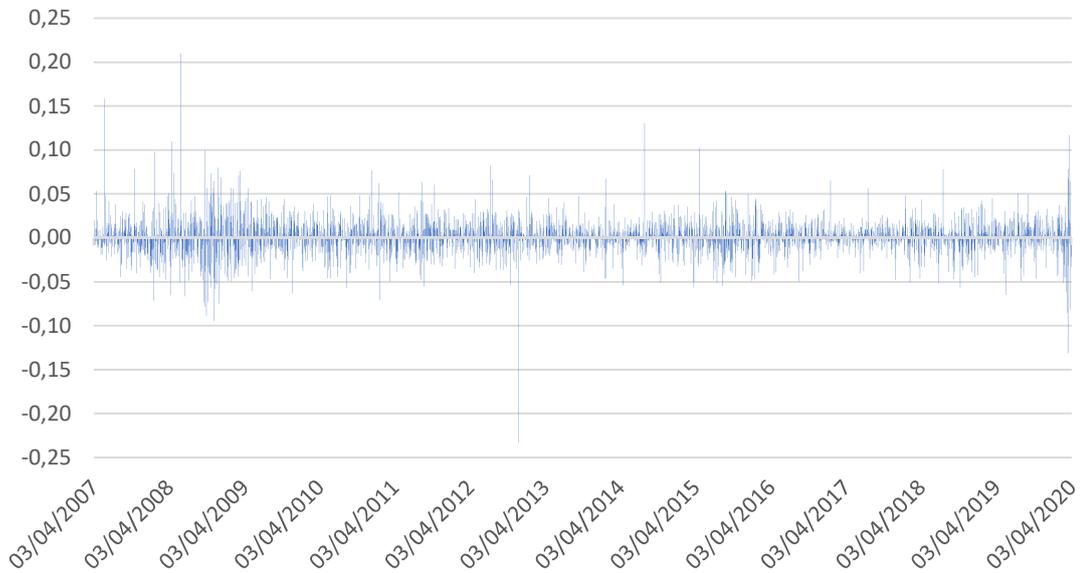


Figura 64. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo ASML

Dall'analisi dei dati si sono ricavate le statistiche descrittive riportate nella Tabella 41.

Tabella 41. Statistiche descrittive ASML

Media	0,000809	Asimmetria	0,097402
Errore standard	0,000366	Intervallo	0,443338
Mediana	0,000835	Minimo	-0,23318
Moda	0	Massimo	0,210159
Deviazione standard	0,020992	Somma	2,665528
Varianza campionaria	0,000441	Conteggio	3294
Curtosi	11,10949		

La Figura 65 sintetizza i risultati del test di K-S per il titolo azionario ASML.

Numero totale di casi		3294
Differenze più estreme	Assoluta	0,061
	Positiva	0,055
	Negativa	-0,061
Statistica del test		0,061
Sign. asintotica (test a 2 vie)		,000 ^a

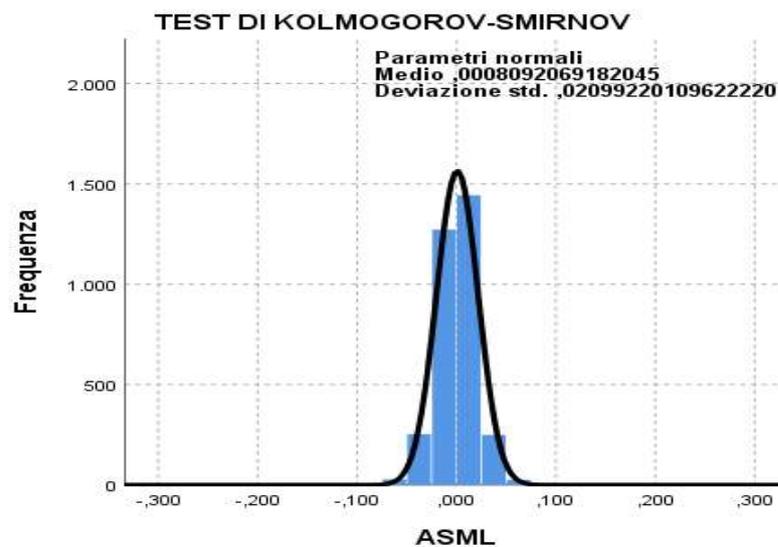


Figura 65. Applicazione del test di K-S al titolo azionario ASML

La Tabella 42 riassume i risultati del test di normalità condotto secondo K-S e Shapiro-Wilk.

Tabella 42. Applicazione del test di normalità al titolo azionario ASML

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistica	gl	Sign.	Statistica	gl	Sign.
ASML	0,061	3294	,000	0,929	3294	,000

I logrendimenti del titolo ASML Holding seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso destra e presenti delle code grasse. Il grafico Q-Q plot è riportato in Figura 66.

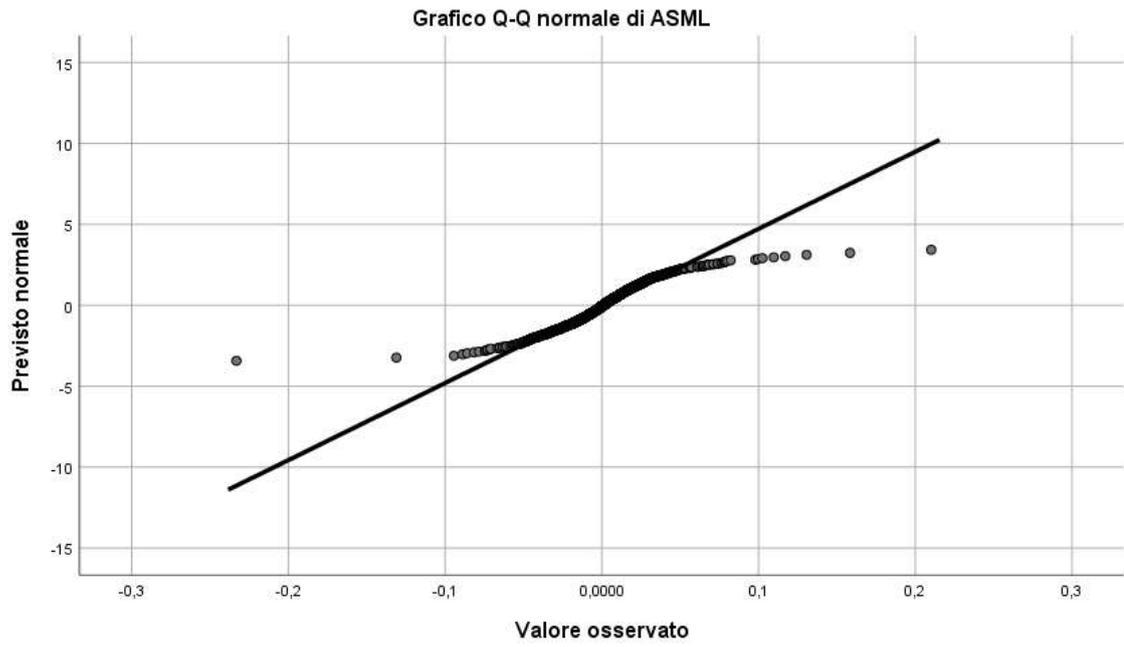


Figura 66. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario ASML

4.3 Considerazioni conclusive sull'analisi dei dati e sui risultati dei test statistici

Dall'analisi effettuata sui rendimenti logaritmici dei 20 titoli emerge un aumento considerevole della volatilità, ovvero del rischio degli stessi, alla fine del 2007 che prosegue nel corso del 2008 e per buona parte del 2009. L'aumento della volatilità dei titoli è imputabile alla crisi finanziaria di proporzioni globale verificatasi in quegli anni. La crisi dei mutui sub-prime iniziò a manifestarsi nel 2006 e scoppiò nel 2008, anno in cui i risparmiatori statunitensi cominciarono a non ripagare più i mutui che avevano contratto con le banche, dando avvio a un massiccio aumento dei pignoramenti (1,7 milioni di case coinvolte nel solo 2007) che a sua volta provocò un deprezzamento generale del mercato immobiliare. All'origine di questo fenomeno vi fu la vertiginosa crescita del mercato immobiliare negli Stati Uniti, con il forte aumento dei prezzi delle abitazioni e la successiva espansione degli investimenti nel settore. Tale bolla speculativa si espanse di pari passo col costante apprezzamento delle case. L'indebitamento delle famiglie statunitensi (che per la maggior parte non aveva presentato alcuna garanzia di pagamento) provocò nel 2006 l'esplosione dei prezzi delle attività e in particolare di quelli immobiliari; l'indebitamento aumentava al crescere del valore delle proprietà immobiliari. La caduta dei prezzi nel 2007 provocò l'esplosione del valore dei mutui a livelli superiori alla consistenza stessa del valore delle abitazioni. Le famiglie maggiormente indebitate avevano scommesso sul protrarsi della crescita, ignorando il rischio di un rovesciamento del mercato. L'esplosione della bolla dei mutui fu amplificata dal fatto che le banche statunitensi, al fine di ridurre l'esposizione rispetto a questi prodotti finanziari altamente rischiosi, vendevano a terzi i mutui stessi attraverso diversi strumenti finanziari, parcellizzandoli e riassemblebrandoli con altri prodotti (CDO, CMO, CLO, ABS). In questo modo le banche scaricavano su altri soggetti (inizialmente investitori istituzionali ma poi anche banche e risparmiatori) i rischi corsi concedendo tali finanziamenti. La cartolarizzazione dei mutui subprime moltiplicava spesso i rendimenti in quanto chiedeva un ulteriore rendimento ai soggetti a cui si rivendevano i derivati dei mutui secondari. Tali processi hanno reso infetto l'intero sistema finanziario mondiale di questi titoli, a un certo punto della crisi conosciuti, con un'espressione peggiorativa ma efficace, come "tossici". La cartolarizzazione e il successivo "impacchettamento" di tali titoli con una parte di titoli garantiti aveva lo scopo di alzare il giudizio di affidabilità delle agenzie, cosicché a un rapporto maggiore di titoli sani rispetto a quelli tossici nello stesso "pacchetto" sarebbe corrisposta una qualità del rating superiore. La forte svalutazione di questi strumenti innescò difficoltà economiche in alcuni fra i

più grandi istituti di credito americani. Bear Stearns, Lehman Brothers e AIG vennero ridotti al collasso e poi messi in sicurezza dall'intervento del Tesoro statunitense di concerto con la FED.

Anche le banche europee furono investite dalla svalutazione dei titoli immobiliari, venendo successivamente nazionalizzate o costrette a ricapitalizzarsi. Dopo diversi mesi di debolezza e perdita di impieghi, il fenomeno è collassato tra il 2007 e il 2008 causando la bancarotta di banche ed entità finanziarie e determinando una forte riduzione dei valori borsistici e della capacità di consumo e risparmio della popolazione, con effetti immediatamente recessivi sull'economia. Il 2009 ha infatti visto una crisi economica generalizzata, pesanti recessioni e vertiginosi crolli del Pil in numerosi paesi del mondo e in special modo nel mondo occidentale. Terminata la recessione nel terzo trimestre 2009, tra la fine dello stesso anno e il 2010 si è verificata una parziale ripresa economica.

Tra il 2010 e il 2011 si è conosciuto l'allargamento della crisi ai debiti sovrani e alle finanze pubbliche di molti paesi (in larga misura gravati dalle spese affrontate nel sostegno ai sistemi bancari), soprattutto di paesi dell'eurozona (impossibilitati a operare manovre sul tasso di cambio o ad attuare politiche di credito espansive e di monetizzazione), che in alcuni casi hanno evitato l'insolvenza sovrana (Portogallo, Irlanda). Ciò è avvenuto grazie all'erogazione di ingenti prestiti da parte di FMI, BCE e Commissione Europea (la cosiddetta troika), denominati "piani di salvataggio", volti a scongiurare possibili default al prezzo, però, di politiche di bilancio fortemente restrittive sui conti pubblici (austerità) con freno ai consumi, alla produzione e all'alimentazione della spirale recessiva.

Tra il 2012 e il 2019 i rendimenti appaiono pressoché stabili per tutti i 20 titoli e con volatilità contenute, tralasciando le oscillazioni dovute ad eventi straordinari. Le fluttuazioni tornano ad essere significative a partire da marzo 2020 in seguito all'emergenza sanitaria legata alla pandemia da Covid-19. Ancora non si conosce l'effettiva portata che questa crisi economica determinerà nei mercati finanziari negli anni a venire. C'è da dire che, rispetto alle precedenti crisi finanziarie, cui ricordiamo le più gravi del 1929 e del 2008, quella attuale certamente non è legata alle speculazioni o alle crisi del sistema bancario. Si tratta, invece, di una crisi economica che incide sulla produzione di beni e servizi e sulla diminuzione del prodotto interno lordo e che, per la sua estensione geografica, ha coinvolto gran parte dei paesi del mondo o, perlomeno, quelli economicamente più avanzati. Nessun settore e nessuna area geografica è stata

infatti risparmiata dagli effetti collaterali provocati dal virus, con le Borse Valori crollate ai minimi storici. La congiuntura tra crisi sanitaria e crisi economica spinge gli esperti a dipingere la situazione attuale come drammatica parlando di “una crisi senza precedenti” le cui prospettive, perlomeno nell'immediato futuro, sembrano tutt'altro che rosee.

Il Fondo Monetario Internazionale (FMI), attraverso un dettagliato studio, ha delineato i possibili scenari futuri prevedendo una contrazione del PIL mondiale di circa il 3%. Ciò corrisponderebbe ad una perdita globale di circa 9 mila miliardi di dollari legata anche all'incertezza dell'evoluzione del contagio del virus nel futuro e della capacità che avranno i paesi nel mettere in atto misure per favorire la ripresa e la crescita economica.

L'Italia è uno dei Paesi che saranno maggiormente colpiti dalla crisi. Le previsioni del Fondo Monetario Internazionale, infatti, dicono che quest'anno il PIL italiano potrebbe arrivare a perdere fino al 9,1%, a fronte di una previsione dello 0,5%, con un crollo dell'occupazione che attesterà il tasso di disoccupazione al 12,7%. Le indicazioni dell'istituzione internazionale prevedono un quadro in miglioramento nel 2021 con un recupero del 5% circa a condizione di un effettivo controllo del contagio e della conseguente ripresa economica, con un tasso di disoccupazione che il prossimo anno potrebbe scendere al 10,7%.

Il nostro paese, dopo la Grecia, sconta più di tutti la crisi per fattori legati al sistema economico produttivo, già compromesso prima della crisi, poiché non ha saputo riformare il sistema istituzionale ed alleggerire la pesantezza burocratica che attanaglia le imprese. A ciò si aggiunge un elevato debito pubblico che impedisce il ricorso ai mercati finanziari per reperire la liquidità necessaria per far fronte al sostegno delle imprese e delle famiglie colpite dalla crisi, se non attraverso l'onere di un elevato spread che a sua volta porterà ad un aggravamento del debito stesso e ad un'ulteriore diminuzione del prodotto interno lordo. Un intervento della BCE potrebbe risollevarla la situazione. La Banca Centrale Europea si è già espressa comprando parte del debito pubblico italiano attraverso lo strumento di politica monetaria (“quantitative easing”) e con altri strumenti finanziari, attualmente in discussione in sede delle istituzioni europee, quali il Recovery Fund, il SURE per il contrasto alla disoccupazione o il MES senza condizioni di politiche restrittive.

Anche la situazione europea presenta non poche criticità. L'FMI stima che soltanto la Grecia farà peggio dell'Italia nel 2020, con un PIL che potrebbe perdere il 10% a dispetto di una contrazione del Prodotto Interno Lordo italiano

del 9,1%. La media dell'Eurozona dovrebbe attestarsi su un calo del 7,5%. Qualora la circolazione del virus dovesse essere controllata entro la fine dell'anno in corso, con la successiva ripresa dell'economia continentale, nel 2021 si potrebbe assistere ad un incremento del PIL europeo del 4,7%.

Per quanto riguarda il panorama mondiale, il PIL USA dovrebbe contrarsi del 5,9% nel 2020, per poi risollevarsi nel 2021 con un incremento del 4,7%, in linea con le stime per l'Eurozona. A preoccupare nel Paese americano è la situazione socioeconomica, con i disoccupati che hanno raggiunto il livello record di 30 milioni di persone nell'ultima settimana di aprile di quest'anno. Il tasso di disoccupazione è salito dal 3,5% (il valore più basso registrato negli ultimi 50 anni) fino al 4,4%, sebbene le stime della Federal Reserve prevedano il raggiungimento di un livello vicino al 10% entro la fine dell'anno. Il PIL cinese è crollato del 6,8% nel primo trimestre del 2020, tuttavia dovrebbe chiudere l'anno in positivo. Un risultato che sembra rassicurante, dunque, ma che è ben al di sotto delle prestazioni registrate dal gigante asiatico negli ultimi anni, quando l'economia cinese cresceva con una media del 6%.

La pandemia Covid-19 sta mettendo a dura prova l'economia mondiale, con i Paesi alle prese con il contenimento del virus e l'emergenza sanitaria. L'FMI indica come ben 170 Paesi potrebbero presentare una crescita negativa nel 2020, con una contrazione media del 6% negli Stati avanzati e dell'1% nelle nazioni emergenti. Nella migliore delle ipotesi, quindi, con il contenimento del virus entro la seconda metà del 2020, il crollo del PIL mondiale sarà del 3%. Un quadro meno rassicurante ci sarebbe, invece, se non si riuscisse a contenere la diffusione del virus; ciò potrebbe amplificare la crisi economica causando una recessione anche nel 2021. Con un tale scenario si assisterebbe ad una contrazione del PIL mondiale del 2,2%.

Nonostante tali previsioni, i Paesi hanno a disposizione diversi strumenti per rivitalizzare l'economia e sostenere la ripresa delle attività. Le manovre già realizzate hanno avuto un impatto positivo, grazie ad un'iniezione complessiva che ha superato gli 8 mila miliardi di dollari, destinati soprattutto alla gestione della crisi sanitaria e al supporto delle famiglie, delle imprese e delle fasce più deboli della popolazione. Le istituzioni europee hanno davanti una sfida molto importante da affrontare, poiché la posta in gioco è alta e gli effetti delle manovre economiche e finanziarie potrebbero essere risolutive ma anche fatali, fino a compromettere le fondamenta stesse dell'unione europea. Come reagiranno i

mercati finanziari dipenderà soprattutto dagli strumenti e dalle politiche di crescita che ogni Paese saprà mettere in campo.

4.4 Correlazione dei dati storici

Dopo aver delineato l'andamento dei rendimenti logaritmici ed effettuato il test di normalità, l'analisi dei dati prosegue con lo studio delle correlazioni tra le serie storiche. La più importante tipologia di correlazione è quella lineare misurata dall'indice di Pearson secondo l'espressione seguente:

$$\rho_{xy} = \frac{\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x - \bar{x})^2 \sum(y - \bar{y})^2}}$$

L'indice di Pearson esprime l'eventuale relazione di linearità tra i rendimenti giornalieri dei vari titoli e può assumere valori compresi tra +1 e -1:

- Se è positivo esiste una correlazione lineare diretta tra le due variabili osservate. La correlazione diretta è massima al raggiungimento del valore di +1;
- Se è negativo esiste una correlazione lineare inversa tra le due variabili osservate. La correlazione inversa è massima al raggiungimento del valore di -1.
- Se è uguale a 0 le due variabili osservate non presentano alcuna correlazione lineare (sono cioè linearmente incorrelate).

Di seguito si riporta la matrice delle correlazioni giornaliere tra i rendimenti dei 20 titoli al cui interno sono presenti i coefficienti di Pearson calcolati per ogni coppia di titoli (Tabella 43). La matrice delle correlazioni è per ovvie ragioni simmetrica e presenta valori pari ad 1 sulla diagonale principale, dal momento che ogni titolo risulta perfettamente correlato con sé stesso:

Tabella 43. Matrice delle correlazioni giornaliere tra i rendimenti logaritmici

	ENI	IBE	ENEL	DTE	VOW3	BAYN	SIE	ALV	LIN	SAP
ENI	1									
IBE	0,616395	1								
ENEL	0,698639	0,71189	1							
DTE	0,516862	0,507176	0,52376	1						
VOW3	0,364741	0,311158	0,30789	0,33311	1					
BAYN	0,490272	0,423151	0,42951	0,53107	0,36943	1				
SIE	0,590463	0,518968	0,50322	0,54378	0,44711	0,5656	1			

ALV	0,596607	0,562389	0,53274	0,58675	0,42589	0,55471	0,71323	1		
LIN	0,056928	0,040388	0,04116	0,0632	0,06274	0,03878	0,05464	0,05781	1	
SAP	0,079525	0,042955	0,05158	0,07928	0,15128	0,09871	0,11483	0,09841	0,15157	1
AIR	0,070295	0,030005	0,02774	0,08373	0,13372	0,08986	0,09995	0,10408	0,17071	0,46738
OR	0,034392	0,016815	0,01846	0,05457	0,10682	0,06869	0,03252	0,03175	0,10937	0,52446
AI	0,100423	0,057006	0,04862	0,10321	0,13133	0,11416	0,10808	0,10379	0,15236	0,57633
KER	0,039013	0,018146	0,02258	0,03279	0,14124	0,10058	0,09841	0,0723	0,11493	0,53196
ABI	0,109329	0,056757	0,04639	0,07374	0,1404	0,10716	0,10267	0,08951	0,08646	0,30708
UNA	0,01767	0,030189	0,02372	0,0818	0,03298	0,05647	0,03394	0,06378	0,02332	0,2449
SAN	0,055399	0,004163	0,01476	0,06638	0,08135	0,08856	0,05782	0,04549	0,08357	0,48225
MC	0,069444	0,022932	0,02758	0,06422	0,13938	0,11874	0,11614	0,11519	0,14233	0,56854
FP	0,181416	0,032613	0,04365	0,08875	0,16992	0,11806	0,1539	0,12907	0,14991	0,54126
ASML	0,07643	0,022737	0,03708	0,0695	0,11783	0,09981	0,10706	0,08703	0,10691	0,47151

	AIR	OR	AI	KER	ABI	UNA	SAN	MC	FP	ASML
ENI										
IBE										
ENEL										
DTE										
VOW3										
BAYN										
SIE										
ALV										
LIN										
SAP										
AIR	1									
OR	0,4428	1								
AI	0,5031	0,6147	1							
KER	0,5139	0,5444	0,58085	1						
ABI	0,3147	0,3856	0,40919	0,36058	1					
UNA	0,2318	0,4095	0,29362	0,21902	0,2393	1				
SAN	0,4108	0,5378	0,54114	0,41774	0,3235	0,30497	1			
MC	0,5409	0,6476	0,66025	0,73352	0,4008	0,29926	0,49137	1		
FP	0,4763	0,5558	0,66865	0,54688	0,4019	0,21786	0,52789	0,60352	1	
ASML	0,4473	0,4133	0,4741	0,46397	0,3088	0,18998	0,37882	0,50387	0,45365	1

Utilizzando la formattazione condizionale è possibile osservare come varia l'intensità delle correlazioni che va dal rosso (bassa correlazione) a diverse tonalità di verde (alta correlazione). Le correlazioni, come preventivato, sono tutte positive trattandosi delle 20 maggiori società dell'Eurozona, quelle considerate "blue chips" e appartenenti allo stesso indice di mercato. La Tabella 43 mostra, in particolare, come i primi 8 titoli siano molto correlati tra loro e poco, invece, con i restanti 12 titoli, che a loro volta sono legati tra loro da un elevato grado di correlazione. La correlazione dipende, oltre che dalle performance realizzate

dalle singole società, anche dall'andamento generale del settore di appartenenza. I titoli Eni, Enel e Iberdrola – settore energetico – sono altamente correlati, così come L'Oreal con Air Liquide e Kering con LVMH appartenenti, rispettivamente, al settore chimico e del lusso. La correlazione tra i titoli può essere spiegata anche utilizzando il grafico rendimento-rischio riportato in Figura 67, con in ascissa le deviazioni standard e in ordinata le medie dei rendimenti logaritmici:

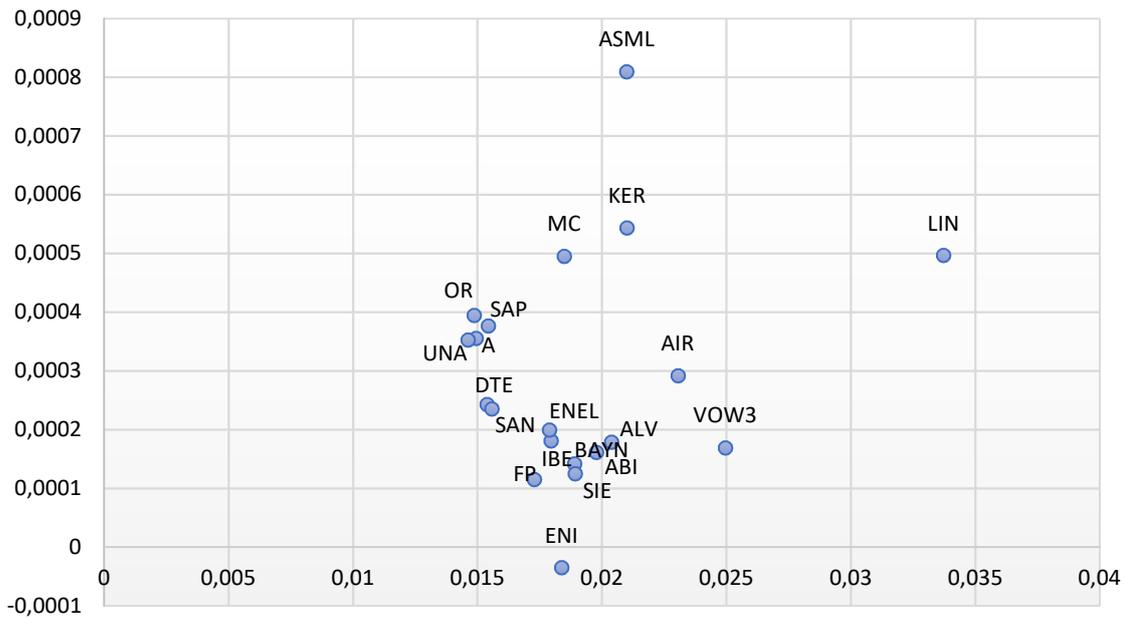


Figura 67. Rappresentazione dei titoli sul piano rendimento-deviazione standard

Dal grafico è possibile dedurre che i titoli caratterizzati da un andamento simile presentano un alto grado di correlazione; come visto in precedenza, i titoli ENEL e IBE, OR e AI, KER e MC, che presentano un elevato coefficiente di correlazione, mostrano un andamento simile sul piano rendimento-rischio, a conferma della coerenza tra i due metodi di verifica delle correlazioni.

Dai rendimenti logaritmici è stato possibile, infine, derivare anche la matrice di varianza – covarianza Σ di ordine n (Tabella 44):

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

Dove:

- $\sigma_{kj} = Cov(R_k, R_j) = E[(R_k - \mu_k) \cdot (R_j - \mu_j)]$ sono le covarianze;

- $\sigma_{kk} = Var(R_k) = \sigma_k^2$ sono le varianze presenti sulla diagonale principale.

Tabella 44. Matrice di varianza-covarianza

	ENI	IBE	ENEL	DTE	VOW3	BAYN	SIE	ALV	LIN	SAP
ENI	0,00034									
IBE	0,0002	0,00032								
ENEL	0,00023	0,00023	0,00032							
DTE	0,00015	0,00014	0,00014	0,00024						
VOW3	0,00017	0,00014	0,00014	0,00013	0,00062					
BAYN	0,00017	0,00014	0,00015	0,00015	0,00017	0,00036				
SIE	0,00021	0,00018	0,00017	0,00016	0,00021	0,0002	0,00036			
ALV	0,00022	0,00021	0,00019	0,00018	0,00022	0,00021	0,00028	0,00042		
LIN	3,5E-05	2,4E-05	2,5E-05	3,3E-05	5,3E-05	2,5E-05	3,5E-05	4E-05	0,0011	
SAP	2,3E-05	1,2E-05	1,4E-05	1,9E-05	5,8E-05	2,9E-05	3,4E-05	3,1E-05	8E-05	0,00024
AIR	3E-05	1,2E-05	1,1E-05	3E-05	7,7E-05	3,9E-05	4,4E-05	4,9E-05	0,0001	0,00017
OR	9,4E-06	4,5E-06	4,9E-06	1,2E-05	4E-05	1,9E-05	9,1E-06	9,6E-06	5E-05	0,00012
AI	2,8E-05	1,5E-05	1,3E-05	2,4E-05	4,9E-05	3,2E-05	3,1E-05	3,2E-05	8E-05	0,00013
KER	1,5E-05	6,8E-06	8,5E-06	1,1E-05	7,4E-05	4E-05	3,9E-05	3,1E-05	8E-05	0,00017
ABI	4E-05	2E-05	1,6E-05	2,2E-05	6,9E-05	4E-05	3,8E-05	3,6E-05	6E-05	9,4E-05
UNA	4,7E-06	7,9E-06	6,2E-06	1,8E-05	1,2E-05	1,6E-05	9,4E-06	1,9E-05	1E-05	5,5E-05
SAN	1,6E-05	1,2E-06	4,1E-06	1,6E-05	3,2E-05	2,6E-05	1,7E-05	1,4E-05	4E-05	0,00012
MC	2,4E-05	7,6E-06	9,1E-06	1,8E-05	6,4E-05	4,1E-05	4,1E-05	4,3E-05	9E-05	0,00016
FP	5,8E-05	1E-05	1,3E-05	2,4E-05	7,3E-05	3,9E-05	5E-05	4,5E-05	9E-05	0,00014
ASML	2,9E-05	8,6E-06	1,4E-05	2,2E-05	6,2E-05	4E-05	4,3E-05	3,7E-05	8E-05	0,00015

	AIR	OR	AI	KER	ABI	UNA	SAN	MC	FP	ASML
ENI										
IBE										
ENEL										
DTE										
VOW3										
BAYN										
SIE										
ALV										
LIN										
SAP										
AIR	0,00053									
OR	0,00015	0,00022								
AI	0,00017	0,00014	0,00022							
KER	0,00025	0,00017	0,00018	0,00044						
ABI	0,00014	0,00011	0,00012	0,00015	0,00039					
UNA	7,8E-05	8,9E-05	6,4E-05	6,7E-05	6,9E-05	0,00021				
SAN	0,00015	0,00012	0,00013	0,00014	1E-04	6,9E-05	0,00024			
MC	0,00023	0,00018	0,00018	0,00028	0,00015	8,1E-05	0,00014	0,00034		
FP	0,00019	0,00014	0,00017	0,0002	0,00014	5,5E-05	0,00014	0,00019	0,000298	
ASML	0,00022	0,00013	0,00015	0,0002	0,00013	5,8E-05	0,00012	0,0002	0,000164	0,00044

Calcolata anche la matrice di varianza-covarianza si hanno tutti gli strumenti per procedere all'implementazione del modello di Markowitz.

4.5 Modello di Markowitz

Lo sviluppo del modello di Markowitz è stato condotto parallelamente su due diversi ambienti di calcolo, Excel e Matlab, ottenendo ovviamente i medesimi risultati. Per la costruzione della frontiera efficiente, che definisce in ogni suo punto la migliore combinazione degli asset contenuti all'interno del portafoglio, si è scelto di risolvere il seguente problema di ottimizzazione vincolata, che consiste nel minimizzare la varianza fissando un vincolo sul rendimento e un vincolo di bilancio:

$$\begin{cases} \min_{\omega_1, \dots, \omega_n} \sigma_{\Pi}^2 \\ E(R_{\Pi}) = \tilde{R} \\ \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \end{cases}$$

Dalla risoluzione del sistema è possibile ricavare le quote di composizione del portafoglio e di conseguenza delineare la frontiera efficiente. In particolare, per la risoluzione è stato utilizzato come strumento di calcolo il Risolutore, componente aggiuntivo di Excel utilizzato per eseguire analisi di simulazione. Esso consente di trovare un valore ottimale (massimo o minimo) per una formula contenuta in una cella, denominata cella obiettivo, soggetta ai vincoli, o limiti, dei valori di altre celle, chiamate celle vincolo. Il Risolutore modifica i valori nelle celle variabili di decisione in modo da soddisfare i limiti nelle celle vincolo e produrre i risultati desiderati per la cella obiettivo.

Il punto di partenza è rappresentato dalla costruzione di un portafoglio equiponderato, ossia un portafoglio dove la ricchezza disponibile è distribuita in maniera uniforme tra i vari titoli, le cui quote risultano quindi essere uguali. I dati di input sono rappresentati dalla media dei rendimenti logaritmici dei titoli in portafoglio e dalla matrice di varianza-covarianza che permettono di calcolare il rendimento atteso e la deviazione standard del portafoglio equiponderato. Le formule per il calcolo di rendimento e varianza, rispettivamente la cella vincolo e la cella obiettivo, sono le seguenti:

$$E(R_{\Pi}) = \Omega^T \cdot \theta$$

$$\sigma_{\Pi}^2 = \Omega \cdot \Sigma \cdot \Omega^T$$

Dove:

- θ rappresenta il vettore colonna dei rendimenti attesi dei 20 titoli;
- Ω è il vettore colonna delle quote e Ω^T è il suo vettore trasposto;
- Σ è la matrice di varianza e covarianza 20x20.

La Tabella 45 sotto riportata mostra i risultati ottenuti per il portafoglio equiponderato:

Tabella 45. Composizione del portafoglio equiponderato

ENI	5,00%
IBE	5,00%
ENEL	5,00%
DTE	5,00%
VOW3	5,00%
BAYN	5,00%
SIE	5,00%
ALV	5,00%
LIN	5,00%
SAP	5,00%
AIR	5,00%
OR	5,00%
AI	5,00%
KER	5,00%
ABI	5,00%
UNA	5,00%
SAN	5,00%
MC	5,00%
FP	5,00%
ASML	5,00%
Σw	100,00%
μ	0,02915%
σ	1,004944%

A questo punto è possibile utilizzare lo strumento del Risolutore impostando come obiettivo la minimizzazione della varianza di portafoglio e selezionando i pesi equiponderati come celle variabili. I vincoli impostati sono, invece, i seguenti:

- Il valore atteso del rendimento del portafoglio pari al valore arbitrariamente scelto;
- Pieno investimento delle proprie risorse, ovvero la somma delle quote dei titoli dovrà necessariamente essere pari ad 1.

Un terzo vincolo, utilizzato affinché le quote di composizione del portafoglio siano positive e non ci siano quindi vendite allo scoperto, è impostato selezionando l'opzione offerta dal Risolutore che rende non negative le variabili senza vincoli.

Risolvendo il problema di ottimizzazione vincolata così definito, il Risolutore fornisce i risultati indicati in Tabella 46:

Tabella 436. Peso dei titoli di portafoglio in assenza di vendite allo scoperto - Modello di Markowitz

TITOLI	min. varianza						max. rendimento
ENI	1,55%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
IBE	7,51%	6,89%	4,07%	0,12693%	0,00%	0,00%	0,00%
ENEL	6,73%	7,19%	5,72%	3,53%	0,00%	0,00%	0,00%
DTE	14,71%	16,72%	15,85%	12,98%	6,19%	0,00%	0,00%
VOW3	0,87%	0,12%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
BAYN	3,61%	1,19%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
SIE	1,49%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
ALV	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
LIN	3,69%	4,79%	6,12%	7,38%	8,37%	8,67%	0,00%
SAP	10,01%	8,71%	3,41%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
AIR	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
OR	6,63%	9,38%	8,52%	2,88%	0,00%	0,00%	0,00%
AI	4,87%	3,49%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
KER	0,00%	1,21%	4,71%	6,96%	6,86%	4,79%	0,00%
ABI	4,37%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
UNA	22,47%	24,34%	24,97%	24,12%	20,49%	10,22%	0,00%
SAN	10,29%	3,53%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
MC	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
FP	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
ASML	1,18%	12,45%	26,62%	42,02%	58,09%	76,32%	100,00%
Σw	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
μ	0,0290%	0,0377%	0,0463%	0,0550%	0,0636%	0,0723%	0,0809%
σ	0,8857%	0,9191%	1,0270%	1,2124%	1,4556%	1,7437%	2,0992%

Nella tabella sopra riportata sono contenuti i pesi dei portafogli che costituiscono la frontiera efficiente ordinati secondo valori crescenti di rendimento. È possibile notare che all'aumentare del rendimento target l'allocazione del portafoglio tende a concentrarsi su un quantitativo di titoli via via minore, mettendo in luce l'instabilità del modello e la sua fragilità riguardo il principio di diversificazione.

Come mostrato in tabella, sono state calcolate sette diverse allocazioni di portafoglio che presentano valori di rendimento via via crescenti fino al raggiungimento del rendimento massimo. Si noti come all'aumentare del rendimento cresca con proporzionalità diretta anche il rischio, sottolineando nuovamente come i portafogli costruiti risultino appartenere alla frontiera efficiente. In Figura 68 si riporta il grafico della frontiera efficiente con i vincoli di non negatività costruita con i portafogli indicati nella Tabella 47:

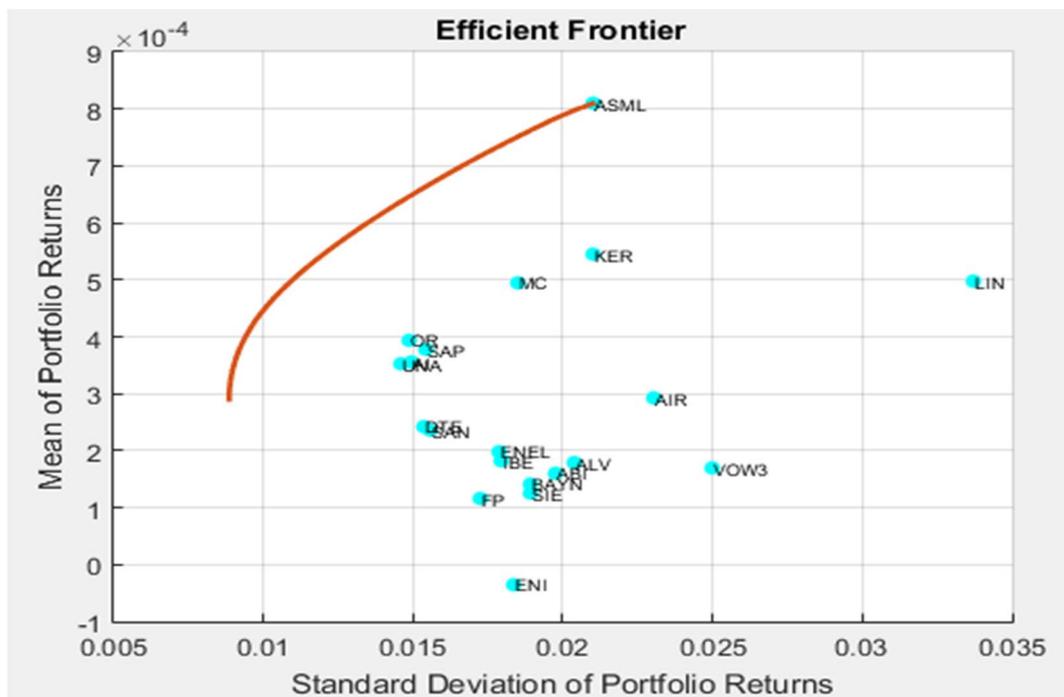


Figura 68. Costruzione della frontiera efficiente in assenza di vendite allo scoperto – Modello di Markowitz

Rilassando il vincolo di non negatività si ottengono le quote di composizione del portafoglio in presenza di vendite allo scoperto. In Tabella 47 sono riportati i pesi dei portafogli che costituiscono la frontiera efficiente ordinati secondo valori crescenti di rendimento.

Tabella 47. Peso dei titoli di portafoglio in presenza di vendite allo scoperto – Modello di Markowitz

TITOLI	min. varianza						max. rendimento
ENI	1,98%	-27,11%	-56,19%	-100,00%	-100,00%	-100,00%	-100,00%
IBE	8,00%	7,61%	7,22%	6,43%	-3,68%	-50,74%	-100,00%
ENEL	6,55%	18,28%	30,00%	48,62%	49,12%	44,25%	-100,00%
DTE	15,33%	24,26%	33,18%	48,95%	77,28%	100,00%	100,00%
VOW3	1,24%	1,03%	0,82%	-0,29%	-5,76%	-30,91%	-100,00%
BAYN	4,28%	-2,33%	-8,94%	-18,64%	-42,32%	-100,00%	-100,00%
SIE	3,89%	-1,22%	-6,33%	-15,95%	-49,50%	-100,00%	-100,00%
ALV	-4,89%	2,14%	9,16%	18,68%	26,16%	37,16%	-100,00%
LIN	3,85%	8,71%	13,57%	21,14%	34,81%	74,74%	100,00%
SAP	11,33%	10,41%	9,49%	14,84%	28,59%	91,38%	100,00%
AIR	-2,84%	-15,17%	-27,50%	-42,93%	-70,29%	-100,00%	100,00%
OR	8,61%	17,78%	26,95%	38,97%	58,70%	100,00%	100,00%
AI	7,35%	15,94%	24,53%	31,31%	27,91%	39,61%	100,00%
KER	0,55%	13,48%	26,42%	49,46%	97,96%	100,00%	100,00%
ABI	4,75%	-8,18%	-21,11%	-42,05%	-87,38%	-100,00%	-100,00%
UNA	22,61%	26,44%	30,27%	39,32%	62,71%	94,51%	100,00%
SAN	10,51%	-3,38%	-17,27%	-42,56%	-98,74%	-100,00%	0,00%
MC	-6,16%	6,75%	19,66%	44,71%	94,42%	100,00%	100,00%
FP	0,67%	-37,35%	-75,37%	-100,00%	-100,00%	-100,00%	-100,00%
ASML	2,41%	41,93%	81,45%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
Σw	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
μ	0,03%	0,08%	0,12%	0,17%	0,22%	0,27%	0,31%
σ	0,88%	1,38%	2,30%	3,35%	4,80%	6,90%	12,84%

In Figura 69 si riporta il grafico della frontiera efficiente costruita con i portafogli indicati nella Tabella 47.

La frontiera efficiente in presenza di vendite allo scoperto domina quella in assenza di vendite allo scoperto poiché è stato rilassato il vincolo di non negatività, con la possibilità di ottenere una maggiore varietà di portafogli raggiungendo livelli di redditività molto più elevati.

In generale il posizionamento ottimo sulla frontiera efficiente dipende dalla funzione di utilità dell'investitore, quindi dalla sua propensione al rischio.

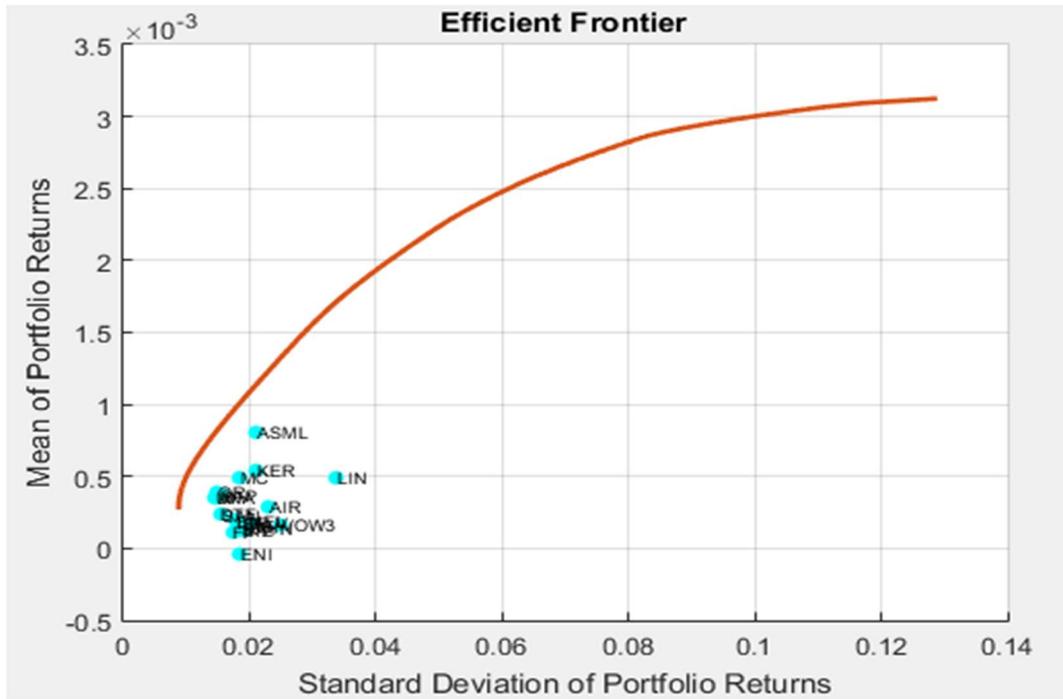


Figura 69. Costruzione della frontiera efficiente in presenza di vendite allo scoperto – Modello di Markowitz

Al fine di rendere più evidente il confronto tra i modelli in presenza e in assenza di vendite allo scoperto, sono stati ottenuti, in presenza di vendite allo scoperto, i rendimenti associati ai rischi indicati nel caso di assenza di vendite allo scoperto (Tabella 46). I risultati ottenuti sono riportati in Tabella 48. Dal confronto emerge chiaramente come, a parità di rischio, il portafoglio ottimo in presenza di vendite allo scoperto presenta un rendimento maggiore (Figura 70).

Tabella 48. Rendimento del Modello di Markowitz in presenza di vendite allo scoperto per valori di rischio fissati

TITOLI							
ENI	2,00%	-5,46%	-12,51%	-20,80%	-29,89%	-39,49%	-50,24%
IBE	6,99%	7,72%	7,86%	7,72%	7,46%	7,21%	7,13%
ENEL	6,77%	9,63%	12,44%	15,76%	19,35%	23,25%	27,66%
DTE	17,19%	17,68%	19,81%	22,41%	25,05%	27,82%	31,30%
VOW3	0,83%	1,26%	1,27%	1,29%	0,96%	0,89%	0,78%
BAYN	1,61%	2,56%	1,16%	-0,71%	-3,86%	-5,16%	-7,55%
SIE	-2,17%	2,56%	0,95%	-1,33%	-1,49%	-2,28%	-5,19%
ALV	1,62%	-3,10%	-1,37%	1,11%	3,54%	4,71%	7,80%
LIN	4,35%	5,11%	6,28%	7,69%	9,17%	10,74%	12,57%

SAP	11,88%	11,07%	10,89%	10,75%	10,10%	10,04%	9,87%
AIR	-3,04%	-5,93%	-8,98%	-12,43%	-16,40%	-20,31%	-24,98%
OR	9,42%	10,93%	13,14%	16,33%	18,46%	21,68%	25,03%
AI	6,80%	9,63%	11,72%	14,51%	16,55%	19,61%	22,68%
KER	1,62%	3,78%	7,04%	11,60%	14,87%	18,86%	23,70%
ABI	3,53%	1,43%	-1,75%	-5,42%	-9,42%	-13,60%	-18,45%
UNA	22,67%	23,59%	24,52%	25,66%	26,60%	28,08%	29,48%
SAN	8,87%	6,91%	3,38%	-0,43%	-3,14%	-9,36%	-14,44%
MC	-5,51%	-2,83%	0,29%	1,65%	7,67%	12,17%	17,13%
FP	0,69%	-9,09%	-18,40%	-29,11%	-41,22%	-53,29%	-67,59%
ASML	3,88%	12,53%	22,27%	33,75%	45,63%	58,43%	73,32%
Σw	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
μ	0,0310%	0,0408%	0,0524%	0,0659%	0,0803%	0,0957%	0,1135%
σ	0,8857%	0,9191%	1,0270%	1,2124%	1,4556%	1,7437%	2,0992%

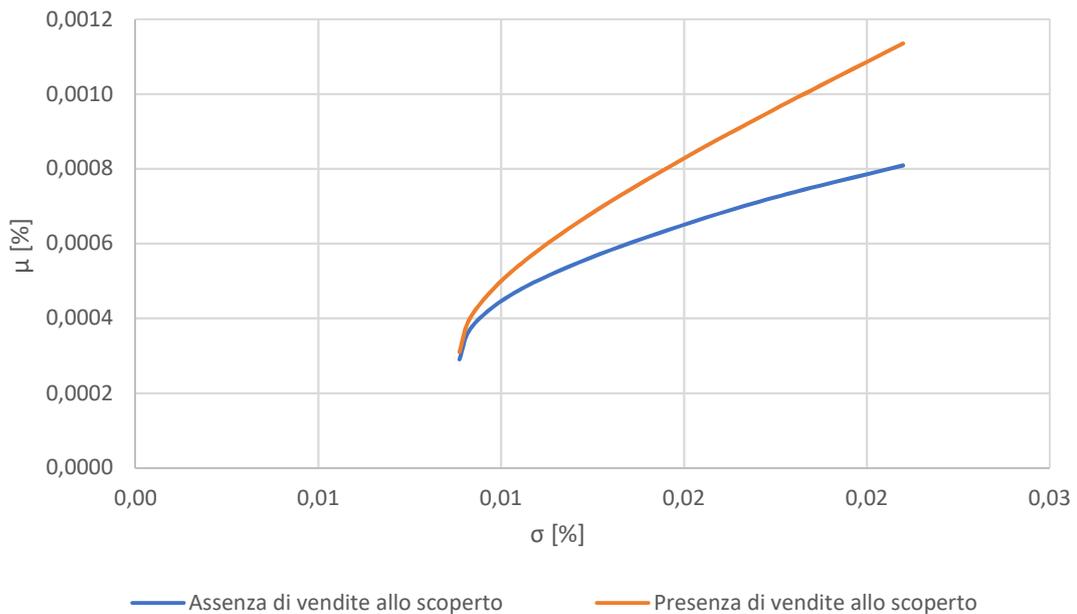


Figura 70. Confronto delle frontiere efficienti in assenza e in presenza di vendite allo scoperto – Modello di Markowitz

I grafici delle Figure 71 e 72 riportano le composizioni dei portafogli ottimi per un rendimento di 0,0636 %, arbitrariamente scelto, e permettono di confermare le critiche mosse al modello di Markowitz riguardo la massimizzazione degli errori di stima. Analizzando le composizioni dei portafogli si nota come il modello porti a sovrastimare il peso di quei titoli che presentano un elevato rendimento atteso,

bassa varianza e correlazioni negative; in tal modo si ottengono portafogli composti prevalentemente da titoli con queste caratteristiche che risultano maggiormente soggetti ad un elevato errore di stima. Inoltre, questa tendenza è più evidente nei portafogli in cui non è ammessa la vendita allo scoperto.

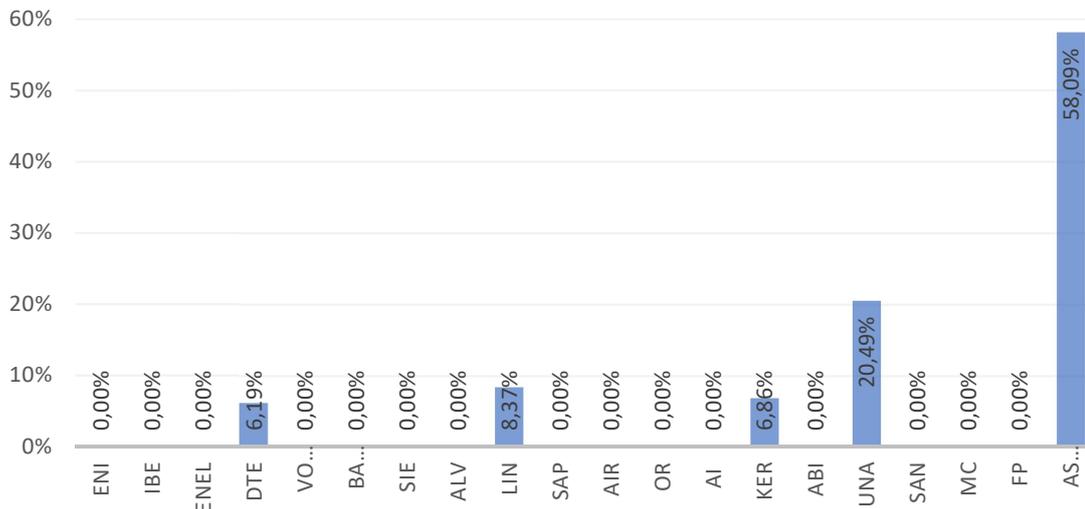


Figura 71. Composizione del portafoglio in assenza di vendite allo scoperto per un rendimento target fissato

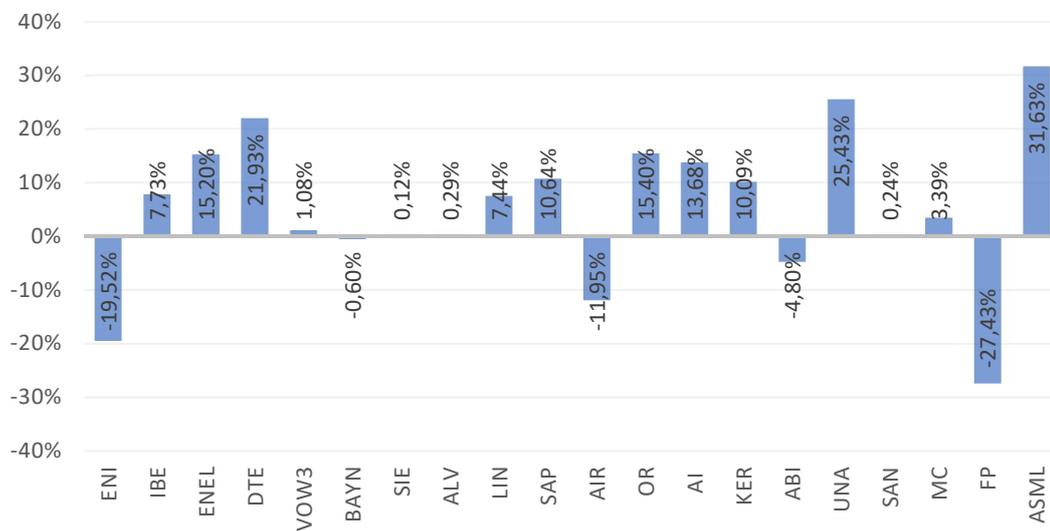


Figura 72. Composizione del portafoglio in assenza di vendite allo scoperto per un rendimento target fissato

Agli stessi risultati si è pervenuti utilizzando il software Matlab e inserendo come dati di input il vettore dei rendimenti attesi e la matrice di varianza-covarianza. Implementando la funzione *Portfolio* è stato dunque possibile definire il problema

di ottimizzazione, inserendo gli input del modello e definendo il vincolo di bilancio per cui la sommatoria dei pesi deve essere pari a 1. Per calcolare l'allocazione ottima è stata utilizzata la funzione *estimateFrontierByReturn* che permette di minimizzare la varianza del portafoglio ottimo fissando il rendimento atteso. In questo modo il software calcola tutte le combinazioni di portafoglio presenti sulla frontiera efficiente e restituisce il portafoglio dalle prestazioni migliori fissato un rendimento target. Per confermare la criticità del modello riguardo la massimizzazione degli errori di stima, attraverso la funzione di Matlab chiamata *estimateFrontierByRisk*, in assenza di vendite allo scoperto, è stata analizzata la composizione del portafoglio ottimo massimizzando il rendimento atteso e fissando il rischio ad un determinato valore. In particolare, si è deciso di valutare come cambia l'allocazione aumentando, di volta in volta, il rischio che si vuole associare al portafoglio ottimo. Come dai grafici precedenti sulle allocazioni ottimali, anche in questo caso è evidente il limite derivante dal prendere i rendimenti storici come input per calcolare il peso ottimo degli asset che andranno a comporre il portafoglio dell'investitore. Analizzando la Figura 73 è possibile osservare che all'aumentare del rischio il portafoglio tende ad essere composto dai soli titoli che presentano elevato rendimento atteso; in particolare, per il caso in esame, si può notare come il portafoglio sia completamente sbilanciato verso i due titoli Linde e ASML violando, dunque, il principio di diversificazione su cui si basa il modello. Il titolo ASML presenta le migliori prestazioni in assoluto e l'indice di Sharpe più elevato; in esso, infatti, viene allocato il 93,64% della ricchezza disponibile quando il rischio è massimo.

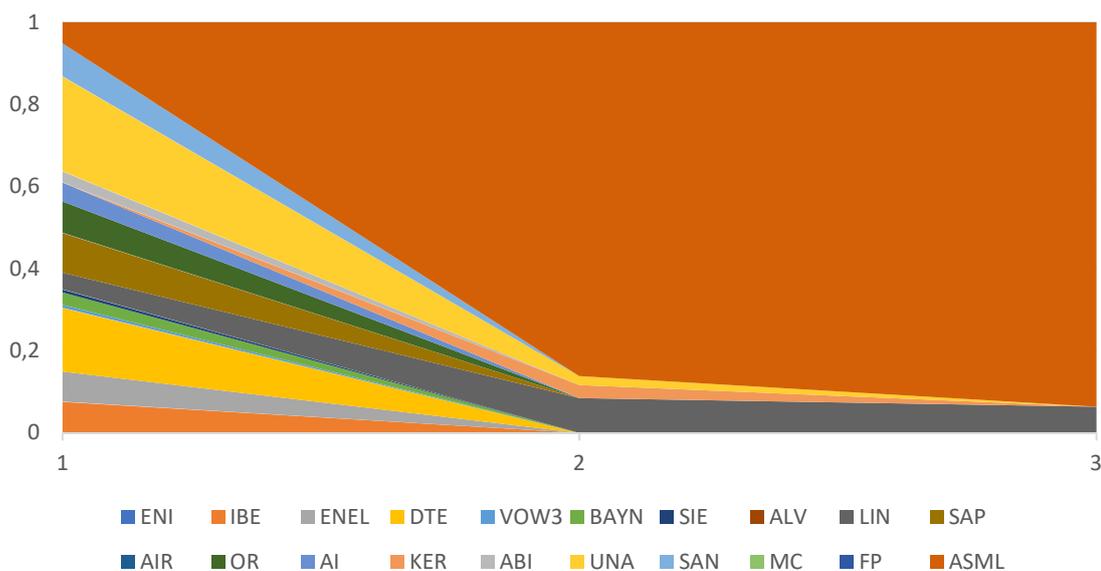


Figura 73. Variazione dei pesi di portafoglio all'aumentare del rischio in assenza di vendite allo scoperto

Infine è stata dimostrata un'ulteriore criticità del Modello di Markowitz e cioè l'eccessiva sensibilità ai dati in input, provocando di volta in volta una diversa allocazione ottimale di portafoglio a seconda degli anni considerati. In particolare sono state calcolate sette diverse allocazioni di portafoglio per gli anni 2007, 2009, 2011, 2013, 2015, 2017, 2019, fissando arbitrariamente un rendimento target intermedio pari a 0,06 %. Il grafico riportato in Figura 74 mostra le variazioni consistenti dei pesi dei vari titoli utilizzando rendimenti logaritmici riferiti ad anni diversi, nel caso in cui non è ammessa la vendita allo scoperto. In questo caso l'investitore dovrebbe, di volta in volta, ricercare l'allocazione ottimale sostenendo elevati costi di transazione che erodono direttamente i profitti.

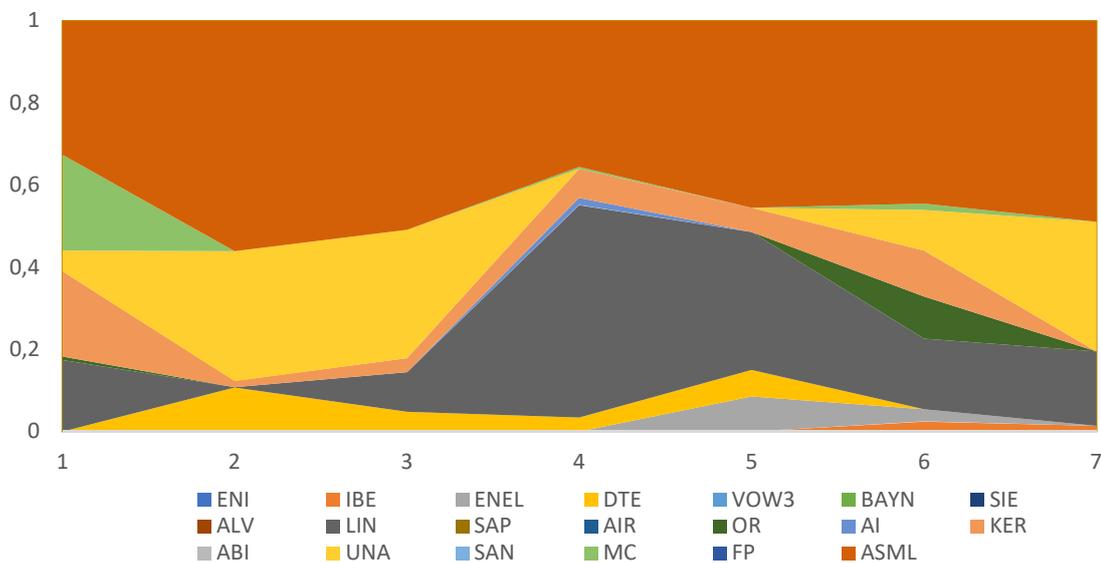


Figura 74. Variazione dinamica dei pesi di portafoglio in assenza di vendite allo scoperto

4.6 Modello di Black & Litterman

I limiti del modello di Markowitz, che portano alla costruzione di portafogli concentrati in pochi asset e con posizioni assunte troppo estreme (sia lunghe che corte), hanno favorito l'implementazione del modello di Black & Litterman. Il modello ideato dai due analisti della Goldman Sachs prevede l'utilizzo, come dati di input, non più dei rendimenti storici ma dei rendimenti impliciti collegati alle opinioni personali dell'investitore. L'utilizzo dei rendimenti impliciti consente di ottenere portafogli più equilibrati, evitando ampie oscillazioni dei pesi al variare delle informazioni disponibili. Attraverso la tecnica dell'ottimizzazione inversa, i rendimenti impliciti vengono calcolati secondo la seguente formula:

$$\Theta = \lambda \cdot \Sigma \cdot \Omega_B$$

Dove:

- Σ è la matrice di varianza-covarianza storica;
- λ è il coefficiente di avversione al rischio, calcolato come $\lambda = \frac{E(R_m) - i}{\sigma^2}$. Per il calcolo del coefficiente è stato preso come benchmark di mercato l'indice azionario EuroStoxx50. Come per i titoli azionari, anche per il benchmark sono stati raccolti i prezzi di chiusura giornalieri al netto dei dividendi, da cui sono stati calcolati i rendimenti logaritmici e, quindi, la media e la varianza riportati nella Tabella 49. L'asset risk free preso in considerazione è l'Euribor con scadenza a tre mesi il cui rendimento i , per coerenza di trattazione, è stato posto pari a zero. Il coefficiente di avversione al rischio, riportato in tabella, è stato calcolato come il rapporto tra il premio al rischio di mercato e il rischio stesso.

Tabella 49. Benchmark di mercato e coefficiente di avversione al rischio

Codice Benchmark	Benchmark	Media	Varianza	Coeff. Avversione al rischio
SX5T Index	EuroStoxx50	0,00034749	0,0001963	1,77

- Ω_B rappresenta il vettore dei pesi dei titoli ottenuti dalla loro capitalizzazione di mercato. Per calcolare le quote di composizione del portafoglio rispetto alla capitalizzazione complessiva di mercato, è stato preso il loro valore in euro del free float il 02/04/2020, ultimo giorno dell'analisi. Questo valore è stato diviso per la somma della capitalizzazione dei venti titoli, ottenendo quindi il peso dei singoli titoli all'interno del portafoglio. Nella Tabella 50 sono riportati la capitalizzazione dei titoli e il loro peso percentuale:

Tabella 50. Capitalizzazione di mercato e relativo peso percentuale dei titoli presenti in portafoglio

Titoli	Capitalizzazione di mercato (miliardi di euro)	Pesi
ENI	31,99	1,8376%
IBE	65,37	3,3591%
ENEL	77,27	3,6988%
DTE	69,98	3,6184%
VOW3	69,50	3,7916%
BAYN	68,37	3,6864%
SIE	87,60	4,0970%
ALV	75,36	4,2146%
LIN	110,44	5,2652%

SAP	152,66	7,6871%
AIR	53,51	2,4692%
OR	154,20	8,2804%
AI	60,48	3,3390%
KER	63,64	3,5381%
ABI	77,04	4,8522%
UNA	133,18	6,9858%
SAN	117,72	6,8357%
MC	191,91	10,6538%
FP	93,65	5,0170%
ASML	137,30	6,7731%

Come osservabile dalla tabella sopra riportata, l'asset cui è assegnata la percentuale più alta è il titolo MC, seguito dai titoli OR e SAP. I titoli che, invece, pesano meno nell'economia dell'intero portafoglio sono ENI, AIR e AI.

Per delineare la frontiera efficiente, oltre ai rendimenti impliciti, è necessario calcolare la matrice di varianza-covarianza teorica come misura del rischio. Tale matrice risulta essere proporzionale alla matrice di varianza-covarianza storica secondo il parametro τ , che in questo studio è considerato pari a 0,05. La matrice ottenuta presenta naturalmente valori molto più piccoli rispetto alla matrice di varianza-covarianza storica, ma ciò è in linea con il pensiero di Black e Litterman secondo cui nel futuro i rendimenti, in media, subiranno poche oscillazioni dato che nel lungo periodo torneranno ai loro valori di equilibrio.

A questo punto è possibile calcolare i rendimenti impliciti (Tabella 51) che, come sottolineato in precedenza, forniscono un punto di riferimento neutrale da cui partire per incorporare le view soggettive dell'investitore riguardo i rendimenti futuri. Qualora l'investitore non disponga di alcuna view sui rendimenti attesi, egli potrà acquistare un portafoglio composto secondo le capitalizzazioni di mercato che rispecchia lo stato di equilibrio, in cui, cioè, domanda e offerta si eguagliano.

Tabella 51: Rendimenti impliciti e rispettive deviazioni standard

Titolo	Rendimenti impliciti	Deviazioni standard
ENI	0,00013202	0,0041099
IBE	0,00010921	0,0040138
ENEL	0,00011081	0,0039996
DTE	0,00010671	0,0034402
VOW3	0,00018247	0,0055819
BAYN	0,00013877	0,0042261

SIE	0,00015137	0,004231
ALV	0,00016265	0,0045593
LIN	0,00020237	0,0075395
SAP	0,00018804	0,0034507
AIR	0,00025131	0,0051555
OR	0,00018375	0,0033245
AI	0,00019265	0,0033406
KER	0,00025371	0,0046972
ABI	0,00018469	0,004422
UNA	0,00010705	0,0032681
SAN	0,00016927	0,0034837
MC	0,00025609	0,0041346
FP	0,00021733	0,0038631
ASML	0,00023174	0,004694

La tabella mostra come la deviazione standard dei titoli sia molto inferiore rispetto a quella ottenuta dai rendimenti storici, questo perché τ ha un valore molto vicino a 0 che porta ad avere un rischio molto basso. I rendimenti impliciti e la matrice di varianza-covarianza teorica costituiscono i nuovi input del processo di ottimizzazione che porta alla definizione della nuova frontiera efficiente, osservabile in Figura 75. Quest'ultima è stata delineata mediante il software Matlab e la sua funzione *Portfolio*.



Figura 75. Frontiera efficiente delineata utilizzando come input i rendimenti impliciti

La stella in Figura 75 indica il portafoglio ottimo che offre un rendimento dello 0,00018297 e una deviazione standard dello 0,0022735. Utilizzando i rendimenti impliciti, il portafoglio ottimo, che rappresenta il portafoglio di mercato, ha una composizione che è uguale alla capitalizzazione pesata di mercato dei venti titoli (Figura 76).

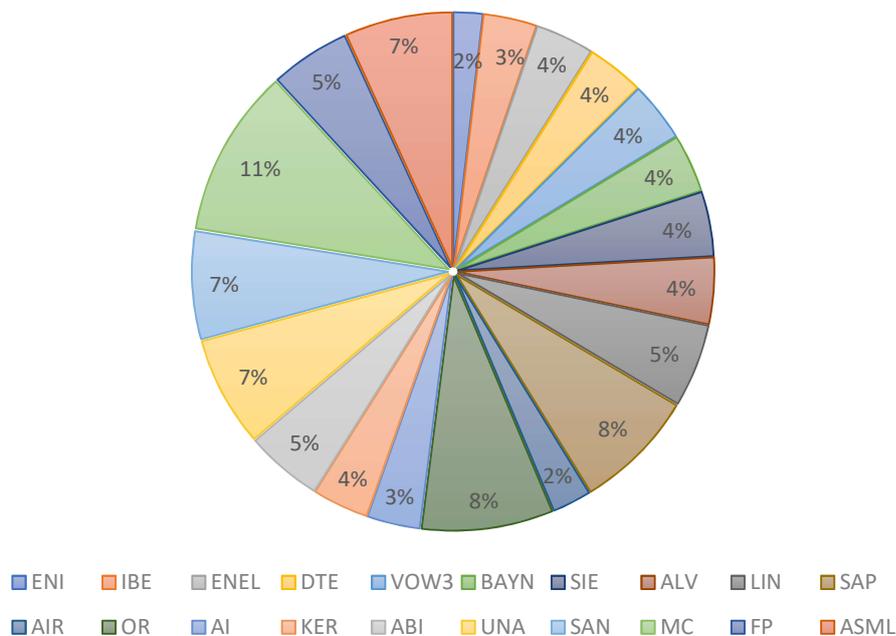


Figura 76. Composizione del portafoglio di mercato

Successivamente si è analizzata la variazione della composizione del portafoglio di mercato all'aumentare del rischio in assenza di vendite allo scoperto, ottenendo che la variazione dei pesi è in questo caso molto più equilibrata rispetto all'utilizzo dei rendimenti storici. Ciò è stato possibile grazie all'utilizzo della funzione di Matlab *EstimateFrontierByRisk*, analizzando sette diverse allocazioni di portafoglio associati ad altrettanti livelli di rischio crescenti (Figura 77). In questo caso il peso dei titoli all'interno del portafoglio è più bilanciato, evidenziando uno dei motivi per cui la costruzione del portafoglio con l'uso dei rendimenti storici non viene attuato nella realtà.

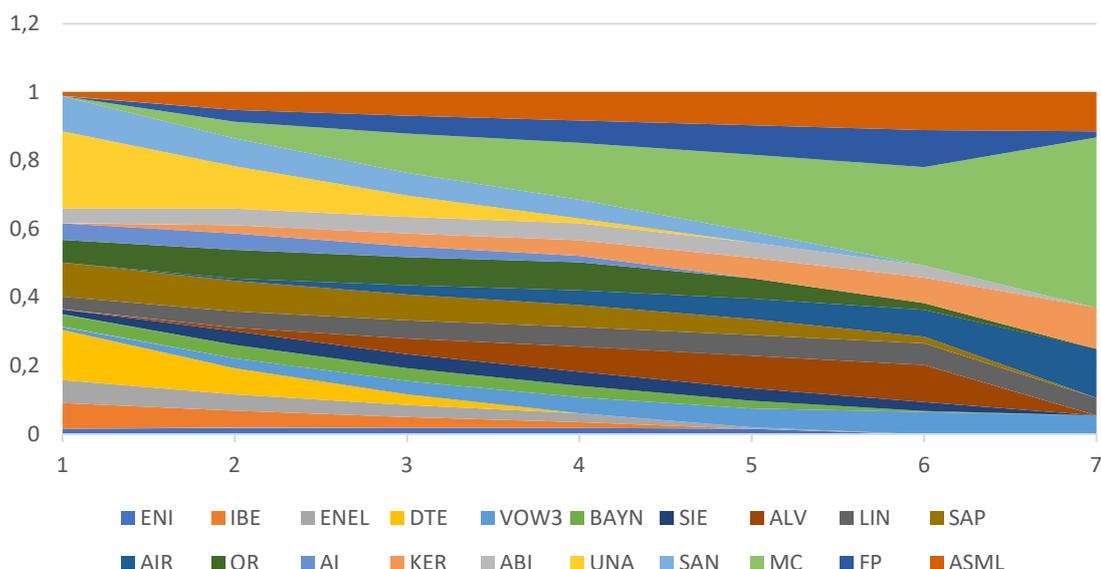


Figura 77. Variazione dei pesi di portafoglio all'aumentare del rischio in assenza di vendite allo scoperto utilizzando i rendimenti impliciti

4.7 View dell'investitore

Dopo aver calcolato i rendimenti impliciti (che forniscono un punto di riferimento neutrale per l'investitore) è stato possibile formulare delle view sul futuro andamento di alcuni titoli. Qualora l'investitore non disponga di alcuna view sui rendimenti attesi, egli potrà semplicemente acquistare un portafoglio composto secondo la capitalizzazione di mercato, come già discusso nel paragrafo precedente. Se, invece, l'investitore possiede aspettative circa l'andamento dei rendimenti futuri, dovrà combinarle in maniera coerente con l'equilibrio di mercato. In particolar modo, per il caso specifico, le view sono state formulate tenendo conto degli aspetti legati all'emergenza da Coronavirus che hanno condizionato e condizionano tutt'ora l'andamento e le strategie di mercato.

I primi sentori di un forte contagio in Europa del Coronavirus risalgono al 19 febbraio 2020. Da allora le notizie non hanno fatto altro che aggravarsi tanto che l'Oms (Organizzazione Mondiale della Sanità) ha modificato la definizione del contagio: quella che si sperava inizialmente fosse "solo" un'epidemia si è trasformata a conti fatti in una pandemia. E dal 19 febbraio in poi gli investitori ne hanno subito le conseguenze, vendendo pesantemente gli asset finanziari considerati rischiosi (su tutti le azioni) e acquistando beni rifugio. Il bilancio del «primo mese pandemico» sui mercati finanziari non ha precedenti nella storia della finanza. Se nel crollo di Wall Street del 1929, quel grande crack finanziario che ancora oggi rappresenta nell'immaginario collettivo la bolla delle bolle, gli

indici impiegarono 42 giorni prima di perdere il 20% rispetto ai massimi storici, questa volta hanno raggiunto tale livello in appena 16 giorni. A conti fatti l'S&P 500 – l'indice azionario più importante e per certi versi meno attaccabile al mondo – ha perso nell'ultimo mese il 27%, in linea con quanto perso con il Nikkei giapponese. Le Borse europee viaggiano su proporzioni ancora più pesanti, anche perché l'Europa è in questo momento considerato il nuovo epicentro del contagio, dato che i nuovi numeri targati Covid-19 che arrivano dall'Asia sono incoraggianti e tracciano una brusca inversione della curva dei contagi e dei decessi. Il Ftse Mib si è quasi dimezzato in un mese arrivando a perdere il 44% del proprio valore. Il Dax 30 di Francoforte ha perso il 40%, in linea con gli altri listini continentali rappresentati dall'indice Eurostoxx 50 (-40%). L'instabilità dei mercati ha innescato un superbalzo dell'indice della paura, il Vix, che misura la volatilità dei mercati e che nel mese di marzo è passato da 14 a 65 punti, il 350% in più – nonostante le forti misure adottate nel frattempo dalle banche centrali. Queste manovre, almeno per il momento, non sembrano aver placato le paure degli investitori, anzi le hanno alimentate considerato il loro carattere di eccezionalità che è servito a sottolineare, se ancora ce ne fosse stato bisogno, la gravità della situazione. I due grandi errori commessi nella gestione globale della crisi globale del Coronavirus sono stati il fatto di averla in prima battuta sottovalutata e, successivamente, il tentativo di accontentare gli egoismi nazionali a discapito delle situazioni locali. Il cospicuo ritardo dell'Unione Europea nella creazione di una linea di gestione comune della crisi per i Paesi europei ha spinto gli investitori in una fase di incertezza assoluta portandoli a vendere pesantemente. Si è verificato il crollo delle Borse Valori di tutto il mondo che hanno raggiunto i minimi storici. All'interno di questo quadro così complesso sono state formulate delle view, talvolta positive anche per i settori maggiormente colpiti dal lockdown imposto dai governi, come quelli petrolifero ed energetico, presupponendo un rimbalzo dei titoli in seguito all'allentamento delle restrizioni e al calo dei contagi. Nello specifico sono state formulate sei view, di cui tre assolute e tre relative:

- **LVMH Moët Hennessy Louis Vuitton**

Il titolo registrerà un trend positivo nei prossimi mesi con un rendimento che aumenterà dello 0,4%. Prima dell'emergenza legata al Covid-19, per il settore moda ci si aspettava un aumento dei profitti annuali pari al 10,4% e un aumento dei ricavi annuali pari al 7%, con la società francese che si collocava al di sopra della media di settore. L'impatto della crisi sul settore della moda e del lusso in generale è stato particolarmente duro, con una contrazione a livello globale del

mercato del lusso tra il 25% e il 30% nel primo trimestre del 2020 rispetto al primo trimestre dell'anno passato. Diversamente dalla recessione del 2009, dove la crisi finanziaria determinò progressivamente una crisi della domanda e minò la fiducia dei consumatori, nell'attuale situazione – oltre ad una crisi della domanda – si sommano le criticità dal lato dell'offerta, con chiusure obbligate dei punti vendita a causa dei lockdown nazionali e fermo della produzione in molti paesi. Fin dalla fase iniziale dell'attuale crisi, il settore dei beni personali di lusso ha iniziato a subire i primi effetti della diffusione del Covid-19 in Cina, i cui cittadini nel 2019 hanno rappresentato il 90% della crescita del mercato globale del lusso. Nel frattempo, l'emergenza si è trasformata in una pandemia, con effetti su tutti i principali mercati mondiali, a partire dall'Italia, quartier generale e sede dei principali fornitori dell'industria del lusso. Ma se la Cina, e in generale il mercato asiatico, potrebbe registrare la ripresa più forte (e già in queste ultime settimane si evidenziano segnali positivi) il Giappone, l'Europa e il continente americano potrebbero invece sperimentare un effetto più prolungato prima di stabilizzarsi sui livelli di crescita pre-crisi, in base anche agli sviluppi sull'economia reale. Tuttavia, i fondamentali che porteranno questo mercato a continuare il suo percorso di crescita nel medio-lungo periodo rimangono invariati e solidi: una crescente domanda della classe media cinese, una maggiore propensione agli acquisti di beni di lusso da parte delle nuove generazioni e una continua evoluzione del canale digitale. Rivolgendo uno sguardo al passato, il consumo di beni di lusso ha superato tutte le crisi precedenti. L'impatto dell'epidemia di SARS del 2002-2003 è stato attenuato dal fatto che l'industria non fosse così dipendente dalla Cina come lo è oggi. Dopo la crisi finanziaria globale del 2008/2009, inoltre, i consumatori cinesi hanno continuato a spendere. In questo contesto di crisi economica e congiuntamente di emergenza sanitaria, l'impresa francese ha dimostrato empatia attraverso la comunicazione interna ed esterna, nonché con azioni a sostegno della lotta contro il Covid-19. Il gruppo LVMH ha infatti fornito il proprio contributo a supporto della sanità pubblica, riadattando le proprie fabbriche per produrre beni di prima necessità, come disinfettante o mascherine. Inoltre, entro la prima metà del 2020 Louis Vuitton ha annunciato l'acquisizione per 16,2 miliardi di euro di Tiffany&Co. L'acquisizione del gruppo statunitense amplia il settore di orologi e gioielli del gruppo francese che già include, tra gli altri, i marchi Bulgari, Chaumet, Tag Heuer e Hublot, permettendogli di competere con Richemont (Cartier e Van Cleef & Arpels) e di rafforzarsi nel mercato statunitense.

- **L'Oreal**

Il titolo registrerà un trend positivo con un rialzo dello 0,5%. Il principale punto di forza della società L'Oréal è senza alcun dubbio il suo posizionamento nel mercato internazionale dei cosmetici. Il gruppo francese, dalla sua creazione nel 1909, è infatti riuscito ad elevarsi al primo posto di questo mercato a livello mondiale e ciò gli vale una certa fiducia da parte degli investitori. Il gruppo gode infatti di un'eccellente presenza sul mercato internazionale, soprattutto per il fatto di possedere 32 marchi ripartiti in differenti regioni del mondo. Il gruppo L'Oréal ha da sempre mostrato una grande capacità di adattamento al mercato e alle nuove esigenze dei consumatori. Ha recentemente messo in opera un nuovo modello economico basato in gran parte sulla creazione di diverse nuove gamme di prodotti a basso prezzo per allargare il proprio target e le proprie quote di mercato. L'Oréal si è inoltre ulteriormente focalizzata su alcune nicchie rafforzando, in particolare, la propria presenza sul mercato dei cosmetici per uomo che rappresentano, ad oggi, il 9% delle vendite totali, e ha fatto di tutto per aumentare il livello delle proprie vendite online (che costituiscono attualmente il 6% delle vendite totali). È ovviamente anche grazie alla sua forte capacità di innovazione che il gruppo L'Oréal riesce a mantenere la propria posizione di leader del suo settore di attività. Gli investimenti in ricerca e sviluppo del gruppo sono infatti particolarmente elevati e i risultati ottenuti permettono di generare almeno il 15% di vendite ogni anno. Da un punto di vista puramente finanziario, il gruppo L'Oréal gode, inoltre, di un margine operativo equilibrato tra i differenti poli di attività, segno che la strategia in corso è efficace. Tuttavia, l'attuale crisi non ha risparmiato alcun settore come confermano i dati di bilancio del primo trimestre per il gruppo L'Oreal: mentre la cosmesi era rimasta quasi indenne dall'impatto della crisi del 2008, stavolta, con la gente chiusa in casa, le vendite dei vari marchi facenti capo a L'Oréal sono scese del 4,8% (a 7,22 miliardi di euro) rispetto al corrispondente trimestre di un anno fa. Minimo l'effetto della variazione dei cambi valutari: a tassi di cambio costanti il calo del fatturato trimestrale è del 4,3%. Non tutto però è negativo: si registra un forte recupero delle attività del gruppo in Cina (+6,4%), Paese che per primo è entrato nel tunnel della crisi del Covid-19 e che per primo sta provando a uscirne; e questo fa ben sperare anche per gli altri mercati quando arriverà l'ora del rimbalzo. Driver del gruppo l'E-commerce che sale del 52,6% e che rappresenta il 20% delle vendite totali del gruppo. Le performance delle diverse divisioni del gruppo sono state altalenanti. L'impatto negativo maggiore è arrivato per i segmenti lusso e prodotti professionali a causa della chiusura delle profumerie, dei department store e dei saloni professionali in molti Paesi. La fascia mass market dei prodotti ha

registrato un leggero declino principalmente perché l'attività relativa a questa fascia di mercato è continuata. Trend più che positivo, invece, per la divisione Active Cosmetics che cresce a doppia cifra grazie al fatto che le farmacie sono sempre rimaste aperte e i marchi in portafoglio hanno saputo rispondere all'aumentata richiesta di prodotti relativi alla salute. Inoltre, L'Oreal, così come ha fatto Louis Vuitton, ha dimostrato il proprio impegno e sostegno nella lotta contro il virus, con la conversione delle proprie linee industriali per la produzione di gel igienizzante. In conclusione, è possibile affermare che L'Oreal ha retto abbastanza bene l'onda d'urto Coronavirus e ha anche annunciato con Prada la firma di un contratto pluriennale di licenza per la creazione, lo sviluppo e la distribuzione di prodotti cosmetici di lusso a marchio Prada. L'accordo permetterà alle due aziende di unire le rispettive competenze in ciascuno dei settori nei quali operano e avrà decorrenza a partire dal 1° gennaio 2021.

- **Enel**

Si stima che il rendimento del titolo aumenterà nei prossimi mesi dello 0,2%. Nei primi tre mesi dell'anno, caratterizzati dall'emergenza Coronavirus, Enel ha messo a segno profitti per 1.281 milioni di euro, rispetto ai 1.159 milioni di euro del 2019, registrando un incremento di 122 milioni di euro (+10,5%). Il risultato si deve soprattutto alla miglior gestione operativa ordinaria ma anche ai minori oneri dovuti alla riduzione del costo del debito. Questi fattori hanno più che compensato le maggiori imposte nel primo trimestre 2020 ed un incremento della quota di utili spettante alle minorities. Grazie alla diversificazione geografica del Gruppo, al suo modello di business integrato lungo la catena del valore, alla solida struttura finanziaria, nonché al livello di digitalizzazione raggiunto che permette di garantire la continuità delle attività operative con lo stesso livello di servizio, non si hanno al momento evidenze di impatti significativi sul gruppo stesso derivanti dallo stato di emergenza Covid-19. Inoltre, la crisi del petrolio pare non aver intaccato più di tanto il titolo italiano. Il 2019 è stato infatti per Enel un anno di svolta: la produzione elettrica da fonti rinnovabili ha raggiunto a livello globale quella da fonti convenzionali. Un traguardo reso possibile da una strategia di business che dal 2015 si è focalizzata sullo sviluppo delle fonti rinnovabili e che ha fatto sì che il Gruppo diventasse il leader mondiale nei settori delle reti di distribuzione e delle energie pulite, con la più vasta base di clienti retail (71 milioni) e circa 46 GW di capacità gestita tra eolico, solare, geotermico e idroelettrico. L'azienda ha saputo cogliere prima degli altri le opportunità legate ai trend globali della decarbonizzazione e dell'elettrificazione, confermandosi tra i leader nella transizione energetica. Agli importanti traguardi raggiunti si è

sommato l'apprezzamento degli investitori e del mercato dimostrato dal valore di capitalizzazione di borsa che ha raggiunto un nuovo record, superando i 73 miliardi di euro ed un prezzo per azione di oltre 7,2 euro, portando la società guidata da Francesco Starace al vertice del listino di Piazza Affari e di tutto il settore utility in Europa, confermandola una delle più grandi aziende a livello globale. Nel periodo 2020-2022 Enel ha in programma investimenti per 28,7 mld di euro, pari a un incremento dell'11% rispetto al piano precedente, che porteranno a un Ebitda atteso di 20,1 mld di euro nel 2022 (+13% rispetto ai 17,8 mld di euro previsti nel 2019). Gli investimenti si concentreranno principalmente su tre degli Obiettivi di sviluppo sostenibile (i Sustainable Development Goals fissati dall' ONU nell' Agenda 2030) che rappresenteranno circa il 95% dei capex cumulati di Gruppo nel periodo 2020-2022: energia pulita e accessibile (SDG 7), industria, innovazione e infrastrutture (SDG 9) e città e comunità sostenibili (SDG 11); tali punti contribuiscono complessivamente alla lotta contro il cambiamento climatico (SDG 13). La sostenibilità non è più una scelta legata solo ad un aspetto morale ma è diventata parte integrante della strategia di business.

- **Sanofi**

Il titolo Sanofi presenterà un rialzo dello 0,3% rispetto a Bayer. Il Covid-19 è stato fonte di guadagno per alcune società, infatti la spesa pro-capite nel settore Healthcare è aumentata del 300%. Di conseguenza c'è stato un aumento dell'utile per le società di tale settore e ciò ha portato a un incremento del valore delle azioni. La forza di tale ambito non risiede soltanto nella lotta alla cura del virus dal momento che i titoli anche nel 2019 avevano conseguito un guadagno medio del 22%. Una ricerca di Deloitte pre-crisi aveva evidenziato un aumento del 4% della spesa sanitaria mondiale. In generale gli investimenti e la ricerca in questo settore sono in forte aumento e ciò rappresenterebbe per gli investitori ottimi guadagni. In particolar modo, per il settore farmaceutico si prevedeva un aumento dei profitti annuali pari all' 8% e un aumento dei ricavi annuali pari al 3,3%, secondo le stime precedenti allo scoppio della pandemia. Dalla situazione attuale, Sanofi è riuscita a trarre vantaggio grazie alla collaborazione con GlaxoSmithKline Plc per lo sviluppo di un vaccino contro il Covid-19. Le due case farmaceutiche prevedono l'inizio dei test clinici per il vaccino nella seconda metà dell'anno corrente. In caso di successo, il vaccino sarebbe disponibile nella seconda metà del 2021. Inoltre, trainata dai forti risultati nel Q1 della Unit Speciality Care e dall'aumento della domanda di farmaci da banco per il trattamento di febbre e dolore nel corso della pandemia, Sanofi ha confermato le previsioni per il 2020. La pharma francese ha totalizzato dalle vendite 8 miliardi

e 973 milioni di euro, crescendo del 6,9% dall'ultimo report. A febbraio Sanofi aveva dichiarato di puntare a un aumento di circa il 5% degli utili per azione per il 2020. Un traguardo che considera possibile raggiungere anche nel Q2, se le conseguenze della pandemia lo permetteranno. Sanofi guarda con ottimismo al 2020, grazie anche a un Q4 2019 molto positivo, letteralmente dominato da Dupixent e dall'area vaccini. Il blockbuster per la dermatite atopica, in particolare, ha fatto incassare alla pharma francese 679 milioni di euro, con un incremento del 135%. Le vendite dei vaccini sono cresciute del 22%. Per quanto riguarda il 2019 la vendita complessiva di tutti i prodotti Sanofi è aumentata del 3,6%. L'utile per azione è stato pari al 6,8%, mentre quello netto è cresciuto del 18,4%, arrivando a 1,68 miliardi di euro, grazie alle crescite di Genzyme e del business vaccini. Alle spalle di Sanofi si colloca Bayer. La casa farmaceutica di Leverkusen nel primo trimestre del 2020 è cresciuta quasi del 20% fino a 1,49 miliardi di euro, cifra che dovrebbe convincere i suoi azionisti a mostrare il loro sostegno in questo momento di grave crisi sanitaria. Bayer ha registrato inoltre un core EPS in netto aumento, stimato superiormente al 9,9% a 2,67 euro. Questo risultato rende onore agli sforzi del gruppo e dimostra quanto sia gestito con abilità. Questo valore di EPS supera di gran lunga il consenso del mercato, tanto che il gruppo parla di una differenza di 35 punti. Secondo i dati presentati dal colosso tedesco Bayer, i suoi ricavi sono stimati a più di 12,8 miliardi di euro. È chiaro che i suoi valori sono sorprendenti in questi tempi di crisi. E al di là di tutto ciò che si può dire, la crisi sanitaria di Covid-19 non è stata positiva per il gruppo: le conseguenze della crisi continueranno per tutto il corso del 2020, anche se è difficile in questo momento quantificarle con esattezza.

- **Total**

Il titolo Total registrerà un aumento di rendimento rispetto a Eni pari allo 0,1%. Uno dei settori maggiormente colpiti dalla crisi, e dal lockdown in particolare, è stato il settore petrolifero e dell'oil&gas. Il crollo della domanda di petrolio dovuto alla pandemia, unito a una selvaggia guerra dei prezzi, ha messo in ginocchio l'industria dei combustibili fossili. Il fatto che la materia prima valga molto poco adesso, spesso addirittura meno rispetto ai costi di produzione, sta spingendo la maggior parte delle piccole aziende a bloccare l'intero processo. Tuttavia, ci si aspetta un rimbalzo tecnico del prezzo del petrolio dopo i minimi storici raggiunti, soprattutto in seguito all'accordo sul taglio dell'offerta operato dall'Opec Plus. Nonostante le energie rinnovabili siano una risorsa sempre più dominante, si presume che nel futuro prossimo sia ancora il combustibile fossile a farla da padrone e che ci sia, quindi, un trend rialzista riguardo i titoli delle maggiori

compagnie petrolifere. Prima dell'emergenza Covid-19, le prospettive per il 2020 del settore petrolifero erano avevano un aumento dei profitti annuali pari al 6,5% e un aumento dei ricavi annuali pari a 2,8%. Total SA si posizionava al di sopra del settore registrando un aumento dei profitti annuali pari a 8,1% e un aumento dei ricavi annuali pari a 2,9%; Eni era al di sotto del settore con un aumento dei profitti annuali pari al 5% e dei ricavi pari all'1,4%. È evidente, quindi, che le prestazioni di Total siano migliori di quelle di Eni.

- **Allianz**

Il titolo Allianz registrerà un rialzo dello 0,1% rispetto a Volkswagen. Per il settore assicurativo, le stime precedenti alla crisi parlavano di un aumento dei profitti annuali nel 2020 del 3,7% e di un aumento dei ricavi annuali pari al 4,5%. La società assicurativa Allianz si posiziona al di sopra del settore registrando un aumento dei profitti annuali pari al 5,1% e un aumento dei ricavi annuali pari al 6,1%. Tali risultati sono imputabili al fatto che MoneyFarm SIM S.p.A. ha annunciato di aver sottoscritto un accordo che prevede un aumento di capitale di 40 milioni di euro mediante l'emissione di azioni di categoria C guidata dal nuovo investitore Poste Italiane S.p.A. e tale transazione include la partecipazione dell'investitore di ritorno Allianz. Dopo la chiusura della transazione, Poste Italiane S.p.A. deterrà una partecipazione di minoranza nella società. Il settore automobilistico, invece, rischia di essere tra i più penalizzati dalla diffusione del Coronavirus, in parte per effetto dell'inevitabile calo dei consumi del gigantesco mercato cinese, in parte per la riduzione della produzione dovuta alla chiusura forzata degli stabilimenti prevista dalle misure di contenimento del contagio decise dalla Repubblica Popolare Cinese. Per questo motivo S&P Global Ratings ha rivisto al ribasso le stime sia sulla produzione sia sulle immatricolazioni. L'industria della componentistica automotive cinese è un importante fornitore di diversi gruppi automobilistici a livello globale e la chiusura delle fabbriche comporterà - secondo la stima di S&P Global Ratings - un calo della produzione del 15% nel primo trimestre dell'anno. Si tratta di uno stop tale da pregiudicare la ripresa della produzione che gli analisti avevano messo in conto dopo il -4,2% e il -7,5% registrati rispettivamente nel 2018 e nel 2019. Tutto ciò avrà effetti a cascata sulla catena di approvvigionamento di tutta l'industria dell'auto a livello globale. Tra i grossi gruppi delle quattro ruote, quello più direttamente esposto al calo di produzione e immatricolazioni è Volkswagen che nella Repubblica Popolare registra quasi il 40% della sua produzione (tra componenti e veicoli assemblati) in 23 stabilimenti. Sebbene il grosso degli impianti sia nell'area di Shanghai (lontano dall'epicentro dell'epidemia), gli

analisti hanno messo in conto una chiusura prolungata degli impianti. L'agenzia di rating ha stimato per quest'anno vendite per 4,1 milioni di unità (in calo rispetto alle 4,2 del 2019). Tra le multinazionali dell'auto la casa di Wolfsburg è in assoluto quella che vende di più in Cina. La seconda in classifica è General Motors che registra il 19% della produzione nella Repubblica Popolare e vende meno della metà di Volkswagen. Nel 2019 la produzione auto tedesca ha fatto segnare un -9% a 4,7 milioni di unità. La produzione nell'ultimo mese dell'anno scorso è stata di circa 276.000 veicoli, con un calo del 7% come ai livelli di produzione del 1997. Si tratta del terzo anno con segno negativo; nel 2018, infatti, la produzione auto è scesa del -9,3% rispetto al 2017, anno in cui invece la produzione di auto in Germania era calata dell'1,8%.

Una volta formulate le view assolute e relative, è possibile definire le matrici q e P : la prima è composta dai rendimenti previsti da ciascuna view, la seconda dagli asset per ogni specifica view. Come riportato dal *Manuale di Matematica Finanziaria* di Micocci e Masala, la matrice P avrà righe e colonne pari rispettivamente al numero di view espresse e di asset presenti nel portafoglio. Le righe espressione delle view assolute avranno un peso pari all'unità in corrispondenza dell'asset interessato e nullo per tutti gli altri asset. Le righe espressione delle view relative assegneranno peso pari a 1 all'asset che si suppone produrrà un over-rendimento e peso pari a -1 all'asset per cui si ipotizza un under-rendimento. In quest'ultimo caso è importante che la somma degli elementi della riga sia pari a zero. Di seguito si presentano entrambe le matrici (Tabelle 52 e 53).

Tabella 52. Matrice q

View 1	0,004
View 2	0,005
View 3	0,002
View 4	0,003
View 5	0,001
View 6	0,001

Tabella 53. Matrice P

	ENI	IBE	ENEL	DTE	VOW3	BAYN	SIE	ALV	LIN	SAP
View 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
View 2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
View 3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
View 4	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
View 5	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
View 6	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0

	AIR	L'OREAL	AI	KER	ABI	UNA	SAN	LVMH	TOTAL	ASML
View 1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
View 2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
View 3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
View 4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
View 5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
View 6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Per quanto riguarda la matrice di confidenza (Tabella 54), l'approccio utilizzato per la sua determinazione è quello della diagonalizzazione secondo la formula $\Psi = \text{diag}(P \cdot \tau \Sigma \cdot P^T)$. Con l'utilizzo del termine $\tau \Sigma$ si mantiene la varianza delle views proporzionale a quella dei rendimenti di equilibrio.

Tabella 54. Matrice di confidenza

1,71E-05	0	0	0	0	0
0	1,11E-05	0	0	0	0
0	0	1,60E-05	0	0	0
0	0	0	2,74E-05	0	0
0	0	0	0	2,605E-05	0
0	0	0	0	0	3,027E-05

Come è osservabile dalla tabella sopra riportata, tutti gli elementi della diagonale principale sono molto prossimi al valore nullo. Ciò implica il fatto che ciascuna delle view sia caratterizzata da una bassa varianza riguardo il termine di errore e conseguentemente da un elevato grado di certezza. Le view cui è stato associato il maggior livello di confidenza risultano essere le assolute, ovvero quelle formulate per i titoli Louis Vuitton, L'Oreal ed Enel. Un minor grado di certezza è riposto nelle view relative, soprattutto per l'ultima legata alla coppia di titoli Allianz-Volkswagen.

4.8 Rendimenti di Black & Litterman

Calcolati i rendimenti impliciti e le matrici relative alle view, è possibile ricavare i rendimenti e le varianze di Black & Litterman (Tabella 55) mediante l'approccio bayesiano già presentati nel terzo capitolo del presente lavoro di tesi. Le formule utilizzate per il calcolo sono le seguenti:

- Media: $[(\tau \cdot \Sigma)^{-1} + P^T \Psi^{-1} P]^{-1} [(\tau \cdot \Sigma)^{-1} \theta + P^T \Psi^{-1} q]$;
- Matrice varianza-covarianza: $[(\tau \cdot \Sigma)^{-1} + P^T \Psi^{-1} P]^{-1}$.

Tabella 55. Rendimenti e deviazioni standard di Black & Litterman

Titolo	Rendimenti BL	Varianze BL
ENI	0,000813	1,01E-05
IBE	0,000675	1,10E-05
ENEL	0,000987	7,18E-06
DTE	0,000455	9,32E-06
VOW3	0,000363	2,10E-05
BAYN	5,71E-06	1,14E-05
SIE	0,000502	1,39E-05
ALV	0,000719	1,47E-05
LIN	0,001043	5,60E-05
SAP	0,001951	8,87E-06
AIR	0,002523	2,11E-05
OR	0,002943	4,67E-06
AI	0,002171	7,27E-06
KER	0,002766	1,45E-05
ABI	0,001773	1,71E-05
UNA	0,001316	9,56E-06
SAN	0,002294	8,05E-06
MC	0,003049	7,28E-06
FP	0,002227	9,37E-06
ASML	0,00215	1,81E-05

La Figura 78 mostra il confronto tra i rendimenti impliciti e i rendimenti di Black & Litterman. Questi ultimi raggiungono valori notevolmente superiori rispetto agli extra-rendimenti di mercato condizionati dalla propensione al rischio dell'investitore; ciò è imputabile in larga misura alle opinioni formulate dall'investitore stesso. Inoltre, dal confronto emerge che, oltre al rendimento dei titoli oggetto delle view, un aumento consistente è apprezzabile anche per i rendimenti degli altri titoli. Questo si spiega dal momento che tutti i titoli sono correlati tra loro per cui, quando si formula una view su un asset, indirettamente questa avrà conseguenze anche sugli altri. I rendimenti che variano maggiormente sono quelli dei titoli L'Oreal e Louis Vuitton, sui quali sono state formulate view assolute, seguiti dal titolo Kering anch'esso operante nel mercato del lusso. Anche i titoli Sanofi e Total, per cui sono state espresse view relative positive, presentano i rendimenti di Black-Litterman di gran lunga più elevati rispetto ai rendimenti impliciti. Più contenute, invece, sono le variazioni degli altri titoli interessati dalle view, ovvero Enel, Eni, Allianz, Volkswagen e Bayer. I titoli sui quali invece non è stata espressa alcuna view ma che mostrano variazioni consistenti sono: Sap, Airbus, Air Liquide, Anheuser-Busch Inbev, Unilever e Asml.

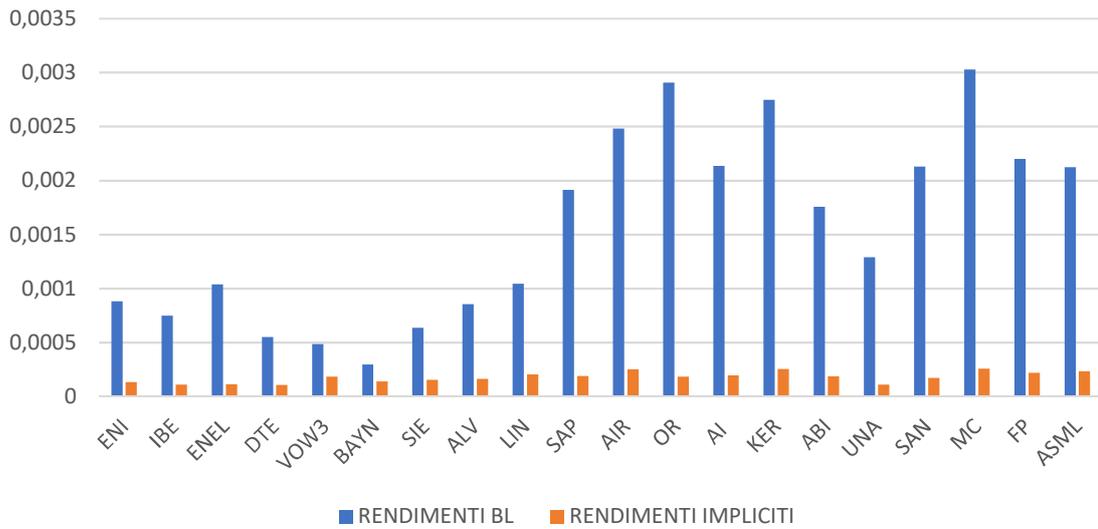


Figura 78. Confronto tra i rendimenti impliciti e i rendimenti di Black & Litterman

Prima di procedere con il calcolo delle quote di portafoglio tramite i rendimenti e le rischiosità identificate, occorre ragionare sul significato della matrice di varianza-covarianza di Black & Litterman, la cui formula è stata riportata precedentemente. Tale matrice, infatti, non si riferisce al valore atteso dei rendimenti ma alla sua stima e, di conseguenza, non può essere utilizzata come input nel tradizionale processo di ottimizzazione. A tal proposito occorre rimodellare la matrice di varianza-covarianza aggiungendovi la matrice di varianza-covarianza storica, la stessa utilizzata nel modello di Markowitz (Tabella 56):

$$V^* = V_{BL} + \Sigma$$

Tabella 56. Deviazioni standard di Black-Litterman rimodellate

Titoli	Deviazione Standard BL
ENI	0,01865238
IBE	0,0182528
ENEL	0,01808642
DTE	0,01568478
VOW3	0,02538016
BAYN	0,01919942
SIE	0,01928654
ALV	0,02074663
LIN	0,03453865
SAP	0,01571656
AIR	0,02351012

OR	0,01502385
AI	0,01518091
KER	0,02134766
ABI	0,02020328
UNA	0,01493872
SAN	0,01583552
MC	0,01868656
FP	0,01754557
ASML	0,02141942

Dopo aver definito i rendimenti di equilibrio di Black-Litterman mediante l'approccio bayesiano (che ha permesso di combinare le aspettative del mercato con quelle dell'investitore) e dopo aver calcolato la matrice di varianza-covarianza, si hanno tutti gli strumenti per tracciare la frontiera efficiente. Come per il modello di Markowitz, l'analisi è stata condotta parallelamente su due diversi ambienti di calcolo, Excel e Matlab, giungendo ai medesimi risultati. Attraverso lo strumento del *Risolutore* è stato possibile definire il processo di ottimizzazione, delineando la frontiera efficiente in assenza e in presenza di vendite allo scoperto. L'impostazione del problema di ottimizzazione vincolata nel modello di Black & Litterman ricalca quella del modello di Markowitz, con la differenza che i dati di input inseriti nel processo sono diversi. Il punto di partenza, anche in questo caso, è rappresentato dal portafoglio equiponderato, ossia un portafoglio in cui ogni titolo ha il medesimo peso percentuale. Inoltre, attraverso il vettore dei rendimenti di BL e la matrice di varianza-covarianza rimodellata, è stato possibile calcolare media e deviazione standard del suddetto portafoglio. Di seguito si mostrano i risultati ottenuti per il portafoglio equiponderato (Tabella 57).

Tabella 57. Composizione del portafoglio equiponderato

ENI	5,00%
IBE	5,00%
ENEL	5,00%
DTE	5,00%
VOW3	5,00%
BAYN	5,00%
SIE	5,00%
ALV	5,00%
LIN	5,00%
SAP	5,00%
AIR	5,00%
OR	5,00%
AI	5,00%

KER	5,00%
ABI	5,00%
UNA	5,00%
SAN	5,00%
MC	5,00%
FP	5,00%
ASML	5,00%
Σw	100,00%
μ	0,15362%
σ	1,01975%

Come per il modello di Markowitz, si è scelto di minimizzare la varianza impostando i seguenti vincoli:

- Il valore atteso del rendimento del portafoglio pari al valore arbitrariamente scelto;
- Pieno investimento delle proprie risorse, ovvero la somma delle quote dei titoli dovrà necessariamente essere pari ad 1.
- Le quote di composizione del portafoglio positive (vincolo di non negatività).

Per il caso in assenza di vendite allo scoperto il *Risolutore* ha fornito i risultati riassunti nella Tabella 58.

Tabella 5.: Composizione del portafoglio per valori fissati di rendimento in assenza di vendite allo scoperto -Modello di Black & Litterman

Titoli	Min. varianza	2	3	4	5	6
ENI	1,53%	1,92%	1,70%	0,51%	0,00%	0,00%
IBE	7,42%	5,46%	3,53%	0,88%	0,00%	0,00%
ENEL	7,16%	10,25%	13,24%	16,07%	15,64%	9,33%
DTE	14,42%	10,18%	4,97%	0,00%	0,00%	0,00%
VOW3	0,81%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
BAYN	3,62%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
SIE	1,50%	1,64%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
ALV	0,00%	0,00%	0,17%	0,76%	0,00%	0,00%
LIN	3,63%	2,76%	1,86%	0,89%	0,07%	0,00%
SAP	9,91%	7,81%	4,71%	1,34%	0,00%	0,00%
AIR	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
OR	7,32%	22,64%	35,31%	48,55%	55,59%	63,14%
AI	4,94%	4,87%	2,75%	0,50%	0,00%	0,00%
KER	0,00%	0,09%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
ABI	4,31%	3,32%	1,85%	0,28%	0,00%	0,00%
UNA	22,10%	16,03%	10,12%	3,85%	0,00%	0,00%

SAN	10,11%	10,89%	11,32%	11,71%	10,85%	5,50%
LVMH	0,00%	0,56%	7,36%	14,14%	17,84%	22,02%
TOTAL	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
ASML	1,21%	1,57%	1,10%	0,53%	0,00%	0,00%
Σw	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
μ	0,13937%	0,17205%	0,20526%	0,23847%	0,25507%	0,27168%
σ	0,89963%	0,0093006	0,0101704	0,01146938	0,0122534	0,013192

In Tabella 58 sono riportati i pesi dei portafogli che costituiscono la frontiera efficiente ordinati secondo valori crescenti di rendimento. A differenza del modello di Markowitz, è possibile notare come all'aumentare del rendimento target l'allocazione del portafoglio risulti essere più equilibrata e bilanciata rispettando il principio di diversificazione. Come mostrato in tabella, sono state calcolate sei diverse allocazioni di portafoglio con valori di rendimento che aumentano proporzionalmente con il rischio, sottolineando come i portafogli costruiti appartengano alla frontiera efficiente.

In Figura 79 si riporta il grafico della frontiera efficiente con vincoli di non negatività costruita con i portafogli indicati nella Tabella 58.

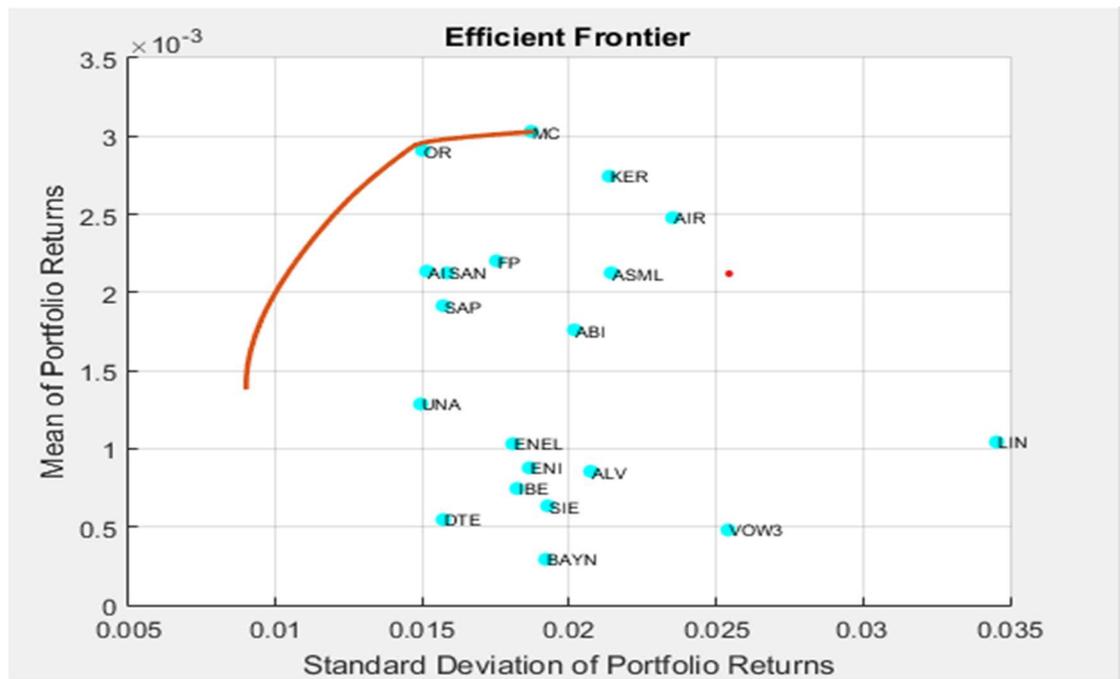


Figura 79. Costruzione della frontiera efficiente in assenza di vendite allo scoperto – Modello di Black & Litterman

Rilassando il vincolo di non negatività si ottengono le quote di composizione del portafoglio in presenza di vendite allo scoperto. In Tabella 59 sono riportati i pesi dei portafogli che costituiscono la frontiera efficiente ordinati secondo valori crescenti di rendimento.

Tabella 59. Composizione del portafoglio per valori fissati di rendimento in presenza di vendite allo scoperto -Modello di Black & Litterman

Titoli	Min. rendimento	2	3	4	5	Max rendimento
ENI	1,97%	5,33%	5,28%	1,55%	-74,93%	-100,00%
IBE	7,87%	-9,69%	-34,35%	-69,51%	-100,00%	-100,00%
ENEL	7,00%	34,53%	81,01%	100,00%	100,00%	-100,00%
DTE	15,09%	-19,90%	-71,67%	-100,00%	-100,00%	-100,00%
VOW3	1,22%	-15,18%	-38,73%	-80,90%	-100,00%	-100,00%
BAYN	4,23%	-35,25%	-94,39%	-100,00%	-100,00%	-100,00%
SIE	3,82%	-5,42%	-25,61%	-84,48%	-100,00%	-100,00%
ALV	-4,81%	21,59%	60,25%	94,51%	48,19%	-100,00%
LIN	3,79%	-4,07%	-15,32%	-33,45%	-71,94%	-100,00%
SAP	11,14%	-11,94%	-28,20%	-47,23%	-19,75%	100,00%
AIR	-2,79%	4,55%	20,82%	51,88%	100,00%	100,00%
OR	9,17%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
AI	7,23%	-5,87%	14,37%	51,76%	100,00%	100,00%
KER	0,54%	0,90%	36,91%	100,00%	100,00%	100,00%
ABI	4,67%	-4,50%	-9,68%	-20,37%	-27,26%	100,00%
UNA	22,24%	-25,32%	-64,45%	-100,00%	-100,00%	0,00%
SAN	10,31%	20,64%	61,50%	100,00%	100,00%	100,00%
LVMH	-5,70%	57,11%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
TOTAL	0,63%	-5,92%	4,15%	34,86%	100,00%	100,00%
ASML	2,37%	-1,61%	-1,90%	1,39%	45,70%	100,00%
Σw	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
μ	0,13%	0,44%	0,75%	1,00%	1,30%	1,69%
σ	0,89%	2,26%	4,50%	6,66%	9,74%	16,40%

Nella tabella sopra riportata sono presenti le quote di composizione del portafoglio in presenza di vendite allo scoperto. Si noti come in corrispondenza del massimo rendimento i primi 8 titoli vengano venduti allo scoperto; la motivazione di ciò va ricercata nella correlazione esistente tra i titoli, essendo i primi 8 molto correlati tra loro e poco con i restanti 12. Di seguito si riporta, inoltre, la frontiera efficiente ottenuta rilassando il vincolo di non negatività (Figura 80).

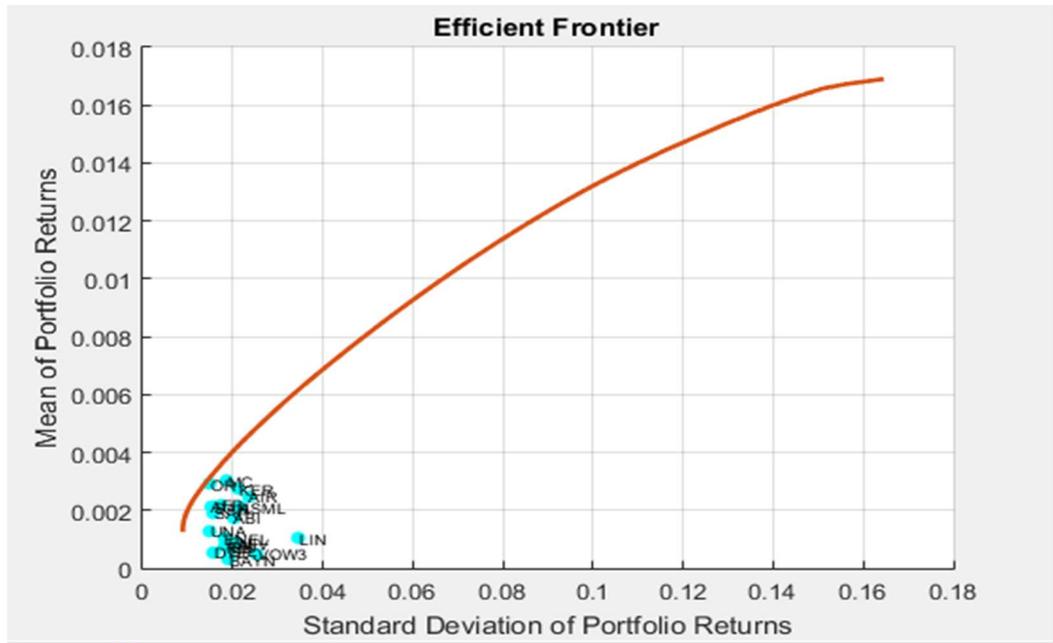


Figura 80. Costruzione della frontiera efficiente in presenza di vendite allo scoperto – Modello di Black & Litterman

La frontiera efficiente in presenza di vendite allo scoperto domina quella in assenza di vendite allo scoperto poiché è stato rilassato il vincolo di non negatività, con la possibilità di ottenere una maggiore varietà di portafogli raggiungendo livelli di redditività più elevati. Dal confronto emerge chiaramente come, a parità di rischio, il portafoglio ottimo in presenza di vendite allo scoperto presenta un rendimento maggiore anche se ciò appare in maniera meno marcata rispetto al modello markowitziano (Figura 81).

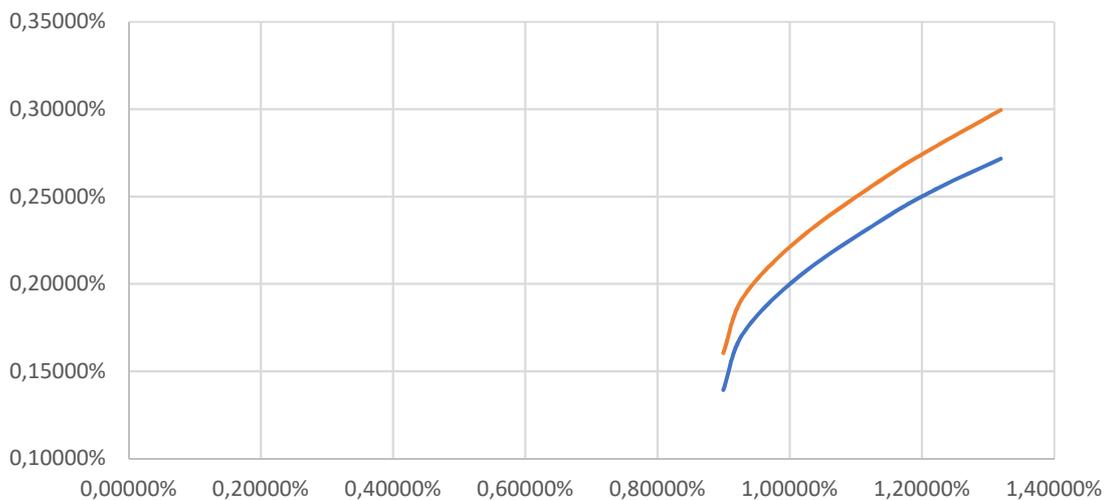


Figura 81. Confronto delle frontiere efficienti in assenza (linea blu) e in presenza (linea arancione) di vendite allo scoperto – Modello di Black & Litterman

Successivamente, al fine di rendere ancor più chiaro il confronto tra vendite allo scoperto e non, è stato fissato un rendimento target dello 0,225%, arbitrariamente scelto, ed è stato possibile analizzare la composizione delle quote di portafoglio nei due diversi casi, come mostrato nelle Figure 82 e 83.

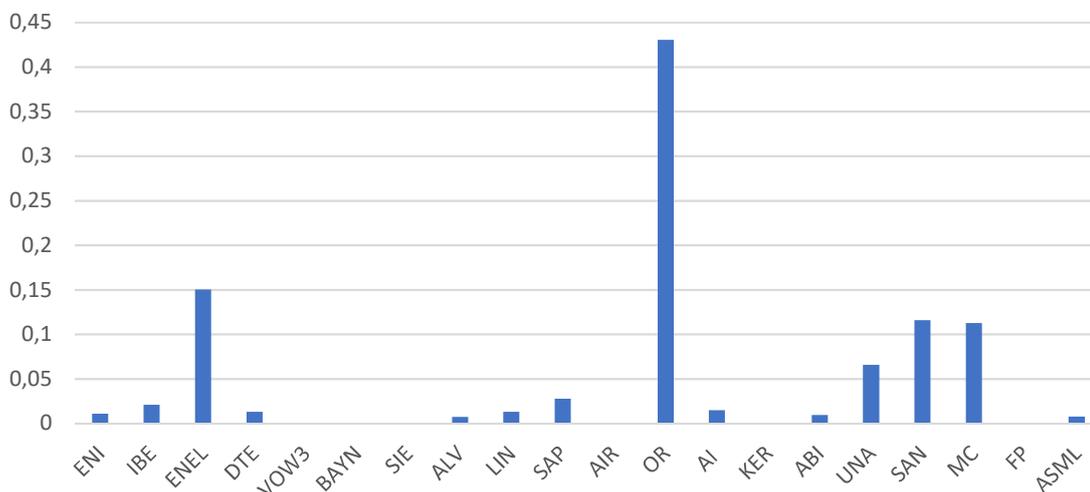


Figura 82. Composizione del portafoglio in assenza di vendite allo scoperto per un rendimento target dello 0,225%

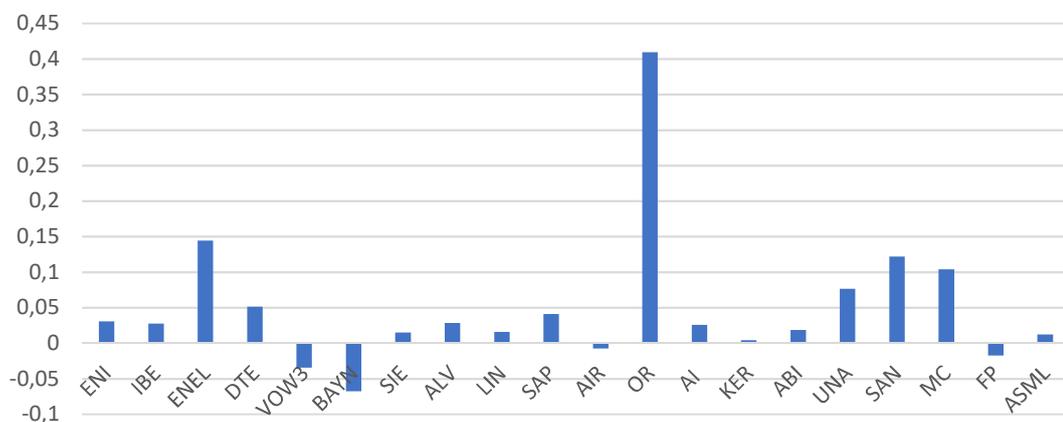


Figura 83: Composizione del portafoglio in presenza di vendite allo scoperto per un rendimento target dello 0,225%

I risultati ottenuti confermano quanto previsto a livello teorico. Si noti, infatti, come in entrambi i grafici i titoli con le percentuali più alte siano proprio quelli su cui sono state espresse le view assolute (ENEL, L'OREAL E LVMH). Una buona percentuale è allocata anche nel titolo SANOFI per cui era stato previsto un extra-rendimento rispetto a BAYER che invece viene venduto allo scoperto. Stesso

discorso vale per la coppia ALLIANZ- VOLKSWAGEN seppur con percentuali inferiori. Non rispecchia invece le previsioni la coppia TOTAL-ENI; TOTAL viene infatti venduta allo scoperto mentre ENI presenta una percentuale, seppur esigua, positiva. I restanti titoli, sui quali non è stata formulata alcuna view, presentano, come previsto, posizioni piccole o addirittura nulle.

Agli stessi risultati si è pervenuti utilizzando il software Matlab e inserendo come dati di input il vettore dei rendimenti e la matrice di varianza-covarianza, dati ottenuti dall'applicazione del modello di Black & Litterman. Tramite la funzione *Portfolio* è stato possibile definire il problema di ottimo e i rispettivi vincoli; l'allocazione ottima è stata invece ottenuta mediante la funzione *estimateFrontierByReturn* che permette di minimizzare la varianza del portafoglio ottimo fissando il rendimento atteso. In questo modo il software calcola tutte le combinazioni di portafoglio presenti sulla frontiera efficiente e restituisce il portafoglio dalle prestazioni migliori fissato un rendimento target.

In ultima analisi, anche per il modello di Black e Litterman è stata studiata la composizione del portafoglio ottimo all'aumentare del rischio attraverso la funzione di Matlab *estimateFrontierByRisk* in assenza di vendite allo scoperto. Nella Figura 84 è possibile vedere che, come nel caso di rendimenti impliciti, il peso dei titoli risulta molto più bilanciato, contrariamente a ciò che accadeva nel modello di Markowitz. Come osservabile in figura, sono state calcolate quattro diverse allocazioni di portafoglio con valori di rischio crescenti.

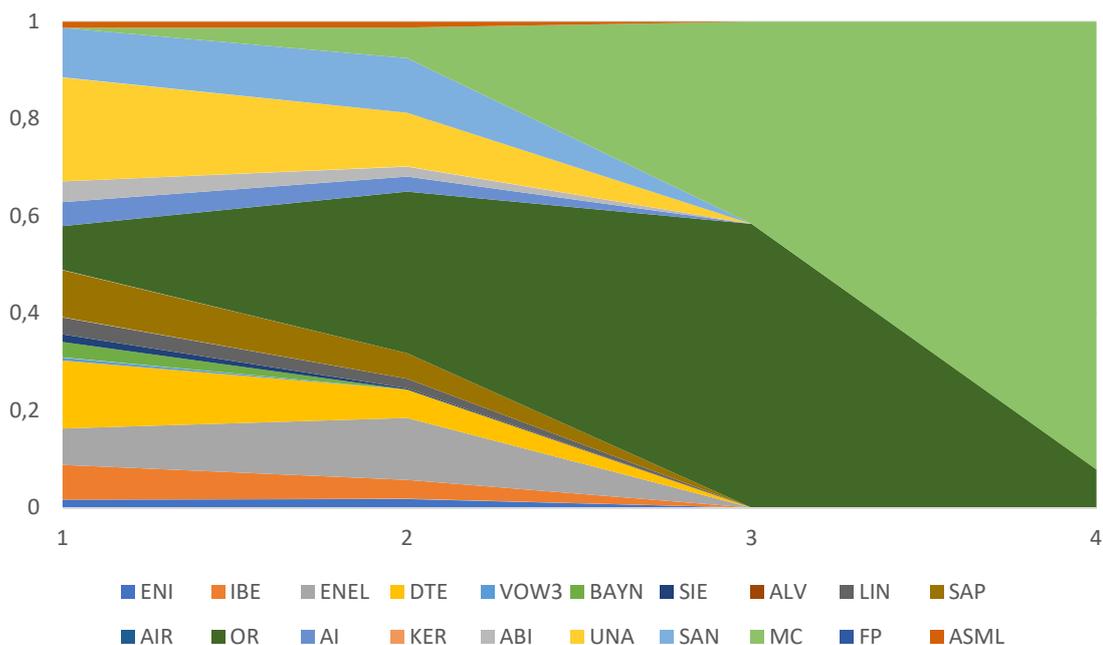


Figura 84. Variazione della composizione di portafoglio all'aumentare del rischio

Per valutare quale sia il modello che offre le migliori prestazioni è stato calcolato l'indice di Sharpe; tale indice, infatti, fornisce una misura della performance del portafoglio, esprimendo il rendimento di un portafoglio titoli al netto del tasso risk-free in rapporto al rischio del portafoglio stesso. È così indicato il rendimento in termini percentuali per ogni unità di rischio dell'investimento. Se μ_p è il rendimento del portafoglio, σ_p la sua deviazione standard (o volatilità) ed i il tasso d'interesse privo di rischio, l'indice di Sharpe del portafoglio è pari a:

$$Sharpe = \frac{\mu_p - i}{\sigma_p}$$

Avendo constatato che la frontiera efficiente in presenza di vendite allo scoperto domina quella in assenza di vendite allo scoperto, si è scelto di massimizzare l'indice di Sharpe in presenza di vendite allo scoperto utilizzando come dati di input i rendimenti storici, i rendimenti impliciti e i rendimenti di Black & Litterman. L'analisi è stata condotta attraverso il software Matlab utilizzando la funzione *estimateMaxSharpeRatio*. Tale funzione permette di massimizzare l'indice di Sharpe tra i portafogli presenti sulla frontiera efficiente, restituendo il portafoglio con il più alto indice di Sharpe. Le Figure 85, 86 e 87 mostrano i risultati ottenuti.

Nella Figura 85 è possibile osservare la frontiera efficiente ottenuta applicando la teoria di Markowitz senza vincoli di non negatività e massimizzando l'indice di Sharpe. In giallo è stato evidenziato il portafoglio ottimo che restituisce un rendimento pari a 0,00081939 a fronte di una deviazione standard dello 0,01484218.

La Figura 86 individua il portafoglio ottimo ottenuto massimizzando l'indice di Sharpe e utilizzando come dati in input i rendimenti impliciti. Il portafoglio presenta un rendimento dello 0,00018297 e una deviazione standard pari a 0,00227352.

In Figura 87 è mostrata la frontiera efficiente ottenuta applicando la teoria di Black & Litterman senza vincoli di non negatività e massimizzando l'indice di Sharpe. In giallo è stato evidenziato il portafoglio ottimo che restituisce un rendimento pari a 0,00268801 a fronte di una deviazione standard dello 0,01267554.

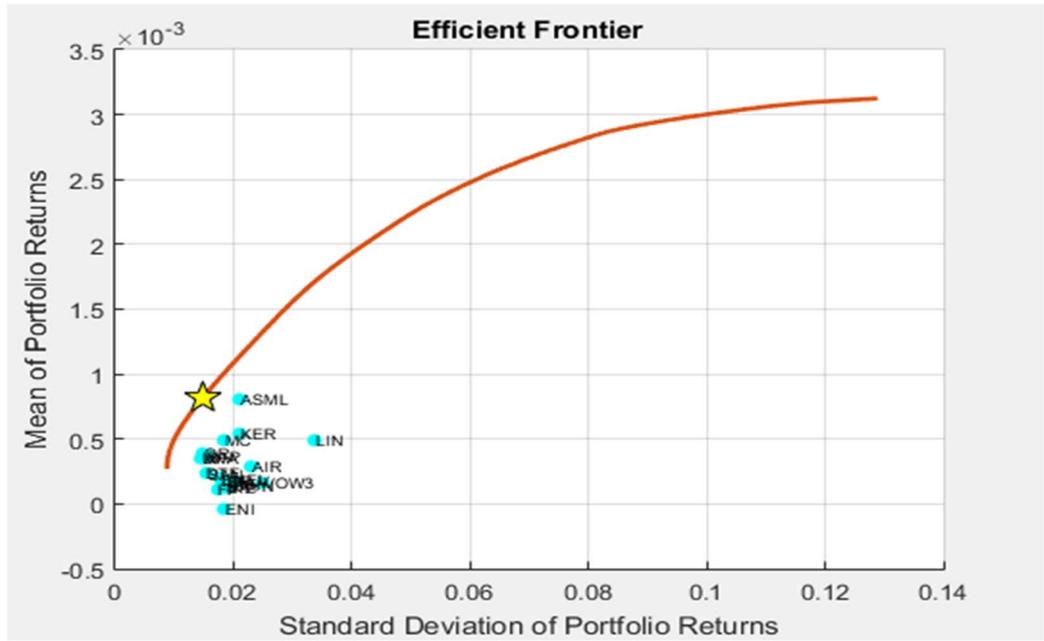


Figura 85. Frontiera efficiente di Markowitz in presenza di vendite allo scoperto massimizzando l'indice di Sharpe



Figura 86. Costruzione della frontiera efficiente con i rendimenti impliciti massimizzando l'indice di Sharpe

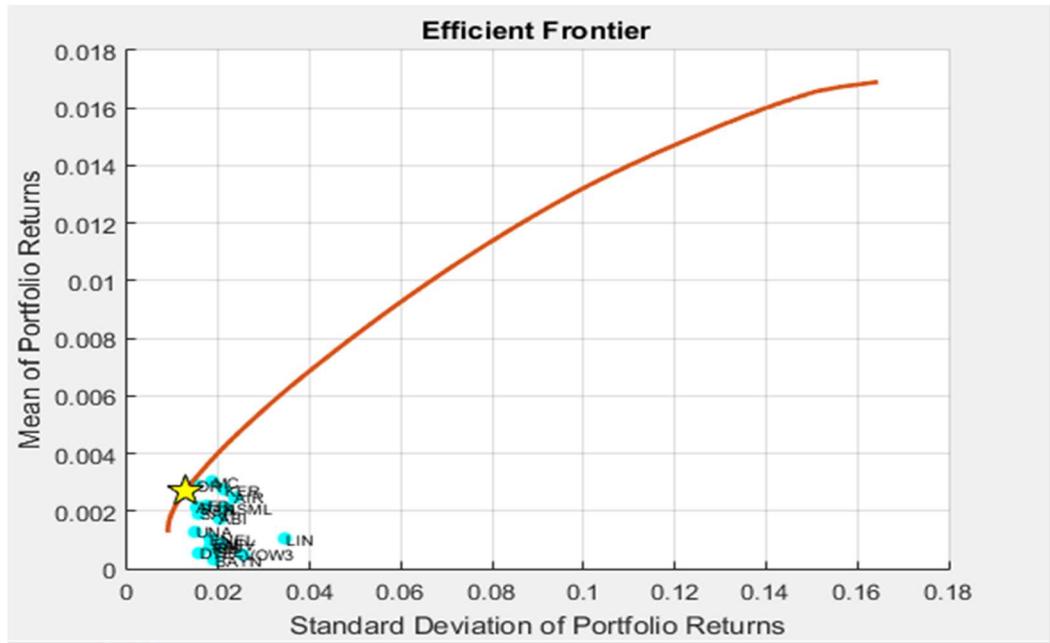


Figura 87. Frontiera efficiente di Black e Litterman in presenza di vendite allo scoperto massimizzando l'indice di Sharpe

Il portafoglio ottimo che restituisce l'indice di Sharpe maggiore e quindi in grado di fornire le migliori prestazioni è quello calcolato utilizzando i rendimenti di Black-Litterman. La Tabella 60 riporta in sintesi i risultati ottenuti.

Tabella 60. Performance di Sharpe dei diversi modelli finanziari

Modello finanziario	Rendimento atteso	Deviazione Standard	Indice di Sharpe
Markowitz	0,0008194	0,0148422	0,05520699
BL	0,002688	0,0126755	0,21206313
Ottimizzazione con i rendimenti impliciti	0,000182979	0,0022735275	0,08048261

Dai risultati emerge come il modello da preferire in termini di prestazioni sia quello di Black & Litterman. L'ottimizzazione con i rendimenti impliciti, invece, è da preferire all'utilizzo dei rendimenti storici nel modello di Markowitz. Inoltre è possibile osservare che il rischio del portafoglio calcolato con il modello di Black e Litterman sia inferiore rispetto a quello del portafoglio analizzato con i rendimenti storici, a significare che con il modello di Black e Litterman si ottengono dei rendimenti attesi più stabili, concentrati intorno al proprio valore

medio. Oltre a fornire le performance migliori, il modello di Black & Litterman è basato su un modello matematico consistente che riesce ad unire l'equilibrio di mercato con le opinioni personali dell'investitore. A differenza del modello di Markowitz, infatti, esso tiene conto della capitalizzazione dei vari titoli all'interno del mercato, delle previsioni dell'investitore e della fiducia che egli ripone nelle stesse.

5 CONCLUSIONI

Il presente lavoro di tesi si prefiggeva l'obiettivo di analizzare i processi di ottimizzazione di un portafoglio azionario, al fine di individuare strategie di investimento efficienti e utili agli investitori, ricercando il miglior compromesso tra rischi e profitti. In particolare, nella trattazione sono stati presi in esame due diversi modelli di selezione del portafoglio, quello di Markowitz e quello di Black & Litterman, con lo scopo di mettere in evidenza le analogie, le differenze, i limiti e i punti di forza di ciascun approccio.

I due modelli di asset allocation sono stati implementati nella costruzione di un portafoglio azionario i cui titoli sono stati estratti dall'indice europeo EuroStoxx 50. Nonostante il modello di Markowitz rappresenti il punto di partenza della finanza moderna, l'analisi condotta ha permesso di constatarne i limiti principalmente legati all'instabilità del portafoglio azionario e alla sua eccessiva sensibilità rispetto ai dati in input. Dall'applicazione del modello al caso reale, infatti, il portafoglio ottimo è risultato fortemente variabile in quanto legato a filo doppio ai dati storici utilizzati per la stima del rendimento atteso e del rischio degli asset presenti sul mercato. In questo caso, quindi, l'investitore avrebbe il compito di effettuare eventuali aggiornamenti delle serie storiche derivanti dai cambiamenti delle quotazioni o dall'inserimento di nuovi titoli in portafoglio, con notevoli fluttuazioni degli asset da considerare e dei loro pesi. Inoltre, il modello di Markowitz è risultato instabile perché ha registrato composizioni di portafoglio eccessivamente sbilanciate verso quei titoli con elevato rendimento atteso, bassa volatilità e correlazioni negative, fattori che causano la massimizzazione degli errori di stima. L'instabilità del portafoglio, unita all'eccessiva sensibilità ai dati di input, provoca inevitabilmente variazioni consistenti della composizione ottimale di un portafoglio; tali cambiamenti inducono l'investitore al ricalcolo continuo del

portafoglio ottimo, con il risultato finale di ottenere rendimenti attesi simili ma con costi maggiorati derivanti dalle operazioni di transazione.

I limiti riscontrati nell'utilizzo del modello di Markowitz hanno favorito l'implementazione del modello di Black & Litterman. L'aspetto innovativo di tale modello risiede nella capacità di combinare due diverse tipologie di informazione grazie al Teorema di Bayes, ovvero le aspettative del mercato (basate su dati di dominio pubblico) e le aspettative (views) dell'investitore. Il punto di partenza è quindi rappresentato dall'equilibrio di mercato derivato dal Capital Asset Pricing Model, da cui l'investitore, in base alle proprie valutazioni, può decidere se discostarsene o meno. Il portafoglio ottimo finale è il risultato delle media pesata delle due informazioni: tanto maggiore è la fiducia dell'investitore nelle views, tanto più il portafoglio finale è sbilanciato verso le stesse; al contrario, se le aspettative si discostano poco dai rendimenti di equilibrio o è basso il livello di fiducia in esse riposto, allora il portafoglio finale risulta molto vicino a quello di equilibrio. Il punto di forza del modello di Black & Litterman è quello di considerare l'investitore come parte attiva delle strategie di investimento, superando la più arcaica e fragile soluzione di Markowitz in cui l'investitore è relegato a mero spettatore delle dinamiche di mercato. Nel tradizionale processo di ottimizzazione, quindi, Black & Litterman non utilizzano i rendimenti storici (come fatto da Markowitz) ma i rendimenti derivati dalla combinazione dei rendimenti attesi di equilibrio e delle opinioni dell'investitore. Il risultato di tale approccio è la creazione di portafogli più stabili ed equilibrati che rispettano il principio della diversificazione, violato invece dalla trattazione di Markowitz. Inoltre, l'implementazione relativa al caso in esame di costruzione del portafoglio azionario ha confermato la supremazia del modello di Black & Litterman nel raggiungimento della migliore redditività del portafoglio ottimo. Infatti, confrontando i portafogli ottimi dei due modelli collocati sulle frontiere efficienti in presenza di vendite allo scoperto, il portafoglio di Black & Litterman ha mostrato un indice di Sharpe maggiore rispetto a quello di Markowitz, offrendo un livello di redditività più elevato per ogni punto in più di rischio. Nonostante il modello di Black & Litterman appaia più solido rispetto al modello di Markowitz, è necessario sottolinearne comunque alcune criticità. La principale difficoltà del modello di Black e Litterman risiede nella determinazione di alcuni elementi utili all'implementazione dell'approccio (ad esempio il parametro τ e la matrice di confidenza) a causa della loro soggettività e dall'assenza di una metodologia di calcolo universale.

Tuttavia, nonostante i limiti riscontrati, la seguente trattazione ha permesso di verificare la generale efficacia del modello di Black & Litterman: esso è un valido strumento d'aiuto per tutti gli investitori nella scelta di una strategia di investimento attiva, in grado di ottenere performance migliori del proprio benchmark di riferimento. Per raggiungere tale obiettivo, il modello permette all'investitore di inserire come input le proprie view sugli asset che comporranno il portafoglio ottimo, view che non devono essere necessariamente riferite a tutti gli asset ma anche soltanto ad una parte di essi, con il risultato di avere portafogli solidi in termini di rendimento atteso e rischio.

Bibliografia

Marco Micocci, Giovanni Batista Masala (2012), "Manuale di matematica finanziaria. Metodi e strumenti quantitativi per il risk management", Carocci Editore.

Markowitz H. (1952), "Portfolio selection", The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1.

Sharpe W.F. (1974), "Imputing expected security returns from portfolio composition", The Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 9, No. 3, pp. 463-472.

Sharpe W.F. (2007), "Expected utility asset allocation", Financial Analysts Journal, Vol. 63, No. 5, pp. 18.

Black F., Litterman R. (1991), "Asset Allocation: combining investor views with market equilibrium", The Journal of Fixed Income, September, pp. 7-18

Black F., Litterman R. (1992), "Global Portfolio Optimization", Financial Analysts Journal, Vol. 48, No. 5, pp. 28-43.

Idzorek T. M. (2005), "A step-by-step guide to the Black and Litterman model", Working Paper, www.blacklitterman.org.

He G., Litterman R. (1999), "The intuition behind Black-Litterman model portfolios", Working paper, www.blacklitterman.org

Cheung W. (2009), "The Black-Litterman model explained", Journal of Asset Management, Vol. 1, No. 4, pp. 229-243.

Meucci A. (2010), "The Black-Litterman approach: original model and extensions", Working paper, ssrn.com/abstract=1117574.

Sitografia

<https://it.finance.yahoo.com/quote/%5ESTOXX50E/components?p=%5ESTOXX50E>

<https://it.investing.com/equities/air-liquide>

<https://www.proiezioniidiborsa.it/?s=bayer>

https://www.milanofinanza.it/quotazioni/dettaglio/sanofi-2ae0020?refresh_cens

<https://www.money.it/LVMH-Guerlain-conversione-gel-disinfettante-coronavirus>

<https://www.soldionline.it/notizie/azioni-italia/conti-eni-primi-trimestre-2020>

<https://www.agi.it/economia/news/2020-03-30/coronavirus-bain-lusso-8002178/>

https://it.wikipedia.org/wiki/Anheuser-Busch_InBev

<https://www.ilsole24ore.com/>

<https://www.adviseonly.com/capire-la-finanza/abc-finanza/abcfinanza-costruire-un-portafoglio-investimento/>

<https://it.mathworks.com/>

<https://www.teleborsa.it/>

<https://www.morningstar.it/IntroPage.aspx?site=it&backurl=https%3A%2F%2Fwww.morningstar.it%2Fit%2F>

Indice delle Figure

Figura 1. Esempio di frontiera efficiente nel piano ($\sigma;\mu$)	11
Figura 2. Esempio di frontiera efficiente nel piano ($\sigma^2;\mu$).....	12
Figura 3. Condizione di tangenza tra frontiera efficiente e curve di indifferenza.....	14
Figura 4. Frontiera efficiente nel piano ($\sigma;\mu$) in presenza del titolo risk free.....	20
Figura 5. Esempio di Security Market Line	21
Figura 6. Schema del modello di Black-Litterman	31
Figura 7. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo ENI	40
Figura 8. Applicazione del test di K-S al titolo azionario ENI	41
Figura 9. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario ENI.....	42
Figura 10. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo IBERDROLA	43
Figura 11. Applicazione del test di K-S al titolo azionario IBERDROLA	44
Figura 12. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario IBERDROLA.....	45
Figura 13. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo ENEL.....	46
Figura 14. Applicazione del test di K-S al titolo azionario ENEL	47
Figura 15. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario ENEL	48
Figura 16. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo Deutsche Telekom.....	49
Figura 17. Applicazione del test di K-S al titolo azionario DTE.....	50
Figura 18. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario DTE	51
Figura 19. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo VOW3	52
Figura 20. Applicazione del test di K-S al titolo azionario VOW3	53
Figura 21. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario VOW3.....	54
Figura 22. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo BAYER.....	55
Figura 23. Applicazione del test di K-S al titolo azionario BAYER.....	56
Figura 24. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario BAYER	57
Figura 25. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo SIEMENS.....	58
Figura 26. Applicazione del test di K-S al titolo azionario SIEMENS.....	59
Figura 27. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario SIEMENS	60
Figura 28. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo ALLIANZ	61
Figura 29. Applicazione del test di K-S al titolo azionario ALLIANZ	62
Figura 30. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario ALLIANZ.....	63
Figura 31. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo LINDE PLC	64
Figura 32. Applicazione del test di K-S al titolo azionario LINDE	65
Figura 33. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario LINDE.....	66
Figura 34. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo SAP	67
Figura 35. Applicazione del test di K-S al titolo azionario SAP.....	68
Figura 36. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario SAP	69
Figura 37. Andamento dei rendimenti del titolo AIRBUS.....	70

Figura 38. Applicazione del test di K-S al titolo azionario AIRBUS	71
Figura 39. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario AIRBUS	72
Figura 40. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo L'OREAL	73
Figura 41. Applicazione del test di K-S al titolo azionario OR	74
Figura 42. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario OR	75
Figura 43. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo AIR LIQUIDE.....	76
Figura 44. Applicazione del test di K-S al titolo azionario Al.....	77
Figura 45. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario Al	78
Figura 46. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo KERING	79
Figura 47. Applicazione del test di K-S al titolo azionario KER	80
Figura 48. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario KER	81
Figura 49. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo ANHEUSER-BUSCH INBEV	82
Figura 50. Applicazione del test di K-S al titolo azionario ABI	83
Figura 51. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario ABI.....	84
Figura 52. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo UNILEVER.....	85
Figura 53. Applicazione del test di K-S al titolo azionario UNA	86
Figura 54. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario UNA	87
Figura 55. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo SANOFI.....	88
Figura 56. Applicazione del test di K-S al titolo azionario SAN	89
Figura 57. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario SAN	90
Figura 58. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo LVMH	91
Figura 59. Applicazione del test di K-S al titolo azionario LVMH.....	92
Figura 60. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario LVMH.....	93
Figura 61. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo TOTAL	94
Figura 62. Applicazione del test di K-S al titolo azionario TOTAL	95
Figura 63. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario TOTAL.....	96
Figura 64. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo ASML	97
Figura 65. Applicazione del test di K-S al titolo azionario ASML	98
Figura 66. Grafico Q-Q plot per il titolo azionario ASML.....	99

Indice delle Tabelle

Tabella 1. Composizione del portafoglio di titoli azionari	35
Tabella 2. Media e deviazione standard dei titoli azionari	39
Tabella 3. Statistiche descrittive ENI.....	40
Tabella 4. Applicazione del test di normalità al titolo azionario ENI	41
Tabella 5. Statistiche descrittive IBERDROLA.....	43
Tabella 6. Applicazione del test di normalità al titolo azionario IBERDROLA.....	44
Tabella 7. Statistiche descrittive ENEL	46
Tabella 8. Applicazione del test di normalità al titolo azionario ENEL	47
Tabella 9. Statistiche descrittive DTE	49
Tabella 10. Applicazione del test di normalità al titolo azionario DTE	50
Tabella 11. Statistiche descrittive VOW3	52
Tabella 12. Applicazione del test di normalità al titolo azionario VOW3.....	53
Tabella 13. Statistiche descrittive BAYER	55
Tabella 14. Applicazione del test di normalità al titolo azionario BAYER	56
Tabella 15. Statistiche descrittive SIEMENS	58
Tabella 16. Applicazione del test di normalità al titolo azionario SIEMENS	59
Tabella 17. Statistiche descrittive ALLIANZ.....	61
Tabella 18. Applicazione del test di normalità al titolo azionario ALLIANZ.....	62
Tabella 19. Statistiche descrittive LINDE	64
Tabella 20. Applicazione del test di normalità al titolo azionario LINDE.....	65
Tabella 21. Statistiche descrittive SAP	67
Tabella 22. Applicazione del test di normalità al titolo azionario SAP	68
Tabella 23. Statistiche descrittive AIRBUS	70
Tabella 24. Applicazione del test di normalità al titolo azionario AIRBUS.....	71
Tabella 25. Statistiche descrittive OR	73
Tabella 26. Applicazione del test di normalità al titolo azionario OR.....	74
Tabella 27. Statistiche descrittive Al	76
Tabella 28. Applicazione del test di normalità al titolo azionario Al	77
Tabella 29. Statistiche descrittive KER	79
Tabella 30. Applicazione del test di normalità al titolo azionario KER.....	80
Tabella 31. Statistiche descrittive ABI.....	82
Tabella 32. Applicazione del test di normalità al titolo azionario ABI.....	83
Tabella 33. Statistiche descrittive UNA.....	85
Tabella 34. Applicazione del test di normalità al titolo azionario UNA.....	86
Tabella 35. Statistiche descrittive SAN	88
Tabella 36. Applicazione del test di normalità al titolo azionario SAN	89
Tabella 37. Statistiche descrittive LVMH.....	91
Tabella 38. Applicazione del test di normalità al titolo azionario LVMH	92

Tabella 39. Statistiche descrittive TOTAL.....	94
Tabella 40. Applicazione del test di normalità al titolo azionario TOTAL.....	95
Tabella 41. Statistiche descrittive ASML.....	97
Tabella 42. Applicazione del test di normalità al titolo azionario ASML.....	98
Tabella 46. Peso dei titoli di portafoglio in assenza di vendite allo scoperto - Modello di Markowitz	110

ALLEGATI

Frontiera efficiente in assenza di vendite allo scoperto con un rendimento target fissato – Modello di Markowitz

```

format long;
open('dowportfolio.xlsx');
T = readtable('dowportfolio.xlsx');
symbol = T.Properties.VariableNames(2:end)';
LogR = xlsread('TESI.xlsx','AT3:BM3296');
p = Portfolio('AssetList',symbol,'RiskFreeRate', 0);
p = estimateAssetMoments(p, LogR);
A = [];
b = [];
AEq = ones(1,20);
BEq = 1;
ub = ones(1,20);
lb = zeros(1,20);
m = xlsread('TESI.xlsx',2,'C1:V1');
cov = cov(LogR);
p = Portfolio('AssetMean', m, 'AssetCovar', cov, 'AInequality',
A, 'bInequality', b, 'AEquality', AEq, 'bEquality', BEq,
'LowerBound', lb, 'UpperBound', ub);
muP = 0,000407794795375892;
w1 = estimateFrontierByReturn(p, muP);
[risk1, ret1] = estimatePortMoments(p, w1);
f = figure;
tabgp = uitabgroup(f);
tab1 = uitab(tabgp,'Title','Efficient Frontier Plot');
ax = axes('Parent', tab1);
[m, cov] = getAssetMoments(p);
scatter(ax,sqrt(diag(cov)), m,'oc','filled');
xlabel('Risk')
ylabel('Expected Return')
text(sqrt(diag(cov))+0.00003,m,symbol,'FontSize',7);
hold on;
[Risk, Ret] = plotFrontier(p,100);
plot(risk1,ret1,'p','markers',15,'MarkerEdgeColor','k',
'MarkerFaceColor','y');
hold off

```

Frontiera efficiente in presenza di vendite allo scoperto con un rendimento target fissato – Modello di Markowitz

```

format long;
open('dowportfolio.xlsx');
T = readtable('dowportfolio.xlsx');
symbol = T.Properties.VariableNames(2:end)';
LogR = xlsread('TESI.xlsx','AT3:BM3296');
p = Portfolio('AssetList',symbol,'RiskFreeRate', 0);
p = estimateAssetMoments(p, LogR);
A = [];
b = [];
AEq = ones(1,20);
BEq = 1;
ub = ones(1,20);
lb = -1*ones(1,20);
m = xlsread('TESI.xlsx',2,'C1:V1');
cov = cov(LogR);
p = Portfolio('AssetMean', m, 'AssetCovar', cov, 'AInequality',
A, 'bInequality', b, 'AEquality', AEq, 'bEquality', BEq,
'LowerBound', lb, 'UpperBound', ub);
muP = 0.00123231966993322;
w2 = estimateFrontierByReturn(p, muP);
[risk2, ret2] = estimatePortMoments(p, w2);
f = figure;
tabgp = uitabgroup(f);
tab1 = uitab(tabgp,'Title','Efficient Frontier Plot');
ax = axes('Parent', tab1);
[m, cov] = getAssetMoments(p);
scatter(ax,sqrt(diag(cov)), m,'oc','filled');
xlabel('Risk')
ylabel('Expected Return')
text(sqrt(diag(cov))+0.00003,m,symbol,'FontSize',7);
hold on;
[Risk, Ret] = plotFrontier(p,100);
plot(risk2,ret2,'p','markers',15,'MarkerEdgeColor','k',
'MarkerFaceColor','y');
hold off

```

Frontiera efficiente in presenza di vendite allo scoperto con Indice di Sharpe massimo – Modello di Markowitz

```

format long;
open('dowportfolio.xlsx');
T = readtable('dowportfolio.xlsx');
symbol = T.Properties.VariableNames(2:end)';
LogR = xlsread('TESI.xlsx','AT3:BM3296');
p = Portfolio('AssetList',symbol,'RiskFreeRate', 0);
p = estimateAssetMoments(p, LogR);
A = [];
b = [];
AEq = ones(1,20);
BEq = 1;
ub = ones(1,20);
lb = -1*ones(1,20);
m = xlsread('TESI.xlsx',2,'C1:V1');
cov = cov(LogR);
p = Portfolio('AssetMean', m, 'AssetCovar', cov, 'AInequality',
A, 'bInequality', b, 'AEquality', AEq, 'bEquality', BEq,
'LowerBound', lb, 'UpperBound', ub);
w3 = estimateMaxSharpeRatio(p);
[risk3, ret3] = estimatePortMoments(p, w3);
f = figure;
tabgp = uitabgroup(f);
tab1 = uitab(tabgp,'Title','Efficient Frontier Plot');
ax = axes('Parent', tab1);
[m, cov] = getAssetMoments(p);
scatter(ax,sqrt(diag(cov)), m, 'oc','filled');
xlabel('Risk')
ylabel('Expected Return')
text(sqrt(diag(cov))+0.00003,m,symbol,'FontSize',7);
hold on;
[Risk, Ret] = plotFrontier(p,100);
plot(risk3,ret3,'p','markers',15,'MarkerEdgeColor','k',
'MarkerFaceColor','y');
hold off

```

Calcolo dei rendimenti impliciti

```

format long;
open('dowportfolio.xlsx');
T = readtable('dowportfolio.xlsx');
symbol = T.Properties.VariableNames(2:end)';
LogR = xlsread('TESI.xlsx','AT3:BM3296');
Wm = xlsread('BLACKLITT.xlsx','J3:J22');
Benchmark = xlsread('BLACKLITT.xlsx','M4:M3273');
p = Portfolio('AssetList',symbol,'RiskFreeRate', 0);
LogRCov = cov(LogR);
delta = 1.77;
ri = delta*LogRCov*Wm;
tau = 0.05;
LogRCovTau = LogRCov*tau;
A = [];
b = [];
AEq = ones(1,20);
BEq = 1;
ub = ones(1,20);
lb = zeros(1,20);
p = Portfolio('AssetMean', ri, 'AssetCovar', LogRCovTau,
'AInequality', A, 'bInequality', b, 'AEquality', AEq,
'bEquality', BEq, 'LowerBound', lb, 'UpperBound', ub);
Wm=estimateMaxSharpeRatio(p);
[risk, ret] = estimatePortMoments(p, Wm);
f = figure;
tabgp = uitabgroup(f);
tab1 = uitab(tabgp,'Title','Efficient Frontier Plot');
ax = axes('Parent', tab1);
[ri, LogRCovTau] = getAssetMoments(p);
scatter(ax,sqrt(diag(LogRCovTau)), ri,'oc','filled');
xlabel('Risk')
ylabel('Expected Return')
text(sqrt(diag(LogRCovTau))+0.00003,ri,symbol,'FontSize',7);
hold on;
[Risk, Ret] = plotFrontier(p,100);
plot(risk,ret,'p','markers',15,'MarkerEdgeColor','k',
'MarkerFaceColor','y');
hold off

```

Frontiera efficiente in assenza di vendite allo scoperto con un rendimento target fissato – Modello di Black & Litterman

```

format long;
open('dowportfolio.xlsx');
T = readtable('dowportfolio.xlsx');
symbol = T.Properties.VariableNames(2:end)';
LogR = xlsread('TESI.xlsx','AT3:BM3296');
Wm = xlsread('BLACKLITT.xlsx','J3:J22');
Benchmark = xlsread('BLACKLITT.xlsx','M4:M3273');
P = xlsread('MATRICIPQ.xlsx','L35:AE40');
Q = xlsread('MATRICIPQ.xlsx','L48:L53');
omega = xlsread('MATRICIPQ.xlsx','N46:S51');
LogRCov = cov(LogR);
delta= 1.77;
ri = delta*LogRCov*Wm;
tau = 0.05;
LogRCovTau = LogRCov*tau;
mu_bl = (P*(omega\P) + inv(LogRCovTau) \ ( LogRCovTau\ri +
P*(omega\Q));
cov_mu = inv(P*(omega\P) + inv(LogRCovTau));
varcov = LogRCov + cov_mu;
p = Portfolio('AssetList',symbol,'RiskFreeRate', 0);
A = [];
b = [];
AEq = ones(1,20);
BEq = 1;
ub = ones(1,20);
lb = zeros(1,20);
p = Portfolio('AssetMean', mu_bl, 'AssetCovar', varcov, 'AInequality',
A, 'bInequality', b, 'AEquality', AEq, 'bEquality', BEq, 'LowerBound',
lb, 'UpperBound', ub);
muP = 0.00271679;
w1 = estimateFrontierByReturn(p, muP);
[risk1, ret1] = estimatePortMoments(p, w1);
f = figure;
tabgp = uitabgroup(f);
tab1 = uitab(tabgp,'Title','Efficient Frontier Plot');
ax = axes('Parent', tab1);
[mu_bl, varcov] = getAssetMoments(p);
scatter(ax,sqrt(diag(varcov)), mu_bl,'oc','filled');
xlabel('Risk')
ylabel('Expected Return')
text(sqrt(diag(varcov))+0.00003,mu_bl,symbol,'FontSize',7);
hold on;
[Risk, Ret] = plotFrontier(p,100);
plot(risk1,ret1,'p','markers',15,'MarkerEdgeColor','k',
'MarkerFaceColor','y');
hold off

```

Frontiera efficiente in presenza di vendite allo scoperto con un rendimento target fissato – Modello di Black & Litterman

```

format long;
open('dowportfolio.xlsx');
T = readtable('dowportfolio.xlsx');
symbol = T.Properties.VariableNames(2:end)';
LogR = xlsread('TESI.xlsx','AT3:BM3296');
Wm = xlsread('BLACKLITT.xlsx','J3:J22');
Benchmark = xlsread('BLACKLITT.xlsx','M4:M3273');
P = xlsread('MATRICIPQ.xlsx','L35:AE40');
Q = xlsread('MATRICIPQ.xlsx','L48:L53');
omega = xlsread('MATRICIPQ.xlsx','N46:S51');
LogRCov = cov(LogR);
delta = 1.77;
ri = delta*LogRCov*Wm;
tau = 0.05;
LogRCovTau = LogRCov*tau;
mu_bl = (P*(omega\P) + inv(LogRCovTau) \ ( LogRCovTau\ri +
P*(omega\Q)));
cov_mu = inv(P*(omega\P) + inv(LogRCovTau));
varcov = LogRCov + cov_mu;
p = Portfolio('AssetList',symbol,'RiskFreeRate', 0);
A = [];
b = [];
AEq = ones(1,20);
BEq = 1;
ub = ones(1,20);
lb = -1*ones(1,20);
p = Portfolio('AssetMean', mu_bl, 'AssetCovar', varcov, 'AInequality',
A, 'bInequality', b, 'AEquality', AEq, 'bEquality', BEq, 'LowerBound',
lb, 'UpperBound', ub);
muP = 0.017;
w2 = estimateFrontierByReturn(p, muP);
[risk2, ret2] = estimatePortMoments(p, w2);
f = figure;
tabgp = uitabgroup(f);
tab1 = uitab(tabgp,'Title','Efficient Frontier Plot');
ax = axes('Parent', tab1);
[mu_bl, varcov] = getAssetMoments(p);
scatter(ax,sqrt(diag(varcov)), mu_bl,'oc','filled');
xlabel('Risk')
ylabel('Expected Return')
text(sqrt(diag(varcov))+0.00003,mu_bl,symbol,'FontSize',7);
hold on;
[Risk, Ret] = plotFrontier(p,100);
plot(risk2,ret2,'p','markers',15,'MarkerEdgeColor','k',
'MarkerFaceColor','y');
hold off

```

Frontiera efficiente in presenza di vendite allo scoperto con Indice di Sharpe massimo – Modello di Black & Litterman

```

format long;
open('dowportfolio.xlsx');
T = readtable('dowportfolio.xlsx');
symbol = T.Properties.VariableNames(2:end)';
LogR = xlsread('TESI.xlsx','AT3:BM3296');
Wm = xlsread('BLACKLITT.xlsx','J3:J22');
Benchmark = xlsread('BLACKLITT.xlsx','M4:M3273');
P = xlsread('MATRICIPQ.xlsx','L35:AE40');
Q = xlsread('MATRICIPQ.xlsx','L48:L53');
omega = xlsread('MATRICIPQ.xlsx','N46:S51');
LogRCov = cov(LogR);
delta= 1.77;
ri = delta*LogRCov*Wm;
tau = 0.05;
LogRCovTau = LogRCov*tau;
mu_bl = (P*(omega\P) + inv(LogRCovTau) \ ( LogRCovTau\ri +
P*(omega\Q)));
cov_mu = inv(P*(omega\P) + inv(LogRCovTau));
varcov = LogRCov + cov_mu;
p = Portfolio('AssetList',symbol,'RiskFreeRate', 0);
A = [];
b = [];
AEq = ones(1,20);
BEq = 1;
ub = ones(1,20);
lb = -1*ones(1,20);
p = Portfolio('AssetMean', mu_bl, 'AssetCovar', varcov, 'AInequality',
A, 'bInequality', b, 'AEquality', AEq, 'bEquality', BEq, 'LowerBound',
lb, 'UpperBound', ub);
w3=estimateMaxSharpeRatio(p);
[risk3, ret3]=estimatePortMoments(p, w3);
f = figure;
tabgp = uitabgroup(f);
tab1 = uitab(tabgp,'Title','Efficient Frontier Plot');
ax = axes('Parent', tab1);
[mu_bl, varcov] = getAssetMoments(p);
scatter(ax,sqrt(diag(varcov)), mu_bl,'oc','filled');
xlabel('Risk')
ylabel('Expected Return')
text(sqrt(diag(varcov))+0.00003,mu_bl,symbol,'FontSize',7);
hold on;
[Risk, Ret] = plotFrontier(p,100);
plot(risk3,ret3,'p','markers',15,'MarkerEdgeColor','k',
'MarkerFaceColor','y');
hold off

```

Ringraziamenti

È per me doveroso ringraziare innanzitutto il Prof. Franco Varetto per l'attenzione e la premura con cui mi ha accompagnato nell'approfondimento degli argomenti trattati e nella stesura della tesi.

Il ringraziamento più silenzioso e più sentito è naturalmente dedicato alla mia famiglia che mi ha sempre supportato e sopportato, rendendo una festa ogni mio ritorno a casa.

Grazie in particolare a voi, mamma e papà, per l'amore infinito che mi regalate ogni giorno. Mi avete insegnato a camminare da solo senza mai perdermi d'occhio, permettendomi di comprendere l'importanza dell'indipendenza e allo stesso tempo della famiglia.

Un ringraziamento speciale è dedicato ai miei amici e colleghi con cui ho condiviso ogni momento di questi anni e che mi hanno insegnato che è possibile sentirsi a casa anche quando da casa si è lontani.

Infine mi sento di dire grazie a te Claudia, per aver creduto in me quando nessuno lo faceva, nemmeno io. Mi hai aiutato quando ero in difficoltà, spronato quando mollavo, sopportato quando nervoso. Sono sicuro che senza di te non avrei mai raggiunto questo traguardo. Semplicemente grazie per avermi tenuto per mano dal primo fino all'ultimo anno.

