# POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

# Tesi di Laurea Magistrale

# Ricostruzione della deformata di un cassone alare con il metodo degli elementi finiti inversi



Relatore: Candidato:

Prof. Marco Gherlone Guido Didonna

Co-relatore:

Ing. Marco Esposito

Marzo 2020

# Indice

### Sommario

1 Introduzione	1
1.1 Inverse Finite Element Method (iFEM)	4
1.2 Cenni sul metodo modale	10
1.3 Metodo di Ko	11
1.4 Estensimetri elettrici (strain gauges e rosette)	13
1.5 Fibra ottica a reticolo di Bragg (FBG)	18
1.6 Fibra ottica basata sul Rayleigh Backscatter (RBS)	20
2 Dimensionamento del cassone alare	27
2.1 Geometria	27
2.2 Mesh	29
3 Analisi inversa con metodo iFEM	31
3.1 Note sull'utilizzo del codice iFEM	31
3.2 Analisi preliminare	33
3.3 Andamento delle deformazioni	40
3.4 Ottimizzazione del numero e posizione dei sensori	43
4 Confronto tra mesh inverse	55
5 Conclusioni	77
Bibliografia	79
Appendice	81
Ringraziamenti	101

# Sommario

In questa tesi, si farà riferimento ad un cassone alare compatibile con ripetute prove sperimentali, preliminarmente dimensionato nel lavoro [10].

L'obiettivo è confrontare la deformata del cassone, ottenuta da un'analisi diretta FEM lineare, con quella ottenuta con un metodo di shape sensing (inverse FEM), al fine di valutare la validità del metodo iFEM su strutture complesse.

Per far ciò, sarà necessario capire il numero dei sensori necessari, la loro posizione ottimale e il tipo di mesh da utilizzare nell'analisi inversa.

Nel Capitolo 1, viene fatta una breve introduzione sui metodi di shape sensing e come questi possano essere utilizzati nel monitoraggio delle strutture aerospaziali. A seguire, vengono presentate le teorie alla base di alcuni metodi di shape sensing, in particolare il metodo iFEM (utilizzato in questa tesi), un cenno al metodo modale e il metodo di Ko. Infine, viene spiegato brevemente il principio di funzionamento di varie tipologie di sensori per la misura delle deformazioni, in particolare gli estensimetri elettrici, le fibre ottiche a reticolo di Bragg e le fibre ottiche che sfruttano il fenomeno del Rayleigh backscatter.

Nel Capitolo 2, viene ripercorso il processo di dimensionamento del cassone alare, svolto nel lavoro [10], a cui si farà riferimento per le analisi svolte successivamente.

Nel Capitolo 3, viene svolta l'analisi FEM diretta e alcune prove di analisi inversa con il metodo iFEM, ottimizzando la posizione dei sensori di deformazione.

Nel Capitolo 4, si confrontano i risultati ottenuti utilizzando prima una mesh inversa più fitta di elementi e poi una mesh rada.

Nel Capitolo 5, si discutono sinteticamente i risultati ottenuti ed infine si presenta lo sviluppo futuro di questa tesi.

# Capitolo 1

## **Introduzione**

Lo *shape sensing* è una tecnica attraverso cui si ricostruisce il campo di spostamenti di una struttura a partire dalle deformazioni misurate in alcuni punti. È il processo inverso a quello utilizzato nel FEM, in cui si ricavano prima gli spostamenti e poi da questi si passa alle deformazioni ed eventualmente agli stress.

Per far ciò, in questo lavoro verrà seguito l'approccio iFEM (inverse Finite Element Method), i cui dettagli saranno discussi in seguito. Il metodo iFEM risulta molto promettente in quanto, se si opera con le sole relazioni spostamento-deformazione, non richiede la conoscenza del materiale e delle condizioni di carico della struttura per le analisi statiche o dell'inerzia/smorzamento per le analisi dinamiche, al contrario delle analisi FEM dirette.

Lo shape sensing viene spesso utilizzato per applicazioni che prevedono il controllo attivo di una superficie. In questo caso, ci si basa infatti sulla conoscenza della forma del sistema (e quindi degli spostamenti) per poter attuare un controllo sullo stesso.



Figura 1.1: Il velivolo sperimentale Helios vola nel 1999 per la prima volta (Credit NASA)

Un esempio di controllo di superfici aerodinamiche, utilizzando lo shape sensing, è quello che si fa negli UAV molto flessibili, come l'Helios (Figura 1.1), in cui è necessario un controllo dell'angolo di diedro dell'ala, pena il cedimento della struttura alare (Figura 1.2).

Invece, per le strutture spaziali di grandi dimensioni, come vele solari e antenne, conoscere la deformazione tridimensionale della struttura permette di ottimizzarne alcune prestazioni.



Figura 1.2: Detriti dell'Helios dopo il collasso sull'Oceano Pacifico (2003, Credit NASA)

Negli ultimi anni ci sono stati grandi sforzi per cercare di implementare diverse tecniche di *health monitoring* che possano migliorare la gestione dello stato di salute di componenti critici. In particolare, si vuole monitorare in tempo reale le deformazioni e gli stress a partire dal campo di spostamenti proveniente dall'iFEM, al fine di predire il danneggiamento del sistema o di alcune sue componenti critiche, attraverso opportuni criteri di cedimento.

Il vantaggio principale di questa tecnica è il minor costo manutentivo, che si ottiene riducendo il numero di ispezioni, migliorando l'individuazione dei failure e riducendo la sostituzione di componenti ancora integri che possono rimanere in servizio.

In questo modo, la manutenzione viene effettuata solo quando le condizioni della struttura subiscono un reale deterioramento. Vi è anche il vantaggio di poter monitorare una certa zona, senza che vi siano sensori in quella regione, ma con sensori in zone adiacenti (si pensi, ad esempio, a vani difficilmente accessibili). Si

sta dando sempre più importanza a questo aspetto proprio perché il 95 per cento del life-cycle cost totale di un velivolo risiede nelle attività manutentive [1].

Vi sono però anche alcune barriere allo sviluppo dei sistemi di health monitoring, quali il costo dell'hardware e del software per la gestione dell'intero sistema e a seguire, il peso aggiuntivo, la potenza e le risorse computazionali necessarie.

Il sistema poi ha un grande difetto: l'affidabilità dei sensori [2].

In caso di failure del sistema di health monitoring, si può nel migliore dei casi avere una sostituzione prematura dei componenti che si ritiene erroneamente danneggiati. Nella peggiore, invece, il sistema potrebbe non rilevare dei problemi in componenti strutturali critici, compromettendo la sicurezza del velivolo.

Questa è una delle più grandi critiche mosse nei confronti dei sistemi IVHM (Integrated Vehicle Health Monitoring). L'implementazione di questa tecnologia però risulta essere una delle prime priorità per il successo delle future missioni spaziali di lunga durata [2].

In generale quindi l'equilibrio costi-benefici è spostato da una parte o dall'altra in base a quanto le tecnologie utilizzate siano in uno stadio avanzato di sviluppo. In questo momento, ci troviamo in una prima fase sperimentale in cui è difficile fare una precisa analisi [2]. In futuro, quando questo sistema avrà raggiunto una diffusione maggiore su casi reali, si potranno togliere probabilmente almeno in parte le incertezze discusse precedentemente, dando maggiore spazio ai benefici che si possono raggiungere con questa tecnologia.

## 1.1 Inverse Finite Element Method (iFEM)

Il metodo serve a ricostruire il campo di spostamenti a partire dalle deformazioni e successivamente calcolare il campo totale di deformazioni, stress e risultanti, usando il campo di spostamenti ricostruito. In quest'ultima parte si segue la procedura di base del FEM diretto, in cui dagli spostamenti si arriva alle risultanti attraverso le relazioni costitutive.

Le informazioni contenute in questo paragrafo sono tratte dagli articoli [3] e [4].

Si prenda un dominio nel sistema di coordinate cartesiane  $x \equiv (x, y, z)$ . Questo può essere discretizzato con un certo numero di elementi, e.

Il campo di spostamenti è dato da  $[u_x(\mathbf{x}), u_y(\mathbf{x}), u_z(\mathbf{x})]^T$  e può essere espresso come vettore di *variabili cinematiche*,  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , che fanno riferimento a una particolare teoria strutturale.

Le variabili cinematiche sono espresse come:

$$u(x) \approx u^e = N(x)q^e \tag{1}$$

dove N è la matrice che contiene le funzioni di forma e  $q^e$  il vettore che contiene i gradi di libertà nodali dell'elemento.

Il campo di deformazioni è definito con K misure della deformazione  $\mathbf{\varepsilon} \equiv \{\varepsilon_k\}$  (k = 1, ... K) in n punti diversi. Anch'esso si può legare alla  $\mathbf{q}^e$  tramite la relazione:

$$\varepsilon(\mathbf{u}^e) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \, \mathbf{q}^e \tag{2}$$

con **B** la matrice che contiene le derivate di **N**.

L'iFEM ricostruisce le variabili cinematiche minimizzando un funzionale in ogni elemento, basandosi su un principio variazionale dei minimi quadrati, dove  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ( $\boldsymbol{u}^e$ ) sono le deformazioni calcolate, mentre  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\varepsilon} \equiv \{\varepsilon_k^{\varepsilon}\}$  (k = 1, ... K) sono quelle misurate con i sensori:

$$\Phi^{e}(\boldsymbol{u}^{e}) = ||\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^{e}) - \boldsymbol{\varepsilon}^{\varepsilon}||^{2}$$
(3)

L'elemento  $\Phi^e$  può essere espresso come:

$$\Phi^e(\boldsymbol{u}^e) = \sum_{k=1}^K \lambda_k^e \, w_k^e \, \Phi_k^e \tag{4}$$

dove  $\Phi_k^e$  viene calcolato per la k-esima deformazione in questo modo:

$$\Phi_k^e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\varepsilon_{k(i)}(\boldsymbol{u}^e) - \varepsilon_{k(i)}^{\varepsilon}]^2 \quad (k = 1, \dots K)$$
(5)

 $w_k^e$  è un coefficiente con dimensioni fisiche tali che nella (4) i vari termini abbiano le stesse dimensioni fisiche.

 $\lambda_k^e$  è un coefficiente adimensionale che assume diversi valori in base a quanto si vuole rafforzare ( $\lambda_k^e = 1$ ) o indebolire ( $\lambda_k^e = 10^{-4}$ ) la correlazione tra deformazioni misurate e calcolate analiticamente.

Esso riveste un ruolo fondamentale nell'iFEM in quanto permette di applicare questo approccio anche nei casi in cui le deformazioni misurate abbiano un basso livello di accuratezza (oppure se non vi sono sensori che misurano in quell'elemento), adottando dei bassi valori di  $\lambda_k^e$ .

Per minimizzare il funzionale, si impone l'annullamento della derivata fatta rispetto al vettore dei gradi di libertà nodali, ottenendo così l'equazione dell'elemento:

$$\frac{\partial \Phi^e(\boldsymbol{u}^e)}{\partial \boldsymbol{q}^e} = 0 \quad \Rightarrow \, \boldsymbol{A}^e \boldsymbol{q}^e = \boldsymbol{b}^e \tag{6}$$

Passando dal sistema locale del singolo elemento al sistema globale e imponendo le condizioni cinematiche di vincolo, si ha A q = b, dove la matrice A dipende dalle posizioni dei sensori, mentre b dipende dalla misurazione delle deformazioni.

Invertendo si ottiene  $q = A^{-1}b$ .

Inoltre, dato che  $\boldsymbol{A}$  dipende dalla sola posizione dei sensori sarà necessario invertita una sola volta, mentre  $\boldsymbol{b}$  viene ricalcolata ogni volta che si acquisiscono nuovi strain. I tempi della procedura sono quindi minimi, rendendola adatta alle applicazioni in real-time.

Il vettore q è legato agli spostamenti tramite le funzioni di forma. A questo punto, gli spostamenti possono essere inviati, ad esempio, ad un sistema che effettuerà il controllo di una eventuale superficie mobile.

Per strutture in parete sottile (ad esempio una piastra), utilizzando una teoria del primo ordine FSDT (First-order Shear Deformation Theory), il campo di spostamenti è:

$$u_{x}(\mathbf{x}) = u + z\theta_{y}$$

$$u_{y}(\mathbf{x}) = v + z\theta_{x}$$

$$u_{z}(\mathbf{x}) = w$$
(7)

Le variabili cinematiche del problema sono u, v (spostamenti medi nelle direzioni x e y rispettivamente), w (spostamento trasversale medio in direzione z) e  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  sono le rotazioni dei segmenti di spessore intorno agli assi x (negativo) e y (positivo) rispettivamente. Queste sono rappresentate utilizzando delle funzioni di forma che sono continue  $C^0$  per sopprimere il fenomeno dello shear locking.

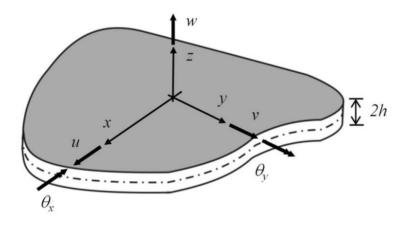


Figura 1.3: Notazioni della piastra [3]

Lo spostamento trasversale w viene interpolato con un polinomio quadratico, mentre tutte le altre quattro variabili cinematiche variano linearmente nell'elemento.

Il campo di deformazioni è caratterizzato da otto componenti

$$\{\varepsilon_k\} = [e, k, g]^T (k = 1, ... 8)$$
:

$$\mathbf{e} = \left\{ u_{,x}, v_{,y}, \theta_{x_{,y}} + \theta_{y_{,x}} \right\}^{T} = \left\{ \varepsilon_{1}, \varepsilon_{2}, \varepsilon_{3} \right\}^{T}$$

$$\mathbf{k} = \left\{ \theta_{y_{,x}}, \theta_{x_{,y}}, \theta_{x_{,x}} + \theta_{y_{,y}} \right\}^{T} = \left\{ \varepsilon_{4}, \varepsilon_{5}, \varepsilon_{6} \right\}^{T}$$

$$\mathbf{g} = \left\{ w_{x} + \theta_{y}, w_{y} + \theta_{x} \right\}^{T} = \left\{ \varepsilon_{7}, \varepsilon_{8} \right\}^{T}$$
(8)

dove e sono le deformazioni membranali, k sono le curvature (o deformazioni flessionali) e g sono le deformazioni a taglio.

I coefficienti dimensionali sono  $w_k^e = 1$  per k = [1,2,3,7,8], mentre  $w_k^e = (2h)^2$  per k = [4,5,6], con 2h lo spessore totale della piastra.

Le deformazioni membranali e le curvature possono essere valutate per tutte le posizioni discrete  $(x, y)_i$  (i = 1, ... n) sulla superficie superiore (+) e inferiore (-):

$$\boldsymbol{e}_{i}^{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \begin{cases} \varepsilon_{xx}^{+} \\ \varepsilon_{yy}^{+} \\ \gamma_{xy}^{+} \end{cases}_{i} + \begin{cases} \varepsilon_{yy}^{-} \\ \varepsilon_{yy}^{-} \\ \gamma_{xy}^{-} \end{cases}_{i} \right) \boldsymbol{k}_{i}^{\varepsilon} = \frac{1}{2h} \left( \begin{cases} \varepsilon_{xx}^{+} \\ \varepsilon_{yy}^{+} \\ \gamma_{xy}^{+} \end{cases}_{i} - \begin{cases} \varepsilon_{xx}^{-} \\ \varepsilon_{yy}^{-} \\ \gamma_{xy}^{-} \end{cases}_{i} \right)$$
(9)

dove l'apice + e - sta ad indicare le misure fatte nei punti  $[(x,y)_i,+h]$  e  $[(x,y)_i,-h]$ .

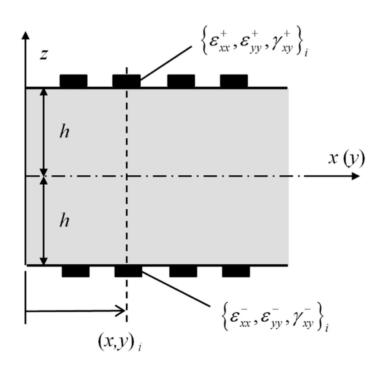


Figura 1.4: Disposizione degli strain gauge [3]

Le deformazioni a taglio  $\{\varepsilon_k\} = g$  (k = 7.8) non possono essere valutate sperimentalmente, quindi il loro contributo al funzionale non può essere calcolato con la (5), ma si esprime con

$$\Phi_k^e \equiv \int_{A^e} \varepsilon_{k(i)}^2 (\boldsymbol{u}^e) dA \quad k = 7.8$$
 (10)

dove  $A^e$  è l'area dell'elemento.

Come abbiamo visto, quando alcuni sensori non hanno dei livelli di accuratezza elevati si devono usare dei coefficienti  $\lambda_k^e$  piccoli (10<sup>-4</sup>). Nel caso delle deformazioni a taglio, che non possono essere misurate sperimentalmente, adotteremo la stessa strategia di penalizzazione, utilizzando dei coefficienti molto bassi.

Anche nel caso in cui sono presenti pochi sensori, alcuni elementi non avranno dei dati sugli strain. In questo caso si dovrà utilizzare la (10) e non la (5) per tutti i contributi per k = 1, ... 8. Per questi elementi, in cui non vi sono dati, è bene adottare  $\lambda_k^e$  piccoli  $(10^{-3} - 10^{-6})$  rispetto agli elementi che invece dispongono di sensori.

Una volta ricostruito il campo di spostamenti, si calcola il campo di deformazioni completo con le relazioni:

$$\mathbf{e} = \left\{ u_{,x}, v_{,y}, \theta_{x_{,y}} + \theta_{y_{,x}} \right\}^T = \left\{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \right\}^T$$

$$\mathbf{k} = \left\{ \theta_{y_{,x}}, \theta_{x_{,y}}, \theta_{x_{,x}} + \theta_{y_{,y}} \right\}^T = \left\{ \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6 \right\}^T$$

$$\mathbf{g} = \left\{ w_{,x} + \theta_{y}, w_{,y} + \theta_{x} \right\}^T = \left\{ \varepsilon_7, \varepsilon_8 \right\}^T$$

arrivando a:

$$\left\{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}\right\}^{T} \equiv \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) + z \, \boldsymbol{k}(\boldsymbol{u}) \tag{11}$$

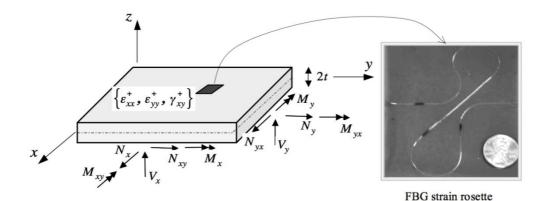


Figura 1.5: Risultanti su una piastra [4]

Assumendo comportamento elastico lineare, gli stress  $\boldsymbol{\sigma} \equiv \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}\}^T$  sono dati dalla relazione:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \boldsymbol{D} \left\{ \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy} \right\}^{T} \tag{12}$$

Le risultanti  $\mathbf{R} \equiv \{N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}\}^T$  sono calcolate a partire dalle equazioni costitutive, con le quali si arriva all'equazione matriciale:

$$R \equiv Q \begin{Bmatrix} e \\ k \end{Bmatrix} \tag{13}$$

dove  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{Q}$  sono le matrici costitutive.

Le forze di taglio trasversale si calcolano dalle equazioni di equilibrio della piastra:

$$V_x = M_{x,x} + M_{xy,y}$$
  $V_y = M_{y,y} + M_{xy,x}$  (14)

Una volta noti gli stress e le risultanti, si può valutare lo stato di cedimento del velivolo con opportuni criteri e visualizzare in tempo reale il suo stato di carico.

Vi sono diverse strategie di meshing della struttura per una data distribuzione di sensori. Le due configurazioni di base sono la 1-to-1 mesh e la n-to-1 mesh. La prima indica che in un singolo elemento è presente un solo sensore. Nella seconda si hanno n sensori in ogni elemento, dove n è un numero arbitrario per ogni elemento. Se l'elemento ha delle deformazioni membranali e curvature costanti, come nel caso degli elementi triangolari, per ottenere la massima densità della mesh, ottimale dal punto di vista dell'accuratezza, è conveniente posizionare un solo sensore nel centroide di ogni elemento [4], seguendo la prima strategia (Figura 1.6, a sinistra), anche se in generale l'elemento a tre nodi è sufficientemente robusto dal punto di vista computazionale da non richiedere una posizione specifica del sensore.

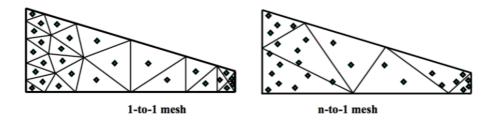


Figura 1.6: Due strategie di meshing della struttura [4]

#### 1.2 Cenni sul metodo modale

Le informazioni contenute in questo paragrafo sono tratte dall'articolo [3].

Il metodo modale, applicato allo shape sensing, si basa sulla conoscenza delle forme modali della struttura che si sta investigando. Per darne un breve cenno, si ipotizzi che un modello agli elementi finiti ci permetta di avere queste informazioni con un'analisi diretta. Nel caso di una piastra discretizzata col FEM, la deflessione del nodo j-esimo può essere espressa in funzione delle *M* forme modali:

$$w_j \cong \sum_{i=1}^{M} a_i \phi_i(x_j, y_j) \iff \mathbf{w} = \mathbf{\Phi} \mathbf{a}$$
 (15)

dove  $\phi_i$  sono le forme modali (contenute nella matrice  $\Phi$ ) e  $a_i$  sono le coordinate modali incognite (contenute nel vettore a). Applicando le relazioni spostamento-deformazione, è possibile esprimere il vettore delle deformazioni misurate sulle superfici nel seguente modo:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{a} \tag{16}$$

dove la matrice  $\psi$  contiene le forme modali relative alle deformazioni (l'i-esima colonna di  $\psi$  contiene le deformazioni misurate relative all'i-esima forma modale  $\phi_i$ ).

L'equazione (16) può essere risolta rispetto ad a utilizzando la pseudo matrice inversa di Moore-Penrose:

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi})^{-1} \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\varepsilon} \tag{17}$$

Inserendo l'equazione (17) nella (15), si ottiene lo spostamento:

$$\mathbf{w} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{\psi}^T \mathbf{\psi})^{-1} \mathbf{\psi}^T \mathbf{\varepsilon} \tag{18}$$

#### 1.3 Metodo di Ko

Le informazioni contenute in questo paragrafo sono tratte dall'articolo [3].

La teoria degli spostamenti di Ko è stata concepita per valutare la deflessione di un'ala lungo una linea di sensori di deformazione. Si consideri una struttura a sbalzo a forma d'ala appartenente al piano (x,y), come in Figura 1.7.

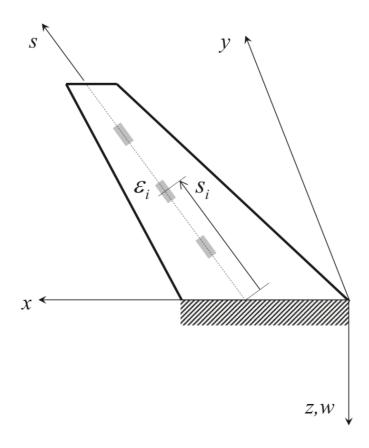


Figura 1.7: Ala incastrata di spessore totale 2h [3]

La linea tratteggiata, riferita alla coordinata s, rappresenta il percorso lungo cui vengono misurati gli strain longitudinali  $\varepsilon_{ss}$  sulla superficie. Ci sono N+1 punti in cui le deformazioni  $s_i$  sono misurate (i = 1,...N), con  $s_0$  e  $s_N$  i punti all'incastro e all'estremità libera, rispettivamente.

Gli strain misurati sono denominati  $\varepsilon_i \equiv \varepsilon_{ss}(s_i)$ .

Facendo l'assunzione di Eulero-Bernoulli di pura flessione per una trave, la deformazione assiale è legata alla derivata seconda della freccia dalla relazione:

$$\varepsilon_{ss}(s) = -z \, w_{ss}(s) \tag{19}$$

con z la distanza trasversale tra il sensore e l'asse neutro.

In questo caso, si consideri una piastra di spessore costante 2h (quindi si hanno tutti i sensori alla stessa distanza dall'asse neutro, in particolare z = -h se si trovano sulla faccia superiore, seguendo la notazione in Figura 1.7).

Si ottiene dalla (19):

$$w_{,ss}(s) = \frac{\varepsilon_{ss}(s)}{h} \tag{20}$$

Si assume a questo punto che lo strain sia lineare tra un sensore e il successivo:

$$\varepsilon_{ss}(s) = \varepsilon_{i-1} + \frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})}{(s_i - s_{i-1})} (s - s_{i-1})$$

$$s_{i-1} \le s \le s_i \quad (i = 1, 2, \dots N)$$
(21)

Si integra due volte la (20) con gli strain contenuti nella (21) in ogni intervallo.

Tenendo in considerazione le condizioni di vincolo dovute all'incastro  $w_0 = w(s = s_0) = 0$ ,  $\theta_0 = w_s(s = s_0) = 0$  e considerando la continuità di deflessione e rotazione in ogni punto di misura degli strain, si arriva alla seguente espressione della deformata:

$$w_{i} = \frac{1}{6h} \left[ \sum_{j=1}^{i} (2\varepsilon_{j-1} + \varepsilon_{j})(s_{j} - s_{j-1})^{2} + 3 \sum_{k=1}^{i-1} (\varepsilon_{k-1} + \varepsilon_{k})(s_{k} - s_{k-1})(s_{i} - s_{k}) \right]$$
(22)

con i = 1, 2, ... N.

Quindi la teoria di Ko permette la valutazione della deflessione nei soli punti in cui ci sono i sensori. Ne risulta che il metodo iFEM è molto più versatile in quanto ricostruisce la deformata di tutta la struttura.

## 1.4 Estensimetri elettrici (strain gauges e rosette)

Le informazioni contenute in questo paragrafo sono tratte dalla fonte [5].

Il principio di funzionamento di un estensimetro convenzionale, o strain gauge, si basa sulla variazione di resistenza elettrica di un conduttore sottoposto a deformazione. La resistenza in un materiale conduttore è:

$$R = \frac{\rho L}{A} \tag{23}$$

dove  $\rho$  è la resistività del materiale, L è la lunghezza del materiale, A è l'area della sezione del conduttore.

Differenziando la relazione precedente, si ottiene:

$$dR = \frac{dL \,\rho}{A} + \frac{d\rho \,L}{A} - \frac{dA \,\rho \,L}{A^2} \tag{24}$$

dividendo per R, si ottiene:

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dL}{L} - \frac{dA}{A} \tag{25}$$

La variazione di volume del materiale per piccole deformazioni porta a scrivere:

$$L dA = -2\nu A dL \tag{26}$$

Sostituendo la (26) nella (25), si ottiene:

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dL}{L} + \frac{2\nu \, dL}{L} \tag{27}$$

La sensibilità alla deformazione dello strain gauge, detta gauge factor, è:

$$k = \frac{dR/R}{\varepsilon} = 1 + 2\nu + \frac{d\rho/\rho}{\varepsilon} \tag{28}$$

I primi due termini della relazione (28) rappresentano l'effetto della deformazione, mentre l'ultimo rappresenta l'effetto della variazione di resistività specifica. Quindi, dalla variazione di resistenza elettrica dell'estensimetro, si risale alla deformazione  $\varepsilon$  tramite il gauge factor k.

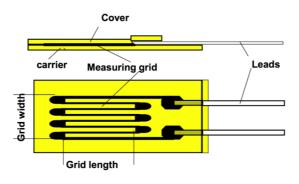


Figura 1.8: Esempio di strain gauge [5]

La variazione di resistenza di un singolo strain gauge per effetto della deformazione è troppo piccola per essere misurata. Si utilizza pertanto un dispositivo, detto ponte di Wheatstone, per convertire la variazione di resistenza in una variazione di tensione che sia sufficientemente amplificata, in modo da poter essere misurata:

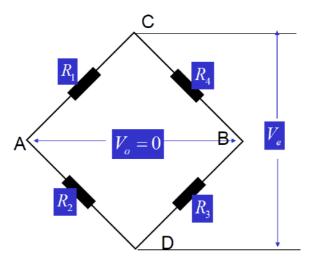


Figura 1.9: Ponte di Wheatstone bilanciato [5]

Il rapporto tra la tensione  $V_e$  applicata dall'esterno, che è nota, e la tensione misurata  $V_o$  è:

$$\frac{V_o}{V_e} = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \tag{29}$$

Quando  $R_1R_3 = R_2R_4$ , il ponte è detto *bilanciato* e si ha una tensione misurata  $V_o$  nulla. Quando una delle resistenze varia, a causa di una deformazione, il ponte si sbilancia e si misura un determinato rapporto di tensioni  $\frac{V_o}{V_o}$ .

Andando a considerare una variazione delle resistenze e tenendo conto della relazione (28), si arriva alla relazione finale:

$$\frac{V_o}{V_e} = \frac{1}{4} \left( \frac{dR_1}{R_1} - \frac{dR_2}{R_2} + \frac{dR_3}{R_3} - \frac{dR_4}{R_4} \right) = 
= \frac{k}{4} \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 \right)$$
(30)

Una variazione di strain positiva della prima e terza resistenza, provoca una variazione positiva di tensione, al contrario una variazione di strain positiva della seconda e quarta resistenza provoca una variazione di tensione negativa ai capi di misurazione AB (Figura 1.9).

Quello che abbiamo appena visto, viene definito ponte intero in quanto si utilizzano tutte e quattro le resistenze per misurare le deformazioni. Questo ponte consente di effettuare la compensazione termica, in quanto le deformazioni causate dalla variazione di temperatura (che sono uguali per tutte le resistenze,  $\varepsilon_t$ ) si sottraggono a due a due, permettendo la misurazione del solo strain meccanico ( $\varepsilon_m$ ):

$$\frac{V_o}{V_e} = \frac{k}{4} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4) = 
= \frac{k}{4} (\varepsilon_{1m} + \varepsilon_t - \varepsilon_{2m} - \varepsilon_t + \varepsilon_{3m} + \varepsilon_t - \varepsilon_{4m} - \varepsilon_t) = (31) 
= \frac{k}{4} (\varepsilon_{1m} - \varepsilon_{2m} + \varepsilon_{3m} - \varepsilon_{4m})$$

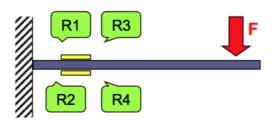


Figura 1.10: Nella prova di flessione, gli estensimetri superiori  $R_1$  e  $R_3$ sono in trazione, mentre quelli inferiori  $R_2$  e  $R_4$ in compressione

$$(\varepsilon_{1m} = \varepsilon_{3m} = \varepsilon_m, \quad \varepsilon_{2m} = -\varepsilon_m, \quad \varepsilon_{4m} = -\varepsilon_m)$$
 [5]

Se siamo in una prova di flessione con quattro estensimetri posti alla stessa distanza dall'incastro, come in Figura 1.10, si hanno quattro deformazioni uguali in modulo pari a  $\varepsilon_m$ . Quindi, si ottiene  $\frac{V_o}{V_e} = k \varepsilon_m$ , da cui possiamo ricavare la sola deformazione meccanica, depurata dall'influenza della deformazione termica  $\varepsilon_t$ .

In realtà vi sono anche altri due tipi di ponte: il mezzo ponte e il quarto di ponte. Nel collegamento a mezzo ponte, si hanno due estensimetri attivi (resistenze che risentono della deformazione) e due passivi (resistenze semplici). Anche con il mezzo ponte è possibile fare analogamente la compensazione della temperatura. Se si ha  $\varepsilon_{1m} = \varepsilon_m$  e  $\varepsilon_{2m} = -\varepsilon_m$ :

$$\frac{V_o}{V_e} = \frac{k}{4} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \frac{k}{4} (\varepsilon_{1m} + \varepsilon_t - \varepsilon_{2m} - \varepsilon_t) = \frac{k}{2} \varepsilon_m$$
(32)

Nel collegamento a quarto di ponte semplice, si ha invece solo un estensimetro attivo, quindi non è possibile fare la compensazione termica. In realtà, inserendo una seconda resistenza che risenta solo della deformazione causata dalla temperatura  $\varepsilon_t$  (ad esempio, installandola su un provino costituito dallo stesso materiale della struttura di prova e che si trova alla stessa temperatura), si può fare compensazione termica anche con il quarto di ponte:

$$\frac{V_o}{V_e} = \frac{k}{4} (\varepsilon_1 - \varepsilon_t) = \frac{k}{4} (\varepsilon_{1m} + \varepsilon_t - \varepsilon_t) = \frac{k}{4} \varepsilon_{1m}$$
(33)

Un singolo strain gauge può misurare la deformazione in una sola direzione, ma se si vogliono determinare le tre componenti indipendenti di deformazione in un piano, occorrono tre misure distinte. Quindi nel piano x-y, seguendo la Figura 1.11, si ha in generale:

$$\varepsilon_{i} = \frac{\varepsilon_{x} + \varepsilon_{y}}{2} + \frac{\varepsilon_{x} - \varepsilon_{y}}{2} \cos(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2\theta)$$
 (34)

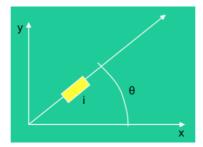


Figura 1.11: Strain gauge i-esimo orientato con angolo  $\theta$  [5]

Con tre estensimetri lungo tre direzioni diverse nel piano, si ottiene una rosetta estensimetrica, con cui è possibile calcolare le tre componenti di deformazione. Per ogni estensimetro della rosetta, si può scrivere l'equazione (34) in base all'angolo  $\theta$  di orientamento dell'estensimetro. Nel caso in Figura 1.12, si ottiene:

$$\varepsilon_{1} = \frac{\varepsilon_{x} + \varepsilon_{y}}{2} + \frac{\varepsilon_{x} - \varepsilon_{y}}{2} = \varepsilon_{x}$$

$$\varepsilon_{3} = \frac{\varepsilon_{x} + \varepsilon_{y}}{2} - \frac{\varepsilon_{x} - \varepsilon_{y}}{2} = \varepsilon_{y}$$

$$\varepsilon_{2} = \frac{\varepsilon_{x} + \varepsilon_{y}}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\varepsilon_{1} + \varepsilon_{3}}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2}$$
(35)

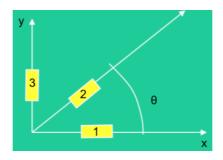


Figura 1.12: Estensimetri della rosetta a 0-45-90° [5]

## 1.5 Fibra ottica a reticolo di Bragg (FBG)

Le informazioni contenute in questo paragrafo sono tratte principalmente dall'articolo [7].

Tipicamente in laboratorio le deformazioni sulla struttura vengono misurate con degli estensimetri convenzionali, o *strain gauges*. Come visto nel paragrafo precedente, questo tipo di estensimetri è sensibile alle interferenze elettromagnetiche, essendo composti da un materiale conduttore.

I sensori a fibra ottica hanno il vantaggio di essere immuni alle interferenze elettromagnetiche in quanto uno dei materiali che li costituisce è un isolante elettrico. Tra gli altri vantaggi, si ha il peso ridotto e la dimensione compatta, tanto da poter essere inseriti all'interno della struttura senza causare alcun difetto. Un altro aspetto positivo delle fibre ottiche è la facilità con cui possono essere posizionate ed eventualmente spostate sulla struttura, a differenza degli estensimetri elettrici che vanno incollati singolarmente.

Il punto chiave di questa tecnologia, sta nel poter collegare diversi reticoli di Bragg, ognuno codificato a una differente lunghezza d'onda lungo la linea che compone la fibra ottica. Ognuno dei sensori viene quindi associato ad una specifica lunghezza d'onda, permettendo così una divisione multiplexing (WDM, wavelength division multiplexing), che consente di avere un numero elevato di sensori lungo una linea di misura (sensing line).

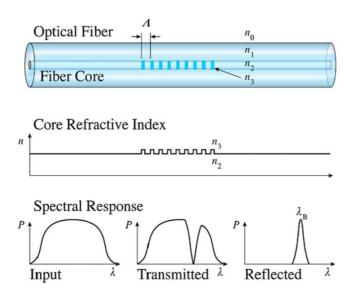


Figura 1.13: Principio di funzionamento di una fibra ottica a reticolo di Bragg [6]

Una fibra ottica di Bragg è composta da un core in cui l'indice di rifrazione viene fatto variare periodicamente, esponendolo ad un intenso pattern di raggi UV [7].

Se si inserisce in input una luce composta da diverse lunghezze d'onda, la fibra riflette una componente specifica, detta lunghezza d'onda di Bragg:

$$\lambda_B = 2n_e \Lambda \tag{36}$$

dove  $\lambda_B$  è la lunghezza d'onda di Bragg,  $n_e$  è l'indice di rifrazione effettivo del cuore e  $\Lambda$  è il periodo del pattern a cui è stato esposto il core della fibra.

La lunghezza d'onda di Bragg viene riflessa, mentre le altre lunghezze d'onda sono trasmesse all'interno della fibra, come si nota in Figura 1.13.

Visto che la  $\lambda_B$  dipende dal periodo del pattern  $\Lambda$ , se la griglia viene esposta a perturbazioni esterne, quali deformazioni o variazioni di temperatura, la lunghezza d'onda di Bragg cambia.

Questo cambiamento è espresso dalle leggi:

$$\Delta \lambda_B = \lambda_B (\alpha_f + \xi_f) \Delta T + (1 - p_e) \epsilon$$
 (37)

$$p_e = \frac{n_e^2}{2} [p_{12} - \nu(p_{11} + p_{12})]$$
(38)

dove  $\alpha_f$  è il coefficiente di espansione termica,  $\xi_f$  è il coefficiente termo-ottico e  $p_e$  è il coefficiente deformativo-ottico, che dipende a sua volta da  $\nu$  (coefficiente di Poisson) e da  $p_{11}$  e  $p_{12}$  che sono le componenti del tensore deformativo-ottico.

Misurando le variazioni di lunghezza d'onda in maniera accurata, è possibile quindi risalire alla deformazione in ogni sensore:

$$\varepsilon = \frac{1}{1 - p_e} \frac{\Delta \lambda_B}{\lambda_B} \tag{39}$$

## 1.6 Fibra ottica basata sul Rayleigh Backscatter (RBS)

Le fibre ottiche basate sullo scattering di Rayleigh offrono una densità di misura maggiore rispetto alle fibre a reticolo di Bragg, permettendo di misurare le deformazioni in qualunque punto della fibra. Questo requisito permette una grande flessibilità in termini di riposizionamento dei sensori (ad esempio, aumentando la densità di sensori vicino ad un'area danneggiata di un componente).

Di seguito, si descrive brevemente il principio di funzionamento delle fibre ottiche RBS, facendo riferimento all'articolo [8].

Quando una luce coerente in input viaggia all'interno del core di una fibra ottica, incontra delle fluttuazioni nello spazio dell'indice di rifrazione (*scatterers*), per cui la luce viene riflessa in tutte le direzioni (scattering di Rayleigh), dunque anche all'indietro (backscattering), come si nota in Figura 1.14.

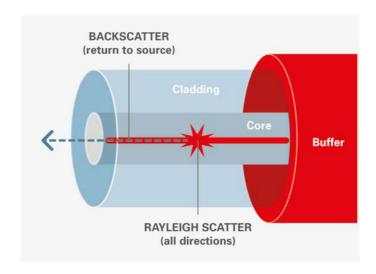


Figura 1.14: Scattering di Rayleigh e backscatter (Credit Wire&CableTips.com)

Quando si immette in una fibra ottica una luce coerente con durata dell'impulso W e frequenza  $\nu$  al tempo t=0, si ottiene un'onda di backscatter all'ingresso della fibra:

$$e(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \exp\left(-\alpha \frac{c \tau_i}{n_f}\right) \exp\{2\pi \nu j (t - \tau_i)\} rect(\frac{t - \tau_i}{W})$$
 (40)

dove  $\alpha_i$  e  $\tau_i$  sono rispettivamente l'ampiezza e il delay dell'i-esima onda riflessa, N è il numero totale di onde riflesse,  $\alpha$  è la costante di attenuazione della fibra, c

è la velocità della luce nel vuoto,  $n_f$  è l'indice di rifrazione della fibra, il termine  $rect(\frac{t-\tau_i}{W})=1$  quando  $0 \leq \frac{t-\tau_i}{W} \leq 1$ , altrimenti è nullo (si accende solo quando l'onda riflessa i-esima arriva all'ingresso della fibra e rimane acceso per la durata W dell'impulso).

Il delay  $\tau_i$  è il tempo necessario affinché la luce in input percorra la fibra fino al punto di scattering e ritorni all'ingresso della fibra stessa. Esso è legato alla distanza  $z_i$  dalla relazione:

$$\tau_i = \frac{2n_f z_i}{c} \tag{41}$$

La potenza associata all'onda riflessa è divisa in due componenti:

$$p(t) = |e(t)|^2 = p_1(t) + p_2(t)$$
(42)

La prima componente,

$$p_1(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 \exp\left(-2\alpha \frac{c \tau_i}{n_f}\right) rect(\frac{t - \tau_i}{W})$$
 (43)

rappresenta la somma delle potenze delle onde che sono riflesse indipendentemente l'una dall'altra. Questa componente non presenta grandi variazioni al variare dello strain, della temperatura o della frequenza  $\nu$  dell'impulso.

La seconda componente invece,

$$p_2(t) = 2\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} \alpha_i \, \alpha_j \cos \phi_{ij} \, \exp\left\{-\alpha \frac{c \, (\tau_i + \tau_j)}{n_f}\right\} rect(\frac{t - \tau_i}{W}) rect(\frac{t - \tau_j}{W}) \tag{44}$$

rappresenta l'interferenza tra le onde riflesse in punti diversi, dove:

$$\phi_{ii} = 2\pi\nu(\tau_i - \tau_i) \tag{45}$$

La quantità  $\phi_{ij}$  rappresenta la differenza di fase tra le onde riflesse i-esima e j-esima.

Ogni termine presente nella seconda componente dipende dal  $\cos \phi_{ij}$ , dove la differenza di fase  $\phi_{ij}$  è proporzionale alla frequenza dell'onda  $\nu$ , all'indice di rifrazione  $n_f$  e allo spazio tra due riflessioni  $s_{ij} = z_i - z_j$ . Infatti, è possibile riscrivere la differenza di fase sostituendo la relazione (41) nella (45), ottenendo:

$$\phi_{ij} = \frac{4\pi\nu \, n_f s_{ij}}{c} \tag{46}$$

Quindi il termine d'interferenza  $p_2(t)$  è funzione di v,  $n_f$  e  $s_{ij}$ . È noto che  $n_f$  e  $s_{ij}$  dipendano dalle variazioni di strain e temperatura, quindi  $p_2(t)$  varierà con esse. Grazie a questa correlazione, si può misurare la potenza ottica di backscatter  $p(t) = p_1(t) + p_2(t)$  e risalire alle variazioni di deformazione e temperatura in ogni punto della fibra ottica, a patto che si riesca a controllare in modo preciso la frequenza del laser v.

Si descrive ora la metodologia con cui si misura un cambiamento di strain o di temperatura tra due punti corrispondenti a un intervallo di tempo compreso tra  $T_a$  e  $T_b$ . Al tempo  $T_a$ , variando gradualmentela frequenza del laser  $\nu$ , si misura la potenza di backscatter, che sarà funzione della frequenza  $\nu$  e della posizione z,  $p_a(\nu,z)$ . La distanza z rappresenta lo spazio tra l'ingresso della fibra e il punto in cui l'onda riflessa e(t) torna indietro ed è ottenuta convertendo il tempo t con la relazione  $z = \frac{(t-0.5W)\,c}{2\,n_f}$ . Successivamente, al tempo  $T_b$ , si effettua nuovamente la misurazione della potenza di backscatter,  $p_b(\nu,z)$ .

Se non ci sono variazioni nello strain o nella temperatura nella fibra, nell'intervallo di tempo tra  $T_a$  e  $T_b$ , allora la potenza  $p_b(v,z)$  sarà simile a  $p_a(v,z)$ . D'altro canto, se lo strain o la temperatura variano,  $p_b(v,z)$  sarà diversa rispetto a  $p_a(v,z)$ . Invece, si ha che  $p_b(v+\Delta v,z)$  è simile a  $p_a(v,z)$ , se  $\Delta v$  è la variazione di frequenza del laser che compensa la variazione di strain o temperatura, in modo tale che la differenza di fase  $\phi_{ij}$  rimanga la stessa che si aveva al tempo  $T_a$ .

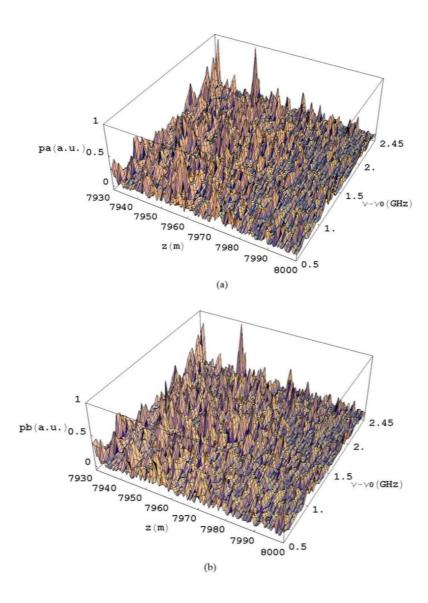


Figura 1.15: Misura della potenza di backscatter dell'ultimo tratto di 70 m di una fibra lunga 8 km, (a)  $p_a(v, z)$  al tempo  $T_a$ , (b)  $p_b(v, z)$  al tempo  $T_b$  [8]

Questo significa che le variazioni di strain o temperatura causano uno shift della potenza di backscatter  $p_b(v, z)$  nel dominio della frequenza del laser. Fatte queste considerazioni, si calcola la cross-correlazione  $R_{ab}(f, z)$ , tra  $p_a(v, z)$  e  $p_b(v, z)$ :

$$R_{ab}(f,z) = \frac{\sum_{i=1}^{K} (p_a(v_i,z) - \overline{p_a}(z)) (p_b(v_i + f,z) - \overline{p_b}(z))}{\left\{ (\sum_{i=1}^{K} (p_a(v_i,z) - \overline{p_a}(z))^2) (\sum_{i=1}^{K} (p_b(v_i + f,z) - \overline{p_b}(z))^2) \right\}^{0.5}}$$
(47)

$$\operatorname{con} \overline{p_x}(z) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K P_x(\nu_i, z), (x = a, b)$$
(48)

dove *K* è il numero di frequenze laser che contribuiscono alla cross-correlazione.

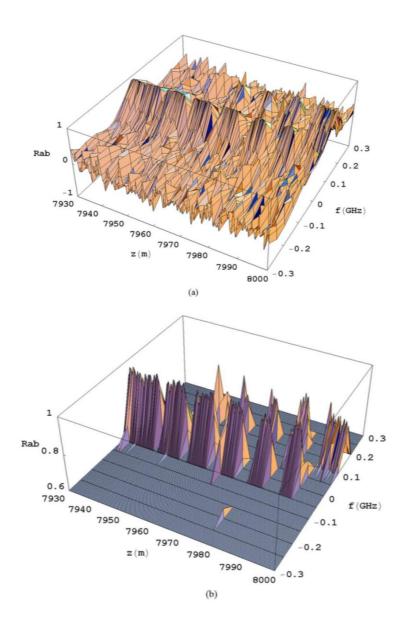


Figura 1.16: Cross-correlazione  $R_{ab}(f,z)$  tra  $p_a(v,z)$  e  $p_b(v,z)$ : (a) con asse verticale completo, (b) con zoom sull'asse verticale [8]

È noto che se lo strain o la temperatura non cambiano nell'intervallo di tempo tra  $T_a$  e  $T_b$ , la  $R_{ab}(f,z)$  ha il suo massimo in corrispondenza di f=0. D'altra parte, se vi sono cambiamenti di strain o temperatura, la  $R_{ab}(f,z)$  raggiunge il suo massimo in corrispondenza di  $f=\Delta \nu$ . Quindi, si può conoscere la variazione della frequenza del laser  $\Delta \nu$  dalla posizione del picco della cross-correlazione  $R_{ab}(f,z)$  per ogni valore di z.

La variazione della frequenza del laser  $\Delta \nu$  che compensa le variazioni di strain  $\Delta \varepsilon$  o le variazioni di temperatura  $\Delta T$  sono date approssimativamente da [9]:

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} \approx -0.78 \,\Delta \varepsilon \tag{49}$$

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} \approx -(6.92 \cdot 10^{-6}) \,\Delta T \tag{50}$$

dove  $v_0$  è la frequenza nominale del laser. La variazione di strain o di temperatura è stimata convertendo la variazione di frequenza  $\Delta v$  misurata, utilizzando le relazioni (49) e (50).

# Capitolo 2

# Dimensionamento del cassone alare

Si è utilizzato come punto di partenza la tesi di Christian Shikh Farshi, intitolata "Dimensionamento di un cassone alare per prove statiche di laboratorio" [10], con relatore il Prof. Marco Gherlone.

In quest'ultima, il tesista ha dimensionato un cassone che fosse compatibile con ripetute prove sperimentali. Per far ciò, il cassone deve rimanere in campo elastico. Infatti, se il cassone subisse delle deformazioni plastiche sotto carico, non potrebbe essere utilizzato in una prova successiva.

Questo lavoro ha l'obiettivo di verificare la validità del metodo iFEM proprio su questo cassone, cercando di capire il numero e la posizione ottimale dei sensori da applicare, al fine di effettuare in futuro una prova sperimentale per validare i risultati numerici.

#### 2.1 Geometria

Il cassone è composto da un dorso e un ventre che sono dati dalla piastra a forma di semiala riportata in Figura 2.1, incastrata a un estremo e libera all'altra.

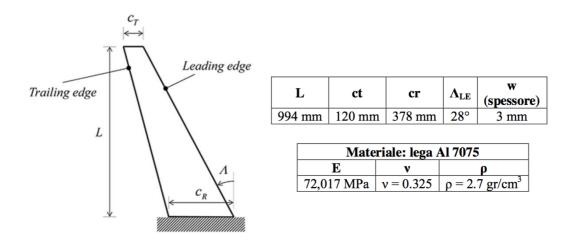


Figura 2.1: Geometria e materiale della piastra utilizzata nella prova sperimentale discussa nell'articolo [3]

Nel cassone alare del tesista, il dorso e il ventre sono collegati ai due longheroni attraverso degli angolari (Figura 2.2). I longheroni sono dello stesso materiale del dorso e del ventre ed hanno lo stesso spessore.

Il tesista è arrivato ad un modello finale del cassone in cui si hanno degli angolari a L. Questi hanno le proprietà meccaniche e geometriche in Figura 2.3, con spessore s = 3 mm. Si è osservato che per spessori degli angolari inferiori a 3 mm, i picchi di tensioni superano la soglia di 200 MPa presa come limite del campo elastico lineare (la tensione di proporzionalità è  $\sigma_p = 300$  MPa, ma con Safety Factor = 1.5 si ha  $\sigma_{max} = 200$  MPa).

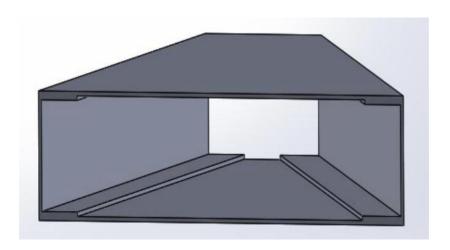


Figura 2.2: Geometria del cassone completo vista dalla sezione di radice [10]

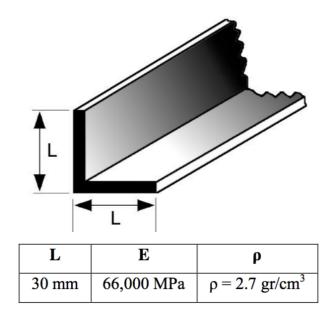


Figura 2.3: Proprietà geometriche e meccaniche degli angolari a L [10]

Si è pensato anche di inserire delle centine nella sezione di radice e di estremità libera al fine di evitare lo schiacciamento sotto carico del cassone. Anche le centine sono dello stesso materiale della semiala e spesse 5 mm.

L'altezza del cassone invece è stata fissata a 80 mm, in quanto altezze superiori portavano a una freccia nell'estremità libera e delle deformazioni massime troppo basse, dovendo quindi caricare troppo il cassone affinché gli strumenti di laboratorio potessero registrarle. Allo stesso modo, facendo un'analisi non lineare con altezze del cassone inferiori, si registravano delle tensioni troppo elevate, ben al di fuori del campo elastico.

#### 2.2 Mesh

Sulla base del lavoro svolto nella tesi [10], si è deciso di utilizzare una distribuzione lineare di 100 elementi QUAD4 lungo l'apertura alare del cassone sul dorso, sul ventre e sui longheroni.

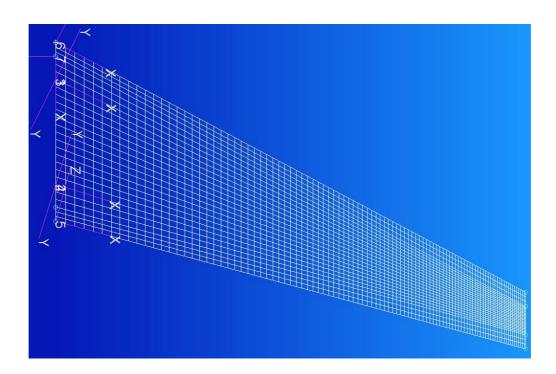


Figura 2.4: Mesh della parte dorsale e ventrale (gli angolari sono in corrispondenza dei cerchi azzurri)

Si è deciso di modellizzare la parte del dorso e del ventre che si sovrappone con gli angolari (Figura 2.4), utilizzando 3 linee di elementi, mentre la parte compresa tra gli angolari è stata suddivisa anch'essa in modo uniforme con 20 linee di elementi (sia per il dorso che per il ventre).

I longheroni sono modellizzati con 8 file di elementi lungo l'altezza del cassone, delle quali 6 si sovrappongono alle estremità con gli angolari, mentre le altre 2 file sono nella parte centrale tra gli angolari:



Figura 2.5: Elementi dei longheroni (gli angolari sono in corrispondenza dei cerchi azzurri)

Gli angolari ad L sono stati modellizzati traslando gli elementi che si sovrappongono sul dorso, sul ventre e sui longheroni con un offset di 3 mm, quindi presentano analogamente 3 file di elementi e una distribuzione lineare di 100 elementi lungo l'apertura.

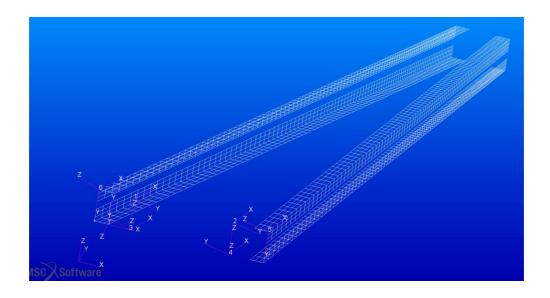


Figura 2.6: Elementi degli angolari

La mesh appena descritta, che chiameremo *mesh fitta*, verrà utilizzata nel processo di ottimizzazione della posizione dei sensori svolto nel Capitolo 3, sia per l'analisi diretta che per quella inversa.

## Capitolo 3

# Analisi inversa con metodo iFEM

Per utilizzare il codice iFEM è necessario disporre di un file bdf, che contiene la mesh a elementi finiti inversi, di un report contenente le tre deformazioni, sia sulla faccia superiore che inferiore,  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  e  $\gamma_{xy}$  ingegneristica nel sistema di coordinate materiali degli elementi, e di un report con tutti gli spostamenti nodali FEM di riferimento (u, v, w). Questi ultimi servono solo per calcolare l'errore tra l'analisi diretta, presa come riferimento, e l'analisi inversa.

È inoltre necessario indicare un vettore contenente gli indici degli elementi con strain gauge monoassiali (che misurano la  $\varepsilon_{xx}$ ) e un vettore contenente gli indici degli elementi con rosette, che misurano le deformazioni  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\gamma_{xy}$  ingegneristica.

#### 3.1 Note sull'utilizzo del codice iFEM

È importante sapere che è necessario creare tanti sistemi di coordinate materiali quanti sono i piani in cui si trovano gli elementi. In particolare, il sistema di riferimento materiale dovrà avere l'asse x e y nel piano degli elementi. L'asse z del sistema di riferimento materiale sarà quindi perpendicolare al piano e parallelo alla normale degli elementi.

Quindi sarà necessario creare un sistema di coordinate materiali per la parte dorsale e ventrale del cassone (che sono parallele all'asse x, y del Coord4, Figura 3.1), uno per le due centine (che sono anch'esse parallele, Coord7) e due per i due longheroni, anteriore (Coord6) e posteriore (Coord5), che ricordiamo non sono paralleli, quindi necessitano di due sistemi di riferimento materiale differenti.

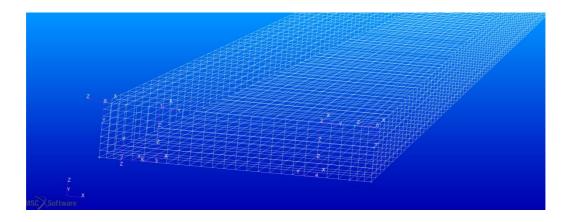


Figura 3.1: Sistemi di coordinate materiali Coord 4,5,6,7

La numerazione degli elementi e dei nodi deve essere consecutiva. Se ciò non fosse, è necessario fare un *renumbering* attraverso Patran, come lo è stato in questo caso.

Se la normale degli elementi è concorde con l'asse z del rispettivo sistema di riferimento materiale, allora nel report degli strain è necessario riportare le deformazioni sulla faccia superiore e poi inferiore, nell'ordine  $z_2$ - $z_1$ , affinché la formula delle curvature sia coerente nel seguente modo:

$$\boldsymbol{k}_{i}^{\varepsilon} = \frac{1}{2h} \left( \begin{cases} \varepsilon_{xx}^{z2} \\ \varepsilon_{yy}^{z2} \\ \gamma_{xy}^{z2} \end{cases}_{i} - \begin{cases} \varepsilon_{xx}^{z1} \\ \varepsilon_{yy}^{z1} \\ \gamma_{xy}^{z1} \end{cases}_{i} \right)$$
 (51)

Se invece si è salvato il report con le deformazioni nell'ordine  $z_1$ - $z_2$ , è necessario inserire un segno meno nella formula precedente.

Se nel modello con cui si fa l'analisi FEM diretta sono presenti due elementi sovrapposti, il codice iFEM li ingloba in un unico elemento correggendo lo spessore dello stesso (sommando gli spessori dei singoli elementi) e l'offset. Questo significa che nel fare l'analisi inversa si possono utilizzare un numero inferiore di elementi, in particolare si possono utilizzare solo quelli non inglobati.

Nel nostro caso, i 2400 elementi che si trovano in corrispondenza degli angolari, sovrapponendosi a quelli presenti sul cassone, vengono inglobati uno ad uno in un unico elemento. Pertanto dei 9616 elementi totali, solo 7216 potranno essere utilizzati nel codice iFEM.

Bisogna prestare attenzione alla sovrapposizione, in quanto il codice funziona solo se un elemento si sovrappone ad un solo altro elemento. Se invece un elemento si sovrappone a più elementi, a causa di una differente mesh, il codice

iFEM non funziona. È questo il motivo per cui si sono traslati gli elementi del cassone per la costruzione degli angolari: si hanno così due mesh corrispondenti sovrapposte, in cui ogni elemento si sovrappone ad un solo altro elemento.

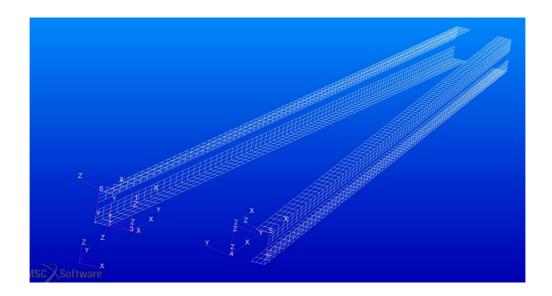


Figura 3.2: Elementi sovrapposti degli angolari

## 3.2 Analisi preliminare

Prima di tutto, è stato necessario fare un'analisi FEM diretta con il codice commerciale Nastran per creare il file bdf contenente la mesh inversa, il report con le deformazioni degli elementi e gli spostamenti da confrontare con quelli ottenuti dall'analisi inversa. Nel presente capitolo, le mesh diretta e inversa coincidono con la mesh fitta descritta nel Capitolo 2.

Si utilizzerà come modello Patran il cassone del Capitolo 2, incastrato alla radice e caricato al tip con un carico distribuito pari a 1 kg totale:

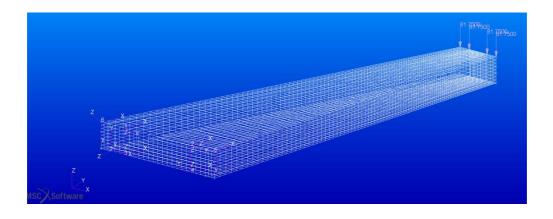


Figura 3.3: Mesh diretta del cassone con carico all'estremità libera in Patran

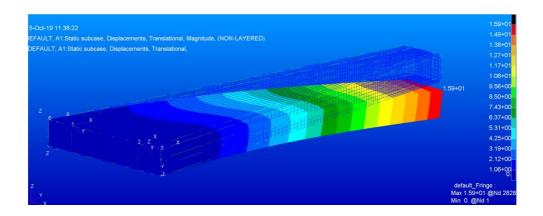


Figura 3.4: Deformata ottenuta dall'analisi diretta lineare

La prima analisi inversa è stata svolta tenendo conto di tutti gli elementi disponibili (7216 elementi). Questo equivale alla situazione in cui sulla struttura reale vi è una rosetta, che misura le deformazioni  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\gamma_{xy}$  ingegneristica, su tutti gli elementi.

A questo punto, il codice iFEM (in Matlab) è in grado di ricostruire la deformata della struttura a partire dalle deformazioni ottenute dall'analisi diretta, ovvero i tre spostamenti u, v, w lungo gli assi x, y, z:

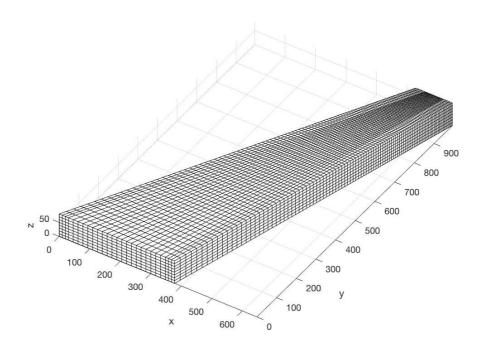


Figura 3.5: Mesh inversa corrispondente alla mesh diretta

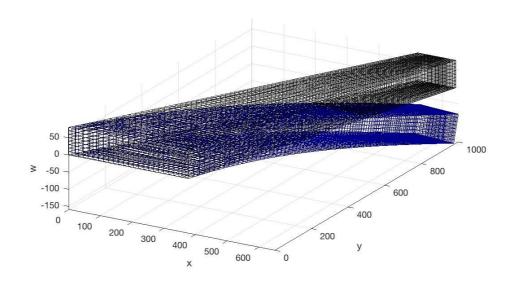


Figura 3.6: Deformata ottenuta dall'analisi inversa lineare

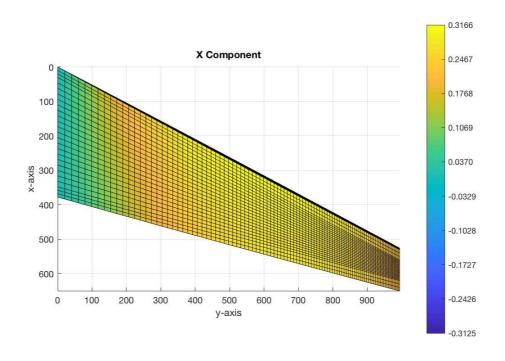


Figura 3.7: Componente x dello spostamento

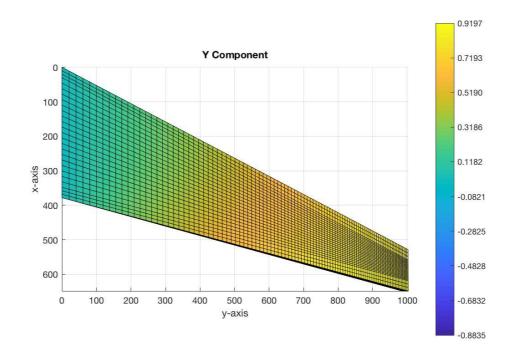


Figura 3.8: Componente y dello spostamento

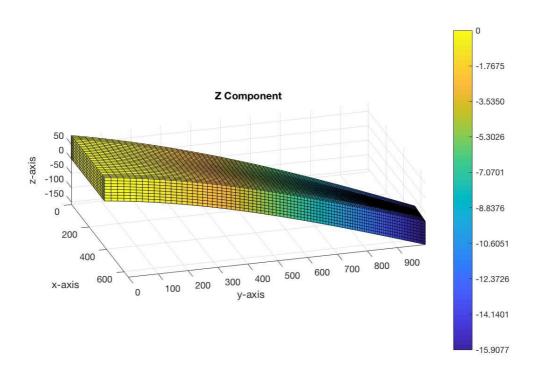


Figura 3.9: Componente z dello spostamento

Per valutare l'errore tra gli spostamenti ricostruiti con l'analisi inversa e quelli ottenuti con l'analisi diretta, si è definito un valore quadratico medio su tutti i nodi (Root Mean Square, RMS):

$$\%e_{RMS}(w) = 100 \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{w_i^{ifem} - w_i^{fem}}{w_{max}^{fem}}\right)^2}$$
 (52)

dove n è il numero di nodi totali.

In questo caso, utilizzando tutti gli elementi disponibili, si ottengono degli errori molto piccoli:

$$e_{RMS}(u) = 0.7815 \%$$

$$e_{RMS}(v) = 0.5586 \%$$

$$e_{RMS}(w) = 0.0709 \%$$

Si è poi calcolato l'errore percentuale rispetto allo spostamento massimo di tutta la struttura, per avere una misura puntuale dell'errore:

$$\%Errore(w_{max}) = 100 \left[ \frac{w_{max}^{fem} - w_{max}^{ifem}}{w_{max}^{fem}} \right]$$
 (53)

$$Errore(u_{max}) = 0.3049 \%$$

$$Errore(v_{max}) = -0.6310 \%$$

$$Errore(w_{max}) = -0.0272 \%$$

Inoltre, per misurare l'accuratezza degli spostamenti ottenuti dell'analisi iFEM rispetto agli spostamenti ottenuti con l'analisi FEM si è calcolata la differenza percentuale degli spostamenti w in alcune posizioni specifiche (ad esempio lungo il leading edge e trailing edge sul dorso e sul ventre):

$$\%Diff(w_i) = 100 \left[ \frac{w_i^{fem} - w_i^{ifem}}{max(w_i^{fem})} \right]$$
 (54)

dove i rappresenta l'indice dei nodi che si trovano lungo una linea specifica.

Nel seguito, si va a diagrammare l'andamento della differenza percentuale della freccia w lungo il leading edge e trailing edge del cassone nella parte dorsale e ventrale. Le differenze percentuali, come si può notare dai grafici, sono molto ridotte quando si utilizza una rosetta per ogni elemento a disposizione nel modello.

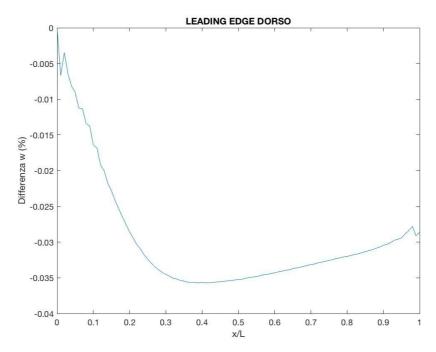


Figura 3.10: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del dorso (analisi preliminare)

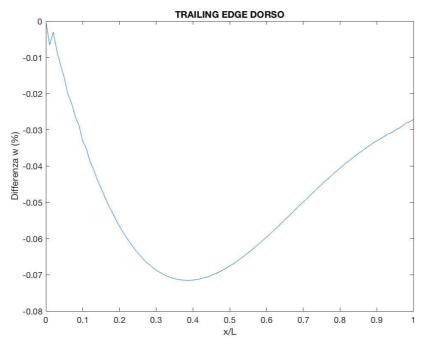


Figura 3.11: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del dorso (analisi preliminare)

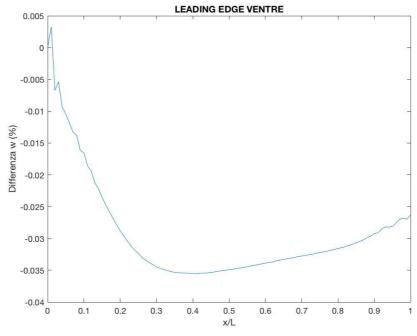


Figura 3.12: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del ventre (analisi preliminare)

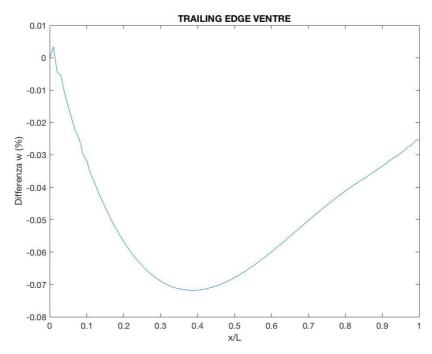


Figura 3.13: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del ventre (analisi preliminare)

#### 3.3 Andamento delle deformazioni

Inserire però un numero così elevato di rosette non è possibile, se si pensa di effettuare in futuro una prova sperimentale sullo stesso cassone. Quindi l'obiettivo di questo capitolo è capire il numero necessario di sensori affinché si abbia un errore accettabile e la posizione ottimale degli stessi. Per far ciò, si è andato a valutare l'andamento delle deformazioni lungo l'apertura alare per ogni linea di elementi, al fine di avere delle prime informazioni per poter decidere dove andare a posizionare i sensori. Nella parte del dorso e ventre si hanno 26 linee di elementi dal leading edge al trailing edge, mentre sui longheroni si hanno 8 linee andando dal ventre al dorso del cassone:

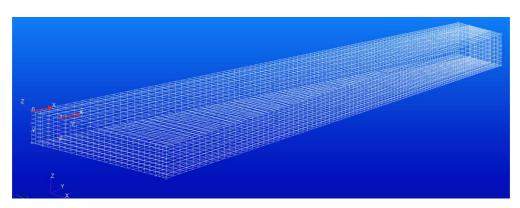


Figura 3.14: L'orientamento dell'asse x dei vari sistemi di riferimento materiali è fatto in modo tale da correre lungo l'apertura alare (un esempio per il longherone anteriore, a sinistra, e per alcuni elementi del dorso, a destra)

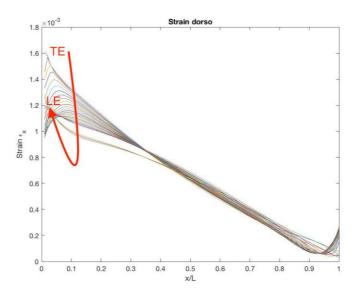


Figura 3.16: Andamento delle deformazioni lungo l'asse x del rispettivo sistema di riferimento materiale delle linee di elementi sul dorso del cassone (dal trailing edge al leading edge)

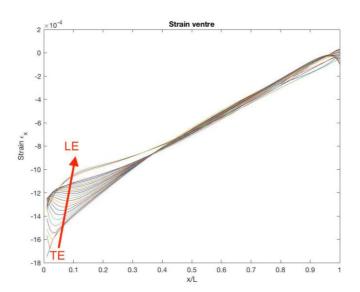


Figura 3.17: Andamento delle deformazioni lungo l'asse x del rispettivo sistema di riferimento materiale delle linee di elementi sul ventre del cassone (dal trailing edge al leading edge)

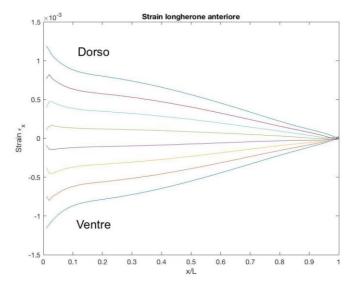


Figura 3.18: Andamento delle deformazioni lungo l'asse x del sistema di riferimento materiale delle linee di elementi sul longherone anteriore (al leading edge)

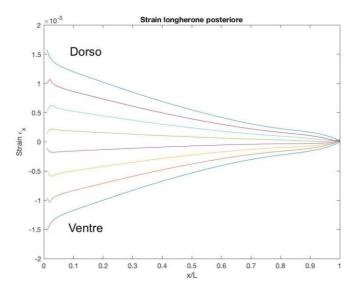


Figura 3.19: Andamento delle deformazioni lungo l'asse x del sistema di riferimento materiale delle linee di elementi sul longherone posteriore (al trailing edge)

### 3.4 Ottimizzazione del numero e posizione dei sensori

Dopo aver effettuato diverse prove con sensori monoassiali e rosette, si è pensato di utilizzare 6 sensing line con sensori monoassiali  $\varepsilon_{xx}$  nella direzione x dei rispettivi sistemi di coordinate materiali (Figura 3.20), con 100 sensori lungo ogni sensing line, a simulare la presenza di una fibra ottica.

Si è deciso di procedere per tentativi, andando ogni volta a provare una configurazione diversa delle 6 sensing line, utilizzando come linea guida le informazioni sulle deformazioni appena ricavate.

La prima configurazione (Prova 1) è quella con 3 sensing line sul dorso e sul ventre, rispettivamente lungo le linee dei 4°,15° e 23° elementi a partire dal leading edge. Con questa configurazione si è cercato di sensorizzare in maniera uniforme il dorso e il ventre del cassone:

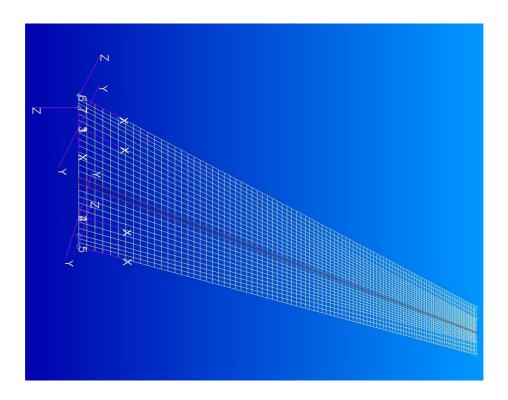


Figura 3.20: Posizione della sensing line sul dorso nella linea dei 15° elementi a partire dal leading edge (in arancione)

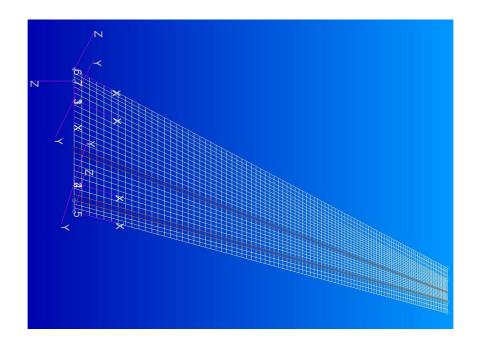


Figura 3.21: Posizione delle sensing line sul dorso nella linea dei 15° elementi e 23° elementi a partire dal leading edge

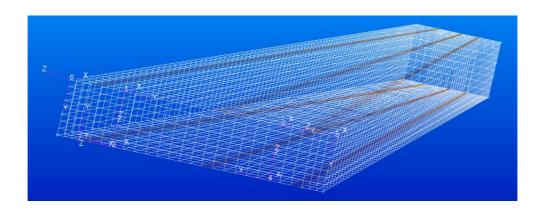


Figura 3.22: Configurazione completa dei sensori sulle linee dei 4°,15° e 23° elementi a partire dal leading edge su dorso e ventre (Prova 1)

Nella Prova 2, si sono posizionate 4 sensing line sul dorso e sul ventre (2° e 6° linea a partire dal trailing edge), mentre le restanti due linee sono state posizionate sul longherone anteriore nelle zone più vicine al dorso e al ventre, dove le deformazioni sono maggiori a causa della flessione del cassone:

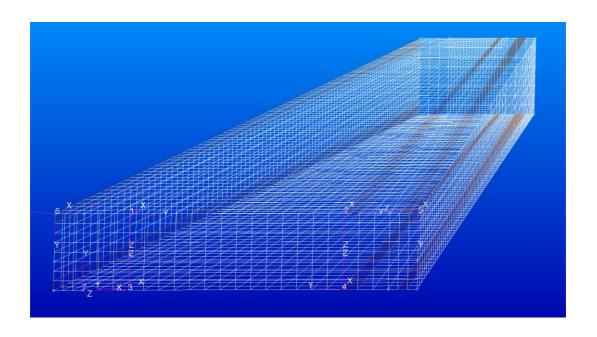


Figura 3.23: Configurazione dei sensori nella Prova 2

In seguito, si è voluta provare una terza configurazione con le 4 sensing line sul dorso e sul ventre nella stessa posizione della configurazione precedente e le restanti due linee sul longherone posteriore, dove le deformazioni risultano essere maggiori rispetto al longherone anteriore, sempre sulle due linee più vicine al dorso e al ventre:

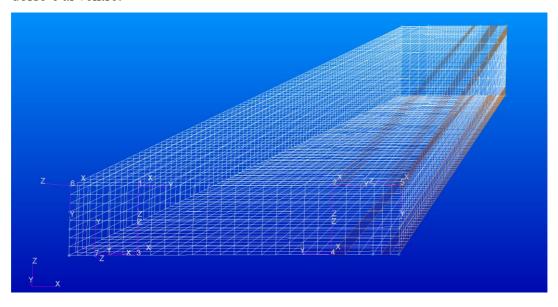


Figura 3.24: Configurazione dei sensori nella Prova 3

Nella quarta configurazione di prova, due linee di sensori vengono poste sul longherone posteriore, dove le deformazioni sono maggiori rispetto al longherone anteriore, mentre le 4 sensing line su dorso e ventre, questa volta sono poste vicino al leading edge (4° e 15° linea di elementi):

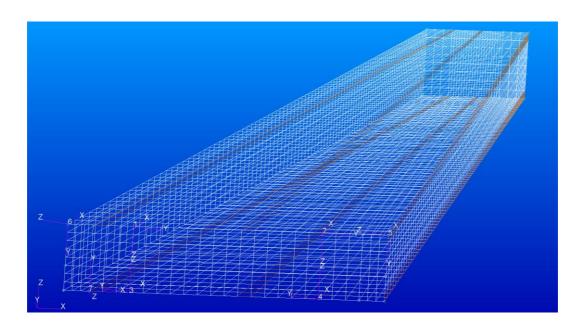


Figura 3.25: Configurazione dei sensori nella Prova 4

Di seguito si riporta un riassunto dei risultati delle varie prove svolte finora:

	$Errore(w_{max})$	$e_{RMS}(w)$
Prova 1	7.1024 %	5.2622 %
Prova 2	5.8527 %	3.8963 %
Prova 3	6.5138 %	5.3960 %
Prova 4	6.0530 %	4.6441 %

Tabella 3.1: Risultati delle prime quattro configurazioni

Nella Prova 1, si nota come la posizione dei sensori provochi degli errori considerevoli. Ciò è probabilmente dovuto all'aver posizionato 4 delle 6 linee in una zona in cui le deformazioni sono modeste e solo 2 linee al trailing edge dove le deformazioni sono più elevate.

Nella Prova 3 si ottengono dei risultati peggiori rispetto alla Prova 2, anche se sono stati posti dei sensori sul longherone posteriore dove le deformazioni sono maggiori rispetto al longherone anteriore. Questo probabilmente è causato dall'aver posizionato un gran numero di sensori in una regione molto ristretta del cassone, in questo caso il trailing edge, lasciando completamente non sensorizzata la zona del leading edge.

Nella Prova 4, gli errori diminuiscono leggermente rispetto alla Prova 3, ma sono comunque maggiori di quelli ottenuti nella configurazione con sensori sul longherone anteriore (Prova 2). Questo ci conferma la necessità di dover porre le sensing line a una certa distanza fra di loro e non localizzate in una singola zona. Questo permette di poter cogliere non solo la freccia dovuta alla flessione, ma anche quella dovuta alla torsione del cassone, che fa ruotare le varie sezioni lungo l'apertura.

Adesso si vuole provare una configurazione con 4 sensing line sui longheroni anteriore e posteriore (sempre vicino al dorso e al ventre dove le deformazioni sono maggiori) e 2 sensing line su dorso e ventre.

Per far ciò, si analizzeranno i vari casi che si ottengono spostando queste ultime 2 linee di sensori verso il trailing edge o il leading edge, andando a valutare le variazioni di errore, mantenendo fisse le 4 sensing line sul longherone anteriore e posteriore, come in Figura 3.26. In questo modo, è possibile capire dove è più conveniente porre le 2 sensing line del dorso e del ventre.

Nella prima configurazione (Prova 5) si utilizzano 2 sensing line, una sul dorso (4° linea di elementi a partire dal leading edge) e una sul ventre (4° linea di elementi a partire dal leading edge) e 4 sensing line sul longherone anteriore e posteriore.

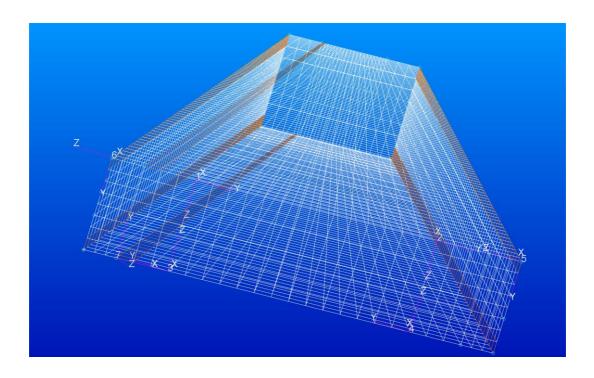


Figura 3.26: Configurazione dei sensori nella Prova 5

Di seguito si riporta un riassunto dei risultati delle varie prove:

	$Errore(w_{max})$	$e_{RMS}(w)$
Prova 5 (D4-V4)	4.8884 %	3.3524 %
Prova 6 (D4-V15)	4.8937 %	3.3513 %
Prova 7 (D4-V23)	4.675 %	3.2363 %
Prova 8 (D15-V23)	4.6836%	3.2369 %
Prova 9 (D15-V15)	4.9 %	3.3497 %
Prova 10 (D15-V4)	4.8930 %	3.3488 %
Prova 11 (D23-V4)	4.7089 %	3.2567 %
Prova 12 (D23-V15)	4.7180%	3.2598 %
Prova 13 (D23-V23)	4.5082 %	3.1508 %

Tabella 3.2: "D"=DORSO "V"=VENTRE, il numero indica la linea di elementi (a partire dal leading edge) lungo la quale sono stati posizionati i sensori

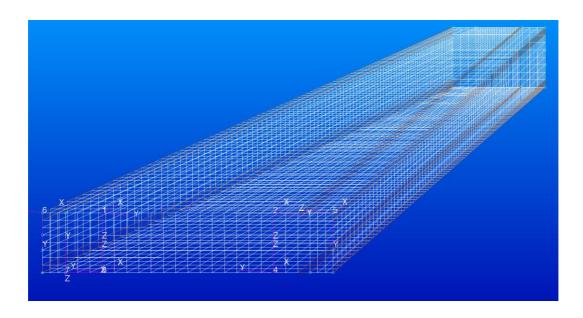


Figura 3.27: Configurazione delle sensing line che fornisce gli errori minimi (Prova 13)

È evidente come la configurazione che fornisce gli errori minimi risulti essere quella della Prova 13, con le due sensing line del dorso e del ventre sulla linea dei 23° elementi (la linea più vicina al trailing edge, prima di interessare la zona degli angolari). Infatti, è proprio al trailing edge che si hanno le maggiori deformazioni assiali sul dorso e sul ventre, come si era visto dall'andamento delle deformazioni. Si sono scartate le due zone di sovrapposizione del dorso e ventre con gli angolari, che hanno delle deformazioni maggiori essendo ancor più vicine al trailing edge, in quanto producono errori elevati, probabilmente a causa dell'aumento di spessore del materiale.

Nel seguito, si va a diagrammare l'andamento della differenza percentuale della freccia w lungo il leading edge e trailing edge del cassone nella parte dorsale e ventrale, per le prove più significative. I grafici ottenuti per tutte le altre prove sono inseriti in Appendice.

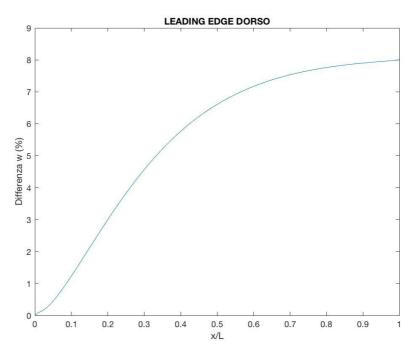


Figura 3.28: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del dorso (Prova 1)

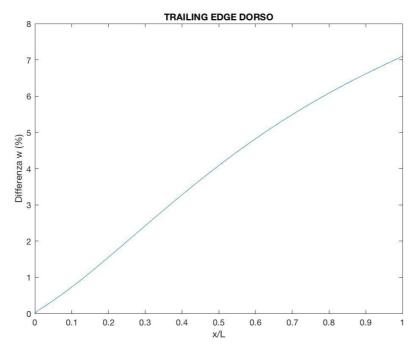


Figura 3.29: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del dorso (Prova 1)

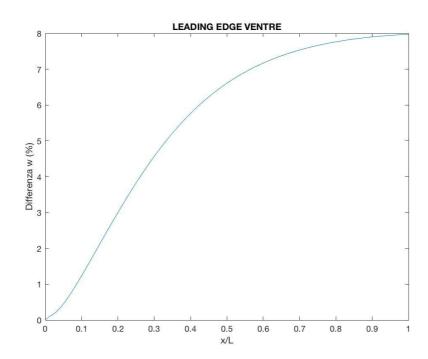


Figura 3.30: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del ventre (Prova 1)

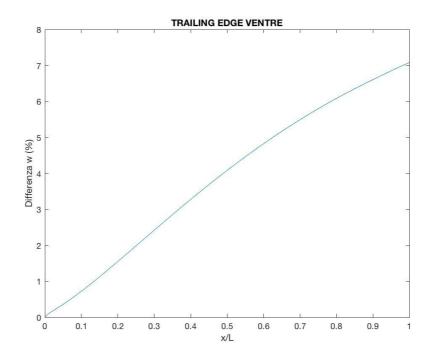


Figura 3.31: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del ventre (Prova 1)

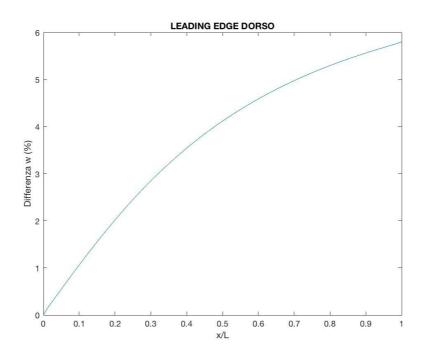


Figura 3.32: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del dorso (Prova 2)

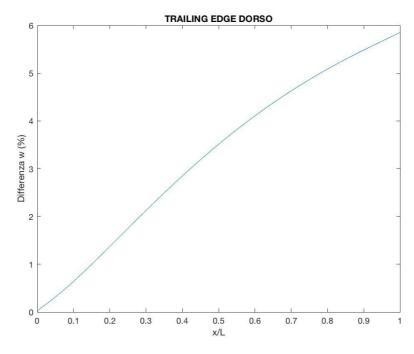


Figura 3.33: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del dorso (Prova 2)

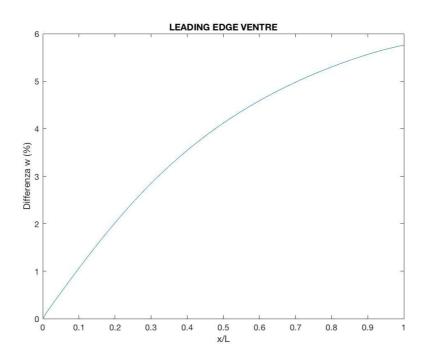


Figura 3.34: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del ventre (Prova 2)

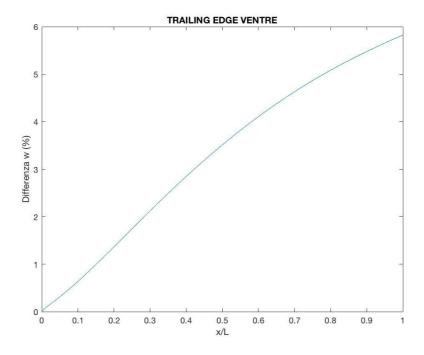


Figura 3.35: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del ventre (Prova 2)

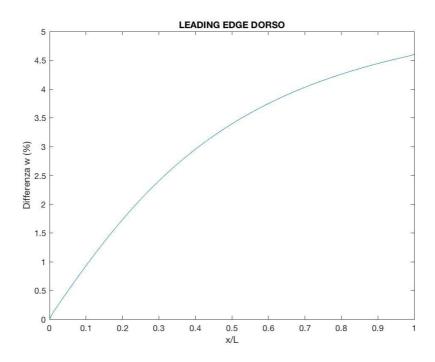


Figura 3.36: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del dorso (Prova 13)

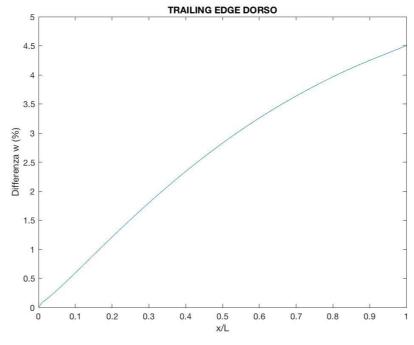


Figura 3.37: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del dorso (Prova 13)

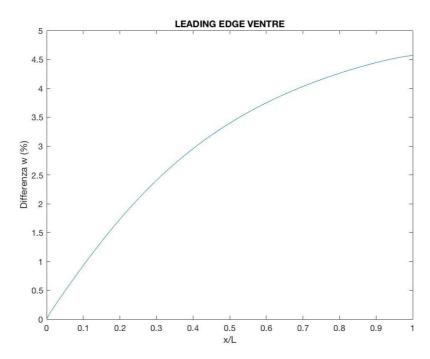


Figura 3.38: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del ventre (Prova 13)

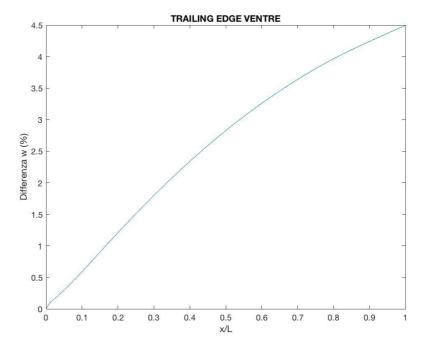


Figura 3.39: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del ventre (Prova 13)

## Capitolo 4

### Confronto tra mesh inverse

A questo punto, sarebbe utile valutare se utilizzando una mesh inversa meno fitta, gli errori possano scendere. Se si utilizza una mesh inversa molto fitta, da un lato è possibile inserire una quantità di sensori elevata lungo una sensing line, dall'altro però questo comporta una quantità di elementi senza sensori in percentuale molto alta rispetto agli elementi sensorizzati.

Con una mesh inversa meno fitta, si riduce la percentuale di elementi senza sensori e probabilmente l'accuratezza dell'analisi inversa potrebbe aumentare. Questo però, va fatto mantenendo per la mesh inversa rada un numero di sensori pari alla mesh inversa fitta e una posizione dei sensori il più possibile vicina alla posizione nella mesh inversa fitta, al fine di poter fare un confronto e capire se il ragionamento fatto prima risulti valido.

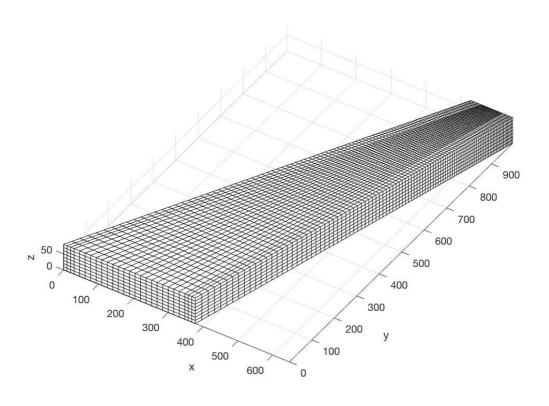


Figura 4.1: Mesh inversa fitta identica alla mesh descritta nel Capitolo 2

In questo modo, si utilizza la mesh diretta fitta per ricavare le deformazioni (da utilizzare nell'analisi inversa) e gli spostamenti dei nodi con cui calcolare gli errori. Questo perché il modello diretto è un'approssimazione del modello vero, pertanto deve essere il più accurato possibile ed avere quindi molti elementi.

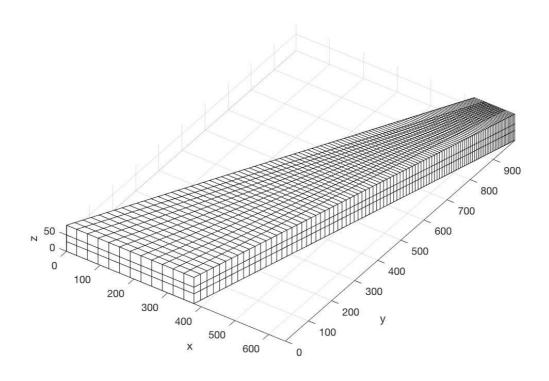


Figura 4.2: Mesh inversa rada

Il primo passo è stato creare una mesh meno fitta (Figura 4.2), conservando però 100 elementi lungo ogni sensing line, per quanto detto prima. Per mantenere la mesh la più uniforme possibile su tutto il cassone, si sono unite le 3 file di elementi degli angolari in un'unica fila, si sono poi unite le due file di elementi sui longheroni (tra gli angolari) in un'unica fila e infine si sono unite le 20 file di elementi su dorso e ventre (tra gli angolari) a formare 10 file di elementi.

In generale, i centroidi degli elementi nella mesh inversa rada non coincideranno con quelli della mesh inversa fitta. Quindi, per poter utilizzare le deformazioni ottenute con la mesh diretta fitta in una generica mesh inversa rada, sarà necessario interpolare le deformazioni nei centroidi degli elementi nella mesh fitta. Dall'interpolazione è possibile ricavare le deformazioni in ogni punto che si desidera e quindi anche nei centroidi degli elementi nella mesh rada inversa.

Dato che le sensing line giacciono su delle superfici piane (dorso, ventre, longherone anteriore e longherone posteriore) si è pensato di fare un'interpolazione in due dimensioni.

I longheroni però giacciono su due piani distinti, entrambi non paralleli al piano y-z del sistema di riferimento globale (Coord 0, in Figura 4.4). Per poter quindi calcolare la posizione dei centroidi degli elementi, è necessario posizionarsi in un sistema di riferimento locale del longherone, per poter svincolare la posizione del centroide dalla dimensione normale (z) al piano x-y del longherone.

Si costruisce una matrice  $[Glo] = [3 \times N]$ , nella quale ad ogni colonna corrisponde un nodo appartenente al piano del longherone con la mesh fitta, mentre ciascuna delle 3 righe contiene rispettivamente le coordinate x, y, z nel sistema di riferimento globale della struttura.

Bisogna creare poi i versori contenuti nella matrice di rotazione, necessaria per passare dal sistema di riferimento globale a quello locale sul longherone.

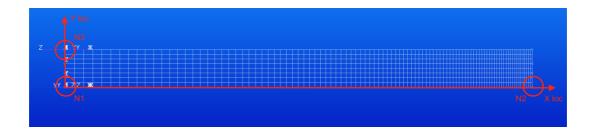


Figura 4.3: Sistema di riferimento locale del longherone con mesh fitta

Presi 3 nodi sul longherone (N1, N2, N3, in Figura 4.3), ognuno forma un vettore con le sue tre componenti x, y e z. I versori lungo l'asse X locale e Y locale saranno:

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{N2} - \overrightarrow{N1}}{\left| \left| \overrightarrow{N2} - \overrightarrow{N1} \right| \right|}$$

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{N3} - \overrightarrow{N1}}{\left| \left| \overrightarrow{N3} - \overrightarrow{N1} \right| \right|}$$
(55)

Il terzo versore sarà ottenuto come prodotto vettoriale dei due precedenti versori:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} \tag{56}$$

La matrice di rotazione sarà:

$$[Rot] = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} = [3 \times 3]$$
 (57)

Per passare dal sistema di riferimento globale a quello locale del longherone, sarà sufficiente operare il prodotto matriciale:

$$[Loc] = [Rot][Glo] = [3 \times N]$$
(58)

con *N* colonne, ciascuna corrispondente ad un nodo della mesh fitta del longherone e tre righe corrispondenti rispettivamente alle coordinate x, y e z nel sistema di riferimento locale del longherone.

Ora è possibile calcolare la posizione dei centroidi degli elementi nella mesh fitta nel sistema di riferimento locale appena creato. Per far ciò, è necessario per ogni elemento del longherone cercare i rispettivi nodi nella matrice di Connectivity [Cne] della mesh fitta.

Noti i nodi  $(n_1,n_2,n_3n_4)$  dell'elemento, si passa alle coordinate x e y di ciascun nodo nella matrice [Loc] appena creata (nel sistema di riferimento locale non si ha dipendenza dalla coordinata z, per quanto detto prima). Le coordinate del centroide dell'elemento  $(x_C,y_C)$  saranno la media delle coordinate dei nodi dell'elemento stesso:

$$x_C = \frac{(x_{n1} + x_{n2} + x_{n3} + x_{n4})}{4}$$

$$y_C = \frac{(y_{n1} + y_{n2} + y_{n3} + y_{n4})}{4}$$
(59)

Andrà fatto analogamente per l'altro longherone e successivamente si ripeterà il calcolo della posizione dei centroidi degli elementi della mesh rada nel sistema di riferimento locale dei due longheroni.

A questo punto, si può fare l'interpolazione utilizzando la function Matlab "interp2", la quale interpola le deformazioni nei centroidi degli elementi della mesh fitta (epsilonxx) su una griglia rettangolare nelle due dimensioni x e y:

epsilonxx interp=interp2(x,y,epsilonxx,x rada,y rada,'spline');

Sarà necessario indicare le coordinate dei centroidi nella mesh fitta in due vettori strettamente monotoni (x, y) e le coordinate dei centroidi degli elementi nella mesh inversa (x\_rada, y\_rada) dei quali si vogliono trovare le deformazioni. Sarà necessario inoltre indicare il tipo di interpolazione che si vuole effettuare: se non si seleziona nulla, l'interpolazione sarà fatta con un metodo lineare.

Se i centroidi degli elementi nella mesh inversa ( $x_{rada}, y_{rada}$ ) non sono contenuti all'interno della griglia dei centroidi della mesh diretta (x, y), con l'interpolazione lineare la function restituisce un NaN. Se si vogliono estrapolare dei valori al di fuori della griglia (x, y), è necessario utilizzare altri metodi, ad esempio 'spline', che fornisce un'interpolazione cubica nelle due direzioni x e y. Ovviamente, l'interpolazione andrà ripetuta sia sulla faccia superiore ( $z_2$ ) che inferiore ( $z_1$ ) degli elementi.

Si può passare ora all'interpolazione sul dorso e sul ventre. Qui non sarà necessario effettuare la rotazione del sistema di riferimento come per i longheroni, in quanto dorso e ventre sono entrambi paralleli al piano x-y del sistema di riferimento globale (Coord 0). Si ripete il calcolo delle coordinate dei centroidi degli elementi di dorso e ventre per la mesh fitta e rada. Qui però gli elementi non sono posti in una griglia rettangolare (Figura 4.4) come sui longheroni, pertanto i vettori delle coordinate dei centroidi degli elementi nella mesh fitta (x, y) non saranno strettamente monotoni. Questo porta a non poter utilizzare "interp2", ma si utilizzerà la function "griddata" che interpola in due direzioni dei valori sparsi, non necessariamente monotoni (si sono utilizzati gli elementi delle 20 linee comprese tra gli angolari, su dorso e ventre):

```
epsilonxx interp=griddata(x,y,epsilonxx,x rada,y rada,'cubic');
```

Se non si specifica il metodo di interpolazione, la function utilizza un'interpolazione lineare. In questo caso, è stata fatta un'interpolazione cubica ('cubic') in quanto fornisce un risultato migliore rispetto a quella lineare.

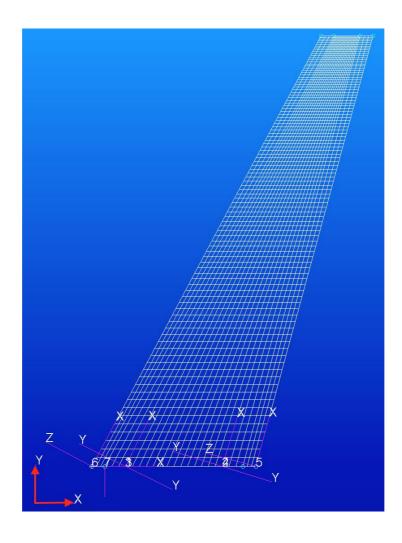


Figura 4.4: Elementi del dorso nel sistema di riferimento globale Coord0 (evidenziato in rosso)

Per poter fare un confronto, come già detto, è necessario non solo mantenere un numero di sensori uguale sulle due mesh, ma anche di preservare il più possibile la posizione degli stessi, nel passaggio da mesh fitta a mesh rada. Questo per i longheroni è immediato, in quanto per come è stata costruita la mesh inversa, la posizione dei centroidi degli elementi della mesh inversa coincide con la posizione dei centroidi degli elementi centrali degli angolari nella mesh fitta.

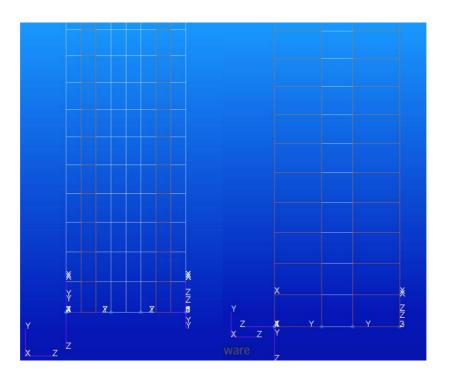


Figura 4.5: Mesh fitta a sinistra, mesh rada a destra (longherone)

Questo significa anche che per questa particolare mesh inversa, l'interpolazione sui longheroni è stata evitata, in quanto si dispone già delle deformazioni nei centroidi degli elementi della mesh inversa. Nel caso in cui si utilizzi una mesh inversa diversa, in cui la posizione dei centroidi degli elementi non coincide, è necessario seguire il processo di interpolazione descritto precedentemente. Per quanto riguarda gli elementi del dorso e del ventre, l'interpolazione non può essere evitata in quanto i centroidi degli elementi nella mesh rada non corrispondono ai centroidi di altri elementi nella mesh fitta (Figura 4.6):

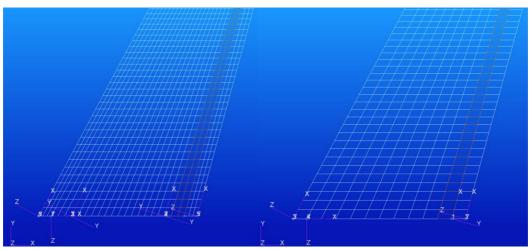


Figura 4.6: Mesh fitta a sinistra (in evidenza la linea 22 e 23 a partire dal leading edge), mesh rada a destra

L'errore minimo, in caso di mesh inversa fitta, si otteneva con i sensori posti sull'ultima linea di elementi prima degli angolari (23° linea a partire dal leading edge), ma i corrispettivi centroidi dell'ultima linea nella mesh inversa rada sono spostati a sinistra rispetto alla mesh fitta (Figura 4.6). Pertanto, è necessario decidere se posizionare i sensori nella mesh inversa fitta, ai fini del confronto, sulla 22° o 23° linea. Si è deciso, per essere conservativi, di porre i sensori sulla 22° linea, dove le deformazioni sono inferiori (Figura 4.7) e quindi il risultato nel caso di mesh fitta sarebbe peggiore di quanto non lo sia in realtà. Questo perché dallo studio delle deformazioni svolto nel Capitolo 3, si è visto che conviene posizionare i sensori il più possibile vicino al trailing edge, dove le deformazioni sono maggiori.

Si procede in maniera analoga sul ventre del cassone:

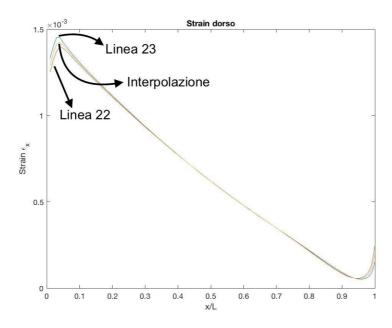


Figura 4.7: Deformazioni sulla linea 22° e 23° del dorso nella mesh fitta, comparata con l'interpolazione nei centroidi della mesh rada

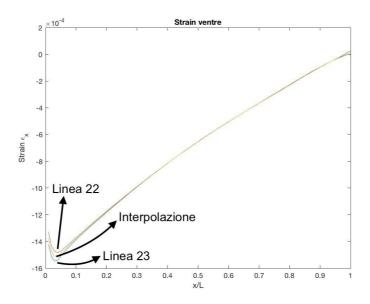


Figura 4.8: Deformazioni sulla linea 22° e 23° del ventre nella mesh fitta, comparata con l'interpolazione nei centroidi della mesh rada

La mesh rada contiene ovviamente un numero di nodi inferiore rispetto alla mesh fitta, quindi non vi è più una corrispondenza nella numerazione tra i nodi della mesh diretta fitta e i nodi della mesh inversa rada. Pertanto è necessario associare all'indice di ogni nodo della mesh rada il rispettivo indice del nodo corrispondente nella mesh fitta, per poter poi calcolare l'errore sugli spostamenti. Quindi, si è utilizzato uno script Matlab che confronta per differenza le coordinate dei nodi della mesh diretta e della mesh rada. Quando viene trovato un nodo della mesh rada con le stesse coordinate di un nodo della mesh fitta, a meno di una certa tolleranza numerica, significa che i due nodi corrispondono. A questo punto, l'indice del nodo della mesh fitta viene salvato nel vettore Match nella posizione i-esima, dove i è l'indice del nodo corrispondente nella mesh rada.

```
tolleranza=10e-3;
for i=[1:3074] %i=indice nodi mesh rada
u=abs(Pnn1(1,:)-Pnn2(1,i));%coordinata x
idx=find(u<tolleranza);
v=abs(Pnn1(2,:)-Pnn2(2,i));%coordinata y
idy=find(v<tolleranza);
w=abs(Pnn1(3,:)-Pnn2(3,i));%coordinata z
idz=find(w<tolleranza);
intersezione1=intersect(idx,idy);
intersezione2=intersect(intersezione1,idz);
Match(i)=intersezione2;
end</pre>
```

dove:

- $[Pnn1] = [3 \times N]$  è la matrice di coordinate dei nodi nella mesh diretta fitta, nella quale alla i-esima colonna corrisponde l'i-esimo nodo (N = numero di nodi diretti), mentre ciascuna delle 3 righe contiene rispettivamente le coordinate x, y, z nel sistema di riferimento globale della struttura;
- $[Pnn2] = [3 \times n]$  analogamente è la matrice di coordinate dei nodi nella mesh inversa rada, con n il numero totale di nodi inversi;
- $\{Match\} = [1 \ x \ n]$  è il vettore contenente all'i-esima colonna, dove i è l'indice del nodo della mesh inversa rada, l'indice del corrispondente nodo della mesh diretta fitta.

Nella Prova 14, si è utilizzata la mesh inversa fitta con 6 sensing line nella configurazione appena descritta (quattro linee sui longheroni come in Figura 4.5 e due linee rispettivamente su dorso e ventre sulla 22° linea a partire dal leading edge).

Per la Prova 15, si è utilizzata la mesh inversa rada con 6 sensing line nella configurazione descritta in Figura 4.5 e 4.6.

	$Errore(w_{max})$	$e_{RMS}(w)$
Prova 14	5.5475 %	3.9241 %
Prova 15	9.8070 %	6.7963 %

Tabella 4.1: Risultati ottenuti utilizzando la configurazione con 6 sensing line

Pur essendoci posti in una condizione cautelativa per il posizionamento dei sensori in caso di mesh inversa fitta (Prova 14), i risultati nel caso di mesh inversa rada con 6 sensing line (Prova 15) sono peggiori rispetto al caso precedente.

La configurazione con 6 sensing line però non è detto che sia la migliore soluzione per la mesh inversa rada: essendo presenti meno elementi, è probabile che sia necessario un numero inferiore di sensing line. Si è deciso quindi di provare la configurazione con le sole 4 sensing line sui longheroni (che sono quelle che danno il contributo maggiore) nella posizione descritta in Figura 4.5 per la mesh inversa rada (Prova 16).

Nella Prova 17, si analizza la configurazione con le sole 4 sensing line sui longheroni nella posizione descritta in Figura 4.5 per la mesh inversa fitta.

Infine, nella Prova 18 si sono volute utilizzare le 4 sensing line sui longheroni con mesh inversa fitta, ma nella posizione ottimale, sulla 1° e 8° linea di elementi, ottenuta nella Prova 13 (Figura 4.9, sinistra):

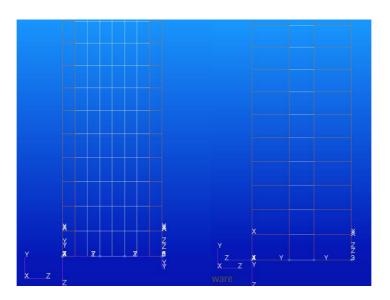


Figura 4.9: Mesh fitta a sinistra con sensori nella posizione ottimale, mesh rada a destra

	$Errore(w_{max})$	$e_{RMS}(w)$
Prova 16	5.6134 %	3.8486 %
Prova 17	6.8091 %	4.6715 %
Prova 18	4.9176 %	3.3978 %

Tabella 4.2: Risultati ottenuti utilizzando la configurazione con 4 sensing line

Si nota che utilizzando 4 sensing line sui longheroni, nel caso di mesh inversa rada (Prova 16) si ottengono dei risultati migliori rispetto al caso con mesh inversa fitta (Prova 17), a parità di numero e posizione dei sensori. Però è anche vero che nel caso di mesh inversa fitta, i sensori possano essere posti nella posizione ottimale (Prova 18), ottenendo comunque un risultato migliore rispetto al caso di mesh rada (Prova 16), nella quale queste posizioni in cui le deformazioni sono maggiori non sono disponibili a causa della presenza di meno elementi. Si conclude quindi che la mesh inversa fitta, sia nel caso di configurazione con 6 sensing line, sia con 4 sensing line, fornisce dei risultati migliori rispetto alla mesh rada, a parità di numero di sensori.

Di seguito si riportano i grafici dell'andamento della differenza percentuale della freccia w lungo il leading edge e trailing edge per le prove svolte utilizzando la mesh inversa rada e fitta nelle due configurazioni con 6 sensing line e 4 sensing line.

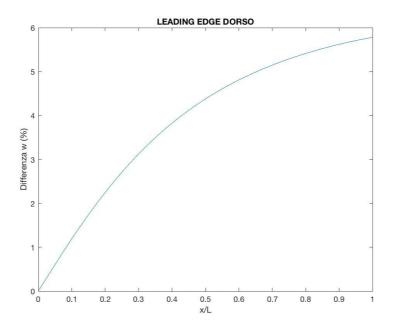


Figura 4.10: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del dorso (Prova 14)

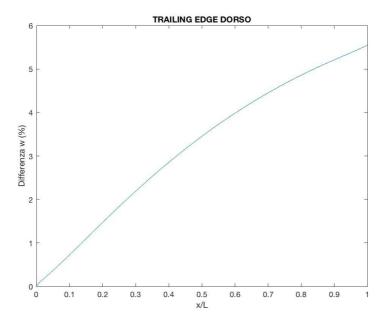


Figura 4.11: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del dorso (Prova 14)

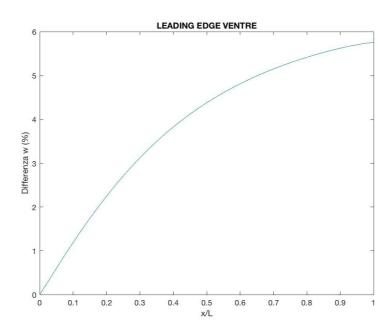


Figura 4.12: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del ventre (Prova 14)

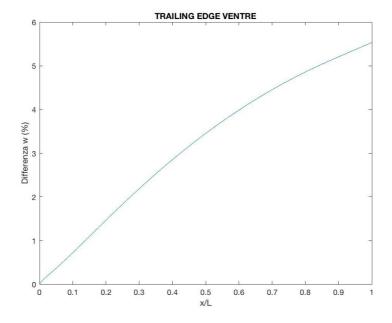


Figura 4.13: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del ventre (Prova 14)

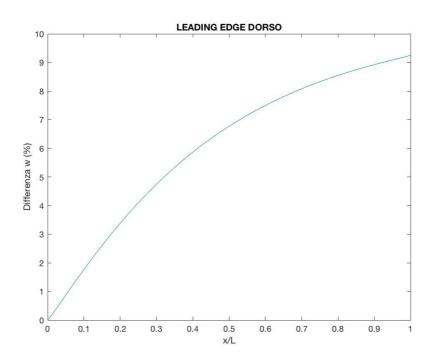


Figura 4.14: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del dorso (Prova 15)

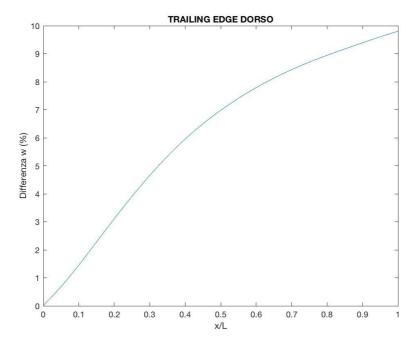


Figura 4.15: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del dorso (Prova 15)

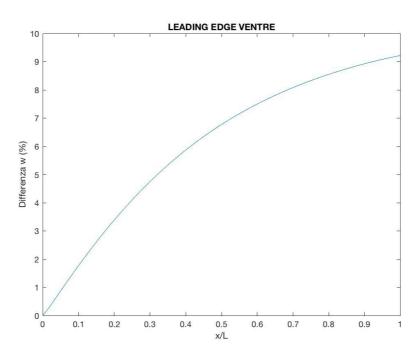


Figura 4.16: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del ventre (Prova 15)

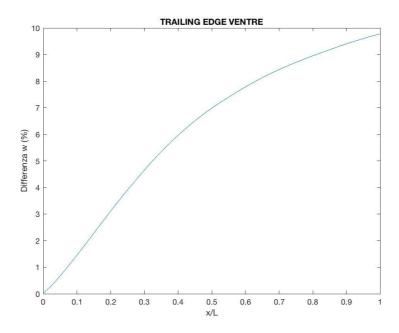


Figura 4.17: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del ventre (Prova 15)

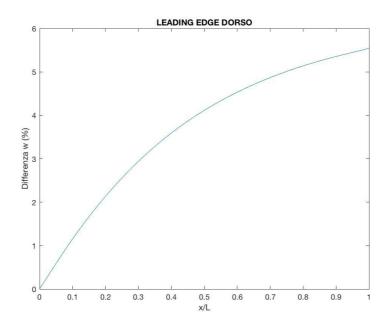


Figura 4.18: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del dorso (Prova 16)

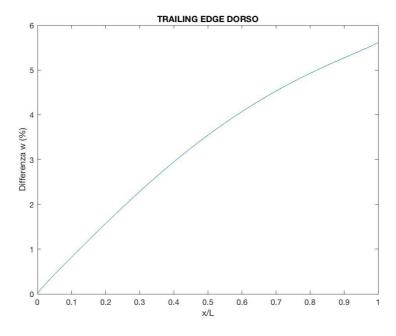


Figura 4.19: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del dorso (Prova 16)

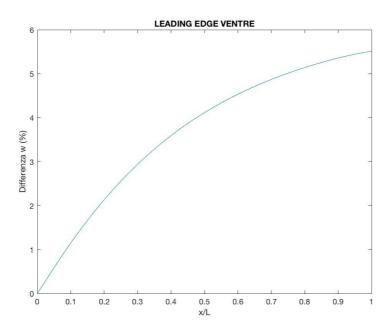


Figura 4.20: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del ventre (Prova 16)

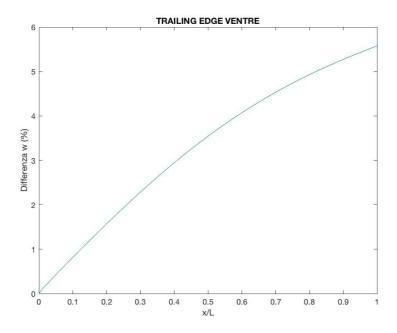


Figura 4.21: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del ventre (Prova 16)

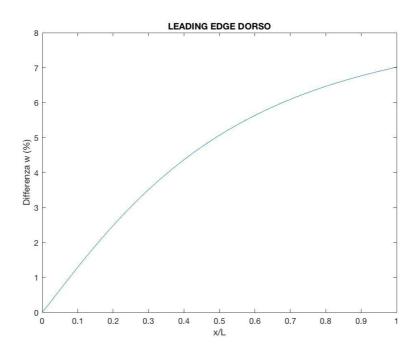


Figura 4.22: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del dorso (Prova 17)

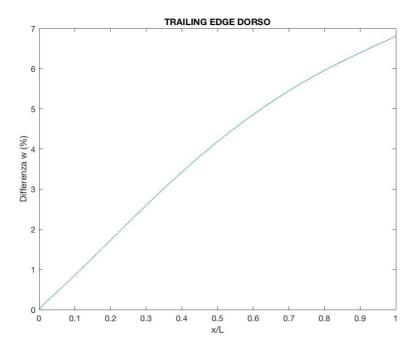


Figura 4.23: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del dorso (Prova 17)

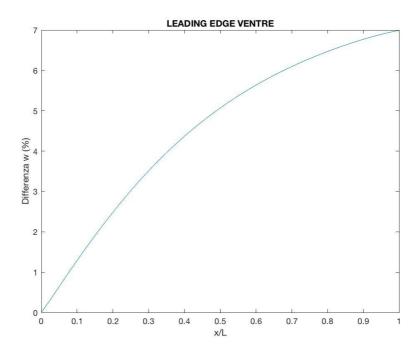


Figura 4.24: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del ventre (Prova 17)

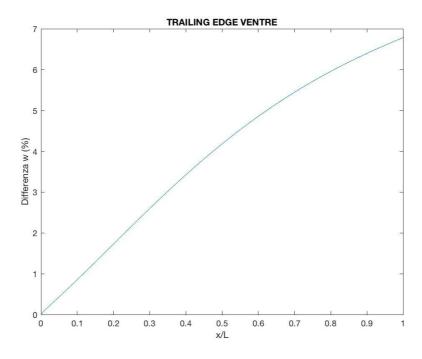


Figura 4.25: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del ventre (Prova 17)

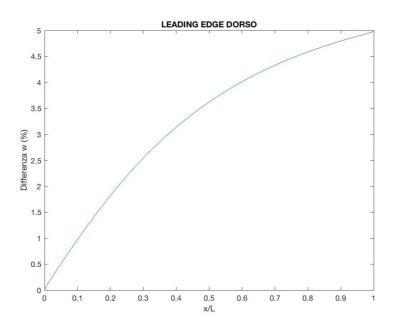


Figura 4.26: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del dorso (Prova 18)

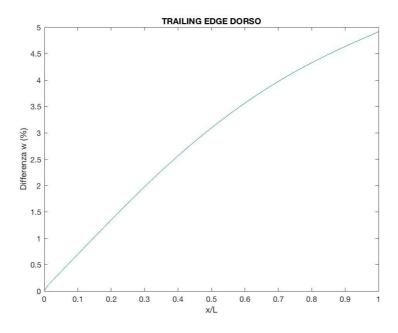


Figura 4.27: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del dorso (Prova 18)

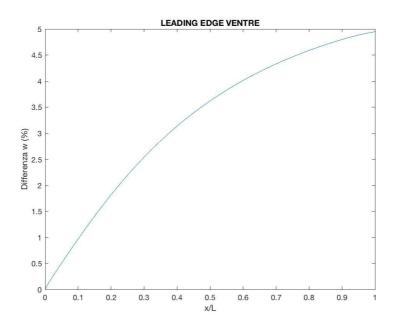


Figura 4.28: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del ventre (Prova 18)

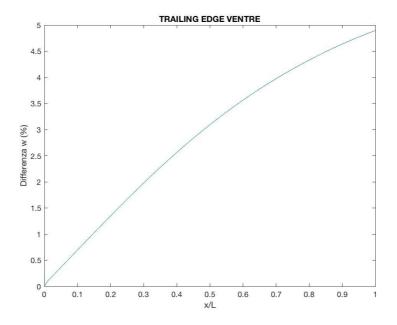


Figura 4.29: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del ventre (Prova 18)

### Capitolo 5

#### Conclusioni

Il presente lavoro di tesi si pone l'obiettivo di confrontare il campo di spostamenti di un cassone alare ottenuto da un'analisi FEM lineare con quello ricostruito attraverso un metodo inverso, l'inverse FEM o metodo degli elementi finiti inversi, al fine di valutare la validità di quest'ultimo. Nella prima parte, viene fatta una breve introduzione su alcuni metodi di shape sensing (iFEM, metodo modale e metodo di Ko) e come questi possano essere applicati nel monitoraggio di strutture aerospaziali. A seguire viene illustrato il principio di funzionamento di varie tipologie di sensori per la misura delle deformazioni (estensimetri elettrici e fibre ottiche FBG/RBS). Dopo aver ripercorso il processo di dimensionamento del cassone alare, svolto in una tesi precedente, è stata svolta con il codice commerciale Nastran l'analisi FEM del cassone, incastrato alla radice e con un carico di prova di 1 kg all'estremità, per ottenere gli spostamenti e l'andamento delle deformazioni su tutta la struttura. Quest'analisi sostituisce di fatto una prova sperimentale sul modello vero in cui verrebbero misurate le deformazioni e gli spostamenti. Le deformazioni misurate dai sensori fungono da input per l'iFEM che ricostruisce il campo di spostamenti dell'intera struttura attraverso un codice Matlab, mentre gli spostamenti ottenuti con il FEM servono solo per calcolare l'errore tra l'analisi FEM, presa come riferimento, e l'analisi inversa. In seguito è stato svolto un processo di ottimizzazione del numero e della posizione dei sensori di deformazione sul cassone, andando a provare varie configurazioni degli stessi sulla base dello studio degli andamenti delle deformazioni. E' stato poi fatto uno studio sull'effetto che ha la modellizzazione del cassone con una mesh contenente più o meno elementi sull'accuratezza dell'iFEM.

Dopo diverse prove si è arrivati ad una specifica configurazione ottimale con 6 linee di sensori (100 sensori per ognuna) disposte in modo tale da correre lungo l'apertura alare andando dalla radice all'estremità del cassone. In generale si è osservato che è conveniente porre le linee di sensori nelle regioni in cui le deformazioni sono maggiori. E' inoltre conveniente distanziarle il più possibile tra loro per poter cogliere non solo la flessione, ma anche l'effetto torsionale del cassone. In questo modo il metodo inverso fornisce, rispetto ai risultati ottenuti dall'analisi FEM, un errore medio sugli spostamenti del 3% circa, risultando quindi sufficientemente preciso a ricostruire la deformata del cassone.

L'analisi FEM diretta, per ricavare le deformazioni e gli spostamenti presi come riferimento, è stata effettuata con una mesh del cassone con molti elementi (7216

elementi), che chiameremo mesh fitta. Questo perché, come detto prima, il modello diretto è un'approssimazione del modello vero, pertanto deve essere il più accurato possibile ed avere quindi molti elementi. Dopo diverse prove si è osservata un'accuratezza maggiore del metodo inverso utilizzando una mesh più rada (3074 elementi) piuttosto che la mesh fitta utilizzata nell'analisi diretta. Questo perché la mesh rada ha ovviamente meno elementi rispetto alla mesh fitta e quindi a parità di numero di sensori utilizzati, nel caso di mesh rada si riduce la percentuale di elementi senza sensori, con un effetto benefico sull'accuratezza. Questo ragionamento è valido a parità di numero e posizione dei sensori sulle due mesh. D'altra parte però, nel caso di mesh fitta si possono porre le linee di sensori in posizioni in cui le deformazioni sono maggiori, che come si è detto forniscono un risultato migliore. Queste posizioni non sono disponibili nella mesh rada in quanto dispone di meno elementi e quindi in ultima analisi la mesh fitta risulta migliore rispetto alla mesh rada in termini di accuratezza del metodo inverso.

Lo sviluppo futuro di questo lavoro consiste in una prova sperimentale che verrà svolta nel laboratorio AERMEC del Politecnico di Torino su un modello del cassone in esame. In questo test le deformazioni verranno misurate con un sistema a fibra ottica RBS. Si potrà in questo modo fare un confronto tra l'accuratezza del metodo inverso osservata in questa tesi utilizzando in input le deformazioni numeriche, con quella che si avrebbe utilizzando le deformazioni misurate sperimentalmente.

#### Bibliografia

- [1] **Bird, G., Christensen, M., Lutz, D.,Scandura, P. A.** Use of integrated vehicle health management in the field of commercial aviation. In Proceedings of the 1st International Forum on System Health Engineering and Management in Aerospace NASA ISHEM Forum 2005, Napa, California, USA, 7–10 November 2005, paper no.12.
- [2] O. Benedettini, T.S. Baines, H.W. Lightfoot and R.M. Greenough. State-of-the-art in integrated vehicle health management.
- [3] M. Gherlone, P. Cerracchio, M. Mattone. Shape sensing methods: Review and experimental comparison on a wing-shaped plate.
- [4] **A.Tessler**, Structural Analysis Methods for Structural Health Management of Future Aerospace Vehicles, 2007. NASA/TM-2007–214871.
- [5] **G. Frulla**. Estensimetria del corso "Sperimentazione su strutture aerospaziali".
- [6] **Zhen Ma, Xiyuan Chen**. Fiber Bragg Gratings Sensors for Aircraft Wing Shape Measurement: Recent Applications and Technical Analysis.
- [7] Lae-Hyong Kang, Dae-Kwan Kim, Jae-Hung Han. Estimation of dynamic structural displacements using fiber bragg grating strains sensors.
- [8] Yahei Koyamada, Mutsumi Imahama, Kenya Kubota, and Kazuo Hogari. Fiber-optic distributed strain and temperature sensing with very high measurand resolution over long range using coherent OTDR.
- [9] M. Imahama, Y. Koyamada, and K. Hogari, "Restorability of Rayleigh backscatter traces measured by coherent OTDR with precisely fre- quency-controlled light source," IEICE Trans. Commun., vol. E91-B, pp. 1243–1246, Apr. 2008.

[10] Relatore: Prof. Marco Gherlone. Candidato: Christian Shikh Farshi. Tesi di laurea magistrale "Dimensionamento di un cassone alare per prove statiche di laboratorio" (Politecnico di Torino).

## **Appendice**

In questa sezione sono contenuti per completezza i grafici degli andamenti della differenza percentuale della freccia w lungo il leading edge e trailing edge del cassone nella parte dorsale e ventrale per tutte le prove meno significative del Paragrafo 3.4.

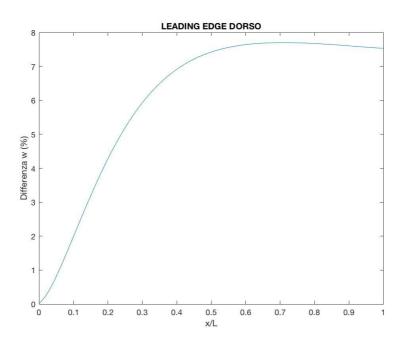


Figura A.1: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del dorso (Prova 3)

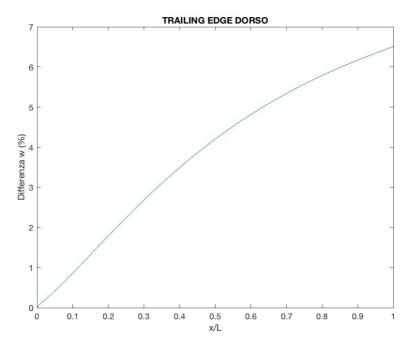


Figura A.2: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del dorso (Prova 3)

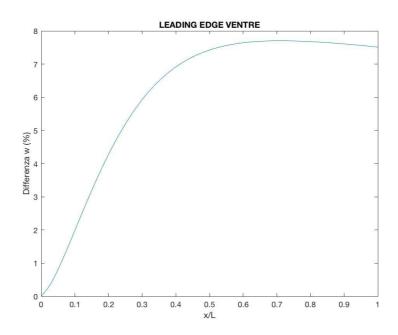


Figura A.3: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del ventre (Prova 3)

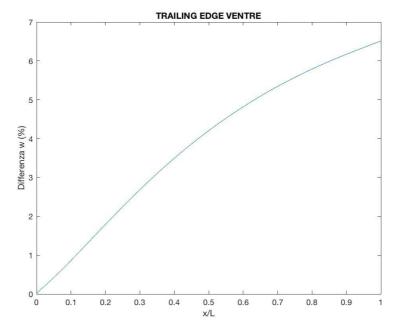


Figura A.4: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del ventre (Prova 3)

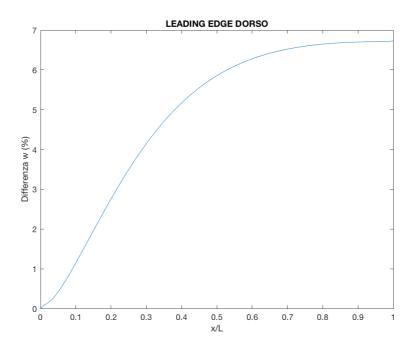


Figura A.5: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del dorso (Prova 4)

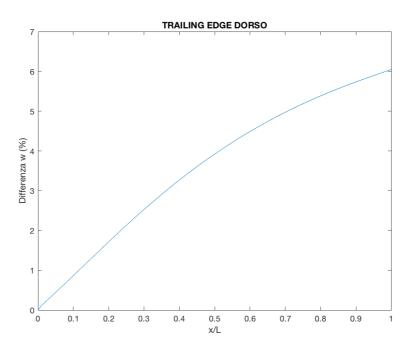


Figura A.6: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del dorso (Prova 4)

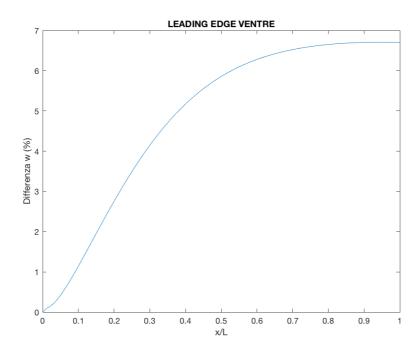


Figura A.7: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del ventre (Prova 4)

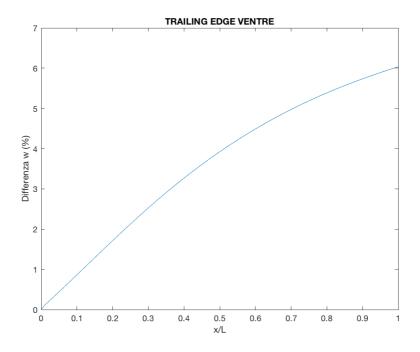


Figura A.8: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del ventre (Prova 4)

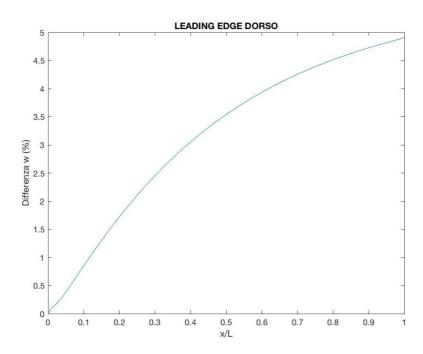


Figura A.9: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del dorso (Prova 5)

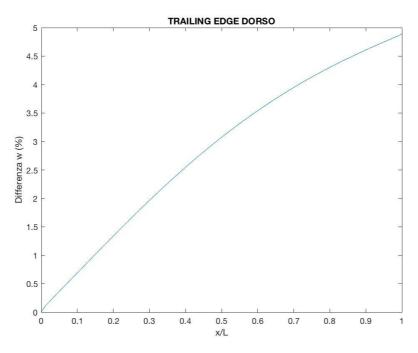


Figura A.10: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del dorso (Prova 5)

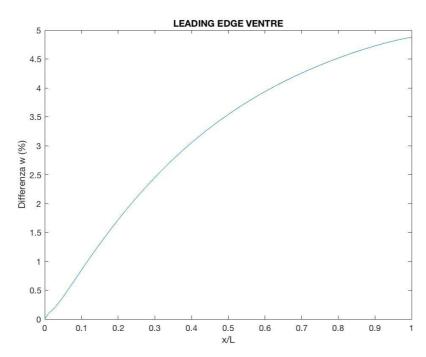


Figura A.11: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del ventre (Prova 5)

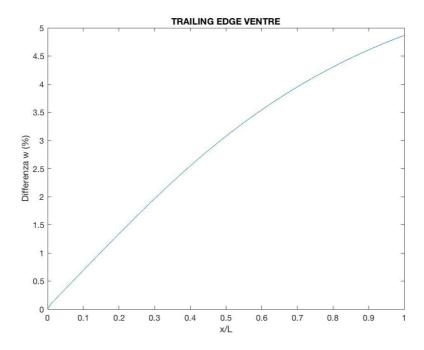


Figura A.12: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del ventre (Prova 5)

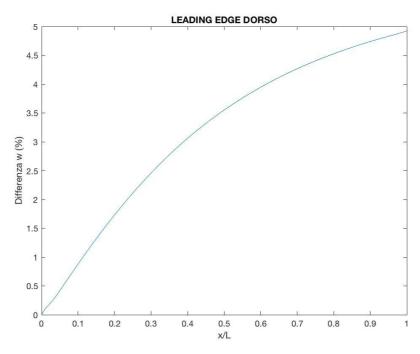


Figura A.13: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del dorso (Prova 6)

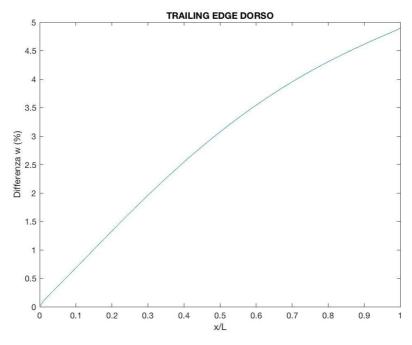


Figura A.14: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del dorso (Prova 6)

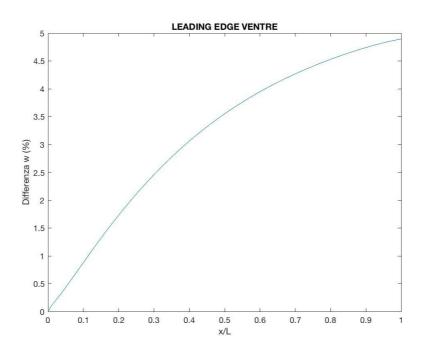


Figura A.15: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del ventre (Prova 6)

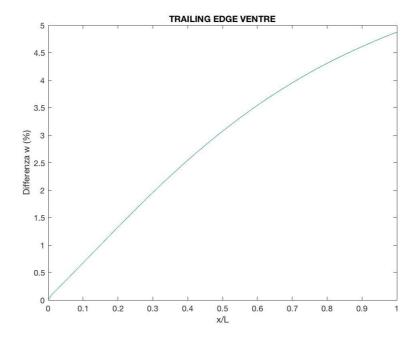


Figura A.16: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del ventre (Prova 6)

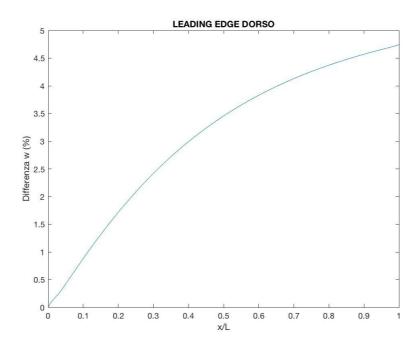


Figura A.17: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del dorso (Prova 7)

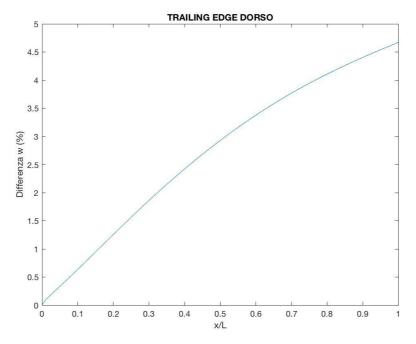


Figura A.18: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del dorso (Prova 7)

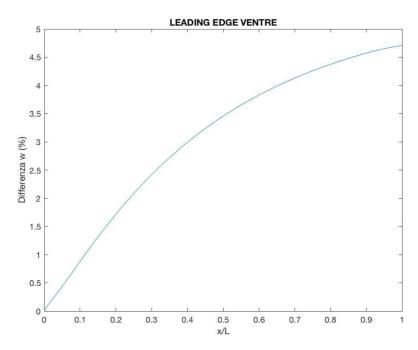


Figura A.19: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del ventre (Prova 7)

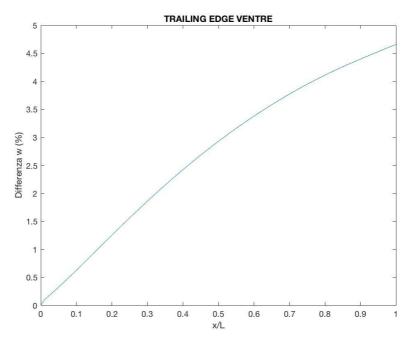


Figura A.20: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del ventre (Prova 7)

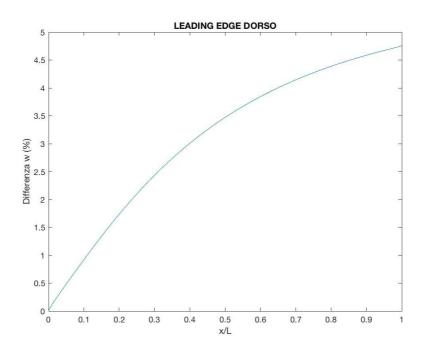


Figura A.21: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del dorso (Prova 8)

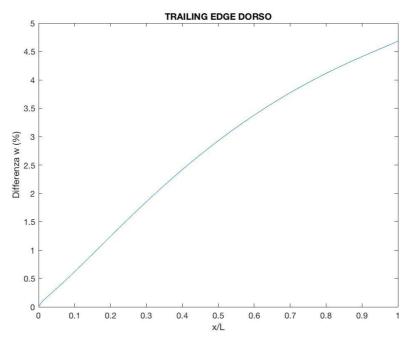


Figura A.22: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del dorso (Prova 8)

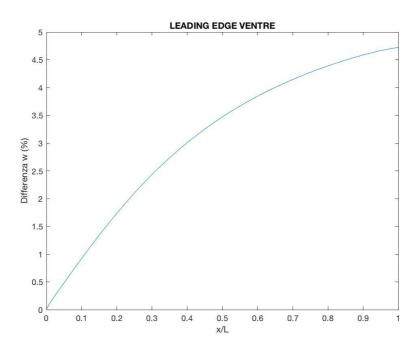


Figura A.23: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del ventre (Prova 8)

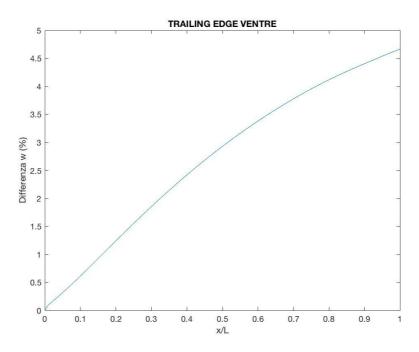


Figura A.24: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del ventre (Prova 8)

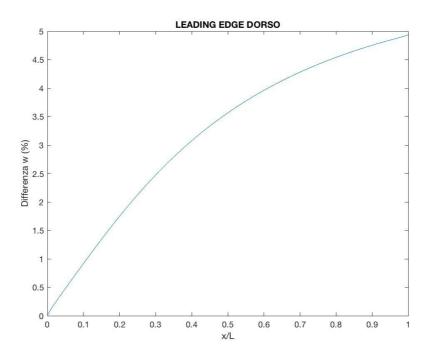


Figura A.25: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del dorso (Prova 9)

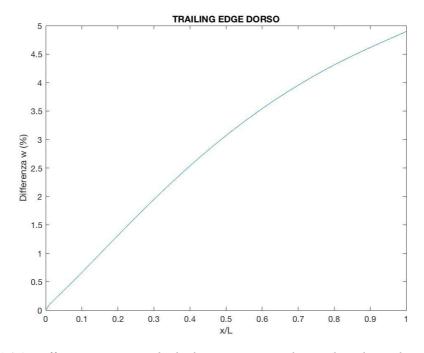


Figura A.26: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del dorso (Prova 9)

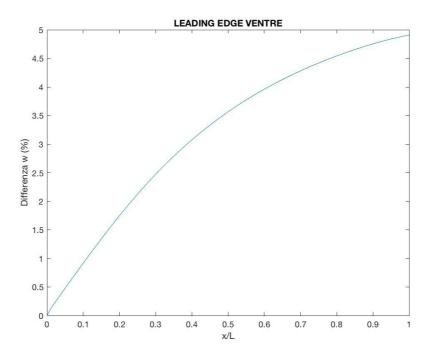


Figura A.27: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del ventre (Prova 9)

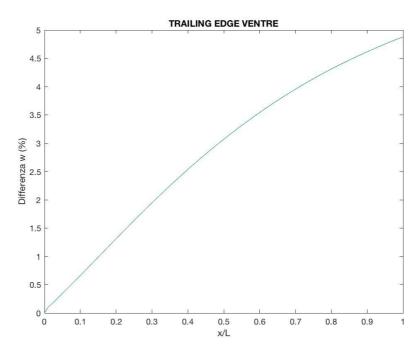


Figura A.28: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del ventre (Prova 9)

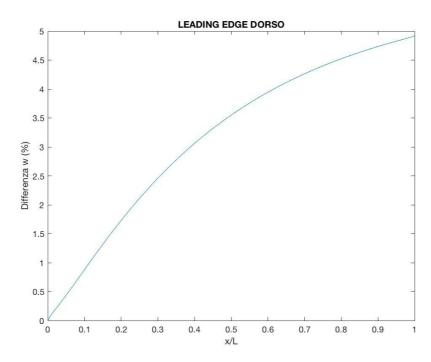


Figura A.29: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del dorso (Prova 10)

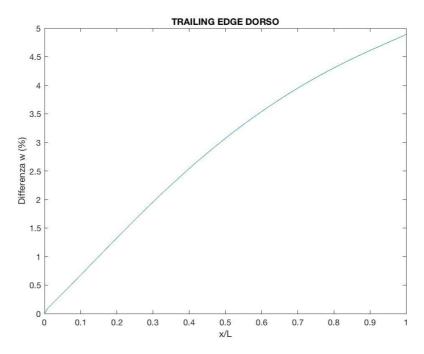


Figura A.30: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del dorso (Prova 10)

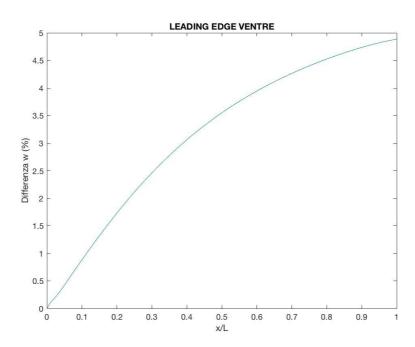


Figura A.31: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del ventre (Prova 10)

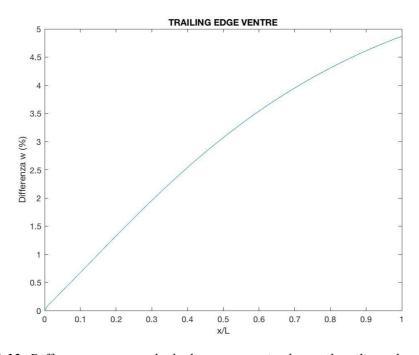


Figura A.32: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del ventre (Prova 10)

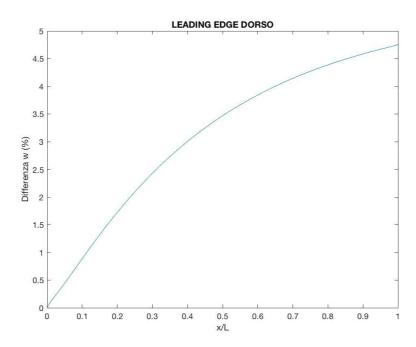


Figura A.33: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del dorso (Prova 11)

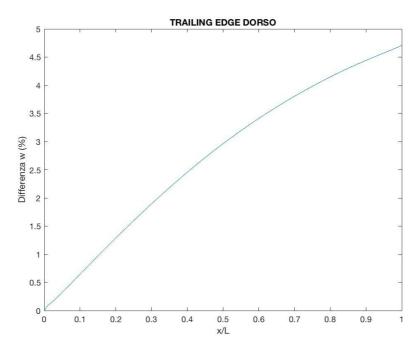


Figura A.34: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del dorso (Prova 11)

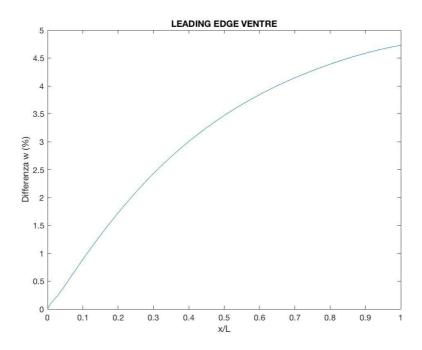


Figura A.35: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del ventre (Prova 11)

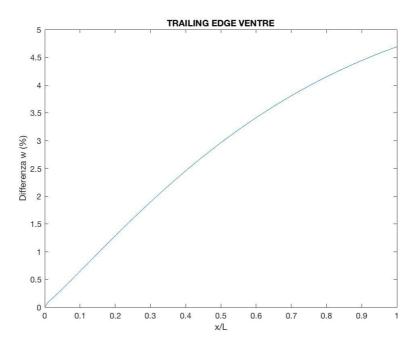


Figura A.36: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del ventre (Prova 11)

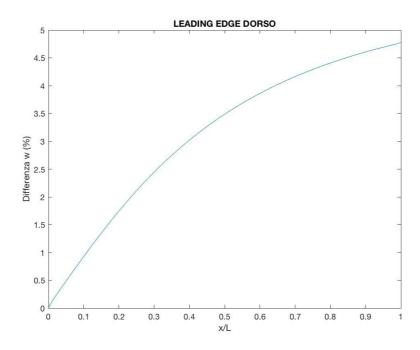


Figura A.37: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del dorso (Prova 12)

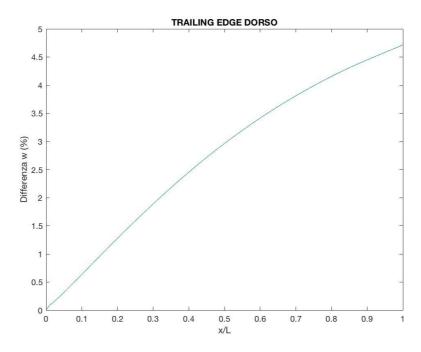


Figura A.38: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del dorso (Prova 12)

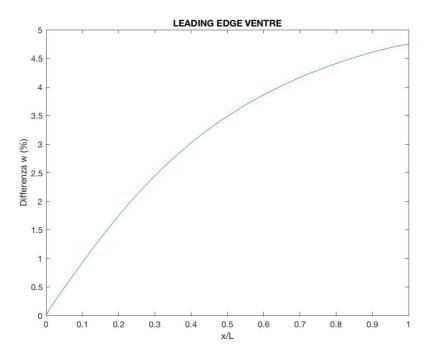


Figura A.39: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il leading edge del ventre (Prova 12)

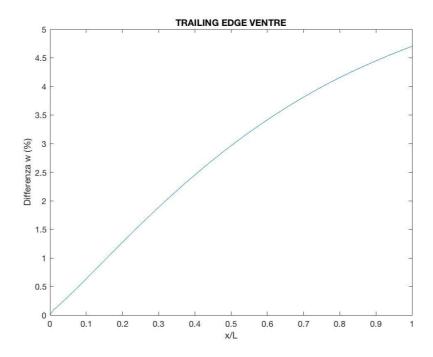


Figura A.40: Differenza percentuale degli spostamenti w lungo il trailing edge del ventre (Prova 12)

# Ringraziamenti