POLITECNICO DI TORINO

Collegio di Ingegneria Meccanica, Aerospaziale, dell'Autoveicolo e della Produzione

Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

Valutazione Double Lunar Gravity Assist

Relatori

prof. Lorenzo Casalino

Candidato

Antonio Rotondi

Aprile 2020

Indice

Lista delle figure

Lista delle tabelle

1 Introduzione

Per le missioni interplanetarie, un flyby lunare comporta dei benefici poiché può essere utilizzato per incrementare significativamente l'energia iperbolica di fuga ($C3$) a scapito di un modesto incremento del tempo di volo. In questo modo, fissato il pianeta target della missione e a parità di massa al lancio, è possibile diminuire la massa di propellente ed aumentare la massa utile. Questa strategia è stata usata in passato sia per missioni con basse $C3$ (STEREO) e sia per missioni con grandi $C3$ (ISEE-3, Nozomi).

L'esplorazione del sistema solare necessita di valori relativamente grandi di energia di fuga. Se si considera un'evasione diretta, la massa di evasione prevista per un dato lanciatore è una funzione decrescente dell'energia di fuga. Tuttavia, esiste un trade-off ottimale poiché la velocità di fuga può essere indirizzata per ridurre il consumo di propellente nella fase di volo eliocentrico. Quando la fase eliocentrica prevede un sistema di propulsione con un alto impulso specifico rispetto al lanciatore, ad esempio utilizzando un propulsore elettrico, la trasferta interplanetaria verso un oggetto vicino alla Terra richiede un valore di $C3$ di pochi $\frac{km^2}{s^2}$. La manovra del gravity assist lunare può essere utilizzata per avere un incremento gratuito del $C3$ di escape, la valutazione del valore di $C3$ nel caso di doppio flyby della Luna è l'argomento trattato in questo lavoro di tesi. Il double lunar gravity assist è stato studiato negli articoli [1], [2] e [3].

In prima analisi, per lo studio delle trasferte interplanetarie si utilizza il metodo delle coniche raccordate (patched-conic approximation) e il problema dei due corpi è utilizzato per descrivere il moto del satellite considerato come corpo puntiforme.

L'analisi è basata sul metodo delle coniche raccordate in cui si trascura la dimensione della sfera d'influenza della Luna.

La manovra è divisa in tre fasi geocentriche: la fase iniziale corrisponde alla traiettoria che parte dal perigeo (imposto dal lanciatore) e termina in corrispondenza della Luna; la fase intermedia considera il trasferimento Luna-Luna (ossia la fase tra i due flyby) ed infine, la fase finale, è costituita dalla porzione di traiettoria che parte dalla Luna e termina al limite della sfera d'influenza terreste. Il lunar gravity assist è modellato come una rotazione istantanea della velocità relativa all'intersezione tra l'orbita del satellite e l'orbita lunare.

Nel primo capitolo è trattato il moto di un corpo immerso in un campo gravitazionale generato da un corpo centrale, problema dei due corpi, andando ad analizzare le proprietà del campo gravitazionale, le equazioni del moto e l'andamento della traiettoria.

In seguito, è descritto il problema dei tre corpi che studia il campo di moto di un satellite in un sistema doppio, prendendo come esempio il caso Terra-Luna. Per studiare il problema dei tre corpi vengono fatte delle semplificazioni: si assume che la massa del satellite è trascurabile rispetto alla massa degli altri corpi e che le orbite sono circolari per cui si studia il problema dei tre corpi circolare ristretto. Si utilizza il metodo di Jacobi e le superfici a velocità nulla per determinare le zone dello spazio accessibili al satellite.

Successivamente vengono trattate le perturbazioni subite dal satellite durante il suo moto, che in un'orbita intorno alla Terra sono dovute essenzialmente alla non sfericità della Terra, a effetti aerodinamici dovuti all'interazione tra il satellite e l'atmosfera, a perturbazioni dovute all'attrazione gravitazionale dovuta ad altri corpi, ad esempio Luna e Sole, ed infine a perturbazioni dovuti alla pressione solare e a effetti elettromagnetici. Per determinare il moto di un satellite perturbato vengono utilizzati dei metodi numerici che vanno ad integrare le equazioni del moto, metodi delle perturbazioni speciali, oppure si cercano delle espressioni analitiche che analizzino una determinata perturbazione, metodi delle perturbazioni generali.

Segue una trattazione sulle manovre orbitali che sono utilizzate per corregge le perturbazioni orbitali, per modificare l'orbita e passare ad esempio dall'orbita di parcheggio a quella di missione oppure per evadere da un corpo celeste. Per ultimo è trattata la manovra di flyby intorno a un pianeta che sfrutta lo scambio del momento angolare tra pianeta e satellite per variare la direzione o il modulo del vettore velocità.

In seguito, vengono definiti i principali sistemi di riferimento utilizzati nel volo spaziale.

Successivamente sono trattate le orbite lunari facendo una rapida descrizione del sistema Terra-Luna e descrivendo le principali problematiche del volo lunare.

Successivamente si è discusso del volo interplanetario andando a descrive inizialmente il sistema solare e successivamente andando a studiare le varie fasi del viaggio interplanetario utilizzando il metodo delle coniche raccordate che permetto di dividere la traiettoria in tre fasi una prima fase planetaria in cui si considera solamente il pianeta di partenza, una seconda fase eliocentrica in cui il Sole è l'unico corpo che agisce sulla sonda e infine l'ultima fase è dovuta al pianeta di arrivo.

Vengono quindi definite le ipotesi e il modello utilizzato per simulare le orbite che collegano i due flyby e la valutazione del Lunar gravity assist. Ed infine vengono presentati i risultati descrivendo l'andamento dell'energia di fuga iperbolica al variare della direzione di fuga e della declinazione.

2 Problema dei due corpi

Il problema dei due corpi descrive l'interazione tra due corpi che si attraggono a causa dell'attrazione gravitazionale reciproca. Il moto di un corpo di massa m rispetto a un corpo di massa M può essere definito usando questo approccio.

Il problema dei due corpi è stato studiato grazie all'apporto di Keplero e Newton.

Keplero grazie ad accurate osservazioni di Tycho, un satellite di Marte, nel suo moto di rivoluzione intorno a Marte, formulò le seguenti leggi:

Prima legge:	l'orbita di ogni pianeta è ellittica, con il Sole che occupa uno dei due fuochi.
Seconda legge:	il raggio vettore che congiunge il Sole con il pianeta spazia aree uguali in tempi uguali.
Terza legge:	il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta è proporzionale al cubo della sua distanza media dal Sole.

Le leggi di Keplero descrivono solamente il moto dei pianeti, per determinare la spiegazione del moto dei pianeti sarà necessario l'intervento di Newton.

Nel primo libro dei *Principia* Newton introduce le tre leggi del moto:

Prima legge:	ogni corpo continuo rimane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme se a questo non si applica alcuna forza che ne perturbi il moto.
Seconda legge:	la variazione di quantità di moto è proporzionale alla forza impressa ed è diretta nella stessa direzione della forza.
Terza legge:	ad agni azione ne esiste una uguale e contraria.

La seconda legge può essere espressa nel seguente modo:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt} \qquad \textbf{2.1}$$

dove $\sum \vec{F}$ è il vettore risultante dalla somma delle forze applicate al corpo e $\vec{q}$ è la quantità di moto che può essere riscritta come il prodotto tra la massa e la velocità. Nel caso di massa costante la 2.1 può essere riscritta come:

$$\sum F = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\,\dot{\vec{v}} = m\ddot{\vec{r}}$$

dove $\ddot{\vec{r}}$ è il vettore accelerazione relativo al centro del sistema di riferimento inerziale, Figura 2.1.

Dopo avere enunciato le tre leggi Newton, nei *Principi*, formula la legge di gravitazione universale. Due corpi si attraggono l'un l'altro con una forza uguale e contraria proporzionale al prodotto delle masse e all'inverso del quadrato della distanza:

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{||\vec{r}_2 - \vec{r}_1||^2}\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{||\vec{r}_2 - \vec{r}_1||} = -G\frac{m_1 m_2}{||\vec{r}||^2}\frac{\vec{r}}{||\vec{r}||} \qquad \textbf{2.2}$$

dove $\vec{F}_{12}$ è la forza che agisce sulla massa m_1, $\vec{r}$ è la distanza tra i due corpi e G è la costante di gravitazione universale pari a $6.67 \cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}$, il segno meno sta ad indicare che la forza è attrattiva.

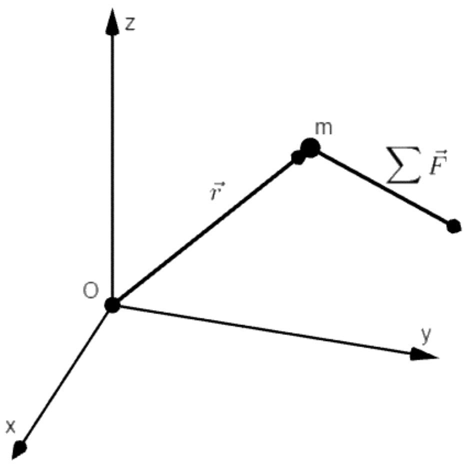

Figura 2.1: Seconda legge di Newton

Sul secondo corpo agisce una forza uguale e contraria, Figura 2.2.

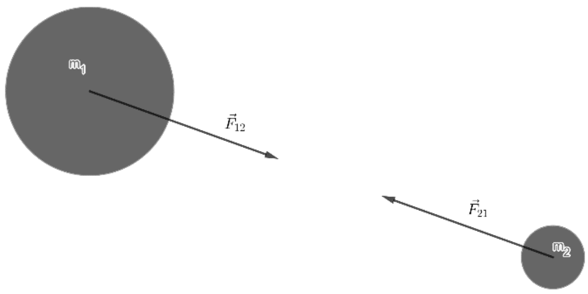

Figura 2.2: Legge di gravitazione universale

Nel paragrafo successivo si andranno a combinare la 2.1 e la 2.2 per ottenere l'equazione del moto di pianeti e satelliti.

2.1 Problema degli N-corpi

Consideriamo un sistema composto da n-corpi ($m_1, m_2, \dots m_n$) e si vuole determinare il moto del corpo i-$esimo$, Figura 2.3. Per determinare l'equazione del moto del corpo i-esimo bisogna considerare tutte le forze che agisco sul corpo, per cui si devono considerare tutte le forze dovute all'attrazione gravitazionale con gli altri n-1 corpi e le forze che agiscono sulla massa m_i. Per determinare le forze gravitazionali si utilizza la legge di gravitazione universale di Newton, mentre le forze non gravitazionali sono dovute ad esempio alla propulsione, alla resistenza aerodinamica dovuta all'interazione con l'atmosfera, alla radiazione solare, ecc. Tutte queste forze dovranno essere tenute in considerazione per determinare l'equazione del moto.

La legge di gravitazione universale può essere applicata solo a corpi sferici o la cui massa è distribuita in un guscio sferico. Per i pianeti, non è sempre valido, ad esempio la Terra è schiacciata ai poli mentre è più larga all'equatore, ed invece la Luna è ellittica sia ai poli che all'equatore, per cui ci saranno degli effetti che andranno a variare i parametri orbitali, come ad esempio la regressione della linea dei nodi o la rotazione della linea degli apsidi.

Consideriamo un sistema di riferimento inerziale XYZ in cui la posizione degli n corpi è nota r_1, r_2, ... r_n, Figura 2.3.

Applicando la legge di gravitazione universale di Newton, la forza che il corpo j esercita sul corpo i è pari a:

$$F_{g_{ij}} = -G\frac{m_i m_j}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^2}\frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|} = -G\frac{m_i m_j}{\|\vec{r}_{ij}\|^3}\vec{r}_{ij}$$

dove $\vec{r}_{ij}$ è la distanza tra il corpo i e il corpo j.

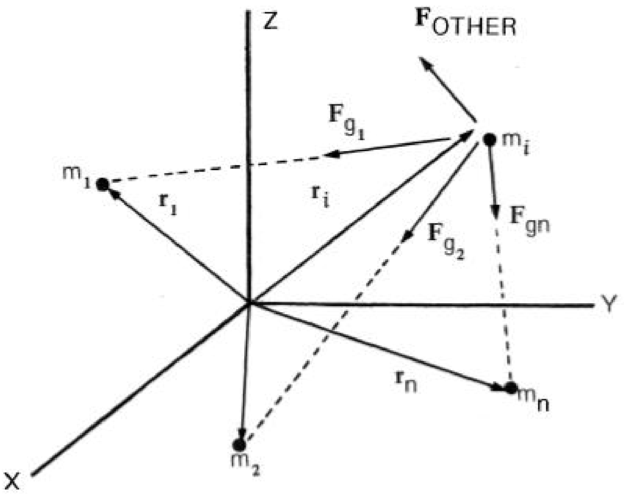

Figura 2.3: Problema degli ***n-corpi***

La risultante delle forze è data dalla sommatoria delle forze dovute dagli n corpi per cui:

$$\vec{F}_{g_i} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} -G\frac{m_i m_j}{\|\vec{r}_{ij}\|^3}\vec{r}_{ij} = -Gm_i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{m_j}{\|\vec{r}_{ij}\|^3}\vec{r}_{ij}$$

Sommando le altre forze che agiscono sul corpo i si ottiene la forza totale:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{g_i} + \vec{F}_{ng_i}$$

Applicando la seconda legge di Newton si ottiene:

$$\frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i) = \vec{F}_i$$

in generale considerando che la massa del corpo i varia nel tempo si ottiene:

$$\dot{m}_i\dot{\vec{r}}_i + m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i$$

dove $\dot{\vec{r}}_i$ e $\ddot{\vec{r}}_i$ sono rispettivamente la velocità e l'accelerazione del corpo i relativa al sistema XYZ ed $\dot{m}_i$ indica la variazione di massa dovuta ad esempio all'espulsione di propellente nel caso in cui si stia trattando il moto propulso oppure per altri effetti. Dividendo per la massa si ottiene:

$$\ddot{\vec{r}}_i = \frac{\vec{F}_i}{m_i} - \dot{\vec{r}}_i\frac{\dot{m}_i}{m_i} \qquad \textbf{2.3}$$

La 2.3 è un'equazione vettoriale differenziale del secondo ordine non lineare che non ha una soluzione analitica.

Assumendo che la massa del corpo rimanga costante e che agisca solo la forza gravitazionale la 2.3 diventa:

$$\ddot{\vec{r}}_i = -G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{m_j}{\left\|\vec{r}_{ij}\right\|^3}\vec{r}_{ij} \qquad \textbf{2.4}$$

assumendo che m_1 e m_2 siano rispettivamente la massa di un satellite e la massa della Terra mentre le altre masse rappresentano ad esempio il Sole, la Luna e gli altri pianeti del sistema solare. Riscrivendo la 2.4 per il corpo 1 si ottiene:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -G\frac{m_2}{\|\vec{r}_{21}\|^3}\vec{r}_{21} - G\sum_{j=3}^{n}\frac{m_j}{\left\|\vec{r}_{1j}\right\|^3}\vec{r}_{1j} \qquad \textbf{2.5}$$

mentre per il corpo 2 si ha invece:

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -G\frac{m_1}{\|\vec{r}_{12}\|^3}\vec{r}_{21} - G\sum_{j=3}^{n}\frac{m_j}{\left\|\vec{r}_{2j}\right\|^3}\vec{r}_{2j} \qquad \textbf{2.6}$$

La distanza tra il satellite e la Terra è data da:

$$\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

andando a derivare la relazione precedente si ottiene che:

$$\ddot{\vec{r}}_{12} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1$$

andando a sostituire la 2.5 e la 2.6 si ottiene:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}_{12} &= -G\frac{m_1}{\|\vec{r}_{12}\|^3}\vec{r}_{21} - G\sum_{j=3}^{n}\frac{m_j}{\left\|\vec{r}_{2j}\right\|^3}\vec{r}_{2j} - \left(-G\frac{m_2}{\|\vec{r}_{21}\|^3}\vec{r}_{21} - G\sum_{j=3}^{n}\frac{m_j}{\left\|\vec{r}_{1j}\right\|^3}\vec{r}_{1j}\right)\\ &= -G\frac{m_1+m_2}{\|\vec{r}_{12}\|^3}\vec{r}_{12} - G\sum_{j=3}^{n}m_j\left(\frac{\vec{r}_{2j}}{\left\|\vec{r}_{2j}\right\|^3} - \frac{\vec{r}_{1j}}{\left\|\vec{r}_{1j}\right\|^3}\right)\end{aligned}$$

$$\ddot{\vec{r}}_{12} = -G\frac{m_1+m_2}{\|\vec{r}_{12}\|^3}\vec{r}_{12} + \vec{a}_p \qquad \textbf{2.7}$$

dove:

$$\vec{a}_p = -G \sum_{j=3}^{n} m_j \left(\frac{\vec{r}_{2j}}{\|\vec{r}_{2j}\|^3} - \frac{\vec{r}_{1j}}{\|\vec{r}_{1j}\|^3} \right) \qquad \textbf{2.8}$$

Riscrivendo l'equazione in questa forma si ha che $\ddot{\vec{r}}_{12}$ è l'accelerazione relativa del satellite rispetto alla terra e dipende da due termine; il primo termine dipende dalla distanza tra il satellite e la Terra mentre il secondo termine tiene conto di tutti gli effetti perturbativi dovuti alla Luna, al Sole e a tutti gli altri pianeti vicini alla Terra. Nella Tabella 2.1 è riportato il modulo degli effetti perturbativi per un satellite in ordita bassa. Dalla tabella si può vedere che la forza di attrazione gravitazionale della Terra è diversi ordini di grandezza superiore rispetto all'influenza degli altri corpi; aumentando la quota, ossia la distanza con la terra, gli effetti perturbativi aumentano soprattutto quello dovuto all'attrazione gravitazionale del Sole.

Tabella 2.1: Confronto accelerazioni perturbative adimensionalizzate rispetto a $\boldsymbol{g_0}$ a una quota di $\boldsymbol{370\ km}$

Terra	0.89
Sole	$6.4 \cdot 10^{-4}$
Luna	$3.3 \cdot 10^{-6}$
Marte	$7.1 \cdot 10^{-10}$
Venere	$1.9 \cdot 10^{-8}$

2.2 *Problema dei due corpi*

Una volta definita l'espressione generale di due corpi in presenza di altri corpi e poiché si è visto che le perturbazioni sono piccole, l'espressione può essere semplificata per ridurla ad una equazione più semplice che considera i corpi in esame isolati rispetto agli altri.

Innanzitutto, bisogna introdurre due ipotesi semplificative, i corpi sono sferici per cui è possibile far collassare la massa nel loro centro, in questo modo è possibile considerare due corpi puntiformi e inoltre si considera che sui due corpi non agisce nessuna forza esterna al sistema ma solo la forza gravitazionale che agisce sulla congiungente i centri dei due corpi.

Consideriamo due corpi di massa M e m, e un sistema di riferimento inerziale XYZ, Figura 2.4.

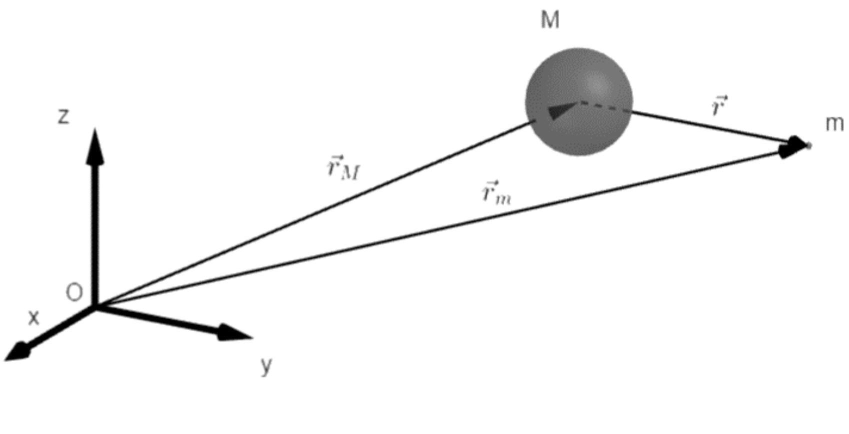

Figura 2.4: Problema dei due corpi

Il vettore posizione del corpo M e m sono rispettivamente $\vec{r}_M$ e $\vec{r}_m$. Possiamo definire la posizione di m rispetto a M con il vettore:

$$\vec{r} = \vec{r}_m - \vec{r}_M$$

Applicando la legge di Newton alla massa m si ottiene:

$$m\ddot{\vec{r}}_m = -G\frac{Mm}{\|\vec{r}\|^2}\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \qquad \textbf{2.9}$$

e, invece, alla massa M:

$$M\ddot{\vec{r}}_M = G\frac{Mm}{\|\vec{r}\|^2}\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \qquad \textbf{2.10}$$

sottraendo la 2.10 alla 2.9 si ottiene la seguente relazione:

$$\ddot{\vec{r}} = -G\frac{M+m}{\|\vec{r}\|^3}\vec{r} \qquad \textbf{2.11}$$

La 2.11 è un'equazione vettoriale differenziale del moto relativo del corpo m rispetto al corpo M per il problema dei due corpi.

Poiché la massa del satellite m è molto minore della massa del pianeta intorno a cui orbita la 2.11 può essere riscritta come:

$$\ddot{\vec{r}} = -G\frac{M}{\|\vec{r}\|^3}\vec{r} = -\frac{\mu}{\|\vec{r}\|^3}\vec{r} \qquad \textbf{2.12}$$

dove μ è il parametro gravitazionale che è direttamente proporzionale alla massa del pianeta o astro intorno al quale orbita il satellite.

2.3 Costanti del moto

Prima di determinare la soluzione dell'equazione del moto per ottenere la traiettoria è utile derivare alcune informazioni importanti sulla natura dell'orbita.

Un campo gravitazionale è un campo conservativo, infatti, un corpo che si muove sotto l'influenza della forza di gravità non perde o guadagna energia ma si ha uno scambio di energia tra energia cinetica ed energia potenziale. Per variare il momento angolare di un sistema che ruota intorno al suo centro di rotazione è necessario che sul sistema agisca una forza che abbia una componente tangenziale, la forza gravitazionale ha componente solamente radiale per cui anche il momento angolare rimarrà costante. Nelle sezioni successive saranno dimostrate le due affermazioni.

2.3.1 Conservazione dell'energia meccanica

La conservazione dell'energia si deriva moltiplicando scalarmente la 2.12 per il vettore velocità, $\dot{\vec{r}}$ per cui:

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\mu}{r^3}\vec{r} = 0$$

in generale si ha che $\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}} = a\dot{a}$, $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ e $\dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$ per cui si ottiene che:

$$\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}+\frac{\mu}{r^3}\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}=0$$

da cui si ottiene:

$$v\dot{v}+\frac{\mu}{r^3}r\dot{r}=0$$

il primo termine è dato dalla derivata dell'energia cinetica, $\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)=v\dot{v}$ ed il secondo invece è dato da $\frac{d}{dt}\left(-\frac{\mu}{r}\right)=\frac{\mu}{r^2}\dot{r}$. Sostituendo nella relazione precedente si ottiene che:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}-\frac{\mu}{r}\right)=0$$

per cui si ha che in generale:

$$\mathcal{E}=\frac{v^2}{2}+\left(c-\frac{\mu}{r}\right)$$

dove c è una costante arbitraria, ed $\mathcal{E}$ è l'energia meccanica specifica definita come la somma dell'energia meccanica per unità di massa del satellite, $\frac{v^2}{2}$, e l'energia potenziale gravitazionale, $c-\frac{\mu}{r}$, dove c è una costante che è posta nulla affinché facendo tendere l'energia potenziale all'infinito si ottenga un valore nullo.

Infine, si può concludere che l'energia meccanica specifica, $\mathcal{E}$, di un satellite è data dalla somma dell'energia cinetica per unità di massa e dall'energia potenziale gravitazionale e rimane costante lungo tutta la sua orbita.

$$\mathcal{E}=\frac{v^2}{2}-\frac{\mu}{r} \qquad \textbf{2.13}$$

2.3.2 Conservazione del momento angolare

Per dimostrare la conservazione del momento angolare si parte moltiplicando vettorialmente il raggio e la 2.12:

$$\vec{r}\times\ddot{\vec{r}}+\vec{r}\times\frac{\mu}{r^3}\vec{r}=0$$

in generale il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo per cui:

$$\vec{r}\times\ddot{\vec{r}}=0$$

e sapendo che $\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\right)=\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}}+\vec{r}\times\ddot{\vec{r}}$ l'equazione si può riscrivere come:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\right)=0$$

dove $\dot{\vec{r}}=\vec{v}$, per cui $\vec{r}\times\vec{v}$ non è altro che il momento angolare specifico, $\vec{h}$, che deve rimanere costante nel tempo.

Quindi il momento angolare, $\vec{h}$, di un satellite rimane costante lungo l'orbita e l'espressione è la seguente:

$$\vec{h}=\vec{r}\times\vec{v}$$

Essendo $\vec{h}$ il prodotto vettoriale di $\vec{r}$ e $\vec{v}$, il momento angolare rimarrà sempre perpendicolare al piano contenente $\vec{r}$ e $\vec{v}$; ma poiché $\vec{h}$ è costante sia in modulo che in direzione e verso allora $\vec{r}$ e $\vec{v}$ rimarranno sempre nello stesso piano, Figura 2.5.

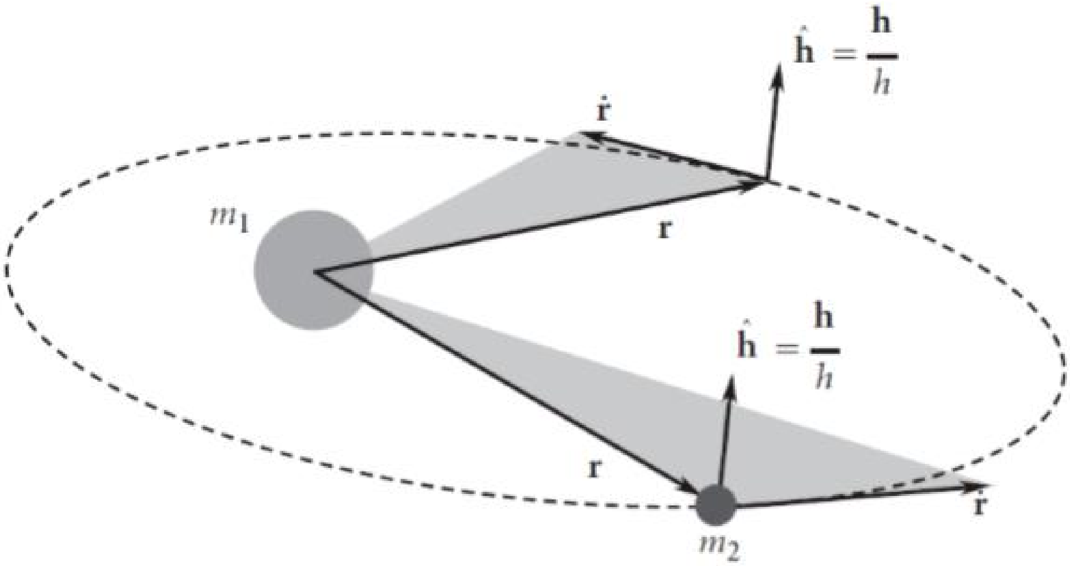

Figura 2.5: Piano dell'orbita identificato da $\vec{\boldsymbol{h}}$

Definendo la verticale locale coincidente con la direzione del raggio e l'orizzonte locale come il piano perpendicolare alla verticale locale, Figura 2.6, si può definire il flight path angle, ϕ, come l'angolo formato tra l'orizzonte locale e il vettore velocità, invece γ è lo zenith angle, l'angolo formato tra la verticale locale e la direzione di $\vec{v}$.

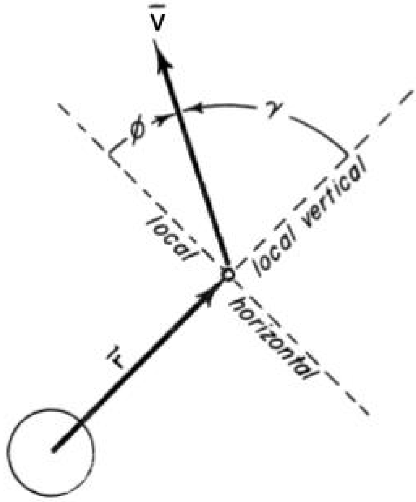

Figura 2.6: Flight path angle, $\boldsymbol{\phi}$

In questo modo si può determinare l'espressione del modulo di $\vec{h}$, dalla definizione del prodotto vettoriale, per cui si ottiene la seguente relazione:

$$h = rv\sin\gamma$$

essendo γ e ϕ angoli complementari può essere riscritto come:

$$\boldsymbol{h = rv\cos\phi} \qquad \textbf{2.14}$$

il segno di ϕ è concorde al segno del prodotto scalare $\vec{r}\cdot\vec{v}$.

2.4 Equazione della traiettoria

Prima è stata scritta l'equazione del moto per un corpo che ruota intorno ad un corpo centrale. Se l'equazione del moto e semplice non lo è altrettanto la sua soluzione.

2.4.1 Integrazione dell'equazione del moto

Richiamando l'equazione del moto per il problema dei due corpi:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r}$$

Facendo il prodotto vettoriale tra l'equazione del moto e il momento angolare si ottiene una forma che può essere integrata:

$$\ddot{\vec{r}}\times\vec{h} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r}\times\vec{h} = \frac{\mu}{r^3}\vec{h}\times\vec{r} \qquad \textbf{2.15}$$

il termine a sinistra non è altro che $\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}\times\vec{h}\right)$, invece il termine a destra dovrà essere riscritto come la derivata nel tempo di una quantità per cui:

$$\frac{\mu}{r^3}\vec{h}\times\vec{r} = \frac{\mu}{r^3}\left(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\times\vec{r}\right)$$

in generale si ha che $\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$, per cui si ottiene:

$$\frac{\mu}{r^3}\left(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\times\vec{r}\right) = \frac{\mu}{r^3}r^2\dot{\vec{r}} - \frac{\mu}{r^3}r\dot{r}\vec{r} = \frac{\mu}{r}\dot{\vec{r}} - \frac{\mu}{r^2}\dot{r}\vec{r} = \frac{d}{dt}\left(\mu\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

Andando a sostituire nella 2.15 si ottiene:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}\times\vec{h}\right) = \mu\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

e integrando si ha:

$$\dot{\vec{r}}\times\vec{h} = \mu\frac{\vec{r}}{r} + \vec{B}$$

dove $\vec{B}$ è una costante vettoriale. Moltiplicando scalarmente l'equazione appena ottenuta per il raggio si ottiene la seguente relazione:

$$\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}\times\vec{h} = \vec{r}\cdot\mu\frac{\vec{r}}{r} + \vec{r}\cdot\vec{B}$$

In generale $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}$; per cui il termine a sinistra può essere riscritto come:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \cdot \vec{h} = \vec{h} \cdot \vec{h} = h^2$$

per cui sostituendo si ha:

$$h^2 = \mu r + rB\cos\nu$$

dove ν è l'angolo formato tra il raggio e la costante vettoriale $\vec{B}$. Risolvendo per r si ottiene:

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + \frac{B}{\mu}\cos\nu} \qquad \textbf{2.16}$$

2.4.2 Equazione polare di una sezione conica

La 2.16 rappresenta l'equazione della traiettoria espressa in coordinate polari, dove ν è misurato dal vettore fisso $\vec{B}$ a $\vec{r}$. Per determinare che tipo di curva rappresenta è necessario confrontarla con l'equazione generale della sezione conica scritta in forma polare con l'origine posta in un fuoco e l'angolo polare ν è l'angolo formato tra $\vec{r}$ e il punto della conica più vicino al fuoco:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\nu} \qquad \textbf{2.17}$$

In questa equazione, che è matematicamente identica nella forma a quella della traiettoria, p è una costante della conica chiamato $lemi\text{-}latus\ rectum$ mentre e è l'eccentricità che determina il tipo di conica rappresentata dall'equazione.

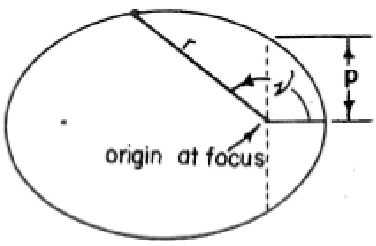

Figura 2.7: Equazione generale di una conica in forma polare

La similitudine tra l'equazione della traiettoria, 2.16, e l'equazione della conica, 2.17, non solo verifica la prima legge di Keplero ma la estende in quanto ogni orbita nel problema dei due corpi è in generale una conica e non solo un'ellisse.

Riassumendo si ha che:

1. Le sezioni coniche sono le uniche traiettorie possibili nel problema dei due corpi;
2. Il fuoco dell'orbita è posto al centro del corpo centrale;
3. L'energia meccanica di un satellite non cambia se si sposta lungo la sua orbita e c'è uno scambio tra energia cinetica ed energia potenziale che comporta una diminuzione della velocità quando il satellite è più distante dal corpo centrale e un aumento di velocità quando il satellite è a quote basse in modo tale che l'energia meccanica rimanga costante;
4. Il moto orbitale avviene in un piano fisso in un sistema di riferimento inerziale;
5. Il momento angolare specifico di un satellite rispetto al corpo centrale rimane costante.

2.4.3 Proprietà geometriche comuni a tutte le coniche

Il nome deriva dal fatto che una sezione conica può essere definita come una curva che si ottiene intersecando un piano e un cono circolare retto, Figura 2.8.

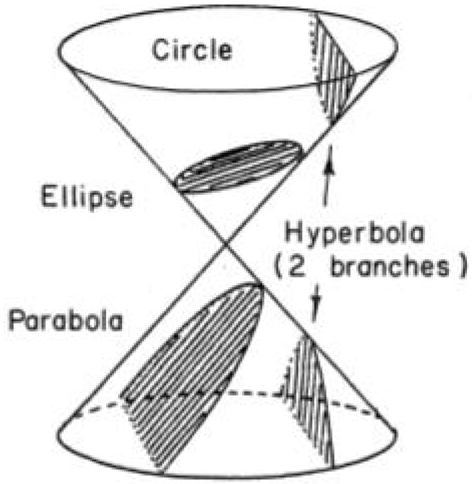

Figura 2.8: Sezioni coniche

Se il piano interseca solo metà cono si ottiene un'ellisse, nel caso in cui il piano sia parallelo alla base si ottiene un cerchio, se, invece, il piano interseca solo metà cono ed è parallelo alla generatrice del cono si ottiene una parabola ed infine se il piano è perpendicolare alla base si ottiene invece un'iperbole. Ci sono anche casi degeneri in cui la curva collassa in un punto nel caso il piano passi per l-origine, oppure casi in cui degenera in una linea.

Le coniche possono essere anche definite in un modo alternativo:

una conica è il luogo dei punti in cui il rapporto tra la distanza da un dato punto fisso detto fuoco, e la distanza da una linea detta direttrice è una costante positiva detta eccentricità, e.

Mentre la generatrice non ha un significato fisico per quanto concerne le orbite, il fuoco e l'eccentricità sono indispensabili per conoscere il moto orbitale.

Consideriamo un'ellisse, Figura 2.9; Essendo le coniche simmetriche hanno tutte due fuochi, F e F'. Nel primo fuoco, F, è posto il corpo principale, mentre il secondo fuoco, F', ha poca importanza nella meccanica orbitale.

Si definisce a il semiasse maggiore, b il semiasse minore, c è la distanza tra l'origine e il fuoco, F, A è il punto più lontano dal fuoco detto apoastro, invece P è il punto più vicino detto periastro.

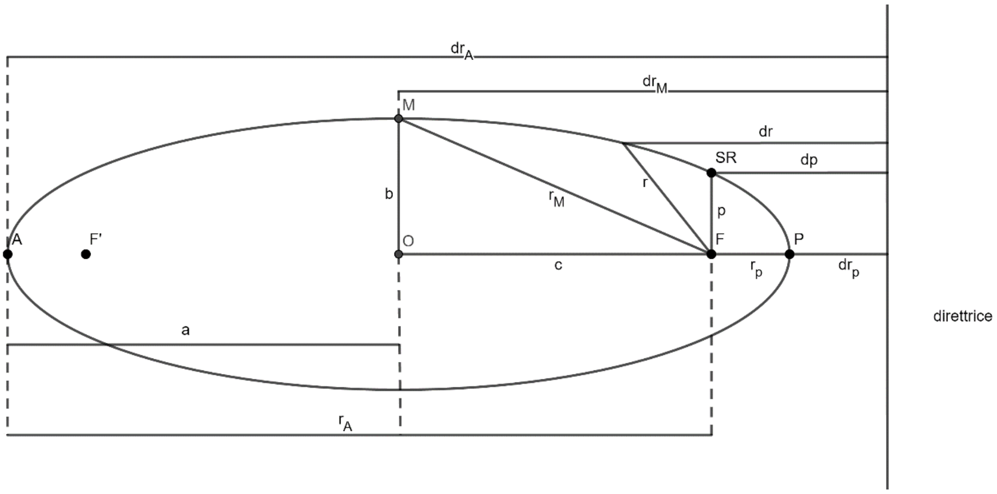

Figura 2.9: Ellisse

Dalla definizione di conica scritta precedentemente si ha che:

$$\frac{r}{dr} = cost = e$$

Applicando la definizione al perigeo si ottiene:

$$\frac{r_p}{dr_p} = e$$

dalla figura si ha che $r_p = a - c$ per cui si ottiene:

$$dr_p = \frac{a - c}{e}$$

Applicando la definizione all'apogeo, invece, si ottiene:

$$\frac{r_A}{dr_A} = e$$

essendo $r_A = a + c$ e $dr_A = 2a + dr_p = 2a + \frac{a-c}{e}$ si ottiene:

$$e = \frac{c}{a}$$

Applicando la definizione al punto M si ottiene:

$$\frac{r_M}{dr_M} = e$$

poiché $dr_M = a + dr_p$ si ottiene che $r_m = a$ per cui:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Infine, il $semi\text{-}latus\ rectum$ è il valore del raggio per cui ν è un angolo retto e quindi applicando la definizione si ha che:

$$\frac{p}{dp} = e$$

essendo $dp = a - c + dr_p$ sostituendo si ottiene che:

$$p = a(1 - e^2) \tag{2.18}$$

ritornando all'equazione della conica si ha che:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\nu} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\nu}$$

in questo modo si possono ottenere le distanze di periastro e apoastro per cui:

$$r_p = r(\nu = 0 \text{ deg}) = \frac{p}{1 + e} = a(1 - e) \tag{2.19}$$

$$r_A = r(\nu = 180 \text{ deg}) = \frac{p}{1 - e} = a(1 + e) \tag{2.20}$$

2.5 *Legame tra* $\mathcal{E}$ *e* h *e la geometria dell'orbita*

Confrontando la 2.16 con la 2.17 si può vedere immediatamente che il $semi\text{-}latus\ rectum$, p, dipende solo dal momento angolare specifico, h, del satellite per cui:

$$p = \frac{h^2}{\mu} \tag{2.21}$$

Considerando un esperimento mentale proposto da Newton, immaginiamo di porre un cannone sulla sommità di una montagna, trascurando la resistenza di attrito con l'aria. Se il proiettile è sparato in orizzontale la 2.14 dice che $h = rv$, poiché ϕ è uguale a zero. Aumentando progressivamente la velocità iniziale con cui viene sparato il proiettile analogamente aumenterà h. La Figura 2.10 mostra la famiglia di curve che rappresentano la traiettoria dell'orbita della palla di cannone all'aumentare del momento angolare.

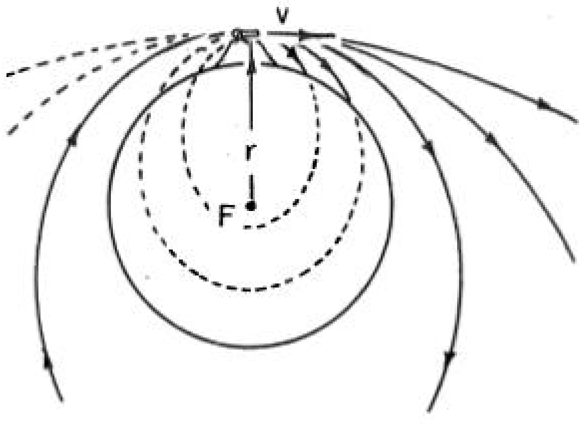

Figura 2.10: Esperimento della palla di cannone di Newton

Dalla figura si può vedere che le traiettorie sono tutte coniche in cui il centro della Terra è posto in uno dei due fuochi.

In una conica all'apoastro e al periastro il vettore velocità è diretto perpendicolarmente al raggio per cui il flight-path angle è nullo, dalla 2.14 si può scrivere che:

$$h = r_p v_p = r_a v_a$$

per cui quando si è al periastro la velocità è massima, mentre quando si è all'apoastro la velocità è minima.

Scrivendo l'equazione dell'energia per il periastro si ha che:

$$\mathcal{E} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{h^2}{2r_p^2} - \frac{\mu}{r_p}$$

sostituendo la 2.18 e la 2.19 nella relazione precedente si ottiene che:

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu}{2a} \qquad \textbf{2.22}$$

Questa semplice relazione valida per tutte le coniche esprime il legame tra il semiasse maggiore, a, e l'energia meccanica specifica, $\mathcal{E}$, del satellite. Come mostrato in Figura 2.10 , aumentando la velocità della palla di cannone aumenta il semiasse maggiore per cui aumenta anche l'energia meccanica. Sempre dalla figura si può vedere che per il caso di orbite chiuse l'energia meccanica deve essere negativa, per cui il semiasse maggiore è positivo, ciò è valido nel caso di ellisse e cerchio; nel caso della parabola, invece, che si ottiene portando all'infinito uno dei fuochi dunque si avrà che c e quindi a tendono ad infinito per cui l'energia meccanica è nulla ed infine nel caso dell'iperbole l'energia meccanica è positiva per cui il semiasse maggiore sarà negativo.

Conoscendo h si può determinare p, mentre conoscendo $\mathcal{E}$ si può determinare il semiasse maggiore. Per determinare l'eccentricità invece si ha che:

$$p = a(1 - e^2)$$

da cui si ottiene:

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}$$

sostituendo la 2.21 e la 2.22:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}h^2}{\mu^2}}$$

per cui si ha che se l'energia meccanica è negativa, nel caso di cerchio e ellisse, si ha che l'eccentricità è compresa tra 0 e 1, nel caso del cerchio l'eccentricità è nulla e i due fuochi coincidono; nel caso l'energia meccanica è nulla, invece, l'eccentricità è pari a uno e si ottiene una parabola ed infine nel caso in cui l'energia è positiva si ha che l'eccentricità è maggiore di uno e si ottiene un'iperbole. Per cui ricapitolando nella Tabella 2.2 e nella Figura 2.11 vengono illustrate le caratteristiche delle differenti traiettorie e orbite.

Tabella 2.2: Caratteristiche delle varie orbite

	Eccentricità	*Semiasse maggiore*	*Energia*	V_∞
Circolare	$e = 0$	$a > 0$	$\mathcal{E} < 0$	$-$
Ellittica	$0 < e < 1$	$a > 0$	$\mathcal{E} < 0$	$-$
Parabolica	$e = 1$	$a \to \infty$	$\mathcal{E} = 0$	$V_\infty = 0$
Iperbolica	$e > 1$	$a < 0$	$\mathcal{E} > 0$	$V_\infty > 0$

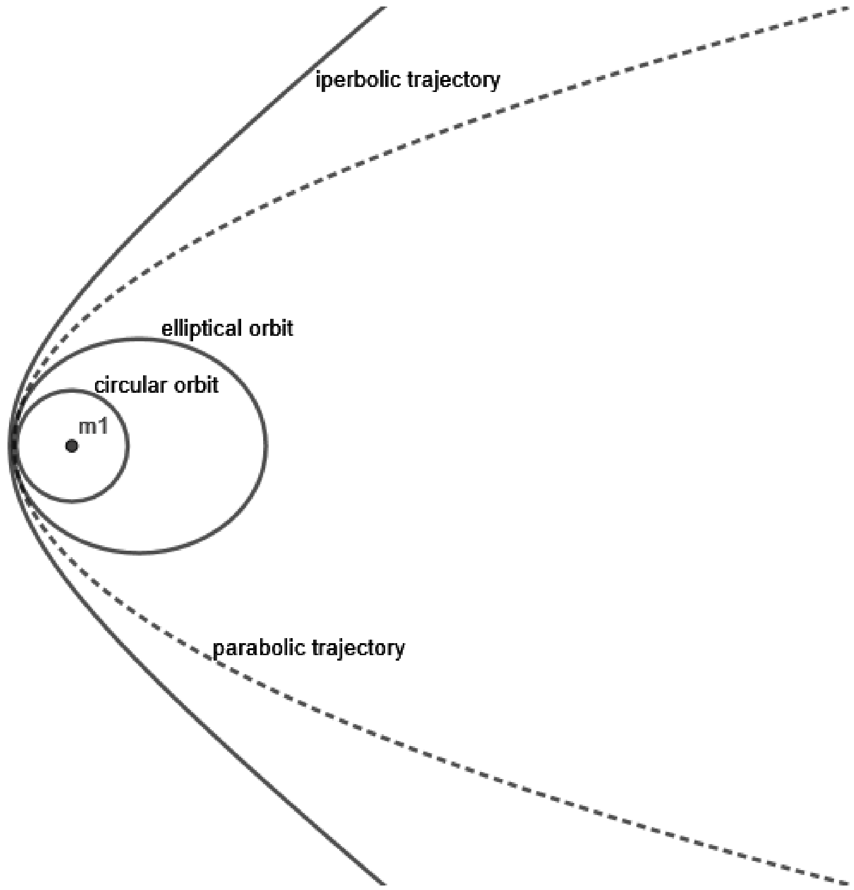

Figura 2.11: Varie tipologie di orbite nel caso del problema dei due corpi

3 Problema dei tre corpi circolare ristretto

Il problema dei tre corpi riguarda il moto di tre corpi sottoposti alla loro mutua attrazione gravitazionale, mentre su questi corpi non agisce nessuna forza esterna al sistema. Nel problema dei tre corpi ristretto, si assume che un corpo, in questo caso il satellite, abbia una massa molto inferiore in confronto agli altri due. In questo modo si può approssimare che il moto dei due corpi principali non è influenzato dall'attrazione gravitazionale del terzo. Si definiscono i corpi più massivi con P_1 e P_2, dove P_1 ha una massa m_1 maggiore rispetto a P_2 che ha massa m_2.

Si consideri un sistema inerziale XYZ con l'origine nel centro di massa del sistema, Figura 2.1. In base alle ipotesi fatte in precedenza, il centro di massa del sistema sarà sulla congiungente dei centri di P_1 e P_2. I vettori posizione sono $\vec{R}_1$ e $\vec{R}_2$ per cui si può scrivere che:

$$m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2 = 0$$

da cui si ottiene che:

$$\vec{R}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\vec{R}_2 \tag{3.1}$$

Poiché il momento angolare del sistema è costante si può scrivere che:

$$\vec{H} = m_1\vec{R}_1 \times \dot{\vec{R}}_1 + m_2\vec{R}_2 \times \dot{\vec{R}}_2 = \vec{c}$$

sostituendo la 3.1 si ottiene:

$$\vec{H} = m_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\vec{R}_1 \times \dot{\vec{R}}_1 = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\vec{H}_1 = \vec{c} \tag{3.2}$$

e analogamente si ottiene che:

$$\vec{H} = m_2\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\vec{R}_2 \times \dot{\vec{R}}_2 = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)H_2 = \vec{c} \tag{3.3}$$

dove $\vec{H}_1$ e $\vec{H}_2$ sono rispettivamente il momento angolare del corpo m_1 e del corpo m_2. Confrontando la 3.2 e la 3.3 si può concludere che i due corpi si muovono in un piano e l'orbita dei due corpi è simile. In Figura 3.1 il piano XY è stato scelto coincidente con il piano orbitale.

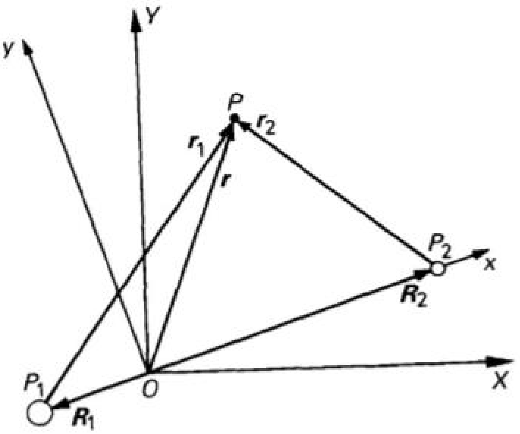

Figura 3.1: Sistema di riferimento inerziale, XYZ, e sistema di riferimento rotante, xyz, nel problema dei tre corpi

Nel problema dei tre corpi circolare ristretto, si assume che i due corpi più massivi si muovono con un'orbita circolare intorno al centro di massa del sistema, in questo modo è possibile ottenere una soluzione parziale del problema.

Innanzitutto, si introduce un sistema di riferimento xyz che ha l'origine che coincide con il centro di massa del sistema e con l'asse x che coincide con la congiungente di P_1 e P_2; il verso positivo dell'asse z ha stesso verso dell'asse Z. Il sistema di riferimento xyz ruota con una velocità angolare, $\vec{\Omega}$, diretta nel verso positivo dell'asse z, rispetto al sistema di riferimento inerziale XYZ. I corpi P_1 e P_2 sono fissi rispetto al sistema di riferimento rotante. Se $\vec{r}$ è la posizione del terzo corpo, m, nel sistema rotante e i raggi vettore da P_1 e P_2 sono rispettivamente $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, l'equazione del moto di m relativo al sistema di riferimento rotante è data dalla seguente relazione:

$$-G\frac{m_1}{r_1^3}\vec{r}_1 - G\frac{m_2}{r_2^3}\vec{r}_2 = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right) + 2\vec{\omega}\times\frac{\delta\vec{r}}{\delta t} + \frac{\delta^2\vec{r}}{\delta t^2}$$

dove $\frac{\delta}{\delta t}$ indica la derivata temporale nel sistema di riferimento rotante. Poiché $\vec{\omega}$ è costante, la relazione può essere semplificata per cui si ottiene:

$$\frac{\delta^2\vec{r}}{\delta t^2} = -G\left(\frac{m_1}{r_1^3}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{r_2^3}\vec{r}_2\right) - \vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right) - 2\vec{\Omega}\times\frac{\delta\vec{r}}{\delta t} \qquad \textbf{3.4}$$

Il secondo e il terzo termine al secondo membro rappresentano rispettivamente l'accelerazione centripeta e l'accelerazione di Coriolis dovuta alla rotazione del sistema di riferimento xyz. Si può provare che i primi due termini al secondo membro si possono esprimere come il gradiente di una funzione potenziale, U, definita nel seguente modo:

$$U = -G\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) - \frac{1}{2}\Omega_z^2\left(x^2 + y^2\right) \qquad \textbf{3.5}$$

Questa funzione potenziale non tiene conto solamente della forza gravitazionale ma anche della forza centrifuga. L'introduzione della funzione potenziale è possibile poiché nel sistema xyz $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ e $\vec{\Omega}$ sono vettori costanti e $\vec{\Omega} = \Omega_z\vec{e}_z$.

Non è possibile incorporare il termine di Coriolis nella funzione potenziale poiché contiene la velocità del terzo corpo.

Usando la funzione potenziale la 3.4 può essere riscritta come:

$$\frac{\delta^2\vec{r}}{\delta t^2} = -\nabla U - 2\vec{\Omega}\times\frac{\delta\vec{r}}{\delta t} \qquad \textbf{3.6}$$

3.1 Integrale di Jacobi

Moltiplicando scalarmente la 3.4 con $\frac{\delta\vec{r}}{\delta t}$ si ottiene:

$$\frac{\delta\vec{r}}{\delta t}\cdot\frac{\delta^2\vec{r}}{\delta t^2} = -\frac{\delta\vec{r}}{\delta t}\cdot\nabla U - 2\frac{\delta\vec{r}}{\delta t}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\frac{\delta\vec{r}}{\delta t}\right)$$

Il secondo termine al secondo membro è nullo in quanto:

$$\frac{\delta\vec{r}}{\delta t}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\frac{\delta\vec{r}}{\delta t}\right)=\vec{\Omega}\cdot\left(\frac{\delta\vec{r}}{\delta t}\times\frac{\delta\vec{r}}{\delta t}\right)=0$$

ed invece il primo termine può essere scritto come:

$$\frac{\delta\vec{r}}{\delta t}\cdot\nabla U=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}=\frac{dU}{dt}$$

poiché U è funzione solo delle coordinate x, y e z del corpo m e non esplicitamente del tempo. Sostituendo le relazioni appena trovate e integrando rispetto al tempo si ottiene che:

$$V^2+2U=-C \qquad \mathbf{3.7}$$

dove $\vec{V}$ è la velocità relativa di P rispetto al sistema di riferimento rotante mentre C è una costante di integrazione. La 3.7 è conosciuta come *integrale di Jacobi*.

3.2 Superfici a velocità nulla

La 3.7 mostra che la velocità, V, di P relativa al sistema di riferimento rotante è funzione della posizione del corpo P all'interno di questo sistema di riferimento. La costante C dipende, invece, dalla posizione e dalla velocità iniziale di P. La velocità di P è nulla quando:

$$2U=-C$$

oppure

$$2G\left(\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}\right)+\Omega_z^2(x^2+y^2)=C$$

Le superfici nello spazio tridimensionale xyz descritte da questa equazione sono dette *superfici a velocità nulla*, *superfici di Hill*, oppure in astrofisica *superfici equipotenziali di Roche*. Le superfici sono simmetriche rispetto al piano xy.

Poiché per qualsiasi moto del corpo P, la V^2 è sempre maggiore di zero, queste superfici rappresentano i limiti della regione in cui può muoversi P. Per le regioni accessibili a P vale la seguente relazione:

$$2G\left(\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}\right)+\Omega_z^2(x^2+y^2)\geq C \qquad \mathbf{3.8}$$

L'equazione appena scritta fornisce solo l'indicazione di quali regioni dello spazio sono accessibili al corpo P ma non dice nulla sul moto del corpo P in queste regioni.

Prima di determinare la forma di queste superfici al variare di C è opportuno adimensionalizzare le espressioni appena trovare. Innanzitutto, si definisce come lunghezza di riferimento la distanza tra i corpi P_1 e P_2, e la massa caratteristica come la somma di m_1 e m_2. Dunque, si definiscono le seguenti grandezze adimensionali:

$$\mu=\frac{m_2}{m_1+m_2} \qquad 1-\mu=\frac{m_1}{m_1+m_2} \qquad \hat{r}_1=\frac{r_1}{P_1P_2} \qquad \hat{r}_2=\frac{r_2}{P_1P_2} \qquad \hat{r}=\frac{r}{P_1P_2}$$

dove $\mu\leq\frac{1}{2}$ poiché il corpo P_1 è sempre quello con massa maggiore se m_1 e m_2 sono diverse. Le distanze di P_1 e P_2 rispetto all'origine saranno:

$$\hat{R}_1 = \mu \qquad\qquad \hat{R}_2 = 1 - \mu$$

Si introduce un tempo adimensionale:

$$\hat{t} = t\sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{(P_1P_2)^3}}$$

Poiché P_1 si muove su un'orbita circolare rispetto all'origine del sistema di riferimento inerziale si ha che:

$$G\frac{m_2}{(P_1P_2)^2} = \Omega_z^2 R_1$$

per cui si ottiene che il tempo adimensionale sarà dato dalla seguente relazione:

$$\hat{t} = t\Omega_z$$

Adimensionalizzando la 3.8 vengono eliminati i fattori Ω_z e G dall'equazione. In seguito, si utilizzeranno sempre le quantità adimensionalizzate e per alleggerire la trattazione sarà omesso il simbolo "^".

In forma adimensionale la 3.8 diventa:

$$x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} \geq C \qquad \textbf{3.9}$$

dove C adesso è una costante adimensionale, r_1 e r_2 sono dati dalle seguenti relazioni:

$$r_1 = \sqrt{(\mu + x)^2 + y^2 + z^2} \qquad\qquad r_2 = \sqrt{(1 - \mu - x)^2 + y^2 + z^2} \qquad \textbf{3.10}$$

In questa trattazione ci si limiterà a studiare l'andamento qualitativo delle superfici, Figura 3.2, a velocità nulla al variare di C e si andranno a discutere solo i punti di intersezione di queste superfici con il piano xy.

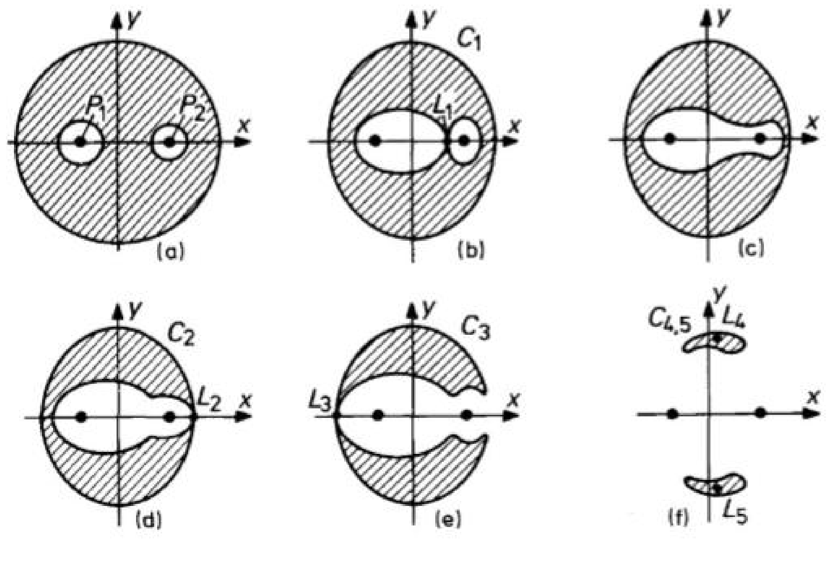

Figura 3.2: Intersezione delle superfici a velocità nulla con il piano $\boldsymbol{xy}$ al variare di $\boldsymbol{C}$

Se C è grande, l'intersezione consisterà in tre cerchi separati, Figura 3.2a, e si avranno un cerchio esterno con un raggio grande con l'origine nel centro di massa e due cerchi più piccoli all'interno con l'origine nei punti P_1 e P_2, a. La regione inaccessibile a P è la regione tratteggiata. Se il corpo P è inizialmente nella regione vicina a P_1, non può spostarsi nella regione dello spazio vicina a P_2 e viceversa. Se, invece, il contro P è all'esterno del cerchio più grande non potrà raggiungere le zone vicine a P_1 o P_2. Diminuendo il valore di C, i due cerchi interni diventano ellissi e si espandono fino a intersecarsi. Quando C decresce al valore di C_1, le due curve all'interno si intersecano nel punto L_1, Figura 3.2b. Diminuendo ancora il valore di C i due ovali si uniscono. In questa situazione, P può lasciare la regione intorno a P_1e raggiungere la zona intorno a P_2. Diminuendo ancora il valore di C il contorno della curva interna interseca l'ovale esterno nel punto L_2, Figura 3.2d. Adesso il corpo P può lasciare la regione di spazio tra P_1 e P_2 e quindi evadere dal sistema. Diminuendo nuovamente il valore di C la zona inaccessibile si riduce finché non collassa nei punti L_4 e L_5, Figura 3.2e. La Figura 3.3 mostra una illustrazione più accurata delle superfici a velocità nulla nel sistema Terra-Luna.

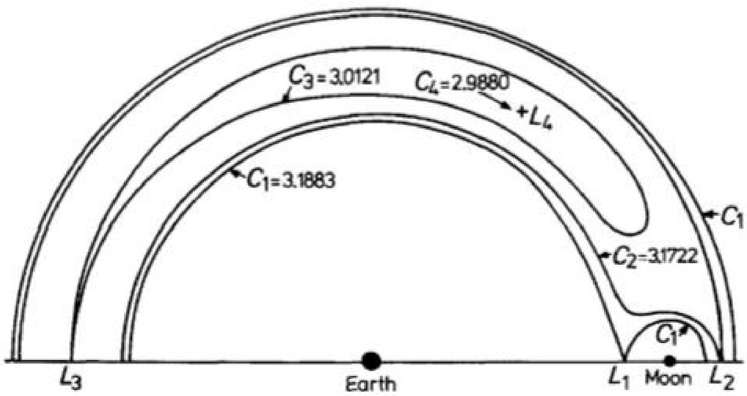

Figura 3.3: Intersezione superfici a velocità nulla con il piano $\boldsymbol{xy}$ nel sistema Terra-Luna

Il vettore ∇U è normale alle superfici equipotenziali, $U = -\frac{1}{2}C$. Su queste superfici nei punti singolari, L, si ha che ∇U è uguale a 0. Se il corpo P si trova in uno di questi punti ed è fermo rispetto al sistema di riferimento rotante, allora dalla 3.6 si ottiene l'equazione del moto di P che sarà:

$$\frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} = 0$$

Dunque, si ha che in questi punti il corpo P non ha un'accelerazione relativa rispetto al sistema xyz e questi rappresentano dei punti di equilibrio e sono chiamati punti lagrangiani.

Questi punti possono essere determinati derivando il sistema adimensionalizzato 3.5 rispetto a x, y e z e ponendo le derivate parziali nulle. In questo modo si ottiene il sistema seguente:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -x + \frac{1-\mu}{r_1^3}(\mu + x) - \frac{\mu}{r_2^3}(1 - \mu - x) = 0 \qquad \textbf{3.11}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = y\left(-1 + \frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right) = 0 \qquad \textbf{3.12}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = z\left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right) = 0 \qquad \textbf{3.13}$$

La 3.13 ha soluzione z uguale a zero per cui tutti i punti lagrangiani giacciono sul piano xy.

Dalla 3.12 si ottiene che:

$$y = 0, \qquad \text{oppure} \qquad 1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} = 0 \qquad \textbf{3.14}$$

Dalle 3.10, 3.11 e 3.14 si ottengono due diverse posizioni per i punti lagrangiani:

$$y = z = 0, \qquad x - (1-\mu)\frac{\mu + x}{|\mu + x|^3} + \mu\frac{1-\mu-x}{|1-\mu-x|^3} = 0 \qquad \textbf{3.15}$$

e

$$z = 0 \qquad r_1 = r_2 = 1 \qquad \textbf{3.16}$$

La 3.15 è un'equazione di quarto grado e ammettere tre radici reali che corrispondono ai punti L_1, L_2 e L_3. La distanza tra L_1 e il corpo P_2 è sempre minore della distanza tra L_2 e P_2. I punti L_1 e L_2 sono vicino al corpo P_2 per piccoli valori di μ. La distanza tra L_3 e il corpo P_1 è la stessa distanza tra P_1 e P_2; L_3 e P_2 sono punti simmetrici rispetto a P_1.

In accordo con la 3.16, i punti Lagrangiani L_4 e L_5 formano un triangolo equilatero con P_1 e P_2 e la loro posizione è data dalle seguenti coordinate:

$$x = \frac{1}{2} - \mu \qquad y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \textbf{3.17}$$

Facendo decresce il valore di C, le superfici a velocità nulla vanno a collassare nei punti L_4 e L_5, per cui andando a sostituire le coordinate di L_4 e L_5 nella 3.9 , si ottiene il valore minimo di C per cui esistono le superfici di Hill:

$$C_{min} = \frac{3}{2} + \left(\mu - \frac{1}{2}\right)^2$$

Per cui se $C < 2.75$ non esistono superfici a velocità nulla.

Infine, si può andare a studiare la stabilità di questi punti andando a studiare il segno degli autovalori del sistema. Tralasciando la dimostrazione, si ottiene che i punti L_1, L_2 e L_3 sono punti di equilibrio instabile ed invece i punti L_4 e L_5 sono punti di equilibrio stabile.

Nel caso generale del problema dei tre corpi ristretto, i corpi P_1 e P_2 descrivono delle orbite ellittiche rispetto al centro di massa del sistema, quindi si ha che sia la distanza tra i due corpi che la velocità angola della linea che congiunge i centri dei due corpi varia. Questo implica che la funzione potenziale, U, è funzione solo del tempo, per cui non esiste l'integrale di Jacobi per questo problema. Nel problema dei tre corpi ellittico ristretto il moto di un corpo nei punti L_4 e L_5 può essere infinitamente stabile, dipende dal valore di μ e dall'eccentricità delle orbite ellittiche.

4 Perturbazioni

Nel capitolo 2 si è discusso il moto di un satellite relativo ad un sistema di riferimento non rotante con l'origine coincidente con il centro di massa del corpo principale, nella trattazione si è assunto che il satellite fosse una massa puntiforme e che l'unica forza agente fosse quella della mutua attrazione gravitazionale. In questo moto si è trovato che l'orbita è una sezione conica, per cui l'orbita si dice *Kepleriana*.

In realtà, in presenza di un corpo che si muove intorno al Sole o in orbita intorno alla Terra, sul corpo possono agire oltre alla forza gravitazionale anche altre forze di varia natura. Queste forze sono piccole rispetto alla forza gravitazionale principale, per cui l'orbita può essere ben approssimata con una sezione conica. Queste orbite vengono chiamate *orbite Kepleriane perturbate*. In questo caso non è possibile ottenere una soluzione analitica per cui negli anni sono state sviluppate diverse tecniche risolutive.

Le forze perturbative più importanti che agiscono su un satellite che orbita intorno alla Terra sono quelle relative alla non sfericità della Terra, agli effetti aerodinamici, all'attrazione gravitazionale dovuta alla Luna e al Sole, alla pressione solare e a effetti elettromagnetici.

4.1 Non sfericità della Terra

Generalmente, la non sfericità della Terra è una componente molto importante della forza perturbativa per l'orbita di un satellite a bassa quota. La distribuzione della massa della Terra non è perfettamente simmetrica, per cui esiste una componente della forza gravitazionale perpendicolare al raggio. A causa di questa componente l'orbita è deviata rispetto a quella Kepleriana. Questo effetto decresce all'aumentare della distanza dalla Terra e per distanze maggiori rispetto al diametro della Terra quest'ultima può essere considerata come una massa puntiforme.

4.1.1 Effetti del primo ordine dovuti alla non sfericità della Terra.

Questi effetti sono predominanti per quote minori ai 10 milioni di km, dove le perturbazioni dovute al Sole e alla Luna sono meno importanti.

Il potenziale gravitazionale esterno della Terra può essere espresso attraverso una serie di armoniche sferiche nel seguente modo:

$$E_{g_p} = -\frac{\mu}{r}[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_e}{r}\right)^n P_n(\sin\Phi) - \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} J_{nm} \left(\frac{R_e}{r}\right)^n P_n^m(\sin\Phi)\cos m\,(\Lambda - \Lambda_{nm})$$

dove r, Φ e Λ sono le coordinate sferiche del satellite nel sistema di riferimento rotante: r è il raggio geocentrico, Φ è la latitudine geocentrica e Λ è la longitudine geografica. La funzione $P_n(\sin\Phi)$ è il polinomio di Legendre di grado n valutato in $\sin\Phi$; $P_n^m(\sin\Phi)$ è la funzione di Legendre associata di grado n e ordine m. Il raggio medio equatoriale della Terra è R_e. Le quantità J_n, J_{nm} e Λ_{nm} sono dei coefficienti numerici.

La serie polinomiale di Legendre costituisce le cosiddette *zone armoniche*. I termini J_{nm} aventi $n \neq m$ sono detti *armoniche tesserali*, altrimenti se $n = m$ sono detti *armoniche settoriali*. Le armoniche zonali descrivono la variazione del potenziale gravitazionale nella direzione nord-sud, mentre le armoniche tesserali e settoriali danno la variazione in direzione est-ovest. Il termine J_2 è legato allo schiacciamento dei poli, invece, il termine J_3 è legato al fatto che la Terra è descritta a forma di pera, poiché l'emisfero nord è meno denso, in quanto ha una maggior concentrazione di terre emerse, rispetto all'emisfero sud. Il termine J_{22} tiene conto della forma ellittica dell'equatore.

La Terra compie una rivoluzione attorno al suo asse in un giorno, mentre l'orbita Kepleriana di un satellite mantiene un'orientazione fissa rispetto allo spazio inerziale. Considerando un periodo di diversi giorni si può immaginare che gli effetti dovuti alle armoniche tesserali e settoriali si compensano per cui per molte applicazioni si tiene conto esclusivamente degli effetti dovuti alle armoniche zonali. Si può assumere dunque che il campo gravitazionale terrestre sia assialsimmetrico.

Per cui la funzione di disturbo, $\tilde{R}$, per un campo assialsimmetrico può essere scritta come:

$$\tilde{R} = -\frac{\mu}{r}\sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_e}{r}\right)^n P_n(\sin\Phi)$$

Poiché il termine J_2 è pari a $1.0826 \cdot 10^{-3}$ mentre tutti gli altri termini con n maggiore di due sono dell'ordine di 10^{-6} è possibile considerare solo il termine J_2. Si ottengono due effetti principali la regressione della linea dei nodi e la processione della linea degli absidi.

4.2 Effetti aerodinamici

Il moto di un satellite nelle regioni alte dell'atmosfera genera delle forze aerodinamiche. La forza più importante è quella dovuta alla resistenza, che è una forza che si oppone al moto del satellite, per cui sarà contraria al vettore velocità. Oltre alla resistenza si avranno anche una componente dovuta alla portanza e delle forze laterali che essendo di piccola entità rispetto alla resistenza possono essere trascurate. La decelerazione del satellite dovuta alla resistenza può essere espressa come:

$$a_D = C_D \frac{1}{2}\rho V^2 \frac{S}{M}$$

dove ρ è la densità dell'aria, V è la velocità del satellite relativa all'atmosfera, M è la massa del satellite, S è la sezione di riferimento del satellite e il C_D è il coefficiente di resistenza. Dato il satellite e l'orbita, M e V sono note mentre S può essere scelto in modo da ridurre o meno la resistenza. La difficolta maggiore nello studio della resistenza aerodinamica è la determinazione della ρ e del C_D.

Alla quota del satellite, il gas non può essere considerato continuo per cui si è in presenza del *free-molecular flow*. La resistenza, dunque, sarà governata da un meccanismo di riflessione delle particelle sulla superficie del satellite. Per altitudini comprese tra 150 e $500\ km$, il coefficiente di attrito è determinato sulla proiezione della superficie normale alla direzione del moto e ha un valore tipico compreso tra 2.2 e 2.5. Aumentando la quota il C_D viene incrementato e varia tra 3 e 5.

Per quanto riguarda, invece, la densità, essa varia non solo al variare della quota ma anche al variare del tempo poiché dipende dall'ora solare locale, dalla stagione, dall'attività solare e dai disturbi del campo geomagnetico.

Per questo motivo è possibile stimare solo la grandezza della resistenza aerodinamica che diminuisce all'aumentare della quota. Per quota minori di $200\ km$ è la forza perturbatrice principale che causa il decadimento dell'orbita, per quote superiori ai $1000\ km$, invece, può essere trascurata.

4.3 Perturbazioni LuniSolari

Come visto nel paragrafo 2.1 l'orbita di un satellite può essere perturbata dalla forza gravitazionale generata da un terzo corpo, che può essere ad esempio nel caso di orbita terrestre la Luna o il Sole. Si consideri un sistema di riferimento non rotante con l'origine posta nel centro di massa della Terra, Figura 4.1. La posizione del satellite di massa m_s è $\vec{r}_s$, la posizione del corpo perturbante di massa m_d è $\vec{r}_d$ e la massa della terra è m_e.

L'accelerazione principale dovuta alla forza di attrazione tra la Terra e il satellite è $\vec{a}_m$ ed in accordo con la 2.12 è data da:

$$a_m = G\frac{m_e}{r_s^2}$$

L'accelerazione perturbativa, dovuta all'attrazione tra il satellite e il corpo perturbante è data dalla 2.8:

$$a_d = Gm_d\sqrt{\left(\frac{\vec{r}_{sd}}{r_{sd}^3}-\frac{\vec{r}_d}{r_d^3}\right)\cdot\left(\frac{\vec{r}_{sd}}{r_{sd}^3}-\frac{\vec{r}_d}{r_d^3}\right)}$$

che può essere riscritta nel seguente modo:

$$a_d = Gm_d\sqrt{\frac{1}{r_{sd}^4}+\frac{1}{r_d^4}-\frac{2\cos\alpha}{r_{sd}^2 r_d^2}} \qquad \textbf{4.1}$$

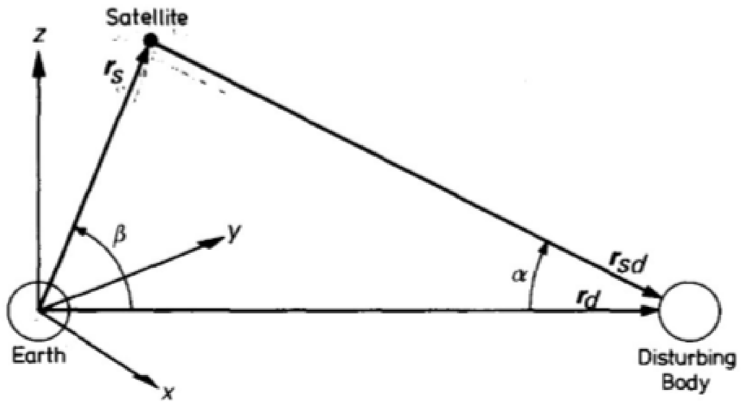

Figura 4.1: Posizione relativa di Terra, satellite e corpo perturbante

Dalla Figura 4.1 si ottiene che:

$$r_{sd}\cos\alpha + r_s\cos\beta = r_d$$

da cui si ricava che:

$$\cos\alpha = \frac{r_d - r_s\cos\beta}{r_{sd}}$$

Mentre il modulo di $\vec{r}_{sd}$ si utilizza la legge del coseno:

$$r_{sd}^2 = r_s^2 + r_d^2 - 2r_s r_d\cos\beta$$

Sostituendo nella 4.1 si ottiene la seguente relazione:

$$a_d = G\frac{m_d}{r_d^2}\sqrt{1+\frac{1}{(1-2\epsilon\cos\beta+\epsilon^2)^2}-2\frac{1-\epsilon\cos\beta}{(1-2\epsilon\cos\beta+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

dove $\epsilon = \frac{r_s}{r_d} \ll 1$. Facendo un'espansione di Taylor di ϵ e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore si ottiene che:

$$a_d = Gm_d\frac{r_s}{r_d^3}\sqrt{1+3\cos^2\beta} \qquad \textbf{4.2}$$

dividendo per l'accelerazione principale si ottiene che:

$$\frac{a_d}{a_m} = \frac{m_d}{m_e}\left(\frac{r_s}{r_d}\right)^3\sqrt{1+3\cos^2\beta}$$

Dalla relazione appena trovata si vede che l'accelerazione di perturbazione dipende dalla posizione del terzo corpo. La perturbazione sarà massima quando i tre corpi sono allineati, in congiunzione di fase per $\beta = 0$ oppure in opposizione di fase quando $\beta = \pi$, e sarà pari a:

$$\frac{a_d}{a_m} = \frac{a_d}{a_m} = 2\frac{m_d}{m_e}\left(\frac{r_s}{r_d}\right)^3$$

Nel caso in cui si fosse in quadratura di fase, ossia β pari a $\frac{\pi}{2}$, l'accelerazione sarà minima:

$$\frac{a_d}{a_m} = \frac{m_d}{m_e}\left(\frac{r_s}{r_d}\right)^3$$

All'aumentare della distanza dal corpo principale l'accelerazione perturbativa assume sempre maggior importanza.

In Tabella 4.1 sono riportati gli andamenti delle accelerazioni di perturbazione per un satellite geosincrono ad una quota di $42200\ km$. Dalla tabella si può vedere che le accelerazioni perturbative di maggior intensità sono dovute principalmente al Sole e alla Luna, mentre possono essere trascurate per tutti gli altri corpi.

Tabella 4.1: Accelerazioni perturbativa per un satellite geosincrono dovute all'attrazione di un terzo corpo

Terzo corpo	$\frac{m_d}{m_e}$	$\frac{r_d}{r_e}$	$\frac{a_d}{a_m}$
Sole	332946	$3.48 \cdot 10^3$	$1.6 \cdot 10^{-5}$
Mercurio	0.056	$1.83 \cdot 10^3$	$1.8 \cdot 10^{-11}$
Venere	0.815	$9.03 \cdot 10^2$	$2.2 \cdot 10^{-9}$
Luna	0.0123	9.1	$3.3 \cdot 10^{-5}$
Marte	0.107	$1.29 \cdot 10^3$	$1.0 \cdot 10^{-10}$
Giove	317.9	$1.39 \cdot 10^4$	$2.4 \cdot 10^{-10}$
Saturno	95.2	$2.83 \cdot 10^4$	$8.4 \cdot 10^{-12}$
Urano	14.6	$6.11 \cdot 10^4$	$1.3 \cdot 10^{-13}$
Nettuno	17.2	$1.02 \cdot 10^5$	$3.3 \cdot 10^{-14}$
Pluto	0.11	$1.01 \cdot 10^5$	$2.1 \cdot 10^{-16}$
α Centauri A	$3.6 \cdot 10^5$	$9.68 \cdot 10^8$	$8.0 \cdot 10^{-22}$

4.3.1 Sfere d'influenza

Si consideri il moto di un satellite di massa m relativo a un sistema non rotante nella cui origine è posto il centro della terra. Si assume che l'unica forza perturbativa agente sul corpo sia la forza gravitazionale del Sole. La massa del Sole e della Terra sono indicate rispettivamente con m_s e m_e. Dalla 2.11 e dalla 4.2 si determina l'accelerazione principale dovuta alla Terra, a_{m_e}, e l'accelerazione di perturbazione dovuta al sole, a_{p_s}:

$$a_{m_e} = G\frac{m_e}{r_{ec}^2}$$
$$a_{p_s} = Gm_s\frac{r_{ec}}{r_{es}^3}\sqrt{1+3\cos^2\beta} \qquad \textbf{4.3}$$

Dove $\vec{r}_{ec}$ è il raggio vettore Terra-satellite e $\vec{r}_{es}$ è il raggio vettore Terra-Sole. Anche in questo caso la massa del satellite è stata trascura in quanto molto minore rispetto alle masse in ballo.

Se adesso si considera, invece, il moto del satellite rispetto a un sistema di riferimento eliocentrico si avrà che in questo caso la Terra sarà il corpo perturbante e l'equazione del moto sarà dato dalla 2.7:

$$\ddot{\vec{r}}_{sc} + G\frac{m_s}{r_{sc}^3}\vec{r}_{sc} = Gm_e\left(\frac{\vec{r}_{ce}}{r_{ce}^3} - \frac{\vec{r}_{se}}{r_{se}^3}\right)$$

Considerando l'espressione appena scritta, in questo caso l'accelerazione principale sarà data dalla componente dovuta al sole, a_{m_s}, mentre quella di perturbazione sarà quella dovuta alla Terra, a_{p_e}, le cui espressioni saranno le seguenti:

$$a_{m_s} = G\frac{m_s}{r_{sc}^2} \qquad \textbf{4.4}$$
$$a_{p_e} = Gm_e\sqrt{\left(\frac{\vec{r}_{ce}}{r_{ce}^3} - \frac{\vec{r}_{se}}{r_{se}^3}\right)\cdot\left(\frac{\vec{r}_{ce}}{r_{ce}^3} - \frac{\vec{r}_{se}}{r_{se}^3}\right)}$$

facendo un'espansione in serie della a_{p_e} rispetto a $\frac{r_{ce}}{r_{se}}$ e considerando che $\frac{r_{ce}}{r_{se}} \ll 1$ si ottiene che:

$$a_{p_e} = G\frac{m_e}{r_{ce}^2} \qquad \textbf{4.5}$$

Quando il satellite si trova su una superficie intorno alla Terra per cui vale la seguente uguaglianza:

$$\frac{a_{p_s}}{a_{m_e}} = \frac{a_{p_e}}{a_{m_s}} \qquad \textbf{4.6}$$

allora si ha che il moto del satellite può essere approssimato sia con il problema dei due corpi geocentrico disturbato dal Sole e sia dal problema dei due corpi eliocentrico disturbato dalla presenza della Terra. Per cui andando a sostituire nella 4.6 la 4.3, la 4.4 e la 4.5 si ottiene l'equazione di questa superficie che sarà data dalla seguente relazione:

$$\left(\frac{r_{ec}}{r_{es}}\right)^5 = \frac{\left(\frac{m_e}{m_s}\right)^2}{\sqrt{1+3\cos^2\beta}}$$

Questa superficie è assialsimmetrica rispetto alla congiungente Terra-Sole. La sua forma è leggermente diversa da quella di una sfera poiché durante l'orbita del satellite r_{ec} varia. Per semplicità si può approssimare la superficie a una sfera di raggio pari al massimo valore di r_{ec}. Questa sfera è chiamata *sfera di influenza* o *sfera di attività* della Terra. In maniera analoga si può definire la sfera di influenza di ogni pianeta. Se il raggio di questa sfera è pari a $R_{s.i}$ e la distanza tra il pianeta e il Sole è pari a r_{ps} allora si ha che:

$$R_{s.i} = r_{ps}\left(\frac{m_p}{m_s}\right)^{\frac{2}{5}}$$

Dalla relazione precedente è evidente che il raggio della sfera di influenza vari al variare della distanza del pianeta con il Sole e al variare della massa del pianeta.

Il concetto di sfera d'influenza è stato introdotto da Laplace durante i suoi studi sul moto delle comete nelle immediate vicinanze di Giove.

4.4 Pressione solare e effetti elettromagnetici

Un satellite nel suo moto orbitale intorno alla Terra è anche soggetto alla radiazione solare diretta, alla radiazione solare riflessa dalla Terra, *albedo*, e alla radiazione emessa dalla Terra stessa. In meccanica quantistica la luce è considerata come un fascio di fotoni che possiedono quantità di moto. Se questi fotoni colpiscono la superficie del satellite e sono parzialmente riflesse inducono sul satellite una variazione di quantità di moto chiamata *pressione solare*.

La pressione solare è inversamente proporzionale alla distanza al quadrato dal Sole e vale per 1 UA circa $4.5 \cdot 10^{-6}\,\frac{N}{m^2}$. L'accelerazione di perturbazione dovuta alla pressione solare può essere scritta come:

$$a_{p_{RP}} = p\,\frac{S}{m}$$

dove p è la pressione solare, S la superficie esposta e m la massa del satellite.

Dalla relazione scritta precedentemente si può vedere che satelliti con alto rapporto volume-massa sono più perturbati.

Negli strati alti dell'atmosfera il gas è parzialmente ionizzato per questo motivo c'è la possibilità che il satellite acquisti un potenziale elettrico. Il campo magnetico terrestre andrà a generare una forza elettromagnetica sul satellite che in generale andrà a perturbare l'orbita del satellite ma essendo piccola può essere trascurata.

4.5 Metodi risolutivi

Se il moto di un satellite è descritto rispetto a un sistema di riferimento geocentrico equatoriale non rotante e considerando le forze perturbative, l'equazione del moto può essere scritta nella seguente forma:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} = -\nabla R + \vec{a} \qquad \textbf{4.7}$$

dove R è il potenziale perturbativo o disturbante che include tutte le forze perturbative che possono essere espresse attraverso una funzione potenziale, e $\vec{a}$ sono tutte le forze che non possono essere espresse mediante il gradiente di una funzione scalare.

In generale la 4.7 non può essere risolta in forma chiusa e bisogna ricorrere a metodi numerici o a soluzioni analitiche approssimate; nel primo caso si parla di *perturbazioni speciali* ed invece nel secondo caso di *perturbazioni generali*.

I metodi delle perturbazioni speciali generano solo una specifica traiettoria per un dato satellite, che dipende dalle condizioni iniziali. La determinazione dell'orbita avviene attraverso l'utilizzo di metodi di integrazione numerica passo-passo e sono classificati in base a come sono formulate le equazioni che devono essere integrate. I tre metodi classici più utilizzati sono il *metodo di Cowell*, il *metodo di Encke* e il *metodo della variazione dei parametri orbitali*. Una scelta importante nei metodi delle perturbazioni speciali è la scelta della tecnica numerica di integrazione più appropriata.

I metodi delle perturbazioni generali consistono, invece, in un metodo analitico in cui le accelerazioni perturbative sono espanse in serie ed integrate termine per termine. In pratica solo un numero limitato di termini della serie è tenuto in considerazione. In questo modo si ottiene una soluzione in forma analitica dell'equazione differenziale del moto che descrive la variazione dell'orbita come funzione del tempo per una particolare forza perturbativa. Questi metodi forniscono soluzioni che possono essere applicate generalmente per qualsiasi satellite e per qualsiasi condizione iniziale. Il metodo classico delle perturbazioni generali più usato è il metodo della variazione dei parametri orbitali, menzionato precedentemente anche nei metodi speciali. I metodi più conosciuti sono ad esempio il metodo delle *approssimazioni successive*, le *espansioni in serie di Taylor*, le *espansioni asintotiche multi-variabili* e la *media*. Il problema principale di questi metodi è la grande quantità di valori analitici coinvolti, specialmente per quanto riguarda approssimazioni di ordine elevato; anche se attualmente la maggior parte delle analisi associate con lo sviluppo di teorie di alto ordine è svolto con i calcolatori.

Altre ai metodi appena citati esistono numerosi altri metodi specializzati e in molti casi molto complessi.

Il principale vantaggio del metodo delle perturbazioni speciali è quello di essere direttamente applicabile a ogni orbita e a ogni tipo di perturbazione, ma poiché è un metodo puramente numerico si ha il problema di accumulare errori per cui è sconsigliato per predizioni a lungo termine sulle orbite ed inoltre questi metodi richiedono la valutazione delle componenti di posizione e velocità del satellite per tutte le stazioni precedenti a quella di interesse che porta a tempi di integrazione molto lunghi.

Un vantaggio dei metodi delle perturbazioni generali è quello che una volta che l'espressione analitica, che descrive l'effetto della forza perturbativa, è disponibile, la valutazione dell'orbita perturbata al variare delle condizioni iniziali è più rapida. Ma il loro principale vantaggio è quello che conoscendo i dati orbitali è possibile individuare chiaramente la sorgente della perturbazione.

4.5.1 Metodo di Cowell

Il metodo più semplice per determinare l'orbita perturbata di un satellite è il metodo di Cowell e consiste in un'integrazione numerica diretta dell'equazioni del moto. L'equazione del moto è scritta nella seguente forma:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}$$

dove $\vec{a}$ rappresenta l'accelerazione totale:

$$\vec{a} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} - \nabla R + \vec{a}$$

Questo metodo non utilizza l'informazione che la traiettoria può essere approssimata attraverso una sezione conica e integra numericamente l'equazione del moto nella sua forma elementare. La semplicità del modello fa sì che sia estremamente utile, flessibile e immediato da implementare su un calcolatore, Uno svantaggio di questo metodo è quello che, poiché l'accelerazione totale può variare sensibilmente durante l'orbita, i passi di integrazione devono essere piccoli per mantenere l'accuratezza richiesta. In aggiunta, bisogna mantenere un gran numero di cifre significative in modo da non perdere gli effetti delle piccole accelerazioni.

4.5.2 Metodo di Encke

Il metodo di Encke sfrutta un'orbita di riferimento e vengono integrate numericamente solamente le deviazioni dall'orbita di riferimento. Per semplicità si considera come orbita di riferimento un'orbita Kepleriana, anche se questa assunzione non è necessaria. L'equazione del moto del satellite può essere scritta come:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} = -\nabla R + \vec{a} \qquad \textbf{4.8}$$

Per l'orbita Kepleriana di riferimento si ha che:

$$\frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} + \frac{\mu}{\rho^3}\vec{\rho} = 0 \qquad \textbf{4.9}$$

dove $\vec{\rho}$ è il vettore posizione del satellite se questo seguisse l'orbita di riferimento imperturbata. Si assume che per alcuni intervallo di tempo valgono le seguenti uguaglianze:

$$t = t_o \qquad \vec{r} = \vec{\rho} \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\rho}}{dt}$$

Poiché l'orbita di riferimento è Kepleriana, la 4.9 può essere risolta analiticamente per determinare la posizione e la velocità in ogni istante di tempo nell'orbita di riferimento. Per le deviazioni dell'orbita perturbata rispetto a quella di riferimento si può scrivere che al tempo t vale che:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{\rho}$$

Derivando due volte rispetto al tempo e sostituendo la 4.8 e la 4.9 si ottiene che:

$$\frac{d^2}{dt^2}\Delta\vec{r} = \mu\left(\frac{\vec{\rho}}{\rho^3} - \frac{\vec{r}}{r^3}\right) - \nabla R + \vec{a}$$

Integrando questa equazione è possibile ottenere la variazione di posizione e velocità relativa rispetto ai valori ottenuti con l'orbita di riferimento. Quest'ultimi sono determinati analiticamente e la posizione e la velocità in ogni istante t dell'orbita perturbata si ottengono rispettivamente sommando $\vec{\rho}$ e $\Delta\vec{r}$ e $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$ e $\frac{d\Delta\vec{r}}{dt}$.

Il primo termina al secondo membro della 4.8 comporta delle difficolta a livello numerico in quanto è la differenza di quantità circa uguali per cui è una quantità piccola che è sempre sconsigliata nel calcolo numerico. Per cui può riscritta dopo alcuni passaggi nel seguente modo:

$$\frac{d^2}{dt^2}\Delta\vec{r} = \frac{\mu}{\rho^3}[(\vec{\rho} + \Delta\vec{r})qf(q) - \Delta\vec{r}] - \nabla R + \vec{a} \qquad \textbf{4.10}$$

dove q è definita come:

$$q = \frac{\Delta\vec{r} \cdot \left(\rho + \frac{1}{2}\Delta\vec{r}\right)}{\rho^2}$$

mentre f è una funzione di q.

La 4.10 è la forma dell'equazione del moto relativo più comunemente utilizzata quando si applica il metodo di Encke.

Poiché nel metodo di Encke viene integrata numericamente solo l'accelerazione di perturbazione per ottenere la deviazione rispetto all'orbita di riferimento è possibile utilizzare un passo di integrazione maggiore rispetto a quello utilizzato per il metodo di Cowell. Per piccole ma forti variazioni delle forze perturbative, nella maggior parte dei casi il metodo di Encke fornisce un processo computazionale più efficiente rispetto al metodo di Cowell.

Se le perturbazioni si accumulano, $\Delta\vec{r}$ può diventare molto grande per cui la formulazione di Encke perde il suo vantaggio rispetto alla formulazione più semplice di Cowell. Allora l'orbita di riferimento deve essere rettificata, e bisognerà scegliere una nuova orbita di riferimento e in quell'instate $\Delta\vec{r}$ e $\frac{d}{dt}\Delta\vec{r}$ devono essere nulli. Uno dei criteri di rettifica più approssimativo è stato proposto da Herrick [4].

Una variante estesa del metodo di Encke, specializzata nel calcolo delle traiettorie dei satelliti, è stata realizzata da Stumpff e Weiss in [5].

4.5.3 Metodo della variazione dei parametri orbitali

La teoria del metodo della variazione dei parametri orbitali [6], detto anche metodo di variazione dei parametri o metodo di variazione delle costanti, è stato pubblicato da Lagrange nel 1808. Oggigiorno è uno dei più importanti metodi per il calcolo delle orbite perturbate dei satelliti.

Il concetto alla base della teoria è l'introduzione dell'orbita osculatrice. Nelle orbite Kepleriane i sei parametri orbitali rimangono costanti e sono determinati univocamente dalla posizione, $\vec{r}$, e dalla velocità, $\vec{v}$, del satellite in qualsiasi istante. Generalizzando questo risultato, si definisce una sezione conica immaginaria tale che a ogni istante di tempo esiste la stessa relazione di trasformazione tra la posizione e la velocità nell'orbita perturbata e i parametri orbitali dell'orbita immaginaria. Poiché l'orbita perturbata non è Kepleriana, i parametri orbitali che si ottengono in questa maniera non sono più costanti ma variano nel tempo. La sezione conica immaginaria è detta orbita osculatrice e i suoi parametri orbitali sono detti parametri orbitali osculatori. Si noti che l'orbita osculatrice al tempo t è tangente alla traiettoria perturbata al tempo t ed inoltre le velocità nel punto osculatore sono le stesse tra le due orbite. L'orbita osculatrice non sarebbe altro che l'orbita che il satellite avrebbe se tutte le perturbazioni sparissero istantaneamente. Si può pensare che il satellite passi da un'orbita Kepleriana ad un'altra.

Il concetto di orbita osculatrice è estremamente utile poiché ogni cambiamento nei parametri osculatori può essere legato direttamente a una forza perturbativa ed inoltre i parametri osculatori posseggono un chiaro significato geometrico per cui gli effetti delle forze perturbative possono essere compresi fisicamente.

5 Sistemi di riferimento

Il primo requisito per descrivere un'orbita è quello di definire un adeguato sistema di riferimento. Nel caso di orbite intorno al Sole descritte da pianeti, asteroidi e alcune sonde nello spazio profondo è conveniente utilizzare un sistema di riferimento eliocentrico. Per i satelliti terrestri, invece, è conveniente utilizzare un sistema di riferimento geocentrico-equatoriale.

Per definire un sistema di riferimento è necessario fornire la posizione dell'origine, l'orientamento del piano fondamentale, ad esempio il piano xy, la direzione e il verso dell'asse x, il verso dell'asse z, poiché è sempre perpendicolare al piano xy ed infine, il verso dell'asse y è definito in modo tale da generare una terza destrorsa.

5.1 Sistema eliocentrico-eclittica

Il sistema eliocentrico-eclittica come dice il nome ha origine al centro del Sole e ha come piano fondamentale il piano dell'eclittica che è il piano di rivoluzione della Terra intorno al Sole. La linea di intersezione del piano dell'eclittica e il piano dell'equatore terrestre definisce la direzione dell'asse X, come in Figura 5.1. Il verso positivo dell'asse X è dato dalla linea che nel primo giorno di primavera unisce il centro della Terra con il Sole. Questa linea è chiamata direzione dell'equinozio di primavera ed è indicata con la lettera γ poiché punta nella direzione della costellazione dell'Ariete. La precessione della Terra fa oscillare la direzione del suo asse di rotazione e porta ad una rotazione della linea di intersezione dell'equatore terrestre e dell'eclittica. Di conseguenza il sistema di riferimento eliocentrico-eclittico non è inerziale. Il verso positivo di Z è preso concorde con la direzione di rivoluzione della Terra intorno al Sole.

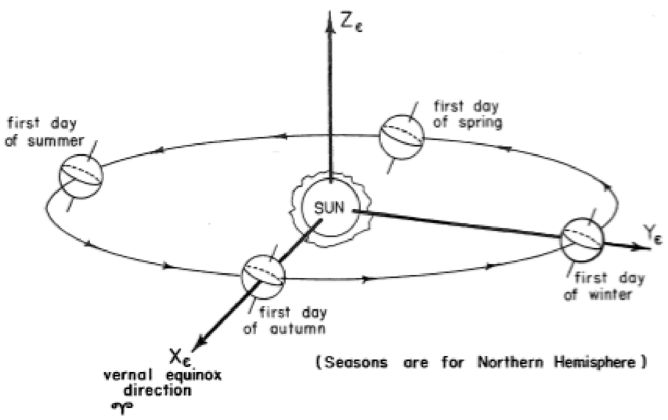

Figura 5.1: Sistema di riferimento eliocentrico-ecclittica

5.2 Sistema geocentrico-equatoriale

Il sistema geocentrico-equatoriale ha origine nel centro della Terra e il piano fondamentale è il piano equatoriale. L'asse X è diretto nella direzione dell'equinozio di primavera e il verso positivo dell'asse Z è diretto verso il polo nord. Dalla Figura 5.2 è importante notare che il sistema XYZ non è fisso alla Terra e non ruta con essa; il sistema geocentrico-equatoriale è fisso rispetto alle stelle fisse e la Terra ruota rispetto ad esso. I versori $\vec{I}$, $\vec{J}$ e $\vec{K}$ giacciono rispettivamente lungo X, Y e Z.

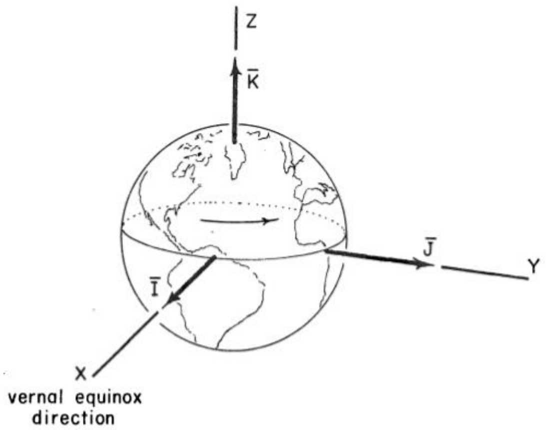

Figura 5.2: Sistema di riferimento geocentrico-equatoriale

5.3 Sistema ascensione retta-declinazione

Il sistema ascensione retta-declinazione è strettamente legato al sistema geocentrico-equatoriale. Il piano fondamentale è l'equatore celeste che è l'estensione del piano dell'equatore terrestre a una sfera fittizia di raggio infinito detta sfera celeste. La posizione di un oggetto proiettato sulla sfera celeste è descritta da due angoli chiamati ascensione retta e declinazione.

Come mostrato in Figura 5.3 l'ascensione retta, α, viene misurato verso est rispetto all'equinozio di primavera nel piano dell'equatore celeste. La declinazione, δ, viene misura verso nord dall'equatore celeste.

L'origine del sistema di riferimento può essere al centro della Terra e si parlerà di sistema geocentrico oppure su un punto sulla superficie e si parlerà di sistema topocentrico.

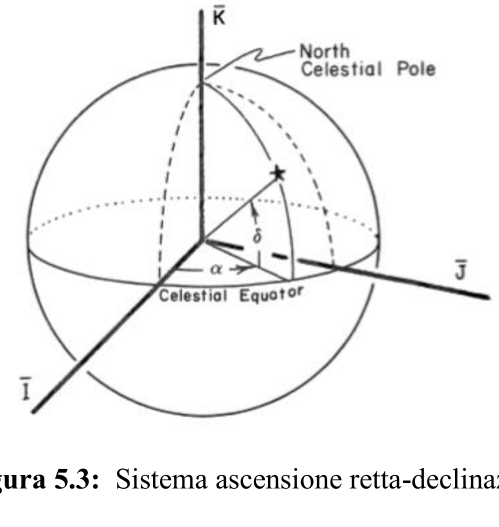

Figura 5.3: Sistema ascensione retta-declinazione

5.4 Sistema perifocale

Uno dei sistemi di riferimento più convenienti per descrivere il moto di un satellite è il sistema perifocale. In questo caso il piano fondamentale è il piano dell'orbita del satellite. Gli assi sono denominati $\vec{P}$, $\vec{Q}$ e $\vec{W}$. L'asse P punta verso il perigeo, l'asse Q è ruotato di 90 deg in direzione del moto e giace sul piano orbitale e l'asse W giace lungo $\vec{h}$, Figura 5.4.

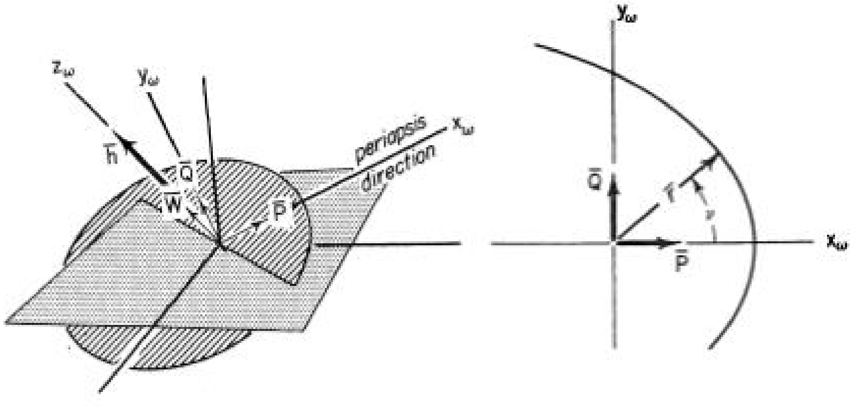

Figura 5.4: Sistema perifocale

6 Manovre orbitali

Le manovre orbitali vengono utilizzate per compensare le perturbazioni, correggere gli errori di ignizione e per effettuare la trasferta dall'orbita di parcheggio a quella finale.

Se il tempo della manovra è molto minore rispetto alla durata della missione si può utilizzare un modello semplificato di manovra impulsiva. Per manovra impulsiva si intende una manovra con spinta infinita in un tempo infinitesimo. Tale ipotesi è valida per missioni interplanetarie dove il tempo di missione è molto maggiore rispetto al tempo di manovra ma non è valido nel caso di missioni a propulsione elettrica che sono caratterizzate da basse spinte e tempi di manovra molto lunghi. Questo metodo è un metodo ideale che fornisce il minimo consumo teorico di propellente e la variazione di energia è solo cinetica, in quanto il raggio durante la manovra rimane costante.

6.1 Manovre complanari

Le manovre complanari avvengono tra orbite che giacciono sullo stesso piano.

6.1.1 Manovre tra orbite circolari complanari

Si ipotizza di avere due orbite circolari complanari con r_2 maggiore di r_1. L'orbita di trasferimento, Figura 6.1, deve intersecare entrambe le orbite per cui è sottoposta a due vincoli:

$$r_p \leq r_1$$

$$r_a \geq r_2$$

dove r_p è il perigeo dell'orbita di trasferimento e r_a è l'apogeo.

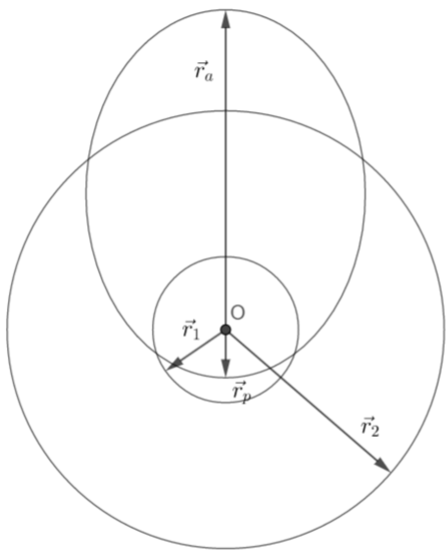

Figura 6.1: Orbita di trasferimento complanare

L'equazione di una conica in forma polare è:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}$$

Per cui i due vincoli possono essere riscritti come:

$$r_p = a(1-e) = \frac{p}{1+e} \le r_1 \to \frac{p}{r_1} \le 1 + e$$

$$r_a = a(1+e) = \frac{p}{1-e} \ge r_2 \to \frac{p}{r_1} \ge (1-e)\frac{r_2}{r_1}$$

Andando a diagrammare le due equazioni nel diagramma $\frac{p}{r_1} - e$, Figura 6.2, si ottiene il campo utile, *feasible region*, che è la zona non tratteggiata in Figura 6.2 al disopra delle due curve.

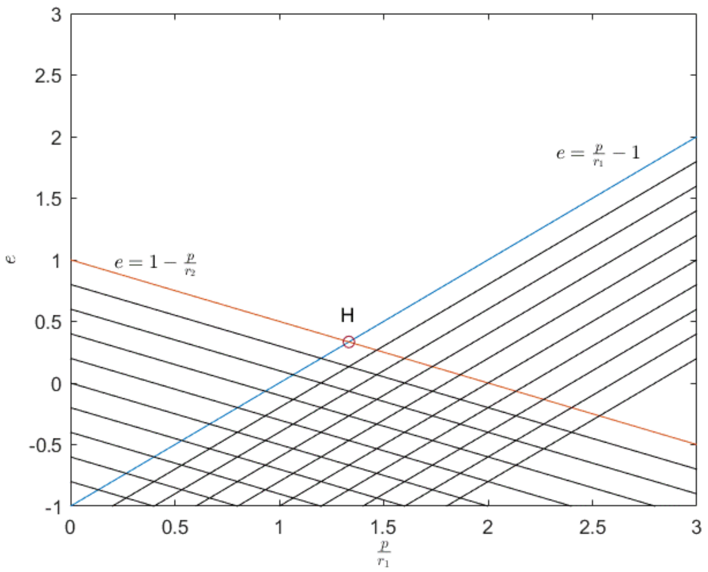

Figura 6.2: Feasible region

Le orbite di trasferimento non sono solo ellittiche ma possono essere anche paraboliche e iperboliche. I punti che giacciono sulle rette che delimitano la regione utile corrispondono a le orbite di trasferimento che sono tangenti ad una o all'altra orbita circolare. Nel punto H sono verificate entrambe le uguaglianze per cui si ottiene la trasferta di Hohmann.

6.1.2 Trasferta di Hohmann

Nel caso della trasferta di Hohmann, Figura 6.3, l'orbita di trasferimento è tangente sia all'orbita di partenza che all'orbita di arrivo per cui vale che:

$$r_p = r_1$$

$$r_a = r_2$$

La trasferta di Hohmann è la trasferta più economica tra le trasferte tra orbite circolari complanari ma è anche la trasferta più lunga tra le trasferte che salgono solamente.

Poiché l'orbita di trasferimento è tangente nel periastro all'orbita di raggio minore e all'apoastro all'orbita con raggio maggiore si ottiene che:

$$a_H = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

$$e_H = \frac{r_2 - r_1}{r_2 - r_1}$$

Inoltre, poiché i due impulsi sono paralleli al vettore velocità non si hanno perdite per disallineamento e perdite per gravità in quanto si spinge in orizzontale.

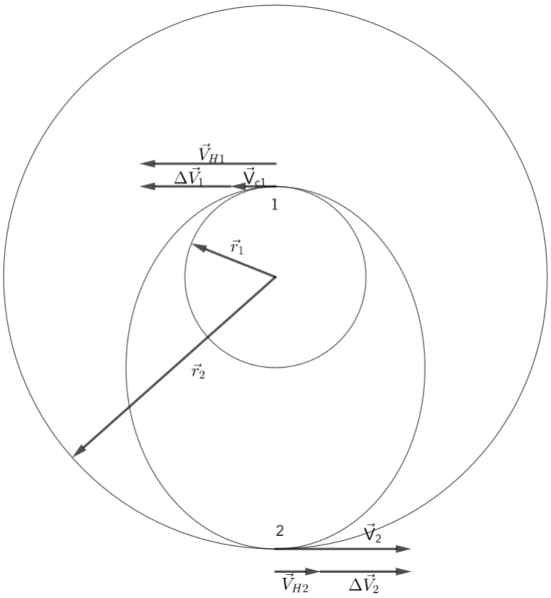

Figura 6.3: Trasferta di Hohmann

La velocità del satellite sull'orbita di partenza è pari a:

$$V_{c_1} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}$$

La velocità circolare del satellite sull'orbita di arrivo è pari a:

$$V_{c_2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}}$$

Le espressioni della V_{H_1} e V_{H_2} si ottengono applicando il bilancio dell'energia rispettivamente al periastro e all'apoastro dell'orbita di trasferimento. L'energia meccanica specifica è data da:

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu}{2a} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r}$$

Per la trasferta di Hohmann si ottiene che:

$$\mathcal{E}_H = -\frac{\mu}{2a_H} = -\frac{\mu}{r_1 + r_2} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r}$$

e quindi si ricava che:

$$V_{H_1} = \sqrt{2\left(\frac{\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_1 + r_2}\right)}$$

e

$$V_{H_2} = \sqrt{2\left(\frac{\mu}{r_2} - \frac{\mu}{r_1 + r_2}\right)}$$

Dalla Figura 6.3 si vede che il costo del primo impulso è pari a:

$$\Delta V_1 = V_{H_1} - V_{c_1} = V_{c_1}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1\right) > 0$$

e il costo della seconda manovra:

$$\Delta V_2 = V_{c_2} - V_{H_2} = V_{c_2}\left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}}\right) > 0$$

Il costo complessivo della manovra sarà pari a:

$$\Delta V = \|\Delta V_1\| + \|\Delta V_2\|$$

In questo caso il trasferimento è avvenuto tra un'orbita a raggio inferiore ad una di raggio maggiore attraverso due incrementi di velocità. Se il trasferimento avviene tra un'orbita di raggio maggiore a una di raggio inferiore saranno necessari due decrementi di velocità.

Poiché l'orbita di trasferimento è una semiellisse il tempo di manovra sarà pari alla metà del periodo orbitale:

$$\Delta t_H = \frac{T_E}{2} = \pi\sqrt{\frac{a_H^3}{\mu}}$$

Se si vuole ridurre il Δt si possono sfruttare traiettorie diverse. Aumentando il ΔV richiesto è possibile effettuare la trasferta con l'utilizzo di traiettorie paraboliche o iperboliche, Figura 6.4. Si parte sempre tangenti al perigeo e si arriva sull'orbita finale percorrendo un tratto minore a velocità maggiore. In generale, si preferisce utilizzare orbite ellittiche in questo modo si evita di perdere il satellite in caso di errore.

Andando a diagrammare $\frac{\Delta V}{V_{c_1}}$ in funzione di $\frac{r_2}{r_1}$ in Figura 6.5. Il ΔV è localmente massimo per $r_2 \approx 16r_1$. Se $r_2 > 16r_1$ risulta più conveniente una manovra biellittica a 3 impulsi rispetto alla manovra di Hohmann.

Dal grafico in Figura 6.5 si può vedere che è più dispendioso avvicinarsi al corpo centrale rispetto ad evadere dal corpo centrale a causa delle perdite per gravità.

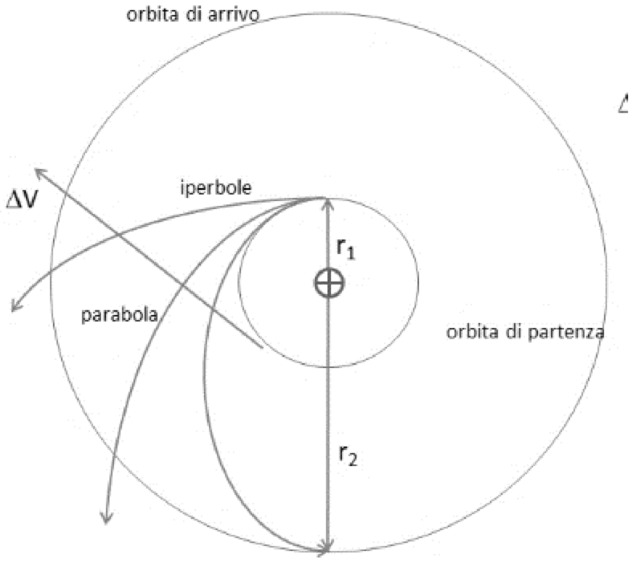

Figura 6.4: Trasferimento complanare al variare di $\boldsymbol{\Delta V}$

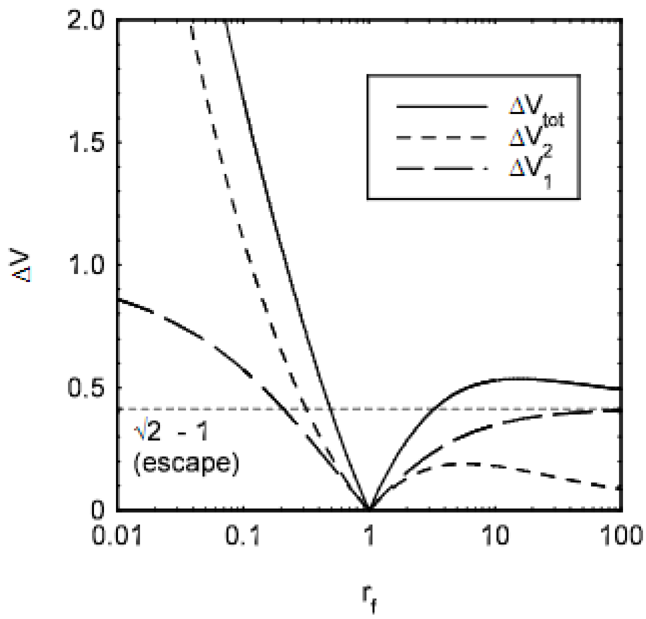

Figura 6.5: Andamento del $\boldsymbol{\Delta V}$ richiesto al variare di $\frac{r_2}{r_1}$

6.2 Manovre di evasione

Per velocità di evasione si intende la velocità che nel punto di burn-out che mi permette di arrivare a raggio ∞ con velocità nulla.

Dal bilancio dell'energia facendo tendere il raggio all'infinito si ottiene che:

$$\mathcal{E} = \frac{v_\infty^2}{2} - \frac{\mu}{r_\infty} = -\frac{\mu}{2a} = 0$$

da cui si ottiene che $a \to \infty$ per cui la traiettoria deve essere parabolica, Figura 6.6.

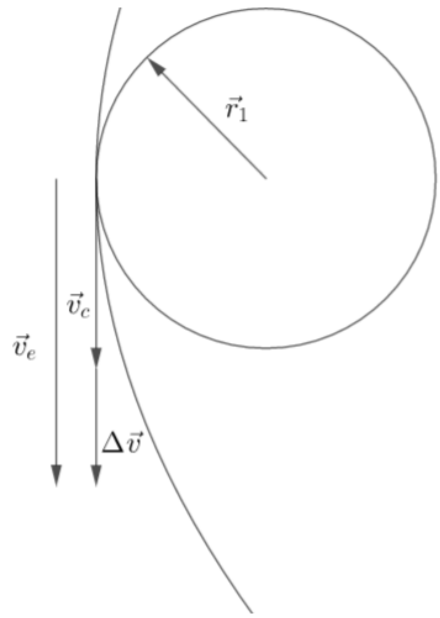

Figura 6.6: Escape parabolico

Dal bilancio di energia si ha che:

$$\mathcal{E} = \frac{v_e^2}{2} - \frac{\mu}{r} = 0$$

da cui si ottiene che:

$$v_e = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{2}v_c$$

Dalla Figura 6.6 si può vedere che l'impulso necessario sarà:

$$\Delta v = v_e - v_c = v_c\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

Nel caso invece si vuole un eccesso di velocità all'infinito, $v_\infty > 0$ allora dal bilancio dell'energia si ottiene che:

$$\mathcal{E} = \frac{v_\infty^2}{2} - \frac{\mu}{r_\infty} = -\frac{\mu}{2a} = \frac{v_\infty^2}{2}$$

da cui si ottiene che a è minore di zero per cui si la traiettoria sarà iperbolica.

Per determinare la velocità di evasione iperbolica si utilizza il bilancio dell'energia per cui:

$$\mathcal{E} = \frac{v_\infty^2}{2} = \frac{v_{e\,ip}^2}{2} - \frac{\mu}{r}$$

$$v_{e_{ip}} = \sqrt{\frac{v_\infty^2}{2} + \frac{2\mu}{r}} = \sqrt{v_\infty^2 - 2v_c^2}$$

da cui si ottiene che:

$$\Delta v_{e_{ip}} = v_{e_{ip}} - v_c = \sqrt{v_\infty^2 - 2v_c^2} - v_c$$

In Figura 6.7 è possibile andare a confrontare gli andamenti dei due metodi. Dalla figura si può vedere che l'escape iperbolico è sempre più conveniente rispetto ad un escape parabolico con l'aggiunta di v_∞. Inoltre, per $V_\infty > 0.5$ si ha che ΔV è minore di V_∞.

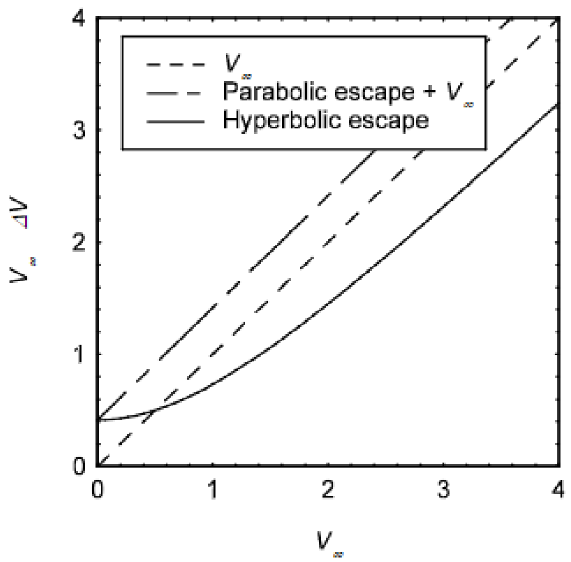

Figura 6.7: Confronto escape iperbolico con escape parabolico più $\boldsymbol{v}_\infty$

6.3 Manovre orbitali fuori dal piano

Una variazione di velocità che avviene nel piano dell'orbita può cambiare la dimensione, la forma o ruotare la linea degli apsidi. Se la variazione di velocità avviene fuori dal piano orbitale si ottiene una rotazione del piano orbitale.

6.3.1 Cambio di piano semplice

Se si vuole cambiare il piano orbitale, Figura 6.8, senza cambiare gli altri parametri orbitale è necessario manovrare in uno dei due nodi in modo tale da non far variare Ω mantenendo il modulo del vettore velocità costante.

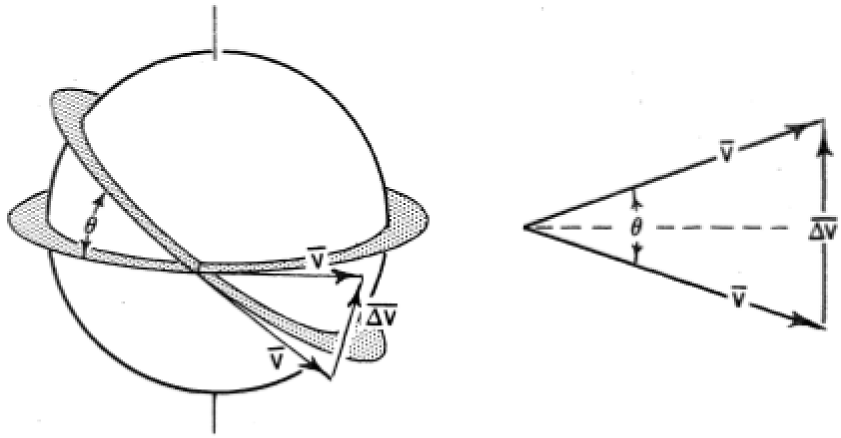

Figura 6.8: Cambio di piano semplice

Se si vuole cambiare il piano orbitale di un angolo pari a θ, essendo il modulo del vettore velocità costante si ottiene un triangolo isoscele in Figura 6.8. In questo modo applicando la legge del coseno al triangolo isoscele si ottiene che:

$$\Delta v = 2v \sin\frac{\theta}{2}$$

Il costo della manovra è direttamente proporzionale alla velocità nel punto di manovra, per cui è preferibile manovrare quando la velocità è minore ossia all'apoastro.

6.4 Flyby

L'effetto fionda gravitazionale è utilizzato per variare la velocità eliocentrica di un satellite senza l'utilizzo di propellente. Per far questo si sfrutta lo scambio di momento angolare tra il pianeta e il satellite. Questa manovra può essere utilizzata non solo per variare la velocità di un satellite incrementando o diminuendo la sua velocità ma anche per cambiarne la direzione.

Un flyby planetario avviene quando un satellite entra nella sfera d'influenza del pianeta e non attera sul pianeta o non rimane in orbita intorno ad esso. Il satellite continua la sua traiettoria iperbolica raggiungendo il periastro ed infine esce dalla sfera d'influenza.

Si consideri il caso di un satellite che realizza un flyby attorno a un pianeta del sistema solare.

Si utilizza il metodo delle coniche raccordate, si parte dal punto in cui il satellite entra nella sfera d'influenza del pianeta. Il sistema può essere descritto con il modello dei due corpi e si considera per semplicità una manovra complanare. Il problema è schematizzato in Figura 6.9.

All'ingresso della sfera d'influenza del pianeta, la velocità relativa, $V_{\infty\_}$ della sonda rispetto al pianeta è data da:

$$\vec{V}_{\infty}^{-} = \vec{V}^{-} - \vec{V}_p$$

dove $\vec{V}^{-}$ è la velocità del satellite nel sistema di riferimento eliocentrico all'ingresso nella sfera d'influenza del pianeta e $\vec{V}_p$ è la velocità del pianeta.

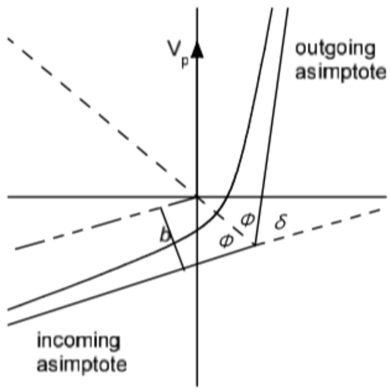

Figura 6.9: Flyby dietro al pianeta

A questo punto, una volta valutata $\vec{V}_\infty^-$ e ricordando che il satellite inizia la sua orbita intorno al pianeta nel momento in cui entra nella sfera d'influenza del pianeta, il satellite evaderà dalla sfera d'influenza con una velocità relativa $\vec{V}_\infty^+$.

Scrivendo l'equazione di conservazione dell'energia nel punto d'ingresso e di uscita dalla sfera d'influenza si ottiene che:

$$\mathcal{E} = \frac{(V_\infty^-)^2}{2} - \frac{\mu_p}{r_\infty} = \frac{(V_\infty^+)^2}{2} - \frac{\mu_p}{r_\infty}$$

dove il termine $\frac{\mu_p}{r_\infty}$ tende a zero perché si assume che $r_\infty \to \infty$. In questo modo si dimostra che il modulo della velocità relativa rimane costante per cui:

$$V_\infty^+ = V_\infty^-$$

Se non si effettuano manovre la traiettoria rimane iperbolica. Se la velocità relativa del satellite rispetto al pianeta rimane costante in modulo ciò non avviene per la direzione, Figura 6.10. Infatti, la forza gravitazionale del pianeta fa ruotare il vettore velocità dell'angolo δ:

$$\delta = \pi - 2\phi$$

dove $\phi = \mathrm{acos}\frac{1}{e}$ che è l'angolo di apertura dell'iperbole, Figura 6.9, e descrive la variazione in direzione del vettore velocità.

In questo modo all'uscita della sfera d'influenza del pianeta la velocità assoluta del satellite nel sistema di riferimento eliocentrico sarà data dalla composizione della velocità relativa e della velocità del pianeta:

$$\vec{V}^+ = \vec{V}_\infty^+ + \vec{V}_p$$

quindi si ottiene una variazione gratuita del vettore velocità pari a:

$$\Delta V = 2V_\infty \sin\frac{\delta}{2}$$

se il passaggio della sonda avviene dietro il pianeta δ è maggiore di zero per cui si ha un incremento della velocità, nel caso il passaggio avviene avanti δ è minore di zero per cui si ha un decremento di velocità.

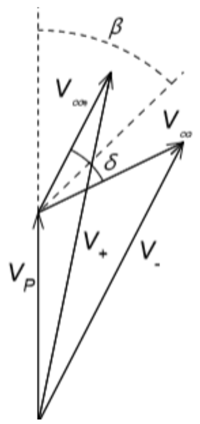

Figura 6.10: Andamento vettori velocità in un flyby dietro il pianeta

Applicando la conservazione del momento angolare del sistema pianeta satellite si ottiene che:

$$\Delta H = m r_s \Delta V - M_p r_s \Delta V_p = 0$$

dove r_s è il raggio della sfera d'influenza del pianeta.

Da cui si ricava che:

$$\Delta V_p = \frac{m}{M_p} \Delta V$$

poiché la massa del satellite è molto minore della massa del pianeta $\Delta V_p \approx 0$ per cui si possono trascurare gli effetti dovuti alla variazione della velocità per pianeta utilizzato per il flyby.

7 Traiettorie lunari

Nella prima parte di questo capitolo si descriverà il sistema Terra-Luna insieme ad alcune irregolarità del movimento della Luna che sono state oggetto di discussione sin dai tempi di Newton.

Nella seconda parte si esaminerà il problema del lancio di un veicolo dalla Terra alla Luna. Una caratteristica importante delle traiettorie lunari non è semplicemente la presenza di due centri di attrazione gravitazionale, ma le dimensioni relative della Terra e della Luna. Sebbene la massa della Luna sia solo $\frac{1}{81}$ della massa della Terra questo rapporto è molto più grande di qualsiasi sistema binario nel nostro sistema solare per cui il sistema Terra-Luna è un evento particolare e si avvicina ad essere un sistema doppio.

7.1 Sistema Terra-Luna

La Luna e la Terra ruotano intorno al centro di massa del sistema Terra-Luna. La distanza media tra il centro della Terra e il centro della Luna è $384400\ km$ e la massa della Luna è $\frac{1}{81.304}$ della massa della Terra. Questo pone il centro del sistema a $4671\ km$ dal centro della Terra a circa ¾ della distanza dal centro alla superficie, per cui il centro di massa del sistema è posto all'interno della Terra. Descrivere il movimento del sistema Terra-Luna è molto complesso poiché il centro di massa compie una rotazione completa attorno al Sole in un anno, per definizione, mentre la Terra e la Luna hanno ruotando attorno al centro di massa con un periodo di rivoluzione pari a 27.3 giorni. Di conseguenza, la longitudine di un oggetto come il Sole o un pianeta vicino mostra fluttuazioni con un periodo di 27.3 giorni derivante dal fatto che lo osserviamo dalla Terra e non dal centro di massa del sistema Terra-Luna.

Il periodo orbitale della Luna non è costante ma sta lentamente aumentando poiché sta aumentando la distanza tra la Terra e la Luna. La lenta deriva della Luna può essere spiegata dal fatto che il movimento delle maree negli oceani terrestri dovuto all'attrazione della Luna è spostato verso est dalla rotazione terrestre. Questo spostamento muovo il baricentro della Terra ad est della linea che unisce i centri di massa della Terra e della Luna, Figura 7.1, e dà alla Luna una piccola componente di accelerazione in direzione della velocità della Luna stessa facendola accelerare e avanzare lentamente verso l'esterno.

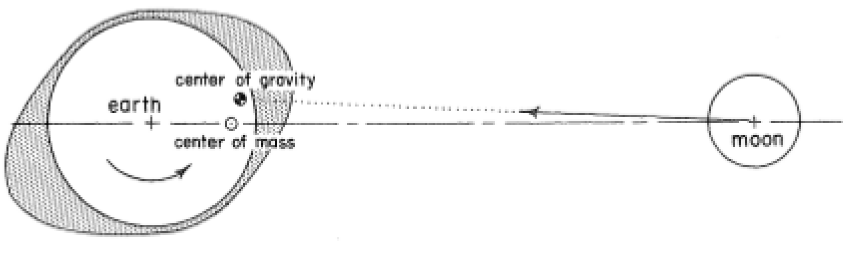

Figura 7.1: Accelerazione della Luna dovuta al movimento delle maree

7.1.1 Parametri orbitali della Luna

Se vista dal centro della Terra, l'orbita della Luna, Figura 7.2, può essere descritta da sei elementi orbitali classici, ad esempio:

- a, semiasse maggiore;
- e, eccentricità;
- i, inclinazione;
- Ω, longitudine del nodo ascendente;
- ω, argomento del perigeo;
- α, ascensione retta.

L'ascensione retta è l'angolo misurato verso est dall'equinozio di primavera alla proiezione del vettore posizione della Luna sul piano equatoriale.

Nel capitolo 2 si è visto che nel problema dei due corpi i parametri orbitali rimangono costanti, ma nel caso dell'orbita lunare ciò non è più vero e variano nel tempo. La variazione dei parametri orbitali dovuta principalmente all'effetto perturbativo dovuto all'attrazione gravitazionale del Sole.

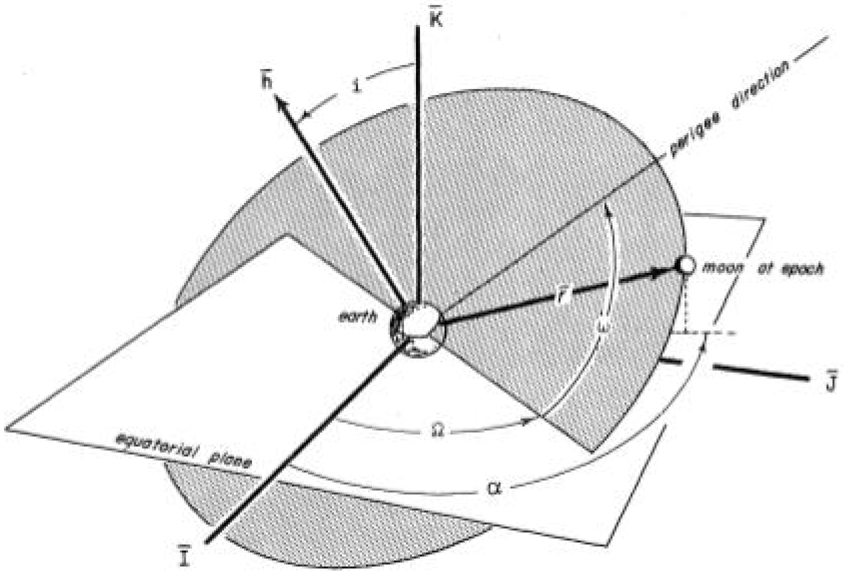

Figura 7.2: Parametri orbitali della Luna

In seguito, sono elencate le principali perturbazioni del moto della Luna:

a. Il valore medio del semiasse maggiore è $384400\ km$, il tempo medio impiegato dalla Luna per compiere una rivoluzione completa attorno alla Terra rispetto alle stelle fisse è di 27.31661 giorni e a causa delle perturbazioni solari, il periodo sidereo può variare fino a 7 ore;
b. L'eccentricità media dell'orbita lunare è 0.054900489 e piccoli cambiamenti periodici nell'eccentricità orbitale si verificano ad intervalli di 31.8 giorni, questo effetto è chiamato fenomeno di evezione lunare;
c. L'orbita della Luna è inclinata rispetto all'eclittica di circa $5\ deg$ e $8'$, la linea dei nodi, che è l'intersezione del piano orbitale della Luna con l'eclittica, ruota verso ovest, facendo una rivoluzione completa in 18.6 anni;
d. L'inclinazione dell'orbita lunare rispetto all'eclittica varia in realtà tra $4\ deg$ e $59'$ e $5\ deg$ e $18'$, l'equatore terrestre è inclinato rispetto all'eclittica di $23\ deg$ e 27', fatta eccezione per la lenta precessione dell'asse di rotazione terrestre con un periodo di 26.000 anni. Il piano equatoriale è relativamente stazionario. l'angolo tra l'equatore e il piano orbitale della Luna varia a causa della rotazione della linea di nodi della Luna. L'inclinazione dell'orbita della Luna

rispetto all'equatore è massima quando il nodo ascendente della Luna coincide con la direzione dell'equinozio di primavera e minima quando il nodo discendente si trova sull'equinozio di primavera. Pertanto, l'inclinazione relativa all'equatore varia tra $18\ deg$ e $19'$ e $28\ deg$ e $35'$ con un periodo di 18.6 anni;

e. La linea degli apsidi ruota nella direzione di rotazione della Luna, facendo cambiare ω di $360\ deg$ in circa 8.9 anni.

7.1.2 Librazioni

Il periodo di rivoluzione della Luna attorno alla Terra è esattamente uguale al suo periodo di rotazione sul suo asse, quindi mantiene sempre la stessa faccia rivolta verso la Terra. Se l'orbita della Luna fosse circolare e se il suo asse di rotazione fosse perpendicolare alla sua orbita, vedremmo esattamente la metà della sua superficie. In realtà vediamo circa il $59\ \%$ della superficie lunare a causa di un fenomeno noto come "librazione lunare". La librazione della Luna è dovuta a due cause.

La librazione geometrica in latitudine si verifica perché l'equatore della Luna è inclinato di $6.50\ deg$ rispetto al piano della sua orbita. Una volta al mese il polo nord della Luna è inclinato verso la Terra e mezzo mese dopo il polo sud è inclinato verso la Terra permettendo di vedere leggermente oltre ciascun polo.

La librazione geometrica in longitudine, invece, è dovuta all'eccentricità dell'orbita. La rotazione della Luna sul suo asse è uniforme, ma la sua velocità angolare orbitale non lo è poiché si muove più velocemente vicino al perigeo e più lentamente all'apogeo. Questo permette di vedere circa $7.75\ deg$ di superficie in più.

Oltre all'apparente movimento a dondolo descritto sopra, esiste un vero e proprio dondolo chiamato "librazione fisica" causato dall'attrazione della Terra sul diametro lunare.

7.2 Traiettorie Terra-Luna semplici

Il calcolo dettagliato di una traiettoria lunare può essere fatto solo attraverso l'integrazione numerica dell'equazione del moto, tenendo conto della non sfericità della Terra, delle perturbazioni solari, della pressione solare e dell'attrazione gravitazionale finale della Luna. A causa dei complessi movimenti della Luna, in realtà la pianificazione della missione fa molto affidamento su un'effemeride lunare, che è un elenco tabulare della posizione della Luna a intervalli regolari di tempo cronologico. Di conseguenza, le missioni lunari sono pianificate su base oraria, giorno per giorno, mese per mese.

La procedura generale consiste nell'assumere le condizioni iniziali, $\vec{r}_0$ e $\vec{v}_0$ nel punto di immissione e quindi utilizzare un metodo Runge-Kutta o un metodo numerico simile per determinare la traiettoria. A seconda di quanto bene selezioniamo $\vec{r}_0$ e $\vec{v}_0$ la traiettoria potrebbe colpire la Luna o mancarla del tutto; si potrebbe procedere per tentativi ed errori fino a quando non si verifica l'impatto lunare desiderato.

Anche su un calcolatore ad alta velocità questa procedura può richiedere ore di tempo di calcolo per una singola data di lancio. Se si vogliono esplorare un gran numero di date di lancio e una varietà di condizioni iniziali, il tempo richiesto potrebbe diventare proibitivo e per questo motivo sono necessari dei metodi analitici approssimativi per restringere la scelta del tempo di lancio e delle condizioni di immissione. Non è importante che il metodo analitico sia preciso, ma solo che mantenga le caratteristiche predominanti del problema reale.

7.2.1 Semplificazioni adottate

Per studiare la dinamica di base delle traiettorie lunari, si suppone che l'orbita della Luna sia circolare con un raggio di $384400\ km$. Quest'ipotesi è possibile poiché l'eccentricità media dell'orbita effettiva è piccola per cui non introdurrà errori significativi. Si assume trascurabile anche l'attrazione terminale della Luna e si studiano solamente alcune traiettorie che intersecano l'orbita della Luna.

Nell'analisi che segue si suppone che la traiettoria lunare sia complanare all'orbita della Luna. Questa approssimazione risulta attendibile per traiettorie senza cambi di piano che sono preferite in quanto si ha minor costo in termini di ΔV.

7.2.2 Tempo di volo in funzione della velocità di immissione

Con le ipotesi appena formulate si può valutare l'effetto della velocità iniziale sul tempo di volo di una sonda lunare. Conoscendo le condizioni iniziali si possono calcolare l'energia e il momento angolare dell'orbita:

$$\mathcal{E} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\mu}{r_0}$$

$$h = r_0 v_0 \cos \phi_0$$

In questo modo si ottengono il semiasse maggiore e l'eccentricità:

$$p = \frac{h^2}{\mu}$$

$$a = -\frac{\mu}{2\mathcal{E}}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}$$

Dall'equazione di una conica in forma polare si ottiene l'anomalia vera:

$$\cos \nu = \frac{p - r}{er}$$

Se $r = r_0$ si determina ν_0, se il raggio, r, è posto pari al raggio dell'orbita della Luna si trova l'anomalia vera all'arrivo sull'orbita lunare.

Una volta determinate le condizioni iniziali e finali si può valutare l'andamento del tempo di volo in funzione della velocità di iniziale. In Figura 7.3 è riportato il caso di una quota di immissione di $320\ km$ e un flight-path angle nullo.

Dalla figura si può vedere che incrementando di poco la velocità di immissione la durata della missione diminuisce significativamente. Per le missioni umane è richiesta un'alta velocità di immissione per diminuire il tempo di volo.

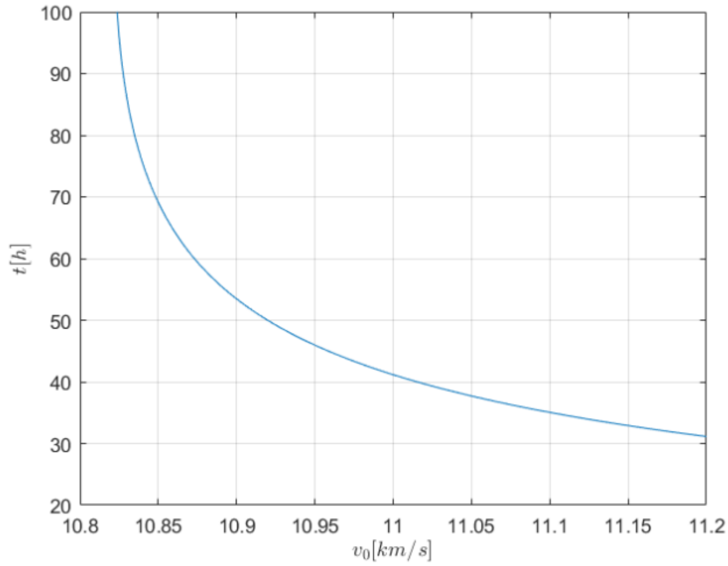

Figura 7.3: Tempo di volo in funzione di $\boldsymbol{v_0}$

7.2.3 Traiettoria di minima energia

Se si ipotizza che l'immissione nella traiettoria lunare avvenga nel perigeo dove ϕ è nullo è facile vedere l'effetto che ha la velocità di immissione sull'orbita. Nella Figura 7.4 sono mostrate una famiglia di orbite corrispondenti a diverse velocità di immissione.

Per il caso limite in cui la velocità di immissione è infinita, il percorso è una linea retta con un tempo di volo nullo. Mentre abbassando la velocità di immissione l'orbita passa da iperbolica, a parabolica, a ellittica ed aumenta il tempo di volo. Alla fine, continuando a ridurre la velocità di immissione, si ottiene una trasferta di Hohmann in cui l'orbita di trasferimento è tangente all'orbita lunare, traiettoria tratteggiata in Figura 7.4. Diminuendo ancora la velocità la sonda lunare non riuscirà più a raggiungere l'orbita della Luna.

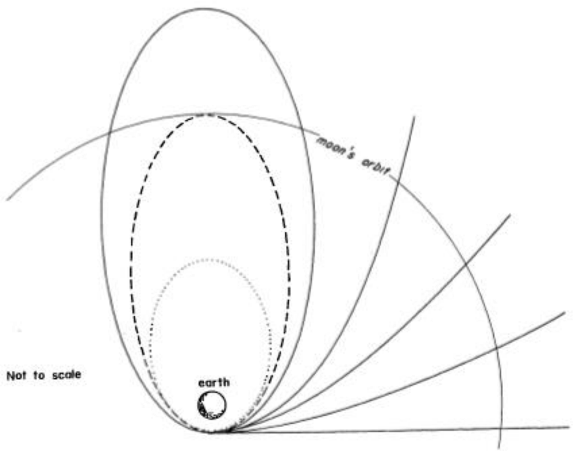

Figura 7.4: Effetto della $\boldsymbol{v_0}$ sulla forma dell'orbita

La trasferta di Hohmann è la traiettoria con il tempo di volo maggiore tra tutte le traiettorie che salgono solamente, per cui tutte le altre traiettorie che raggiungono l'orbita della Luna hanno tempi di volo più brevi. Fissato il punto di immissione, l'eccentricità della traiettoria di energia minima è l'eccentricità minima per un'orbita ellittica che arriva fino alla Luna. Supponendo l'assenza dell'attrazione gravitazionale lunare, la velocità all'arrivo sull'orbita lunare per la traiettoria di energia minima rappresenta la velocità di approccio più lenta possibile. Poiché la velocità orbitale della Luna è di circa $1\frac{km}{s}$, la Luna vedrà sopraggiunger la sonda da dietro, causando un impatto sul sull'emisfero orientale della Luna. Le sonde che hanno una maggiore velocità di arrivo tenderanno ad avere un impatto da qualche parte sul lato della frontale della Luna. Dalla Figura 7.4 vediamo che, quando la v_0 viene ridotta, l'angolo geocentrico spazzato dalla sonda lunare dall'immissione all'intercettazione lunare aumenta da $0\ deg$ a $180\ deg$ per il caso di energia minima. In generale, l'angolo spazzato viene chiamato ψ e fissata la quota dell'orbita di parcheggio e il flight-path angle è una funzione della sola velocità di immissione; un aumento dell'angolo spazzato corrisponde a una diminuzione della velocità di immissione per cui se si vuole diminuire al la v_0 bisognerà scegliere uno ψ prossimo ai $180\ deg$.

7.2.4 Missing distance dovuta a errori di immissione

Se si vuole effettuare una trasferta diretta verso la Luna sarà necessario che la sonda intersechi la traiettoria lunare nel momento esatto in cui la Luna si trovi nel punto di intersezione. Usando il modello semplificato utilizzato in questa analisi e trascurando la gravità lunare, si può valutare la missing distance, ossia la distanza tra il satellite e il centro della Luna, dovuta a errori nelle condizioni di immissione.

In tal caso, se sia l'angolo spazzato che il tempo di volo differiscono dai loro valori nominali la traiettoria della sonda attraverserà l'orbita lunare in un punto e un tempo diversi da quelli previsti. Nel caso di un lancio diretto verso est, gli effetti di tali errori di immissione tendono ad annullarsi. Questo può essere visto dalla Figura 7.5.

Se, ad esempio, la velocità iniziale è troppo elevata, l'angolo ψ sarà più piccolo del previsto; cioè, la sonda attraverserà l'orbita lunare a ovest del punto previsto di una quantità pari a $\Delta\psi$;. Ma il tempo di volo sarà più breve di una quantità pari a Δt, quindi la Luna sarà ad ovest rispetto al punto di intersezione previsto di una quantità pari a $\omega_M \Delta t$, dove ω_M è la velocità angolare della Luna nella sua orbita. Trascurando la gravità lunare, la distanza angolare di mancato impatto lungo l'orbita della Luna è la differenza tra $\Delta\psi$ e $\omega_M \Delta t$.

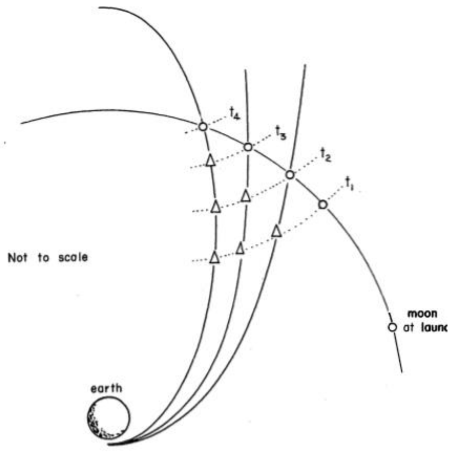

Figura 7.5: Effetti dovuti a errori al lancio

È possibile dimostrare che per una velocità di immissione di circa $11.0 \frac{km}{s}$, che si traduce in un angolo spazzato di circa $160\ deg$, gli effetti degli errori dovuti alla quota e alla velocità di immissione si annullano, la missing distance è solo una funzione di $\Delta\phi_0$. Per questa condizione un errore di $10\ deg$ del flight-path angle genera una missing distance di circa $1.300\ km$. L'effetto della gravità lunare è quello di ridurre la missing distance.

7.3 Approssimazione patched conics

Se per determinare un metodo rapido per determinare le condizioni d'immissione per un'orbita lunare è accettabile trascurare l'attrazione gravitazionale della Luna, non è più possibile se si vogliono determinare le condizioni di arrivo sulla Luna.

Se si considera la gravità della Luna è possibile utilizzare ancora il problema dei due corpi con il semplice espediente di considerare la sonda sotto l'influenza gravitazionale della Terra fino a quando non entra nella sfera di influenza gravitazionale della Luna e dopo assumere che si muove solo sotto l'influenza gravitazionale della Luna, come visto nel paragrafo 4.3.1. Questa è un'approssimazione poiché la transizione dal moto geocentrico al moto selenocentrico è un processo graduale che si svolge su un arco finito della traiettoria in cui sia la Terra che la Luna influenzano il percorso allo stesso modo. Nonostante quest'ultima affermazione, quest'approssimazione rimane sufficientemente buona per un'analisi di missione preliminare.

La sfera d'influenza lunare è una sfera centrata sulla Luna e con un raggio, R_s dato dalla seguente espressione:

$$R_s = D\left(\frac{m_M}{m_E}\right)^{\frac{2}{5}}$$

ed è pari a $66300\ km$ che è circa $\frac{1}{6}$ della distanza Terra-Luna.

7.3.1 Orbita di partenza geocentrica

In Figura 7.6 è raffigurata la geometria dell'orbita di partenza geocentrica. Le quattro quantità che distinguono la fase geocentrica sono il raggio dell'orbita di parcheggio, r_0, la velocità d'immissione, v_0, il flight-path angle, ϕ_0 e l'angolo di fase alla partenza, γ_0. L'utilizzo di questi quattro parametri per determinare il punto di intersezione tra la traiettoria geocentrica e la sfera d'influenza della Luna è complesso in quanto si deve utilizzare un metodo iterativo e valutare per ogni iterazione il tempo di volo. Per questo motivo si preferisce utilizzare tre condizioni iniziali e una condizione di arrivo come variabili indipendenti. Solitamente si utilizzano come condizioni iniziali r_0, v_0 e ϕ_0 e come condizione di arrivo l'angolo che specifica il punto in cui la traiettoria interseca la sfera d'influenza della Luna, λ_1.

Date queste quattro quantità si possono determinare le condizioni di arrivo r_1, v_1, ϕ_1 e γ_1.

Si assume che la traiettoria geocentrica sia diretta e che la Luna transita all'apogeo prima dell'orbita geocentrica. L'energia e il momento angolare dell'orbita sono:

$$\mathcal{E} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\mu}{r_0} \tag{7.1}$$

$$h = r_0 v_0 \cos\phi_0$$

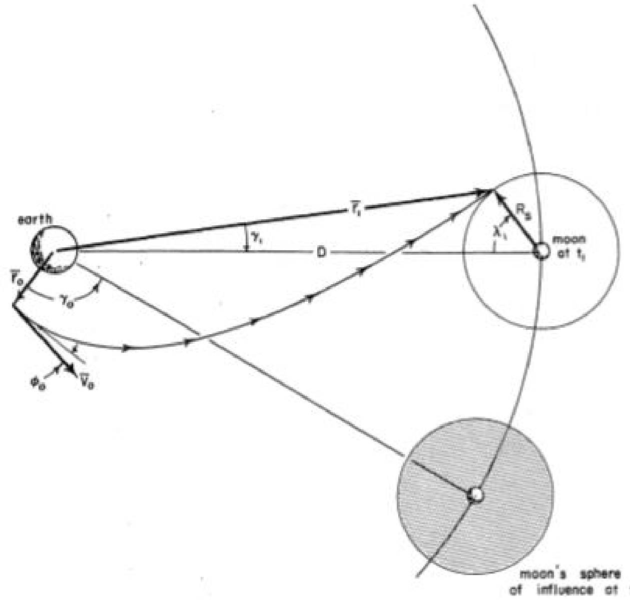

Figura 7.6: Trasferta geocentrica per la sfera d'influenza lunare

Con la legge del coseno si può determinare r_1:

$$r_1 = \sqrt{D^2 + R_s^2 - 2DR_s \cos \lambda_1} \qquad \textbf{7.2}$$

dove D è la distanza tra la Terra e la Luna.

La velocità e il flight path angle nel punto di arrivo si determinano dalla conservazione dell'energia e del momento angolare:

$$v_1 = \sqrt{2\left(\mathcal{E} + \frac{\mu}{r_1}\right)} \qquad \textbf{7.3}$$

$$\cos \phi_1 = \frac{h}{r_1 v_1}$$

dove ϕ_1 è compreso tra 0 e 90 deg se l'arrivo avviene prima dell'apogeo.

Ed infine geometricamente si ricava che:

$$\sin \gamma_1 = \frac{R_s}{r_1} \sin \lambda_1$$

Il tempo di volo dal punto d'immissione al punto di arrivo sulla sfera di influenza si determina una volta determinati v_0 e v_1.

Per determinare l'anomalia vera bisogna innanzitutto determinare p, a e e dell'orbita di trasferimento:

$$p = \frac{h^2}{\mu}$$

$$a = -\frac{\mu}{2\mathcal{E}}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}$$

Dall'equazione della conica in forma polare si ottengono ν_0 e ν_1 come:

$$\cos \nu_0 = \frac{p - r_0}{r_0 e}$$

$$\cos \nu_1 = \frac{p - r_1}{r_1 e}$$

Successivamente in base alla forma dell'orbita, si determinano le anomalie eccentriche, che nel caso di orbita ellittica sono date dalle seguenti relazioni:

$$\cos E_0 = \frac{e + \cos \nu_0}{1 + e \cos \nu_0}$$

$$\cos E_1 = \frac{e + \cos \nu_1}{1 + e \cos \nu_1}$$

Ed infine si può determinare il tempo di volo, nel caso di orbita ellittica, come:

$$t_1 - t_0 = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}[(E_1 - e \sin E_1) - (E_0 - e \sin E_0)]$$

La Luna si sposta di un angolo pari a $\omega_M(t_1 - t_0)$ tra l'immissione e l'arrivo sulla sfera di influenza lunare, dove ω_M è la velocità angolare della Luna che è pari a $2.649 \cdot 10^{-6} \frac{rad}{s}$ per il modello considerato.

L'angolo di fase alla partenza di può determinare nel modo seguente:

$$\gamma_0 = \nu_1 - \nu_0 - \gamma_1 - \omega_M(t_1 - t_0)$$

Per determinare le condizioni di partenza si procede per tentativi ed errori ed una volta conclusa questa fase si calcola il tempo di volo.

Dalla 7.1 si vede che l'energia meccanica dell'orbita di trasferimento è completamente determinata dai valori di r_0 e v_0. Invece il raggio di arrivo, r_1, dalla 7.2 dipende solamente da λ_1. Nel caso in cui l'orbita non è sufficientemente energetica da raggiungere il punto d'arrivo sulla sfera d'influenza lunare il termine sotto radice della 7.3 diventa negativo per cui si dovranno variare le condizioni iniziali.

7.3.2 Condizioni nel punto di raccordo

Per determinare la traiettoria all'interno della sfera di influenza lunare si suppone che il satellite sia soggetto solo all'attrazione gravitazionale lunare. Dunque, si considera che la Luna sia il contro centrale e si vogliono determinare la velocità e la direzione del satellite relative al centro della Luna. La Figura 7.7 mostra la situazione nel punto di raccordo tra le due traiettorie.

Indicando con il pedice 2 le condizioni iniziali relative al centro della Luna, il raggio selenocentrico, r_2, è pari al raggio della sfera d'influenza, R_s:

$$r_2 = R_s$$

La velocità del satellite relativa al centro della Luna è:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_M$$

dove $\vec{v}_M$ è la velocità della Luna relativa al centro della Terra, ed è pari a $1.018\frac{km}{s}$ per il modello semplificato considerato nella trattazione.

La velocità di arrivo selenocentrica, v_2, si ottiene applicando la legge del coseno al triangolo in Figura 7.7:

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + v_M^2 - 2v_1 v_M \cos(\phi_1 - \gamma_1)}$$

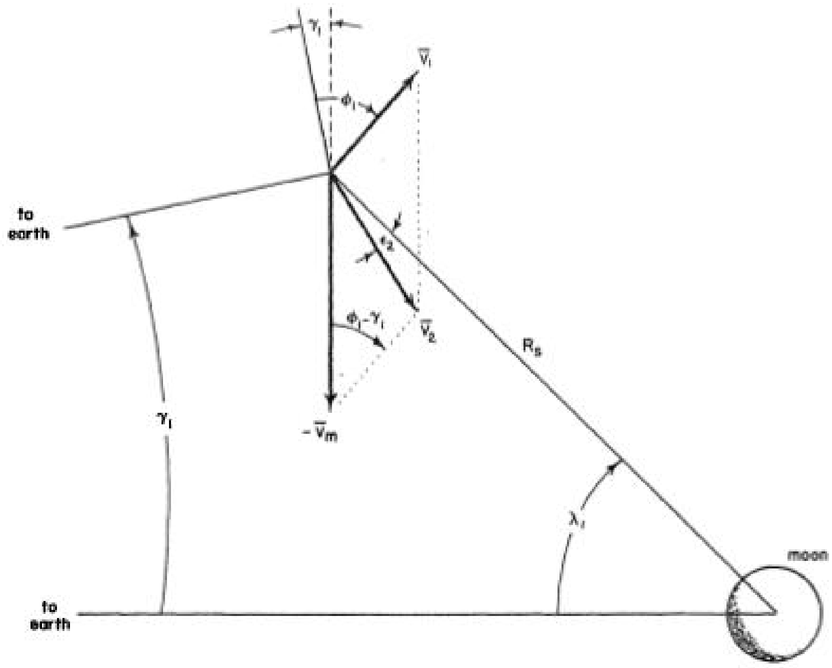

Figura 7.7: Condizione nel punto di intersezione della sfera d'influenza lunare

L'angolo ε_2 definisce la direzione della velocità iniziale selenocentrica relativa al centro della Luna. La componente di $\vec{v}_2$ perpendicolare alla direzione di $\vec{r}_2$ è data da:

$$v_2 \sin\varepsilon = v_M \cos\lambda_1 - v_1 \cos(\lambda_1 + \gamma_1 - \phi_1)$$

da cui si ricava che:

$$\varepsilon = \mathrm{asin}\left[\frac{v_M}{v_2}\cos\lambda_1 - \frac{v_1}{v_2}\cos(\lambda_1 + \gamma_1 - \phi_1)\right]$$

7.3.3 Traiettoria di arrivo selenocentrica

Determinate le condizioni iniziali selenocentriche r_2, v_2 e ε_2 si possono determinare le condizioni negli altri punti della traiettoria. Le condizioni finali dipendono dal tipo di missione per esempio:

1. Impatto lunare, in questo caso il raggio del periselenio deve essere minore del raggio della Luna, $r_p < r_M$, e si deve determinare la velocità d'impatto;
2. Orbita lunare, in questo caso si vuole determinare l'incremento di velocità per circolarizzare l'orbita lunare alla quota del periselenio;

3. Volo circumlunare in cui si vogliono determinare le condizioni in uscita dalla sfera d'influenza lunare.

In ogni caso le condizioni al periselenio sono quelle di maggior interesse.

L'energia meccanica e il momento angolare relativi al centro della Luna sono:

$$\mathcal{E} = \frac{V_2^2}{2} - \frac{\mu_M}{r_2}$$

$$h = r_2 v_2 \sin \varepsilon_2$$

dove μ_M è il parametro gravitazionale della Luna che è pari a $\frac{\mu_E}{81.3}$ che è circa $4.90287 \cdot 10^3 \, \frac{km^3}{s^2}$.

Il semilatus rectum e l'eccentricità dell'orbita selenocentrica sono:

$$p = \frac{h^2}{\mu_M}$$

$$e = \sqrt{1 + 2\mathcal{E}\frac{h^2}{\mu_M^2}}$$

Mentre le condizioni al periselenio sono:

$$r_p = \frac{p}{1+e}$$

$$v_p = \sqrt{2\left(\mathcal{E} + \frac{\mu_M}{r_p}\right)}$$

Se le condizioni del periselenio non soddisfano le condizioni di progetto si variano le condizioni di immissione r_0, v_0 e ϕ_0 o l'angolo λ_1 in un processo di tentativi ed errori finché la traiettoria non è accettabile.

8 Traiettorie interplanetarie

Il moto di una sonda interplanetaria è governato dalle forze gravitazionali dei pianeti e del Sole. In prima analisi si può assumere che la traiettoria può essere approssimata considerando solo tre campi gravitazionali: quello della Terra, del Sole e del pianeta obiettivo. Dunque, si può immaginare che la traiettoria sia suddivisa in tre tratti: nel primo tratto il satellite risente solo della forza gravitazione della Terra, il secondo tratto è una fase eliocentrica in cui il satellite è soggetto solo alla forza gravitazionale del Sole e l'ultimo tratto è quello di cattura in cui è presente solo la forza attrattiva dovuta al pianeta target.

Inizialmente saranno analizzate le caratteristiche principali del sistema solare e in seguito, verrà discusso il criterio per determinare qual è la distanza dalla Terra e dal pianeta target dove avviene lo scambio tra due fasi successive. A causa dell'intensa forza gravitazionale del Sole, questa distanza sarà piccola se confrontata con la scala delle distanze interplanetarie.

8.1 Sistema solare

Il sistema solare è popolato da un gran numero di corpi celesti. Il Sole è posto al centro del sistema solare e intorno ad esso ruotano un gran numero di corpi meno massicci; i più importanti sono gli otto pianeti che compongono il sistema solare, Mercurio, Venere, la Terra, Marte, Giove, Saturno, Urano e Plutone. Tra Marte e Giove c'è la fascia principale degli asteroidi in cui ruotano i pianeti minori o asteroidi che hanno un diametro che va dai $100\ km$ fino a pochi metri. Oltre a questi corpi sono presenti le comete che passano vicino al Sole e sono sparse nel sistema solare.

La distanza media dal Sole dei pianeti principali si rifà alla legge di Bode. Scrivendo la serie 0, 3, 6, 12… sommando 4 a ogni numero e dividendo per 10 si ottengono le distanze medie dei pianeti dal Sole in unità astronomiche, AU. Un UA è pari alla distanza media tra il Sole e la Terra. La legge approssima molto bene la sequenza tranne per Plutone, Tabella 8.1.

Tabella 8.1: Legge di Bode

Pianeta	*Distanza legge di Bode*	*Distanza effettiva*
Mercurio	0.4	0.39
Venere	0.7	0.72
Terra	1.0	1.00
Marte	1.6	1.52
Asteroidi	2.8	2.65
Giove	5.2	5.20
Saturno	10	9.52
Urano	19.6	19.28
Nettuno	38.8	30.17
Plutone	77.2	39.76

8.1.1 Elementi orbitali e costanti fisiche

Le orbite dei pianeti che compongono il sistema solare sono quasi circolari e il piano orbitale è circa quello dell'eclittica, ad eccezione di Nettuno e Plutone. L'orbita di Plutone è talmente eccentrica che il perielio si trova all'interno dell'orbita di Nettuno per cui si suppone che Plutone possa essere un satellite sfuggito a Nettuno.

La dimensione, la forma e l'orientamento delle orbite planetarie sono descritte da cinque parametri orbitali che rimangono costanti nel tempo tranne per le perturbazioni causate dalla mutua attrazione dei vari pianeti. L'anomalia vera, invece, che definisce la posizione del pianeta nella sua orbita varia continuamente nel tempo e può essere ottenuta consultando gli American Ephemeris e il Nautical Almanac. In Tabella 8.2 sono riportati i parametri orbitali dei vari pianeti.

Nella Tabella 8.3 sono riportate le caratteristiche fisiche più importanti per ogni pianeta.

Tabella 8.2: Elementi orbitali dei pianeti del sistema solare

Pianeta	$a\ [AU]$	e	$i\ [deg]$	$\Omega\ [deg]$	$\omega\ [deg]$
Mercurio	0.3871	0.2056	7.004	47.970	76.981
Venere	0.7233	0.0068	3.394	76.405	131.142
Terra	1.000	0.0167	0.000	–	102.416
Marte	1.524	0.0934	1.850	49.322	335.497
Giove	5.203	0.0482	1.306	100.139	13.684
Saturno	9.519	0.0539	2.489	113.441	93.828
Urano	19.28	0.0514	0.773	73.916	171.513
Nettuno	30.17	0.0050	1.773	131.397	52.275
Plutone	39.76	0.2583	17.136	109.870	222.894

8.2 Approssimazione patched-conic

Una sonda interplanetaria passa la maggior parte del tempo sotto l'influenza della forza gravitazionale del Sole e solo per piccoli intervalli di tempo rispetto alla durata della missione è soggetto al campo gravitazionale del pianeta di partenza e di quello di arrivo. Le forze perturbative dovute agli altri pianeti nel tratto eliocentrico possono essere trascurate.

Come nel caso visto per le traiettorie lunari anche in questo caso un calcolo di precisione dell'orbita avviene attraverso all'integrazione numerica dell'equazioni del moto complete considerando tutte le forze perturbative. Per l'analisi preliminare della missione è sufficiente un metodo analitico approssimato per determinare il ΔV totale richiesto dalla trasferta interplanetaria, il metodo più utilizzato è il metodo delle coniche raccordate.

La trasferta interplanetaria può essere divisa in tre tratti: il primo tratto è quello relativo al pianeta di partenza, dove l'unica forza agente sulla sonda è la forza gravitazionale del corpo di partenza, il secondo tratto è il tratto eliocentrico in cui bisogna determinare la velocità del corpo relativa al Sole ed infine l'ultimo tratto è quello relativo al pianeta di arrivo.

8.2.1 Trasferta eliocentrica

In prima approssimazione si considera che le orbite planetarie siano circolari e complanari. Consideriamo la manovra di trasferimento più economica per le orbite circolari e complanari che è quella di Hohmann. Per esempio in Figura 8.1 è mostrata la trasferta Terra-Marte.

Tabella 8.3: Caratteristiche fisiche del Sole e dei Pianeti

Pianeta	*Periodo orbitale* $[anni]$	*Distanza media* $\cdot 10^6\ [km]$	*Velocità orbita* $\left[\frac{km}{s}\right]$	$\frac{m}{m_e}$	$\mu\ \left[\frac{km^3}{s^2}\right]$	*Raggio equatoriale* $[km]$	*Inclinazione equatore orbita* $[deg]$
Sole	–	–	–	333432	$1.327 \cdot 10^{11}$	696000	7.25
Mercurio	0.241	57.9	47.87	0.056	$2.232 \cdot 10^{4}$	2487	–
Venere	0.615	108.1	35.04	0.817	$3.257 \cdot 10^{5}$	6187	32
Terra	1.000	149.5	29.79	1.000	$3.986 \cdot 10^{5}$	6378	23.45
Marte	1.881	227.8	24.14	0.108	$4.305 \cdot 10^{4}$	3380	23.98
Giove	11.86	778	13.06	318.0	$1.268 \cdot 10^{8}$	71370	3.07
Saturno	29.46	1426	9.65	95.2	$3.795 \cdot 10^{7}$	60400	26.73
Urano	84.01	2868	6.80	14.6	$5.820 \cdot 10^{6}$	23530	97.88
Nettuno	164.8	4494	5.49	17.3	$6.896 \cdot 10^{6}$	22320	28.80

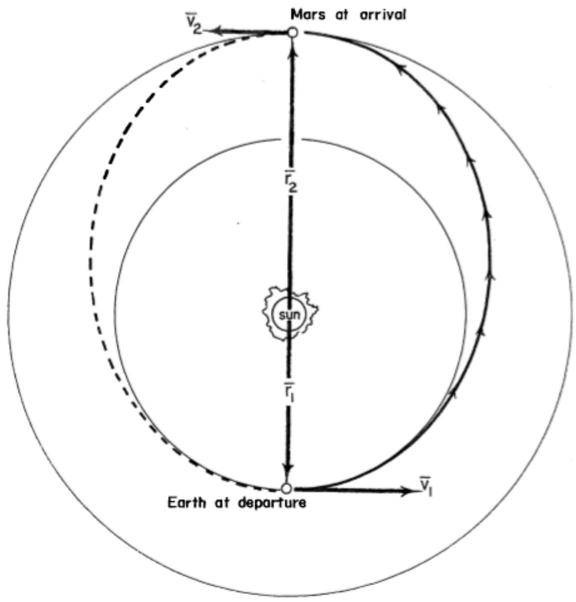

Figura 8.1: Trasferta di Hohmann Terra-Marte

La trasferta di Hohmann fornisce un metodo conveniente per determinare il ΔV minimo richiesto per un'orbita interplanetaria. L'energia orbitale della trasferta di Hohmann è pari a:

$$\mathcal{E}_t = -\frac{\mu_\odot}{r_1 + r_2}$$

dove $\mu_\odot$ è il parametro gravitazionale del Sole, r_1 è il raggio dell'orbita del pianeta di partenza e r_2 è il raggio del pianeta di arrivo.

La velocità eliocentrica, V_1, richiesta nel punto di partenza è pari a:

$$V_1 = \sqrt{2\left(\frac{\mu_\odot}{r_1} + \mathcal{E}_t\right)}$$

Il tempo di volo della trasferta di Hohmann è pari a metà del periodo orbitale. Se t_1 è il tempo di partenza e t_2 è il tempo di arrivo si ha che:

$$t_2 - t_1 = \pi\sqrt{\frac{a_t^3}{\mu_\odot}} = \pi\sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3}{8\mu_\odot}}$$

Nella Tabella 8.4 sono mostrate le velocità eliocentriche richieste alla partenza e il tempo di volo della trasferta di Hohmann per i principali pianeti del sistema solare.

La velocità orbitale della Terra è pari a $29.78\frac{km}{s}$. Dalla Tabella 8.4 è facile intuire che per la trasferta verso un pianeta più interno la sonda dovrà essere lanciata in direzione opposta al moto orbitale terrestre in modo da diminuire la velocità; per trasferte per pianeti esterni invece si dovrà lanciare il satellite nella stessa direzione in modo da aggiungere alla velocità orbitale della Terra la velocità del satellite relativa alla Terra.

Tabella 8.4: Trasferta di Hohmann dalla Terra

Pianeti	v_1	*Durata*	
	$[km/s]$	$[giorni]$	$[anni]$
Mercurio	22.28	105.5	-
Venere	27.28	146.1	-
Marte	32.73	258.9	-
Giove	38.57	-	2.74
Saturno	40.05	-	6.04
Urano	41.07	-	16.16
Nettuno	41.42	-	30.78
Plutone	41.60	-	46.03

8.2.2 Angolo di fase alla partenza

Affinché il satellite incontri il pianeta di arrivo nell'istante di tempo in cui incontra l'orbita del pianeta, la Terra e il pianeta obiettivo devono avere il giusto angolo di fase alla partenza. L'angolo di fase alla partenza è chiamato γ_1 ed è l'angolo formato tra il raggio vettore alla partenza e all'arrivo, in Figura 8.2.

L'angolo spazzato tra la partenza e l'arrivo è dato dalla differenza dell'anomalia vera nei due punti, $\nu_2 - \nu_1$, che si possono determinare dall'equazione della conica in forma polare conoscendo p ed e della trasferta eliocentrica scelta.

$$\cos \nu_2 = \frac{p - r_2}{e r_2}$$

$$\cos \nu_1 = \frac{p - r_1}{e r_1}$$

Conoscendo ν_2 e ν_1 si possono determinare le anomalie eccentriche ed infinte il tempo di volo. Il pianeta target si muove di un angolo pari a $\omega_t(t_2 - t_1)$ dove ω_t è la velocità angolare del pianeta obiettivo. In questo modo si può determinare l'angolo di fase di partenza che è pari a:

$$\gamma_1 = (\nu_2 - \nu_1) - \omega_t(t_2 - t_1) \tag{8.1}$$

Il requisito che l'angolo di fase debba essere pari a γ_1 limita le finestre di lancio per il pianeta obiettivo. Una volta mancata una finestra di lancio è necessario aspettare che l'angolo di fase tra il pianeta di partenza e quello di arrivo torni ad essere quello corretto. Il tempo di attesa tra una finestra e l'altra è detto periodo *sinodico*, τ_s, ed è il tempo richiesto affinché l'angolo di fase si ripeti uguale a sé stesso.

In un tempo pari a τ_s la Terra ruota intorno alla sua orbita di un angolo pari a $\omega_\oplus \tau_s$ e il pianeta di arrivo ruota di un angolo pari a $\omega_t \tau_s$. Affinché l'angolo di fase si ripeta in un tempo pari a τ_s è necessario che la differenza tra i due angoli sia un multiplo di 2π per cui:

$$\tau_s = \frac{2\pi}{\|\omega_\oplus - \omega_t\|}$$

Il periodo sinodico per tutti i pianeti del sistema solare è dato in Tabella 8.5.

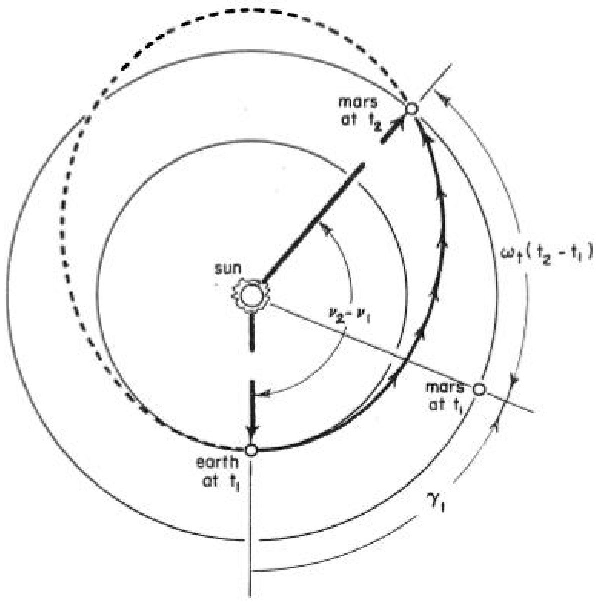

Figura 8.2: Angoli di fase alla partenza, $\boldsymbol{\gamma_1}$

Tabella 8.5: Periodo sinodico per i pianeti del sistema solare

Pianeti	$\omega_t \left[\frac{rad}{anno}\right]$	τ_s $[anni]$
Mercurio	26.071	0.32
Venere	10.217	1.60
Marte	3.340	2.13
Giove	0.530	1.09
Saturno	0.213	1.04
Urano	0.075	1.01
Nettuno	0.038	1.01
Plutone	0.025	1.00

Dalla Tabella 8.5 si vede che per i pianeti più vicini alla Terra che hanno una velocità angolare simile a quella della Terra il periodo sinodico è maggiore. Mentre se la velocità di rotazione del pianeta obiettivo è molto minore della velocità di rotazione della Terra il periodo sinodico coincide con il periodo di rivoluzione terrestre, per cui le finestre di lancio avvengono con frequenza annuale.

8.2.3 Fuga dalla sfera di influenza terrestre

Una volta scelta la trasferta eliocentrica e determinato ΔV_1 si possono stabilire le condizioni di immissione o di lancio che portano a definire la velocità di eccesso iperbolica. La sfera d'influenza terrestre ha un raggio di circa 10^6 km e si assume che la $v_\infty \approx \Delta V_1$.

Lungo la traiettoria iperbolica l'energia è costante per cui eguagliando l'energia nel punto d'immissione e ai confini della sfera di influenza si ha che:

$$\mathcal{E} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\mu}{r_0} = \frac{v_\infty^2}{2} - \frac{\mu}{r_\infty} \qquad \mathbf{8.2}$$

trascurando l'ultimo termine a secondo membro si ricava che:

$$v_0 = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu}{r_0}}$$

La velocità di eccesso iperbolica è molto sensibile ai piccoli errori dovuti alla velocità di immissione. Risolvendo la 8.2 per v_∞ e differenziando rispetto al tempo mantenendo constante il raggio r_0 si ottiene che:

$$v_\infty^2 = v_0^2 - \frac{\mu}{r_0}$$

$$2v_\infty dv_\infty = 2v_0 dv_0$$

L'errore relativo può essere espresso come:

$$\frac{dv_\infty}{v_\infty} = \left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)^2 \frac{dv_0}{v_0}$$

Se si considera la trasferta di Hohmann per Marte, la $v_\infty = 2.98\frac{km}{s}$ e la $v_0 = 11.6\frac{km}{s}$, con questi valori il fattore moltiplicativo al secondo membro è pari a 15.2, per cui un errore dell'1% della v_0 porta ad un errore del 15.2% nella velocità di eccesso iperbolica.

Se si considera una trasferta per un pianeta esterno, la velocità di eccesso iperbolica deve essere parallela alla velocità orbitale della Terra come in Figura 8.3.

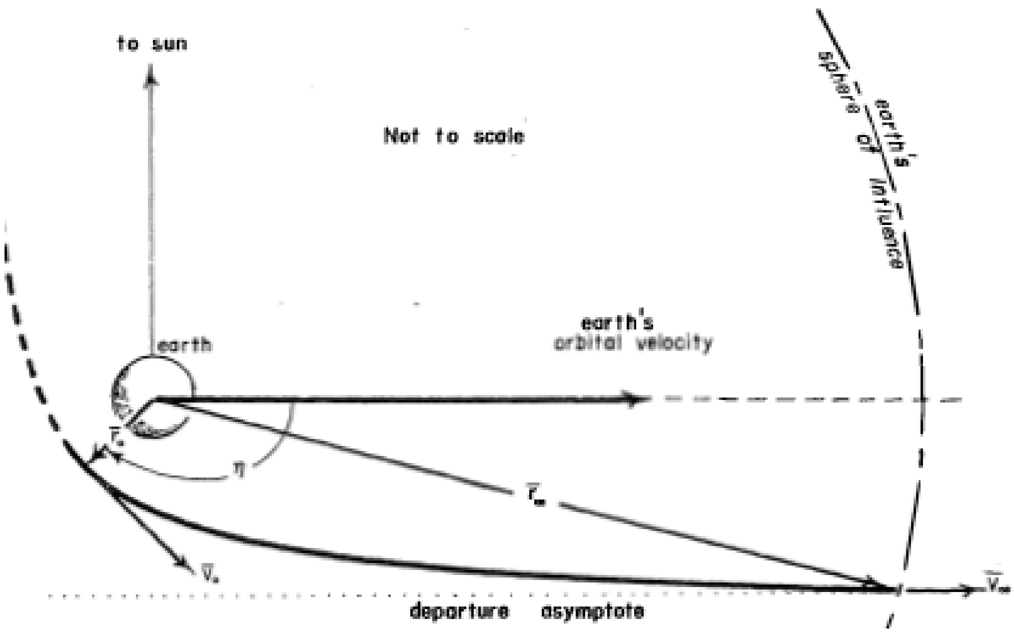

Figura 8.3: Orbita di fuga iperbolica

Assumendo che l'immissione nell'orbita di trasferimento avviene al perigeo, l'angolo, η, tra il vettore velocità della Terra e il raggio vettore di immissione può essere determinato dalla geometrica dell'iperbole. Dalla Figura 8.4 si può calcolare η come:

$$\cos\eta = -\frac{a}{c} = -\frac{1}{e}$$

dove l'eccentricità si ottiene dalle condizioni iniziali:

$$\mathcal{E} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\mu}{r_0}$$

$$h = r_0 v_0$$

da cui si ricava che:

$$e = \sqrt{1 + 2\mathcal{E}\frac{h^2}{\mu^2}}$$

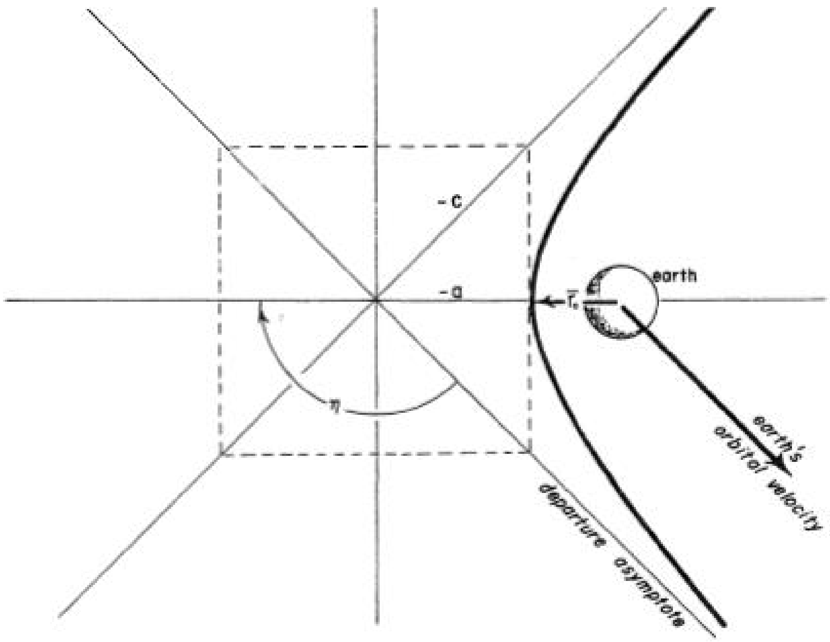

Figura 8.4: Geometria dell'iperbole

Dalla Figura 8.5 si può notare che l'orbita di partenza può anche non essere complanare all'orbita terrestre ma deve essere parallela alla velocità della Terra per cui si ottiene una superficie assialsimmetrica.

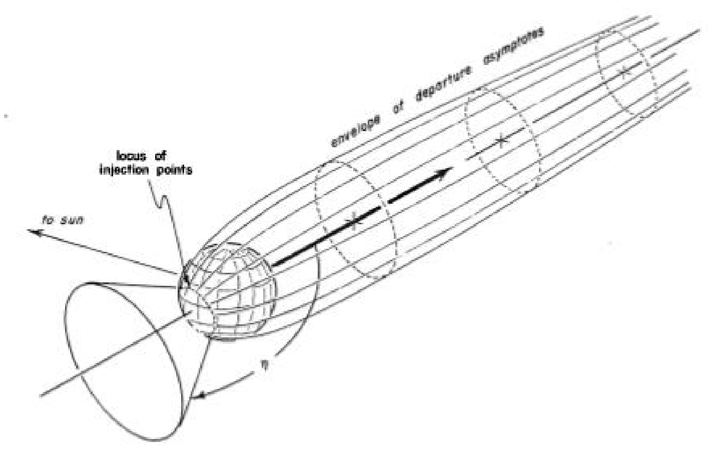

Figura 8.5: Lancio interplanetario

8.2.4 Arrivo al pianeta target

Generalmente l’orbita eliocentrica è tangente all’orbita della Terra per sfruttare tutta la velocità della Terra. All’arrivo, invece, la trasferta eliocentrica interseca l’orbita del pianeta di arrivo con un certo angolo, ϕ_2, come mostrato in Figura 8.6.

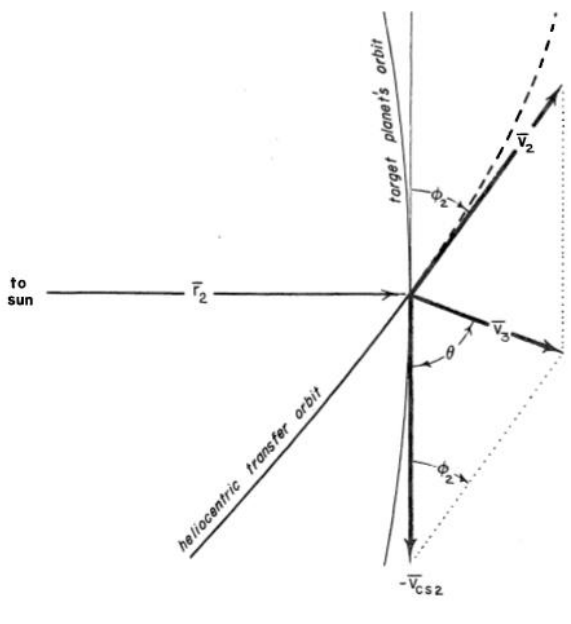

Figura 8.6: Velocità relativa nel punto d’intersezione con la sfera d’influenza del pianeta di arrivo

Una volta determinati $\mathcal{E}_t$ e h_t che sono rispettivamente, l’energia e il momento angolare dell’orbita di trasferimento eliocentrica, è possibile determinare sia V_2 che ϕ attraverso le seguenti relazioni:

$$V_2 = \sqrt{2\left(\frac{\mu_\odot}{r_2} + \mathcal{E}_t\right)}$$

$$\cos\phi_2 = \frac{h_t}{r_2 V_2}$$

La velocità del satellite relativa al pianeta target, v_3, si ottiene dalla legge del coseno:

$$v_3^2 = V_2^2 + V_{cs_2}^2 - 2V_2 V_{cs_2} \cos\phi_2$$

dove V_{cs_2} è la velocità del pianeta di arrivo.

L'angolo θ, in Figura 8.6 si può determinare con la legge del seno:

$$\sin\theta = \frac{V_2}{v_3} \sin\phi_2$$

Se si desidera l'angolo di fase alla partenza, γ_1, calcolato con la 8.1, si ottiene un impatto centrale con il pianeta. Questo assicura che il pianeta si trova nel punto di intersezione nello stesso istante del satellite. Questo significa che il vettore velocità relativa, $\vec{v}_3$, è diretto verso il centro del pianeta.

Se, invece, si vuole fare un flyby del pianeta di arrivo, allora l'angolo di fase alla partenza deve essere modificato in modo che il satellite intersechi l'orbita del pianeta obiettivo avanti o dietro al pianeta. Se la missing distance lungo l'orbita è pari a x allora l'angolo di fase alla partenza deve essere:

$$\gamma_1 = \nu_2 - \nu_1 - \omega_t(t_2 - t_1) \pm \frac{x}{r_2}$$

viene preso positivo nel caso il satellite passi dietro al pianeta negativo nel caso passi avanti.

Se il satellite interseca l'orbita del pianeta a una distanza x avanti al pianeta, il vettore $\vec{v}_3$ è spostato di una distanza pari a y dal centro del pianeta obiettivo come in Figura 8.7.

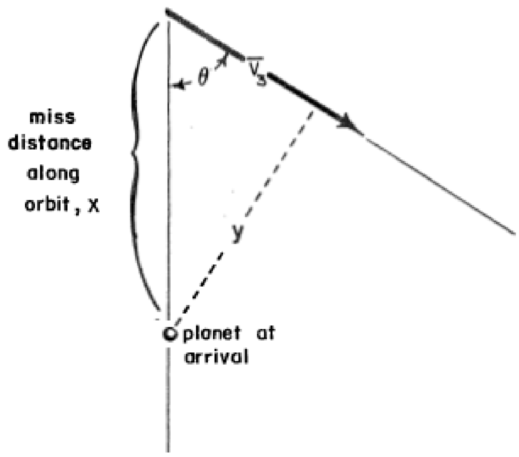

Figura 8.7: Distanza di offset

Dalla Figura 8.7 si vede che:

$$y = x \sin\theta$$

Una volta nota la distanza di deviazione si possono determinare la distanza minima di approccio e il periastro.

8.2.5 Sezione trasversale efficace di collisione

In Figura 8.8 è mostrato la traiettoria iperbolica di approccio, dove la $\vec{v}_3$ è l'eccesso di velocità iperbolica all'ingresso della sfera d'influenza del pianeta di arrivo e y è la distanza dal centro del pianeta.

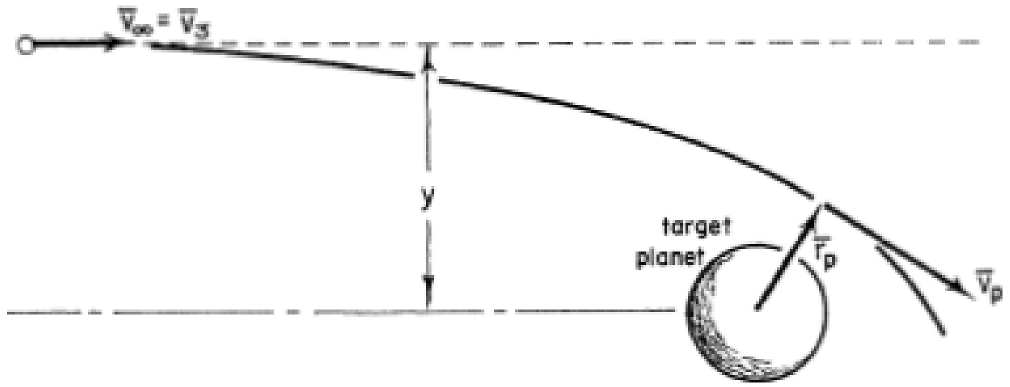

Figura 8.8: Orbita di approccio iperbolica

Dall'equazione dell'energia si ha che:

$$\mathcal{E} = \frac{v_3^2}{2} - \frac{\mu_t}{r_\infty}$$

Il momento angolare si ottiene con la seguente relazione:

$$h = y v_3$$

Il semilatus rectum e l'eccentricità si calcolano nel modo seguente:

$$p = \frac{h^2}{\mu_t}$$

$$e = \sqrt{1 + 2\mathcal{E}\frac{h^2}{\mu_t^2}}$$

dove μ_t è il parametro gravitazione del pianeta target.

In questo modo è possibile determinare il periastro:

$$r_p = \frac{p}{1 + e}$$

Poiché il momento angolare si conserva la velocità al periastro è pari a:

$$v_p = y\frac{v_3}{r_p} \qquad \textbf{8.3}$$

Generalmente dato il raggio del periastro desiderato si determina la distanza di offset, y, risolvendo la 8.3 per y:

$$y = \frac{r_p v_p}{v_3}$$

Eguagliando l'energia al periastro e l'energia nel punto d'ingresso della sfera di influenza:

$$\mathcal{E} = \frac{v_3^2}{2} = \frac{v_p^2}{2} - \frac{\mu_t}{r_p}$$

risolvendo per v_p e sostituendo nella 8.3 si ottiene che:

$$y = \frac{r_p}{v_3}\sqrt{v_3^2 + \frac{2\mu_t}{r_p}} \qquad \textbf{8.4}$$

Se la distanza di offset è pari al raggio del pianeta target questo parametro prende il nome di parametro d'impatto, b, per $y < b$ si ha un impatto sulla superficie del pianeta. Solitamente è conveniente prendere una distanza d'impatto maggiore rispetto al raggio fisico del pianeta target.

Si può determinare la distanza d'impatto sostituendo r_t a r_p nella 8.4:

$$b = \frac{r_t}{v_3}\sqrt{v_3^2 + \frac{2\mu_t}{r_t}}$$

L'area trasversa efficace del pianeta è rappresentata in Figura 8.9. Per circolarizzare l'orbita è necessario rallentare, per far questo è possibile utilizzare l'atmosfera del pianeta per frenare. Per questo motivo bisogna considerare uno strato sottile, db, del raggio b che rappresenta la sezione aggiuntiva dovuta alla presenza dell'atmosfera. Questa sezione trasversale che sfrutta l'atmosfera del pianeta è chiamata corridoio di rientro e può essere molto sottile.

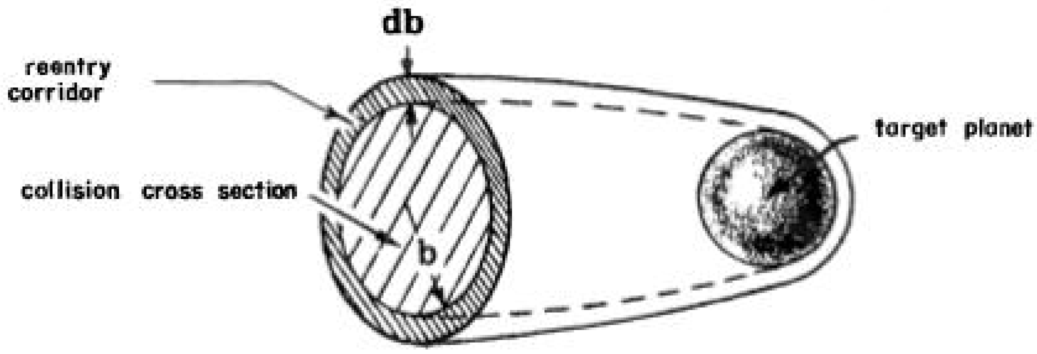

Figura 8.9: Sezione trasversale effettiva d'impatto

8.3 Traiettorie interplanetarie non complanari

Nella trattazione precedente si è supposto che le ordite planetarie giacessero tutte sul piano dell'eclittica. Dalla Tabella 8.2 si può vedere che le orbite di alcuni pianeti sono inclinate di diversi gradi rispetto al piano dell'eclittica. Una buona procedura da usare quando il pianeta target ha un'inclinazione maggiore o minore rispetto a quello dell'eclittica è quello di utilizzare una trasferta che giace nel piano dell'eclittica e dopo fare un semplice cambio di piano quando la differenza tra l'anomalia vera e il punto d'incontro con il pianeta target è pari a 90 deg, Figura 8.10. Questa procedura studiata da Fimple [7] minimizza il ΔV richiesto dal cambio di piano.

Se il cambio di piano è fatto 90 deg prima del punto di incontro, l'inclinazione è uguale alla latitudine eclittica, β_2, al tempo d'incontro, t_2.

Il ΔV richiesto per produrre il cambio di piano dipende dalla velocità del satellite nell'istante in cui avviene il cambio di piano:

$$\Delta V = 2V \sin\frac{i}{2}$$

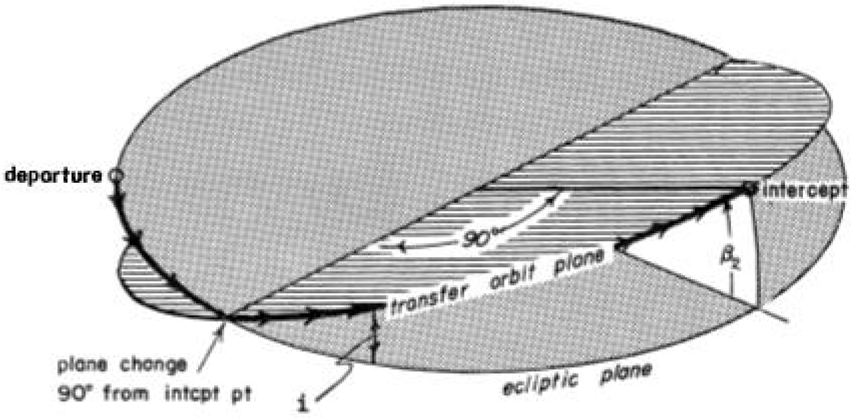

Figura 8.10: Punto di ottimo del cambio di piano

9 Analisi

Per valutare il lunar gravity assist dovuto ad un doppio flyby lunare è necessario innanzitutto determinare la traiettoria del satellite tra i due flyby e successivamente valutare l'energia di fuga iperbolica C_3 dovuta alla manovra.

Per valutare le traiettorie Luna-Luna si è utilizzato il modello dei tre corpi circolare ristretto andando ad integrare l'equazione del moto con il metodo di Cowell.

Il lunar gravity assist è modellato come una rotazione istantanea della velocità relativa all'intersezione tra l'orbita del satellite e l'orbita lunare.

In seguito, saranno approfonditi.

9.1 CRTB

Per determinare le orbite Luna-Luna si è utilizzato il metodo dei tre corpi circolare ristretto. Si consideri un sistema eliocentrico e che la Luna e la Terra compiano due orbite circolari complanari, Figura 9.1; questa approssimazione è possibile poiché sia l'orbita lunare che quella terrestre hanno eccentricità prossime a zero e l'inclinazione dell'orbita lunare rispetto al piano dell'eclittica è piccola. Il raggio dell'orbita della Terra dal Sole sarà pari alla distanza media tra la Terra ed il Sole e pari $149.6 \cdot 10^6\ km$, mentre il raggio dell'orbita della Luna sarà pari a $384400\ km$.

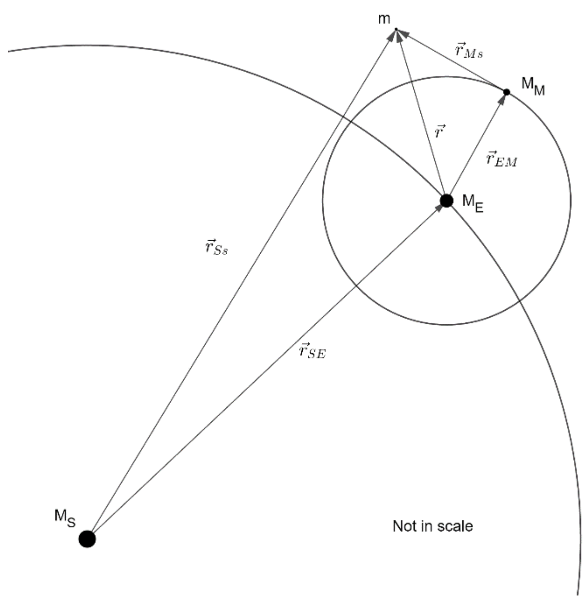

Figura 9.1: Sistema eliocentrico

Le forze agenti sul satellite sono solo le forza gravitazionali dovute alla Terra, al Sole e alla Luna. Applicando la seconda legge di Newton al satellite si determina la legge del moto del satellite nel sistema di riferimento eliocentrico:

$$m\ddot{\vec{r}}_{Ss} = -G\frac{mM_\oplus}{r^3}\vec{r} - G\frac{mM_\odot}{r_{Ss}^3}\vec{r}_{Ss} - G\frac{mM_L}{r_{Ls}^3}\vec{r}_{Ls} \qquad \mathbf{9.1}$$

dove $\vec{r}$ è il raggio vettore Terra-satellite, $\vec{r}_{Ss}$ è la distanza tra il Sole e il satellite e $\vec{r}_{Ls}$ è la distanza tra il satellite e la Luna.

Sulla Terra, invece, agiscono la forza gravitazionale generata dal Sole, dalla Luna e dal satellite per cui l'equazione del moto della Terra nel sistema di riferimento eliocentrico è:

$$M_\oplus\ddot{\vec{R}}_{SE} = G\frac{M_\oplus m}{r^3}\vec{r} - G\frac{M_\oplus M_\odot}{r_{SE}^3}\vec{r}_{SE} - G\frac{M_\oplus M_L}{r_{EL}^3}\vec{r}_{EL} \qquad \mathbf{9.2}$$

dove $\vec{r}_{SE}$ è il raggio vettore Sole-Terra ed $\vec{r}_{EL}$ è il raggio Terra-Luna.

Dividendo per la massa e sottraendo membro a membro la 9.1 e la 9.2 si ottiene la legge del moto del satellite rispetto alla Terra:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_{Ss} - \ddot{\vec{r}}_{SE} = -G\frac{M_\oplus + m}{r^3}\vec{r} - G\frac{M_\odot}{r_{Ss}^3}\vec{r}_{Ss} + G\frac{M_\odot}{r_{SE}^3}\vec{r}_{SE} - G\frac{M_L}{r_{Ls}^3}\vec{r}_{Ls} + G\frac{M_L}{r_{EL}^3}\vec{r}_{EL}$$

poiché la massa del satellite, m, è molto piccola rispetto alla massa della Terra si ha che:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu_\oplus}{r^3}\vec{r} - \frac{\mu_\odot}{r_{Ss}^3}\vec{r}_{Ss} + \frac{\mu_\odot}{r_{SE}^3}\vec{r}_{SE} + \mu_L\left(\frac{\vec{r}_{EL}}{r_{EL}^3} - \frac{\vec{r}_{Ls}}{r_{Ls}^3}\right)$$

Utilizzando il metodo delle coniche raccordate si ha che la traiettoria Luna-Luna può essere divisa in tra tratti: il primo tratto in cui il satellite è sotto l'influenza gravitazionale della Luna, il secondo tratto dove c'è solo l'influenza della Terra e l'ultimo tratto in cui ci si riavvicina alla Luna per cui agisce solo la forza gravitazionale lunare. Poiché il raggio della sfera d'influenza della Luna è pari a circa $\frac{1}{6}$ della distanza Terra-Luna può essere trascurata per cui in questa analisi si trascura l'attrazione gravitale lunare e la legge del moto diventa:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu_\oplus}{r^3}\vec{r} - \frac{\mu_\odot}{r_{Ss}^3}\vec{r}_{Ss} + \frac{\mu_\odot}{r_{SE}^3}\vec{r}_{SE}$$

Per analizzare il moto del satellite consideriamo un sistema di riferimento geocentrico che ha il piano xy coincidente con il piano dell'eclittica e l'asse x coincide con la congiungente Terra-Luna al tempo t_0, Figura 9.2.

Nel sistema geocentrico il Sole ruota intorno alla terra con una velocità angolare, ω_S, pari a $\sqrt{\frac{\mu_\oplus + \mu_\odot}{r_{SE}^3}}$.
La posizione del Sole, $\vec{r}_{SE}$, nel sistema di riferimento geocentrico sarà dato da:

$$\vec{r}_{SE} = -R_S\begin{pmatrix}\cos(\omega_S t + \theta_{S_0})\\ \sin(\omega_S t + \theta_{S_0})\\ 0\end{pmatrix}$$

dove θ_{S_0} è la posizione del Sole al tempo t_0.

La distanza tra il Sole è il satellite $\vec{r}_{Ss}$ è dato dalla somma vettoriale tra il vettore che congiunge il Sole e la Terra e il vettore che congiunge la Terra con il satellite per cui si ottiene:

$$\vec{r}_{Ss} = \vec{r} + \vec{r}_{SE}$$

Nel sistema geocentrico la Luna ruota intorno alla Terra con una velocità angolare ω_L pari a $\sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_{EL}^3}}$ per cui la posizione angolare della Luna sarà:

$$\theta_L = \theta_{L_0} + \omega_L t$$

dove θ_{L_0} è la posizione iniziale della Luna.

Per poter integrare l'equazione del modo bisogna definire le condizioni iniziali del satellite. Si ipotizza che al tempo t_0 la posizione del satellite coincide con quella della Luna. Allora la posizione del satellite $\vec{r}_0$ in coordinate cartesiane sarà:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_{EL0} = R_L \begin{pmatrix} \cos\theta_{L_0} \\ \sin\theta_{L_0} \\ 0 \end{pmatrix}$$

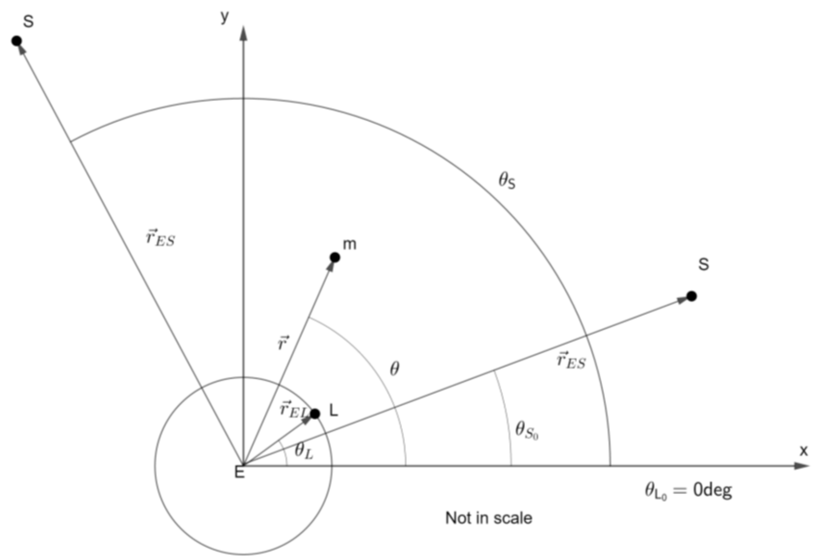

Figura 9.2: Sistema geocentrico

Il satellite possiede una velocità relativa, $\vec{V}_\infty$, rispetto alla Luna inclinata di un angolo α rispetto alla velocità della Luna, $\vec{V}_L$, Figura 7.3, preso positivo come in figura. La velocità iniziale $\vec{v}_0$ del satellite rispetto alla Terra è pari a:

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} -V_L \sin\theta_{L_0} - V_\infty \sin(\theta_{L_0} - \alpha) \\ V_L \cos\theta_{L_0} + V_\infty \cos(\theta_{L_0} - \alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una volta definita l'equazione del moto e le condizioni iniziali è possibile integrare numericamente l'equazione della traiettoria e determinare l'orbita del satellite.

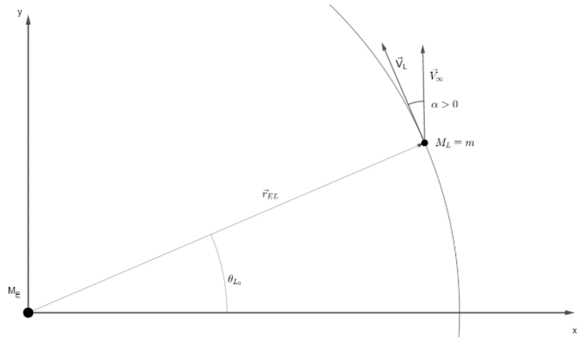

Figura 9.3: Condizioni iniziali

Per determinare il secondo incontro con la Luna è necessario che al tempo finale t_f la traiettoria del satellite deve intersecare la traiettoria della Luna nello stesso istante in cui la Luna si torva nel punto d'intersezione. Quindi devono essere verificate le seguenti condizioni:

$$\|\vec{r}\| = R_L$$

$$\theta_f = \theta_{L_f}$$

dove θ_f è la posizione angolare finale del satellite e θ_{L_f} è la posizione finale della Luna entrambe al tempo t_f.

Conoscendo la posizione del satellite $\vec{r}_f$ al tempo t_f si può determinare la posizione angolare finale del satellite:

$$\theta_f = \text{atan}\left(\frac{y_f}{x_f}\right)$$

dove x_f e y_f sono rispettivamente le coordinate x e y del vettore $\vec{r}_f$. L'angolo è positivo se y_f è maggiore di zero altrimenti è negativo.

Per determinare il secondo punto d'incontro è stato utilizzato un metodo iterativo. Facendo variare α si verificava che $\theta_f - \theta_{L_f}$ fosse minore di una certa soglia e con il metodo di Newton si fa convergere la soluzione.

Per determinare tutte le orbite Luna-Luna possibili è necessario creare un loop interno che fa variare α e un loop esterno che fa variare la posizione iniziale del Sole, θ_{S_0}.

9.2 LGA

Per valutare il lunar gravity assist si considera la sfera d'influenza lunare puntiforme per cui il flyby viene simulato con una rotazione istantanea del vettore velocità relativa.

Consideriamo il caso generale in cui il satellite entra nella sfera d'influenza della Luna con velocità $\vec{V}^-$ e poi sfugge dalla sfera d'influenza con velocità $\vec{V}^+$, Figura 9.4.

La velocità all'ingresso del satellite nella sfera d'influenza della Luna è pari alla velocità $\vec{V}_f$ valutata precedentemente nel punto d'incontro tra il satellite e la Luna nel sistema di riferimento geocentrico.

$$\vec{V}^- = \begin{pmatrix} u^- \\ v^- \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{V}_f$$

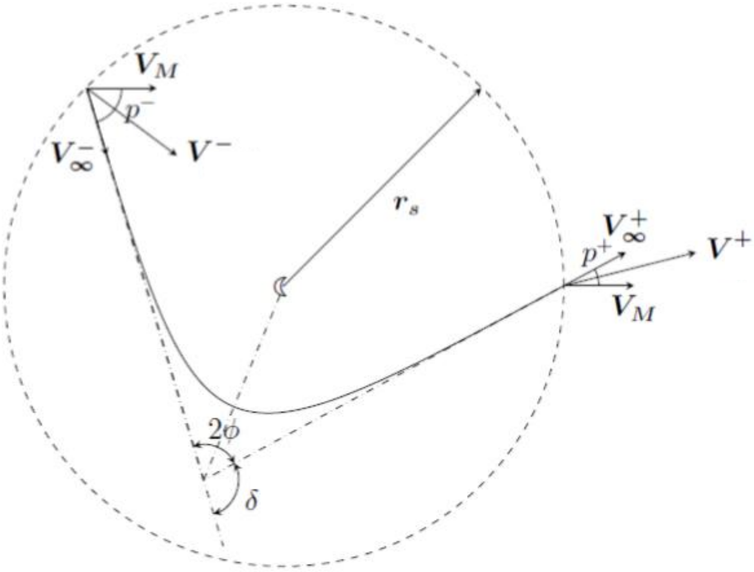

Figura 9.4: Flyby lunare

La velocità del satellite relativa alla Luna nel punto d'ingresso, $\vec{V}_\infty^-$, si ricava:

$$\vec{V}_\infty^- = \vec{V}^- - \vec{V}_L$$

che ha componenti:

$$\vec{V}_\infty^- = \begin{pmatrix} u_\infty^- \\ v_\infty^- \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'angolo formato fra il vettore velocità relativo e la velocità della Luna è detto *pump angle*, p, Figura 9.5, ed è positivo quando la componente di $\vec{V}_\infty$ perpendicolare a $\vec{V}_M$ è diretta all'interno dell'orbita lunare altrimenti è negativa.

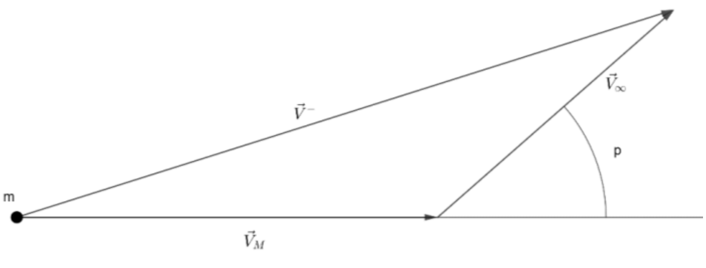

Figura 9.5: Pump angle

Il pump angle è dato dalla seguente relazione:

$$\tan p = \frac{v_\infty}{u_\infty}$$

Il pump angle all'ingresso, p^-, sarà dato dunque da:

$$\tan p^- = \frac{v_\infty^-}{u_\infty^-}$$

Il segno di p^- influenza le condizioni di uscita, in particolare il campo di esistenza di p^+. Se:

$$p^- > 0 \qquad \max(0, p^- - \delta_{max}) < p^+ < p^- \tag{9.3}$$

altrimenti:

$$p^- < 0 \qquad p^- < p^+ < \min(0, p^- - \delta_{max}) \tag{9.4}$$

dove δ_{max} è la rotazione massima ottenibile con il flyby.

Le componenti della velocità relativa, $\vec{V}_\infty$, alla Luna possono essere scritte in forma generale come:

$$\vec{V}_\infty = \begin{pmatrix} u_\infty \\ v_\infty \\ w_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_\infty \sin p \cos k \\ V_\infty \cos p \\ V_\infty \sin p \sin k \end{pmatrix} \tag{9.5}$$

dove p è il pump angle e k è il *crank angle* che è l'angolo formato tra il piano dell'orbita e la V_∞, Figura 9.6. Se $k \neq 0$ la traiettoria non è più complanare.

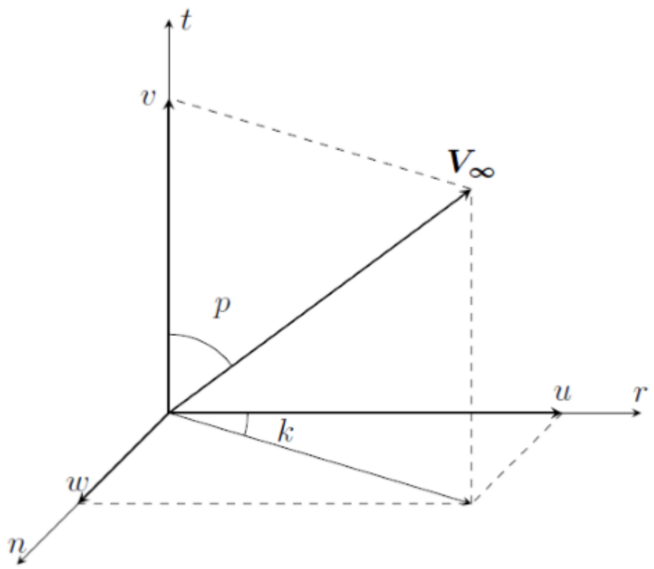

Figura 9.6: Componenti di $\boldsymbol{V}_\infty$ espresse in termini di $\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{p}$

Dal bilancio dell'energia si ha che:

$$\mathcal{E} = \frac{(V_\infty^+)^2}{2} - \frac{\mu_M}{r_\infty} = \frac{(V_\infty^-)^2}{2} - \frac{\mu_M}{r_\infty}$$

Il termine $\frac{\mu_M}{r_\infty}$ tende a zero poiché r_∞ tende a infinito per cui:

$$V_\infty^+ = V_\infty^- = V_\infty$$

Dal bilancio dell'energia meccanica si ha che:

$$\mathcal{E} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{V_\infty^2}{2} - \frac{\mu}{r_\infty} = \frac{V_\infty^2}{2}$$

che valutata nel periselenio:

$$\frac{V_p^2}{2} - \frac{\mu}{r_p} = \frac{V_\infty^2}{2}$$

da cui si ricava che:

$$V_p^2 = V_\infty^2 + \frac{2\mu}{r_p} \qquad \textbf{9.6}$$

L'angolo di semi-apertura dell'iperbole, ϕ, è legato all'inverso dell'eccentricità:

$$\cos\phi = \frac{1}{e} \qquad \textbf{9.7}$$

Dalla Figura 9.4 si può vedere che l'angolo di rotazione del vettore velocità relativa δ è complementare a 2ϕ per cui si ottiene:

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} \qquad \textbf{9.8}$$

Andando a sostituire la 9.8 nella 9.7 si ottiene che l'angolo di rotazione è pari a:

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{1}{e} \qquad \textbf{9.9}$$

Dall'equazione della conica si ha che:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\nu} = \frac{H^2/\mu_M}{1 + e\cos\nu} \qquad \textbf{9.10}$$

Applicando la 9.10 al periastro si ottiene che:

$$r_p = \frac{r_p^2 V_p^2}{\mu_M(1+e)}$$

sostituendo la 9.6 nella relazione precedente si ottiene:

$$r_p = r_p \frac{2 + \frac{r_p V_\infty^2}{\mu_M}}{1 + e}$$

semplificando r_p si ricava l'eccentricità per cui:

$$e = 1 + \frac{r_p V_\infty^2}{\mu_M} \qquad \textbf{9.11}$$

sostituendo la 9.11 nella 9.9 si ottiene la rotazione del vettore velocità relativa:

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{1}{1 + \frac{r_p V_\infty^2}{\mu_M}}$$

Andando a sostituire a r_p il raggio minimo del perigeo $r_{p_{min}}$ affinché il satellite con vada a collidere con la superficie della Luna si ottiene la massima rotazione, δ_{max}, che può subire il vettore velocità relativa:

$$\sin\frac{\delta_{max}}{2} = \frac{\mu_M}{r_p\left(V_\infty^2 + \frac{\mu_M}{r_p}\right)}$$

L'angolo di rotazione, δ, si può determinare dalla seguente relazione:

$$\cos\delta = \frac{\vec{V}_\infty^+ \cdot \vec{V}_\infty^-}{V_\infty^2} \qquad \textbf{9.12}$$

da cui facendo il prodotto scalare si ricava che:

$$\cos k^+ = \frac{\cos\delta - \cos p^- \cos p^+}{\sin p^- \sin p^+}$$

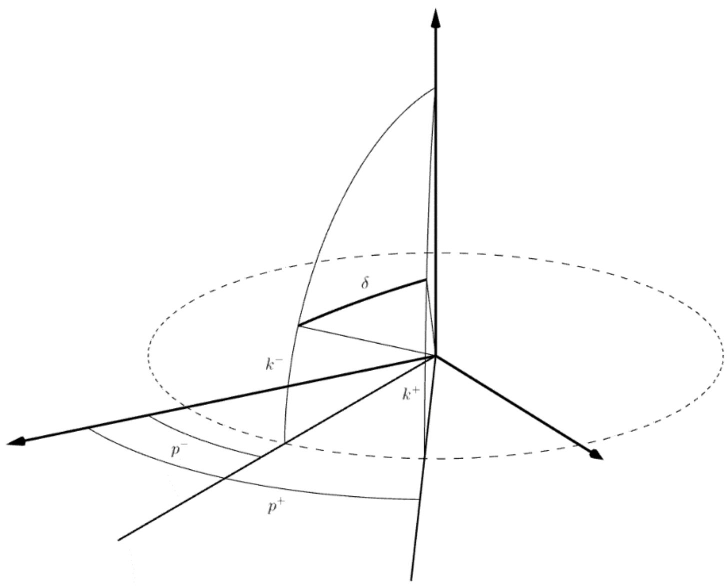

Figura 9.7: Angolo di rotazione $\boldsymbol{\delta}$

Andando a sviluppare la 9.12 si ottiene che:

$$\cos\delta = \sin p^- \sin p^+ \cos k + \cos p^- \cos p^+$$

Con $\delta < \delta_{max}$ si ha che $\cos\delta > \cos\delta_{max}$ per cui:

$$\sin p^- \sin p^+ \cos k + \cos p^- \cos p^+ > \cos \delta_{max}$$

da cui si ricava che:

$$\cos k > \frac{(\cos \delta_{max} - \cos p^- \cos p^+)}{\sin p^- \sin p^+} = Z \qquad \textbf{9.13}$$

Se il denominatore di Z è positivo si ha che $\cos k > Z$ e si verificano i seguenti scenari:

1. se $Z > 1$ la 9.13 non ammette soluzione per cui $k_{max} = 0$;
2. se $-1 < Z < 1$ la 9.13 ammette soluzione per cui $k_{max} = \mathrm{acos}\, Z$;
3. se $Z < -1$ la 9.13 è sempre verificata e $k_{max} = 180\ deg$.

Se invece il denominatore è negativo $\cos k < |Z|$:

1. se $Z > 1$ la 9.13 è sempre verificata e $k_{max} = 180\ deg$
2. per $Z \leq 1$ sono soluzioni non possibili.

Anche in questo caso per determinare tutte le soluzioni si utilizzano due cicli un loop interno che fa varia k^+ tra 0 e k_{max} e un loop esterno che fa variare p^+ nei limiti imposti dalle 9.3 e 9.4.

Dati k^+ e p^+ si può determinare $\vec{V}_\infty^+$ mediante la 9.5.

All'uscita dalla sfera d'influenza della Luna il satellite ha una velocità $\vec{V}^+$, Figura 9.8, che si ottiene sommando la velocità della Luna alla $\vec{V}_\infty^+$:

$$\vec{V}^+ = \vec{V}_L + \vec{V}_\infty^+$$

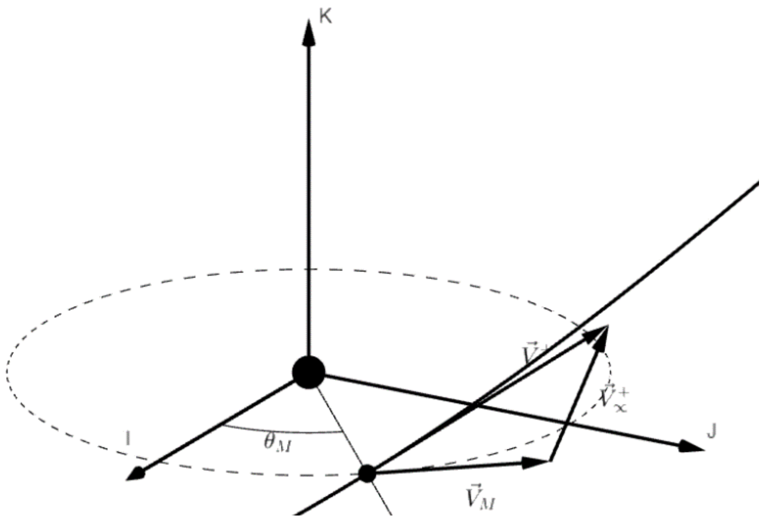

Figura 9.8: Velocità di uscita dalla sfera d'influenza della Luna

9.2.1 Orbita geocentrica

Si consideri il sistema di riferimento geocentrico, Figura 9.9, il satellite dopo il secondo flyby ha velocità $\vec{V}^+$:

$$\vec{V}^+ = \begin{pmatrix} u^+ \\ v^+ \\ w^+ \end{pmatrix}$$

dove u^+ è la componente radiale, v^+ la componente tangenziale e w^+ la componente fuori dal piano.

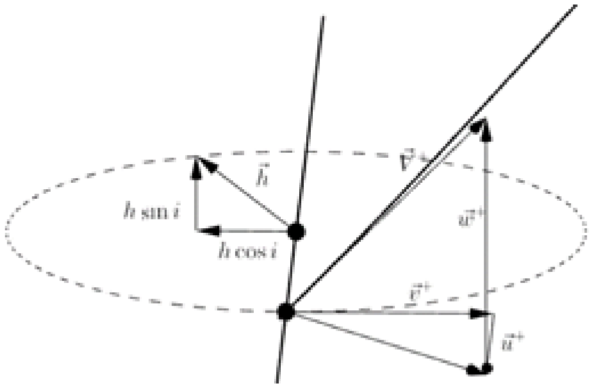

Figura 9.9: Componenti $\vec{\boldsymbol{V}}^{+}$

Dal bilancio dell'energia si ha che:

$$\mathcal{E} = \frac{(V^+)^2}{2} - \frac{\mu_\oplus}{r_M} = \frac{V_{esc}^2}{2} = -\frac{\mu}{2a} = \frac{C3}{2}$$

poiché V_{esc}^2 è sempre positivo il semiasse sarà negativo per cui hanno solo orbite iperboliche.

In questo modo si può determinare l'energia di fuga iperbolica C_3:

$$C3 = (V^+)^2 - \frac{2\mu_\oplus}{r_M}$$

Il momento angolare è dato da:

$$h = r_M\sqrt{(v^+)^2 + (u^+)^2}$$

Dalle relazioni appena trovate si può calcolare l'eccentricità dell'orbita:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}h^2}{\mu_\oplus}}$$

Il semiasse maggiore sarà pari a:

$$a = -\frac{\mu}{2\mathcal{E}}$$

Una volta calcolati e e a si determina il semilatus rectum:

$$p = a(1 - e^2)$$

L'ascensione retta sarà pari a:

$$\cos v^+ = \frac{\frac{p}{r_M} - 1}{e}$$

ed è positivo quando p^+ è positivo.

Andando a studiare la traiettoria si ha che:

$$\cos\phi = \frac{1}{e}$$

Dalla figura Figura 9.10 si può vedere che Δ che è l'angolo formato tra la direzione del periastro e la direzione della velocità di fuga è dato dalla somma:

$$\Delta = \pi - \phi - \nu^+$$

Mentre l'inclinazione del piano dell'orbita non sarà altro che:

$$\tan i = \frac{w^+}{\sqrt{(u^+)^2 + (v^+)^2}}$$

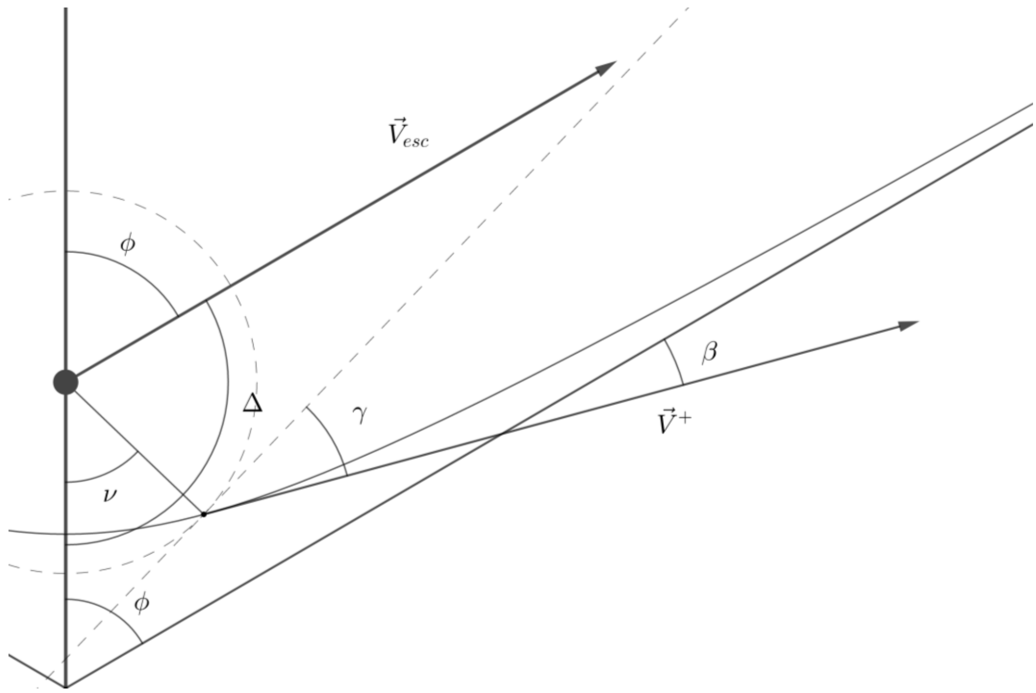

Figura 9.10: Geometria dell'orbita iperbolica di fuga

9.2.1.1 Determinazione del vettore $\vec{V}_{esc}$

I valori appena determinati sono espressi nel sistema di riferimento NTW dove $\hat{N}$ è la direzione del nodo dell'iperbole, $\hat{T}$ è la direzione tangenziale e $\hat{W}$ è la direzione normale al piano.

Consideriamo il sistema di riferimento IJK geocentrico ecclittico, l'asse $\hat{I}$ è sulla congiungente Sole-Terra e punta verso il Sole, l'asse $\hat{K}$ ha la direzione e il verso del vettore velocità angolare della Terra e l'asse $\hat{J}$ è preso in modo da formare una terna destrorsa Figura 9.11.

Per passare dal sistema IJK, a quello NTW, Figura 9.11, bisogna ruotare due volte il sistema IJK due volte prima lungo $\hat{K}$ e dopo intorno a $\hat{N}$.

La prima rotazione consiste nel ruotare il sistema di riferimento IJK di un angolo $\Omega = \theta_f - \theta_{S_f}$ rispetto all'asse $\hat{K}$:

$$\begin{pmatrix} N \\ T_i \\ K \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Omega & \sin\Omega & 0 \\ -\sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I \\ J \\ K \end{pmatrix}$$

La seconda rotazione consiste nel ruotare di un angolo i rispetto all'asse $\widehat{N}$:

$$\begin{pmatrix} N \\ T \\ W \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} N \\ T_i \\ K \end{pmatrix}$$

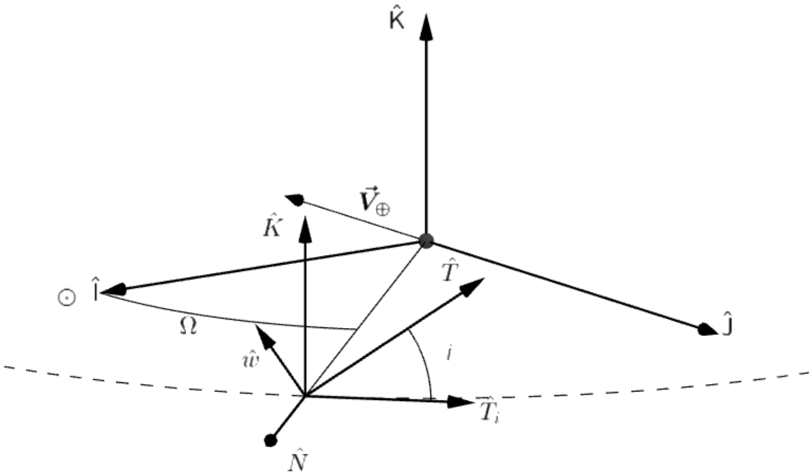

Figura 9.11: Passaggio tra sistema geocentrico, $\boldsymbol{IJK}$ al sistema $\boldsymbol{NTW}$

Per passare dal sistema IJK al sistema NTW:

$$\begin{pmatrix} N \\ T \\ W \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Omega & \sin\Omega & 0 \\ -\cos i \sin\Omega & \cos i \cos\Omega & \sin i \\ \sin i \sin\Omega & -\sin i \cos\Omega & \cos i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I \\ J \\ K \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} I \\ J \\ K \end{pmatrix}$$

La velocità di fuga nel sistema di riferimento NTW ha solo componenti lungo $\widehat{N}$ e $\widehat{T}$:

$$\frac{\vec{V}_{esc}}{V_{esc}} = \cos\Delta\,\widehat{N} + \sin\Delta\,\widehat{T}$$

Il vettore $\vec{V}_{esc}$ nel sistema geocentrico IJK sarà pari a:

$$\left(\vec{V}_{esc}\right)_{IJK} = R^{-1}\left(\vec{V}_{esc}\right)_{NTW}$$

$$\left(\vec{V}_{esc}\right)_{IJK} = V_{esc} \begin{pmatrix} \cos\Delta\cos\Omega - \sin\Delta\sin\Omega\cos i \\ \cos\Delta\sin\Omega + \sin\Delta\cos\Omega\cos i \\ \sin\Delta\sin i \end{pmatrix}$$

9.2.2 Sistema di riferimento eliocentrico

Per valutare la direzione e la declinazione di fuga si considera un sistema di riferimento eliocentrico eclittico, in cui $\hat{I}$ ha come direzione la congiungente Sole-Terra ma il verso è opposto rispetto a prima,

$\hat{K}$ è definito come precedentemente ed anche in questo caso J è preso in modo tale da avere una terna destrorsa. Per cui sia $\hat{I}$ che $\hat{J}$ sono invertiti rispetto a prima per cui il vettore $\vec{V}_{esc}$ diventa:

$$\vec{V}_{esc} = V_{esc} \begin{pmatrix} -\cos\Delta\cos\Omega + \sin\Delta\sin\Omega\cos i \\ -\cos\Delta\sin\Omega - \sin\Delta\cos\Omega\cos i \\ \sin\Delta\sin i \end{pmatrix}$$

In questo modo è possibile determinare la declinazione e la direzione di fuga, dalla Figura 9.12 come:

$$\cos\delta = \frac{V_k}{V_{esc}}$$

$$\tan\gamma = \frac{V_I}{V_J}$$

dove V_i, V_j e V_k sono le componenti di $\vec{V}_{esc}$ rispettivamente lungo $\hat{I}, \hat{J}$ e $\hat{K}$.

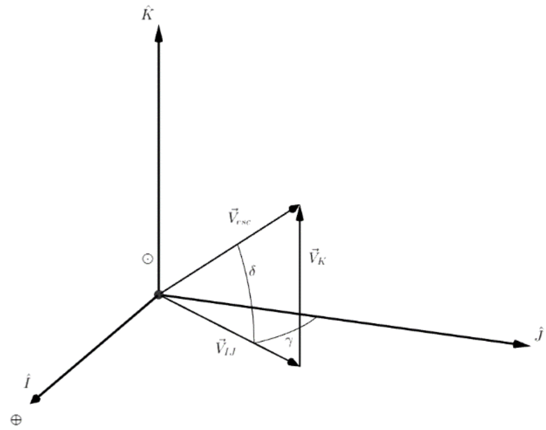

Figura 9.12: Declinazione e direzione di $\vec{V}_{esc}$

Nel sistema di riferimento eliocentrico la Terra ha velocità:

$$\vec{V}_{\oplus} = V_{\oplus}\vec{J}$$

Da cui si ricava la velocità assoluta del satellite che sarà pari a:

$$\vec{V} = V_{esc} \begin{pmatrix} \sin\Delta\sin\Omega\cos i - \cos\Delta\cos\Omega \\ \frac{V_{\oplus}}{V_{esc}} - \sin\Delta\cos\Omega\cos i - \cos\Delta\sin\Omega \\ \sin\Delta\sin i \end{pmatrix}$$

10 Risultati

Le trasferte Luna-Luna sono raggruppate in diverse famiglie in base al numero di rivoluzioni compiute dalla Luna nel periodo tra i due incontri. Il nome delle varie famiglie inizia con una lettera maiuscola che in ordine alfabetico corrisponde approssimativamente al numero di mesi tra i due incontri lunari. In seguito, ci sono due lettere maiuscole, "O" e "I", che rappresentano due sotto casi, aggiunti dopo la lettera maiuscola iniziale, che specificano rispettivamente se il primo e il secondo flyby sono outbound, se l'angolo formato tra il vettore velocità relativa del satellite rispetto alla Luna e la velocità della Luna, α, è positivo, o inbound, se α è negativo. Ed infine, dopo le lettere maiuscole c'è un numero che indica il numero di volte che il satellite, nel suo moto di rivoluzione intorno alla Terra, interseca l'orbita lunare tra i due flybys.

Le varie famiglie sono parametrizzate dalla velocità relativa iniziale della Luna e dall'angolo di fase iniziale del Sole (angolo tra la direzione Sole-Terra e la direzione Terra-Luna al primo flyby lunare). È stata considerata una velocità relativa iniziale di $1\frac{km}{s}$, in quanto una traiettoria di lancio diretta per la Luna produce una velocità relativa simile quando il satellite incontra la Luna; l'esatto valore della velocità non è critico a causa della bassa sensibilità delle famiglie rispetto alla velocità relativa lunare iniziale [8].

Sono state considerate solo famiglie con una durata inferiore ai sei mesi, in modo tale da evitare tempi di volo non risonanti.

Per determinare le varie orbite si è utilizzato un passo, $\Delta\alpha$, pari a $0.05\ deg$, in modo da spazzare il range completo delle possibili direzioni ed energia di fuga.

Una volta determinate le traiettorie che uniscono i due flybys lunari, è possibile valutare il contributo della perturbazione gravitazionale del Sole sull'energia di fuga.

In seguito, saranno discusse le varie famiglie.

10.1 Famiglia Inbound-Inbound

Le traiettorie sono definite Inbound-Inbound quando la velocità relativa iniziale del satellite rispetto Luna e la velocità relativa finale formano un angolo, α, negativo rispetto alla velocità della Luna, Figura 10.1.

Dalla Figura 10.1 è possibile vedere come la traiettoria è fortemente perturbata dall'azione gravitazionale del Sole, infatti l'attrazione gravitazionale del Sole trasforma l'orbita diretta a retrograda.

10.1.1 Famiglia II1

Le orbite considerate in questa sezione sono tutte le orbite della famiglia II in cui il satellite incontra l'orbita lunare una sola volta durante il suo moto di rivoluzione intorno alla Terra.

10.1.1.1 Orbite famiglia II1

Nella Figura 10.2, vengono riportate alcune orbite della famiglia II1, con un passo ϑ_{S_0} pari a $5\ deg$.

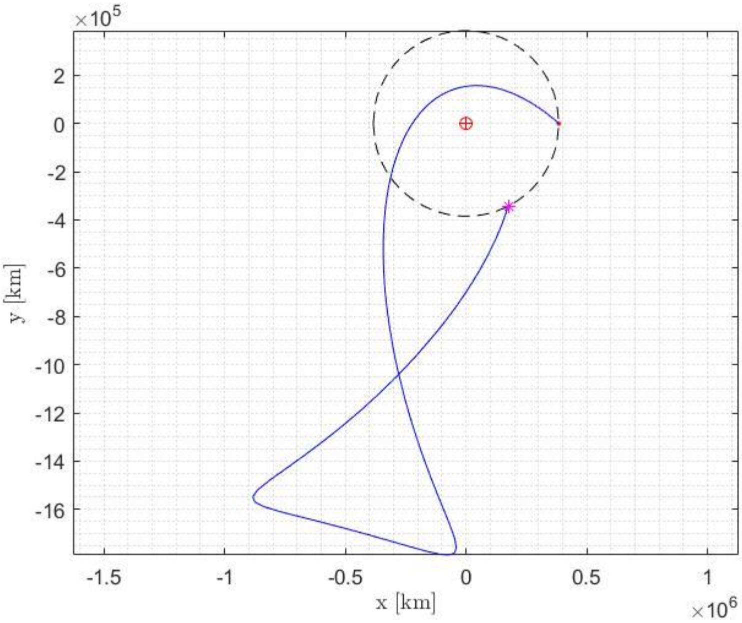

Figura 10.1: Esempio traiettoria Inbound-Inbound

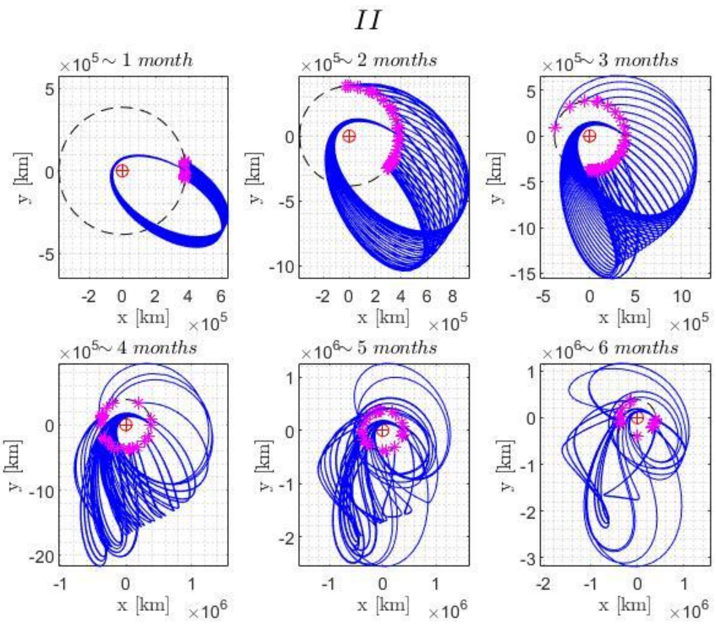

Figura 10.2: Orbite II singola orbita

Dalla Figura 10.2 si può vedere che aumentando il tempo che trascorre tra i due flyby le traiettorie sono maggiormente perturbate dall'attrazione gravitazionale del Sole rispetto a quelle con una durata minore. Ad esempio, è possibile vedere come le traiettorie che impiegano meno di un mese, famiglia A, per compiere il tragitto tra i due flyby hanno un apogeo poco distante dalla Terra e quasi non risentono della perturbazione solare, infatti anche la posizione finale rimane quasi costante nonostante lo spostamento del Sole, mentre aumentando la durata è possibile vedere come l'apogeo si allontana dalla Terra e le soluzioni sono fortemente perturbate.

10.1.1.2 Valutazione Lunar Gravity Assist per la famiglia *II1*

Una volta definite le orbite che collegano i due flyby lunari è possibile valutare la massima energia iperbolica di fuga, *C3*, in funzione della direzione di fuga, γ. Per ogni singola famiglia distinta dalla prima lettera maiuscola si valuta il valore del $C3_{max}$ in funzione di γ e successivamente si andrà a determinare il massimo valore di $C3$ della famiglia II1 come il massimo valore dei $C3_{max}$ delle varie famiglie che compongono II1. In seguito, si andranno a confrontare i vari risultati ottenuti.

La Figura 10.3 mostra l'andamento dell'energia di fuga, $C3_{max}$, in funzione del pump angle, γ, angolo formato tra la direzione di fuga ed il vettore velocità della Terra, per tutte le famiglie AII1 fino a FII1, ad esempio per $\gamma = 0\ deg$ si ottiene una trasferta di Hohman per NEOs.

I risultati in Figura 10.3 sono dati per orbite planari (0 deg di declinazione). Dalla figura è possibile vedere che le orbite della famiglia AII1 non danno alcun contributo all'andamento globale. Le famiglie più interessanti sono quelle con durata superiore al mese. Dalla figura si può vedere che la famiglia FII1 ha il maggior valore di $C3_{max}$ per γ minore di 60 deg, per γ maggiore fino a 65 deg il valore massimo di $C3$ si ha per la famiglia $DII1$. Aumentando ancora γ fino a 70 deg il massimo si registra per la famiglia EII1 e così via.

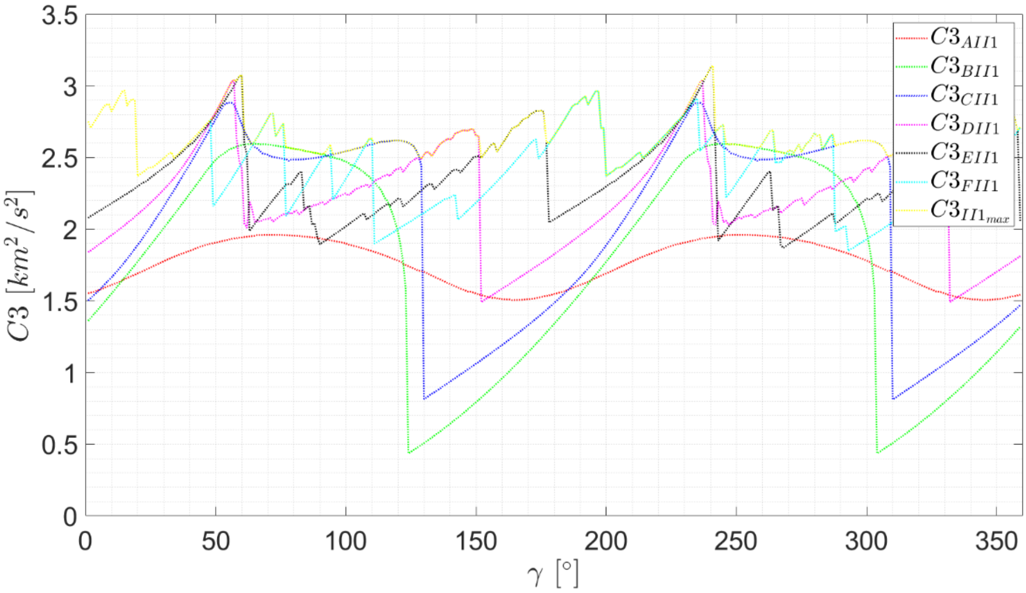

Figura 10.3: $C3$ per orbite *II1* a $\boldsymbol{\delta = 0\ deg}$

In questo modo si ha che il valore di $C3_{max}$ per la famiglia II1 oscilla tra 3.2 e 2.3 $\frac{km^2}{s^2}$. Il $C3_{max}$ si aggira intorno ai 3.2 $\frac{km^2}{s^2}$ e si raggiunge per un angolo γ pari a 60 deg (simmetricamente 240 deg), mentre il minimo si ottiene per γ pari a 20 deg (simmetricamente a 200 deg).

Nella Figura 10.4 è riportato l'andamento del $C3_{max}$ per la famiglia AII1 in funzione di γ e la declinazione, δ. Dalla figura è possibile vedere come all'aumentare della declinazione il valore dell'energia di fuga, $C3$, diminuisca.

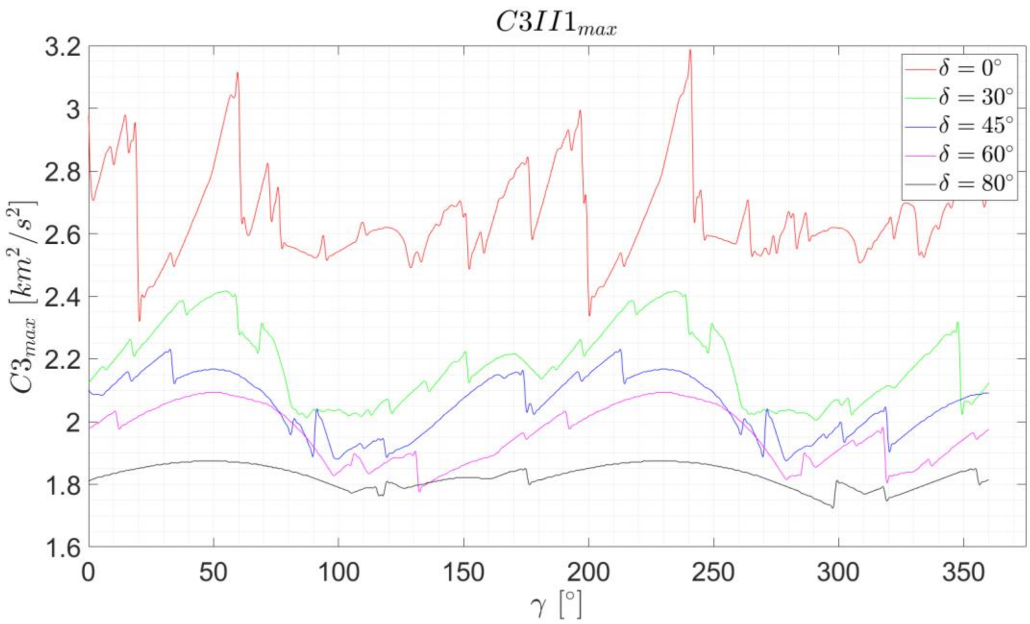

Figura 10.4: $C3_{max}$ per la famiglia *II1*

La Figura 10.5 mostra come varia $C3_{max}$ al variare della declinazione, δ, per la famiglia II1. Dalla figura è possibile vedere come aumentando la declinazione sia il massimo che il minimo del $C3_{max}$ diminuiscano.

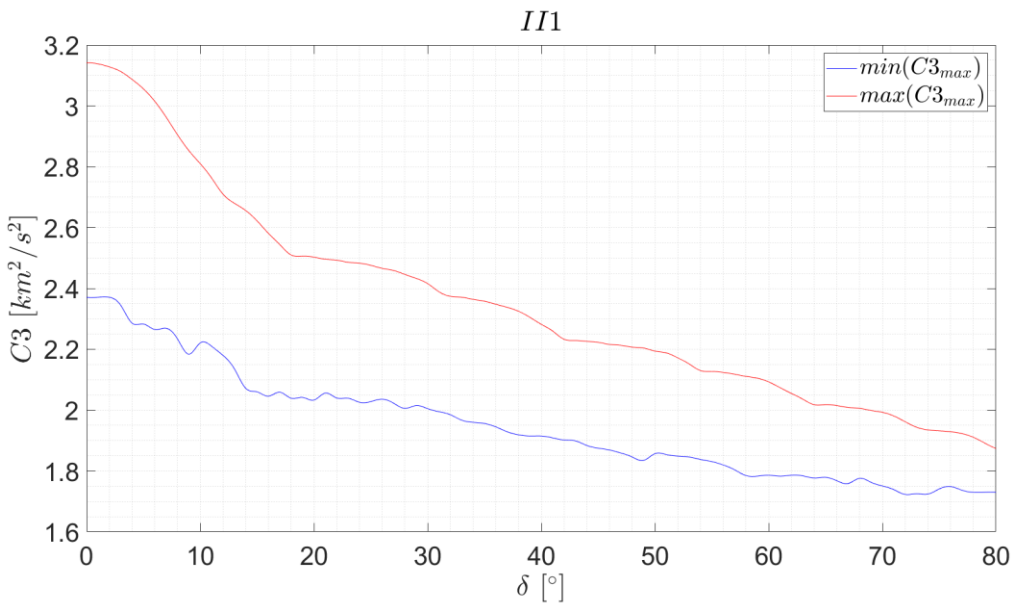

Figura 10.5: max $C3_{max}$ e min $C3_{max}$ al variare **δ** per la famiglia II1

Per la famiglia II1 l'energia di fuga garantita minima è superiore a 1.7 $\frac{km^2}{s^2}$ per tutte le declinazioni. Per declinazioni minori di 30 deg si ha un'energia di fuga garantita minima superiore ai 2 $\frac{km^2}{s^2}$ per tutti i valori di γ, mentre per δ minore di 6 deg si ottiene un $C3_{max}$ superiore ai 3 $\frac{km^2}{s^2}$.

10.1.2 Famiglia II2

In questa sezione saranno discusse le orbite in cui il satellite, nel suo moto di rivoluzione intorno alla Terra, interseca la traiettoria della Luna due volte.

10.1.2.1 Orbite famiglia II2

Nella Figura 10.6 vengono riportate alcune orbite al variare della posizione iniziale del Sole, θ_{S_0}, con un passo di *20 deg* per facilitarne la lettura.

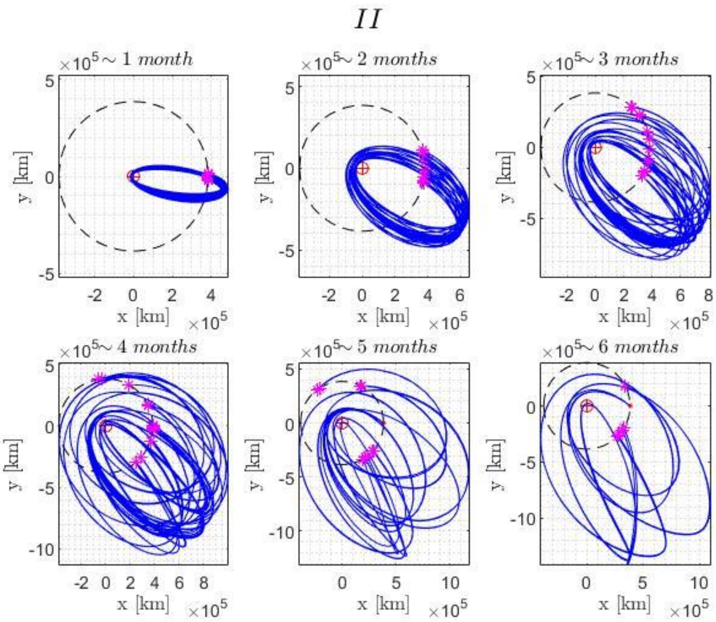

Figura 10.6: Orbite II doppia orbita

Dalla Figura 10.6 è possibile vedere come aumentando il numero di passaggi del satellite sull'orbita lunare, quindi riducendo il periodo orbitale a parità di durata della traiettoria tra i due flyby, le orbite sono meno perturbate rispetto al caso II1. Da ciò è possibile prevedere che aumentando il numero di passaggi del satellite sull'orbita lunare diminuirà l'energia di fuga.

Dalla Figura 10.6, inoltre, è possibile vedere come le soluzioni determinate per la famiglia BII2 sono simili alle soluzioni trovate per la soluzione AII1, e saranno simili alla soluzione CII3 e così via.

10.1.2.2 Valutazione Lunar Gravity Assist per la famiglia II2

Nella Figura 10.7 è rappresentato l'andamento del $C3_{max}$ al variare di γ e δ. Per la famiglia II2 si ottiene che $C3_{max}$, nel caso planare, varia tra un minimo di 1.5 $\frac{km^2}{s^2}$ fino ad un massimo di 2.7 $\frac{km^2}{s^2}$.

Confrontando l'andamento del $C3_{max}$ in Figura 10.7 con quello in Figura 10.4 si può vedere come le prestazioni della manovra siano in generale peggiorate tranne per alcune direzioni di fuga. Infatti, nel caso di γ compreso tra i 70 e i 140 deg si può vedere che l'andamento dell'energia di fuga è maggiore nel caso della famiglia II2 rispetto alla famiglia II1, in questo modo è possibile compensare i minimi di energia massima di fuga di una famiglia con i massimi delle altre famiglie.

Se nel caso planare l'andamento del $C3_{max}$ per la famiglia II2 è accettabile, aumentando la declinazione le prestazioni si deteriorano fino a che l'energia in seguito alla manovra al posto di aumentare diminuisce diventando minore dell'unità.

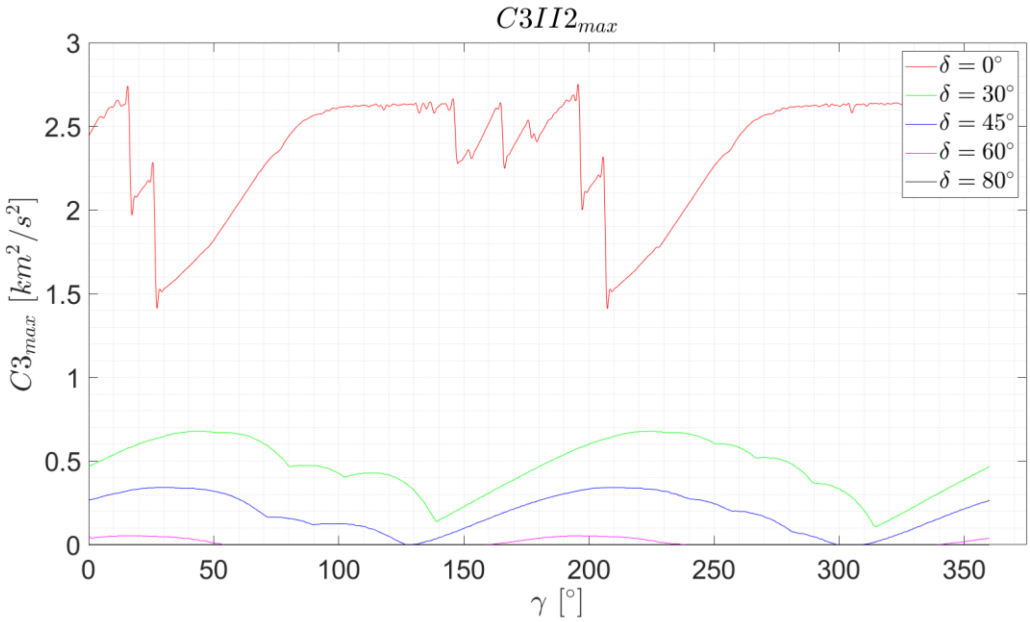

Figura 10.7: $C3_{max}$ per la famiglia *II2*

Nella Figura 10.8 è rappresentato l'andamento del $C3_{max}$ e $C3_{min}$ in funzione della declinazione δ.

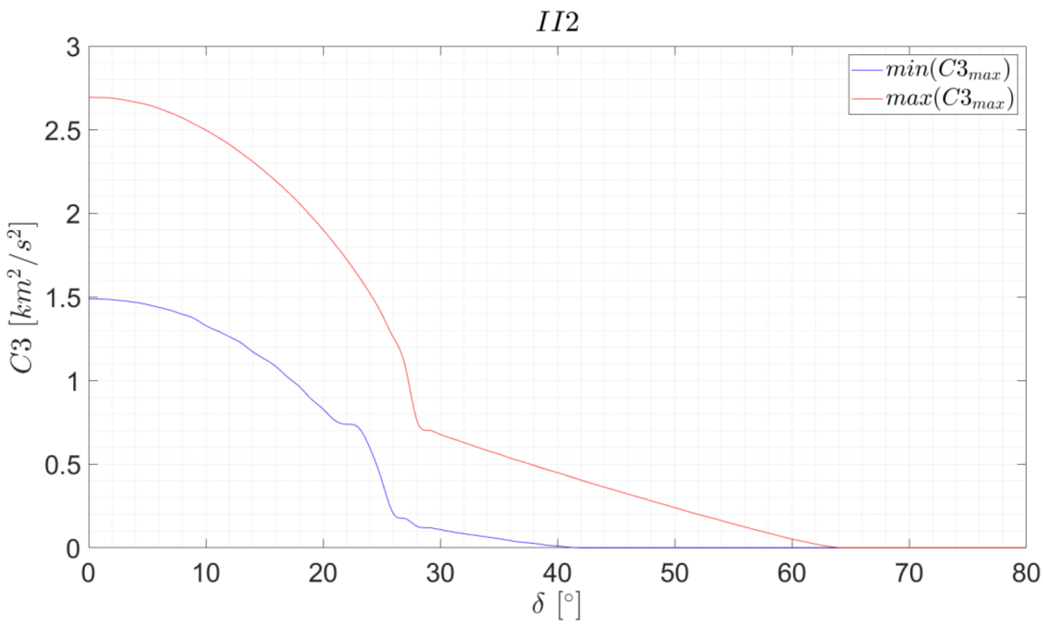

Figura 10.8: max $C3_{max}$ e **min $C3_{max}$** al variare $\boldsymbol{\delta}$ per la famiglia II2

Come detto precedentemente è possibile vedere come all'aumentare della declinazione, δ, le prestazioni crollano, infatti è possibile vedere come a partire dai *15 deg* il valore del $C3_{max}$ diventa minore dell'unità facendo sì che al posto di un guadagno si abbia una perdita di energia.

Aumentando il numero di orbite dello S/C si può vedere come le prestazioni vadano via via peggiorando.

10.1.3 Confronto tra il numero di orbite

Nella Figura 10.9 è possibile vedere il confronto tra il $C3_{max}$ per le varie famiglie dalla $II1$ fino alla $II5$.

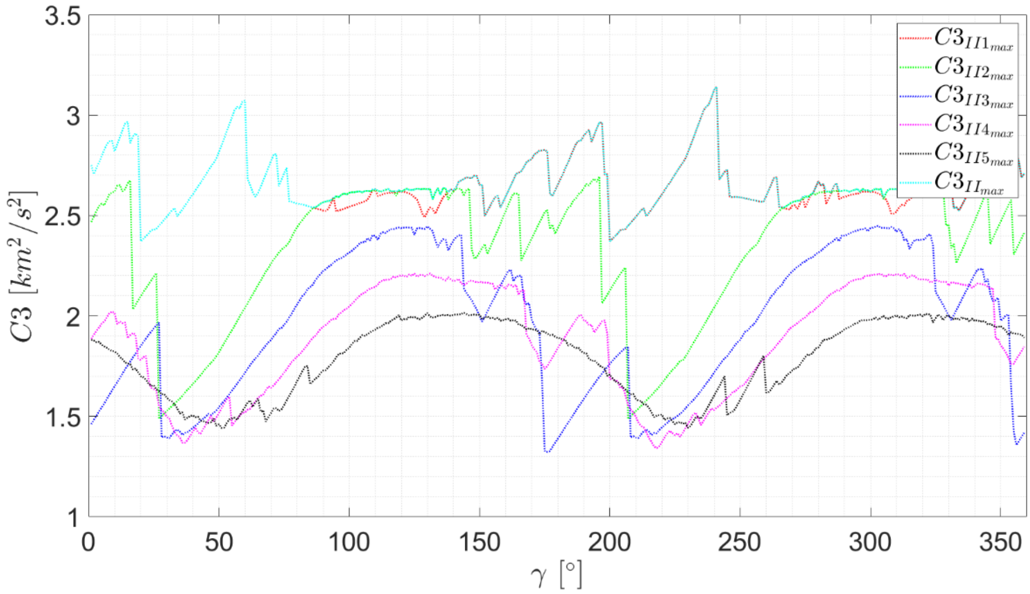

Figura 10.9: $C3_{max}$ al variare del numero di rivoluzioni del satellite per la famiglia II

Come detto in precedenza all'aumentare del numero di rivoluzioni del satellite le prestazioni vanno via via degradandosi.

Dalla Figura 10.9 è possibile vedere che per angoli γ compresi tra i 70 e 140 deg, la famiglia II2 ha un $C3_{max}$ maggiore rispetto alla famiglia II1, in questo modo è possibile innalzare il valore minimo del $C3_{max}$ per l'intera famiglia II. Nella sezione successiva si andranno a valutare i fattori che contribuiscono a questa situazione.

10.1.3.1 Differenze tra caso famiglia II1 e famiglia II2

Come detto nella sezione precedente per angoli di fuga che vanno dagli *70* ai *140 deg* il valore del $C3_{max}$ per la famiglia $II1$ è minore rispetto al valore calcolato per la famiglia $II2$.

Si prenda in esame il caso in cui γ è pari a 128 deg in cui si ha la massima differenza tra i due $C3_{max}$. Il valore massimo di $C3$ nel caso di orbita appartenente alla famiglia II1 nel caso di $\gamma = 128\ deg$ è dato dall'orbita in Figura 10.10, mentre nel caso di orbita II2 in Figura 10.11.

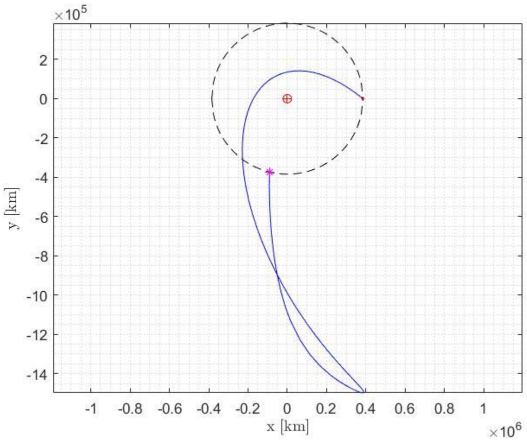

Figura 10.10: Caso orbita singola

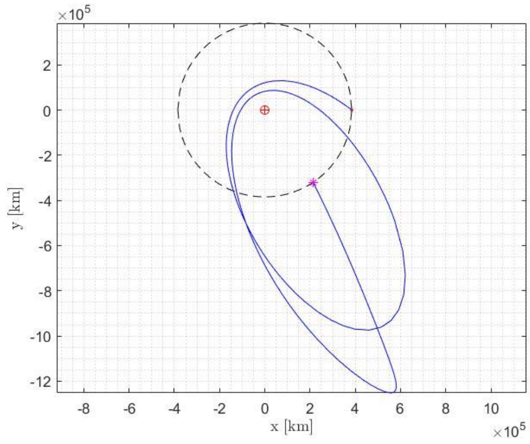

Figura 10.11: Caso orbita doppia

La principale differenza è dovuta all'angolo di rotazione massima, δ_{max}, dovuta alla manovra di flyby, infatti per l'orbita II1 si ottiene un angolo di rotazione pari a $57.46\ deg$ mentre nel caso di orbita II2 il δ_{max} è pari a $68.61\ deg$, ciò fa sì che il pump angle dopo il flyby, p_+, sia pari a $-80.74\ deg$ per l'orbita II1 mentre è uguale a $-58.57\ deg$ per l'orbita della famiglia II2. In questo modo la componente della velocità nel sistema di riferimento Sole, V_+, lungo la direzione della velocità della Luna ha un modulo maggiore nel caso della famiglia II2 rispetto a quella II1 e quindi la $C3$ sarà maggiore.

Nella Tabella 10.1 sono riportate le più importanti differenze tra i due casi analizzati.

Considerando le varie famiglia che compongono la famiglia II in cui aumenta il numero di intersezioni con l'orbita lunari è possibile compensare i minimi della famiglia II1 con i massimi ottenuti per le famiglie successive, in questo modo è possibile ottenere aumentare il valore massimo e minimo del $C3_{max}$ complessivo di tutte le famiglie.

Tabella 10.1: Principali differenze tra orbita singola e orbita doppia II

	SINGOLA	**DOPPIA**	**UNITÀ DI MISURA**
$\vec{V}_-$	$(0.03 \quad 1.19 \quad 0)$	$(-0.53 \quad 1.04 \quad 0)$	km/s
$\lvert\vec{V}_-\rvert$	1.24	1.17	km/s
$\vec{V}_{\infty_-}$	$(-1.17 \quad -1.27 \quad 0)$	$(-1.17 \quad -0.88 \quad 0)$	km/s
$\lvert\vec{V}_{\infty_-}\rvert$	-1.72	1.46	km/s
p_-	-137.37	-127.18	deg
δ_{max}	57.44	68.61	deg
p_+	-80.74	-58.57	deg
$\vec{V}_{\infty_+}$	$(-1.70 \quad 0.28 \quad 0)$	$(-1.24 \quad 0.76 \quad 0)$	km/s
$\lvert\vec{V}_{\infty_+}\rvert$	1.72	1.46	km/s
$\vec{V}_+$	$(-1.70 \quad 1.30 \quad 0)$	$(-1.24 \quad 1.78 \quad 0)$	km/s
$\lvert\vec{V}_+\rvert$	2.14	2.17	km/s
$C3$	2.49	2.63	km^2/s^2

10.1.4 Risultati famiglia II

Nella Figura 10.12 è riportato l'andamento del $C3_{max}$ per tutte le famiglie che compongono la famiglia II.

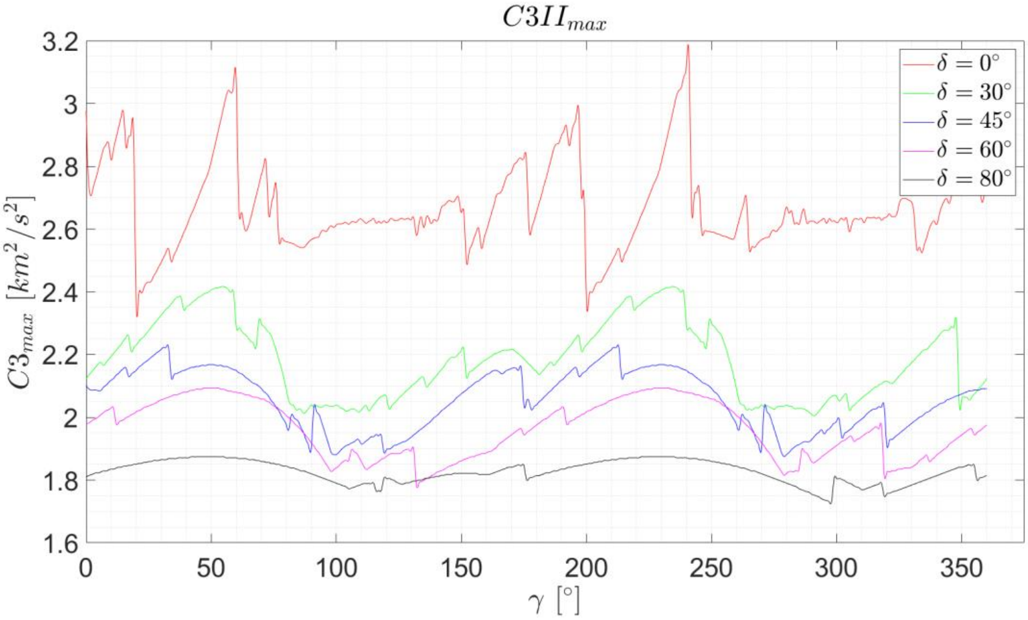

Figura 10.12: $C_{3_{max}}$ per la famiglia *II*

Dalla Figura 10.12 si può vedere come per una manovra planare, $\delta = 0\ deg$, l'andamento del energia iperbolica di fuga oscilla tra il valore di 2.3 e 3.2 $\frac{km^2}{s^2}$; il massimo si ottiene tra i 50 e i 60 deg, mentre il minimo si ottiene per γ pari a 30 deg. Aumentando δ la situazione peggiora ma rimane comunque superiore all'unità, infatti per la famiglia II è garantita un'energia minima di fuga pari a 1.7 $\frac{km^2}{s^2}$ per tutte le declinazioni.

Nella Figura 10.13 sono riportati gli andamenti del valore minimo e del massimo di $C3_{max}$ per la famiglia II al variare di δ.

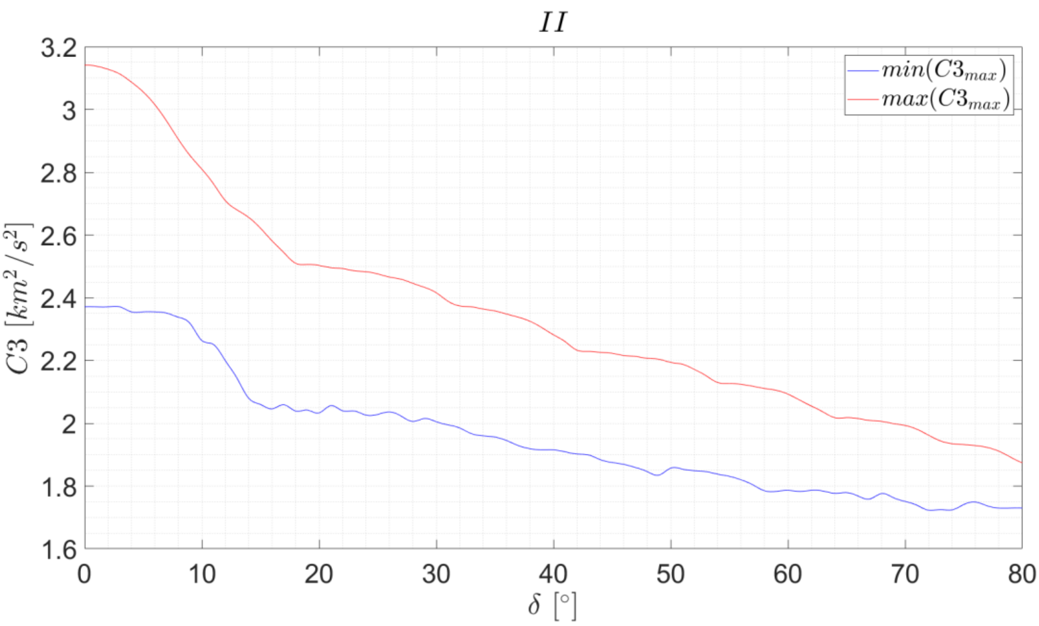

Figura 10.13: max $C3_{max}$ e min $C3_{max}$ al variare di δ per la famiglia *II*

Come detto precedentemente, è garantita un $C3_{max}$ superiore a 1.7 $\frac{km^2}{s^2}$ per tutte declinazioni δ, per inclinazioni inferiori ai 6 deg si ottiene un superiore ai 3 $\frac{km^2}{s^2}$, mentre per δ minore di 20 deg si ha un energia di fuga garantita minima superiore ai 2 $\frac{km^2}{s^2}$ per ogni direzione di fuga.

Confrontando la Figura 10.13 e la Figura 10.5 si può vedere il contributo dalle famiglie con un numero di intersezioni tra la traiettoria del satellite e l'orbita lunare maggiore all'unità, che fanno sì che per angoli di declinazione inferiori agli *8 deg* il minimo dei $C3_{max}$ aumenta rispetto alla sola famiglia II1.

10.2 Famiglia Inbound-Outbound

Le orbite IO sono caratterizzate da una condizione iniziale in cui l'angolo, α, formato tra la velocità della Luna e la velocità relativa del satellite è negativa, mentre la condizione finale è caratterizzato da un angolo α positivo, come in Figura 10.14.

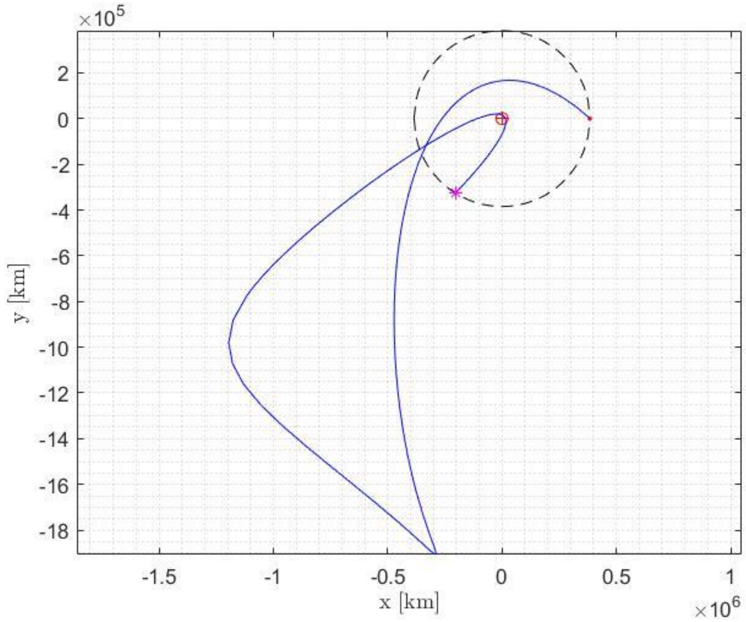

Figura 10.14: Esempio di traiettoria IO

10.2.1 Orbite famiglia IO

Nella Figura 10.15 sono riporta le orbite IO con un passo θ_{S_0} pari a *5 deg*, per facilitarne di lettura. Dalla figura è possibile vedere come nel caso della famiglia A e B le orbite non sono di particolare interesse, in quanto avendo un apogeo molto vicino alla Terra le traiettorie sono poco perturbate dalla posizione del Sole. Invece, per le altre famiglie si ottengono orbite molto perturbate, in cui si ha un apogeo molto distante dalla Terra.

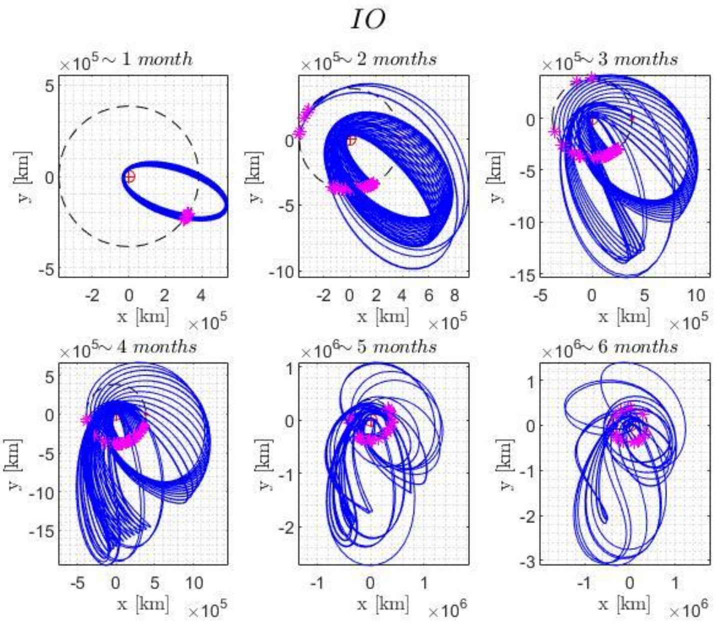

Figura 10.15: Orbite IO

10.2.2 Valutazione Lunar Gravity Assist per la famiglia IO

Nella Figura 10.16 è riportato l'andamento del $C3_{max}$ per la famiglia IO. Gli andamenti sono simili al caso II, il $C3_{max}$ oscilla tra un valore pari a 1.7 e 3.2 $\frac{km^2}{s^2}$ con il massimo compreso tra i 20 e i 30 deg (200 e 210 deg), mentre il minimo si ottiene tra 140 e 150 deg (320 e 330 deg).

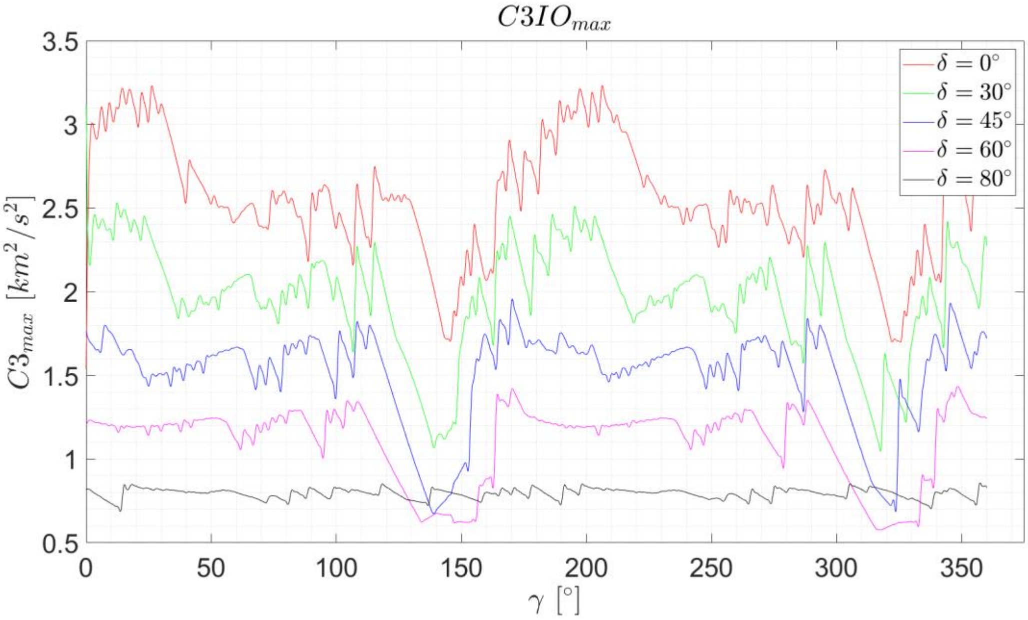

Figura 10.16: $C3_{max}$ per la famiglia IO

Aumentando la declinazione l'andamento dell'energia di fuga peggiore, infatti è possibile vedere come le prestazioni si degradino rispetto alla famiglia II, diventando addirittura svantaggiosa per alte declinazioni.

Nella Figura 10.17 sono riportati gli andamenti del massimo e del minimo $C3_{max}$ per la famiglia IO. Dalla figura si può vedere che per δ minore di 16 deg è possibile ottenere un $C3$ superiore a 3 km^2/s^2, mentre per angoli superiori l'andamento del $C3$ crolla fino a diventare anche minore dell'unità per alti δ. Per la famiglia IO è possibile garantire un valore minimo di $C3$ per ogni direzione di fuga, γ, superiore all'unità solo per declinazioni minori ai 30 deg. Per δ superiori ai 30 deg, nel caso della famiglia IO, è più conveniente un escape dopo il primo flyby piuttosto che compiere la manovra con due flyby.

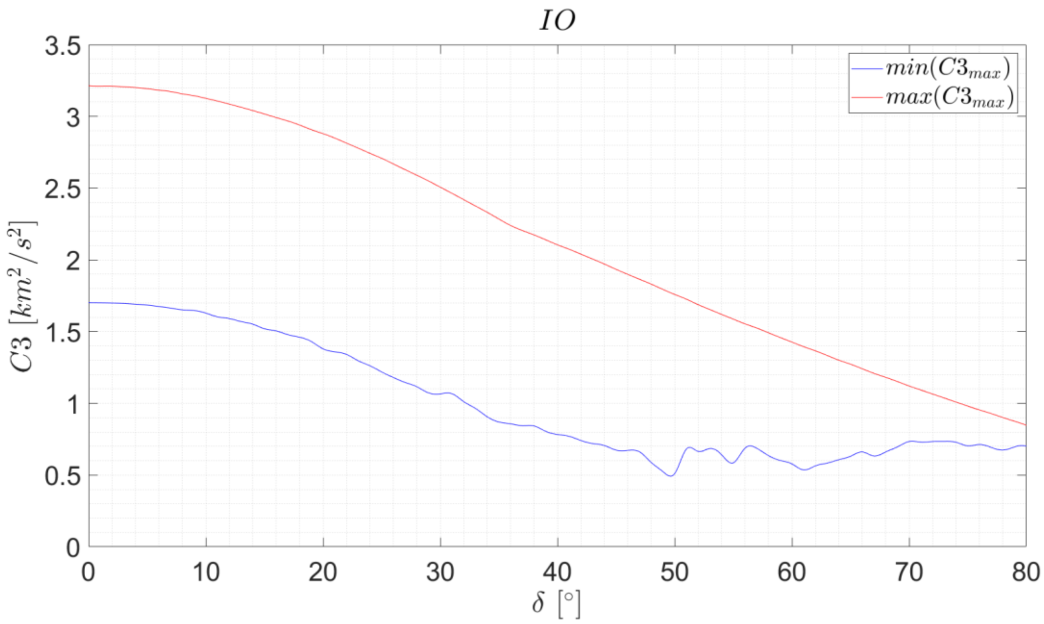

Figura 10.17: max $\boldsymbol{C3_{max}}$ e **min $\boldsymbol{C3_{max}}$** al variare di $\boldsymbol{\delta}$ per la famiglia *IO*

10.3 Famiglia Oubound-Inbound

Le orbite OI sono caratterizzate da una condizione iniziale per cui l'angolo formato tra la velocità relativa del satellite e la velocità della Luna, α, è positivo, mentre la condizione finale è caratterizzato da un angolo α negativo, Figura 10.18.

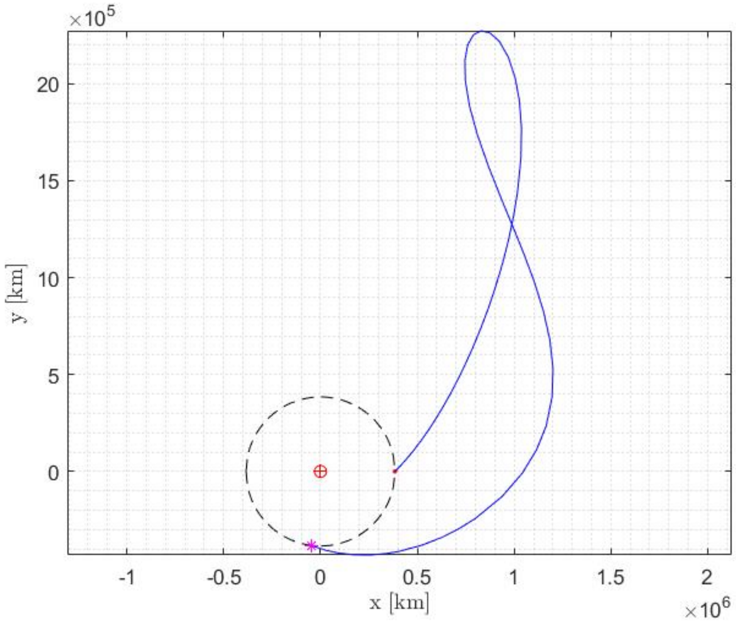

Figura 10.18: Esempio traiettoria OI

10.3.1 Orbite famiglia OI

Nella Figura 10.19 sono riportate alcuni esempi di orbite OI, con un passo θ_{S_0} di *5 deg*.

Dalla Figura 10.19 è possibile vedere che anche in questo caso studiare la famiglia A è poco interessante, poiché l'apogeo è vicino alla Terra e quindi la traiettoria è poco perturbata dalla posizione del Sole, infatti la posizione finale delle traiettorie è circa costante. Le famiglie di maggior interesse rimangono come negli altri casi le famiglie con durate superiori ai due mesi che sono fortemente perturbate.

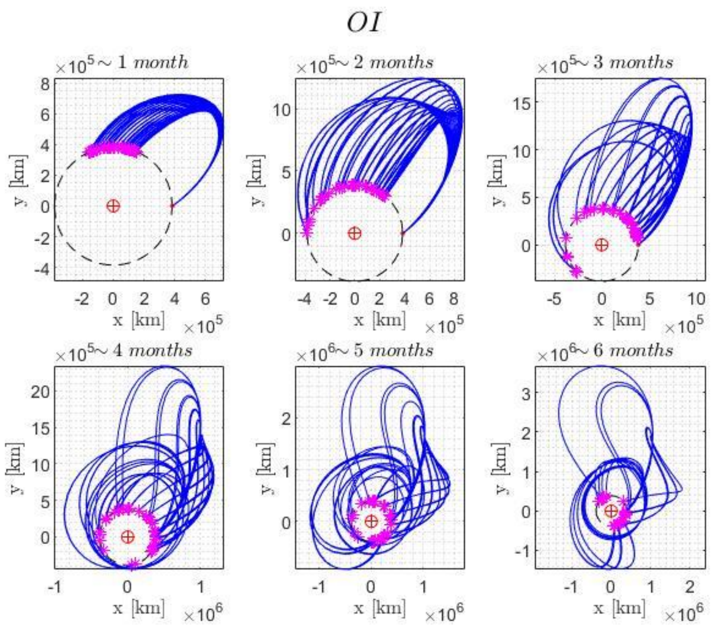

Figura 10.19: Orbite OI

10.3.2 Valutazione Lunar Gravity Assist per la famiglia OI

Nella Figura 10.20 è possibile vedere l'andamento del $C3_{max}$ al variare di γ e δ.

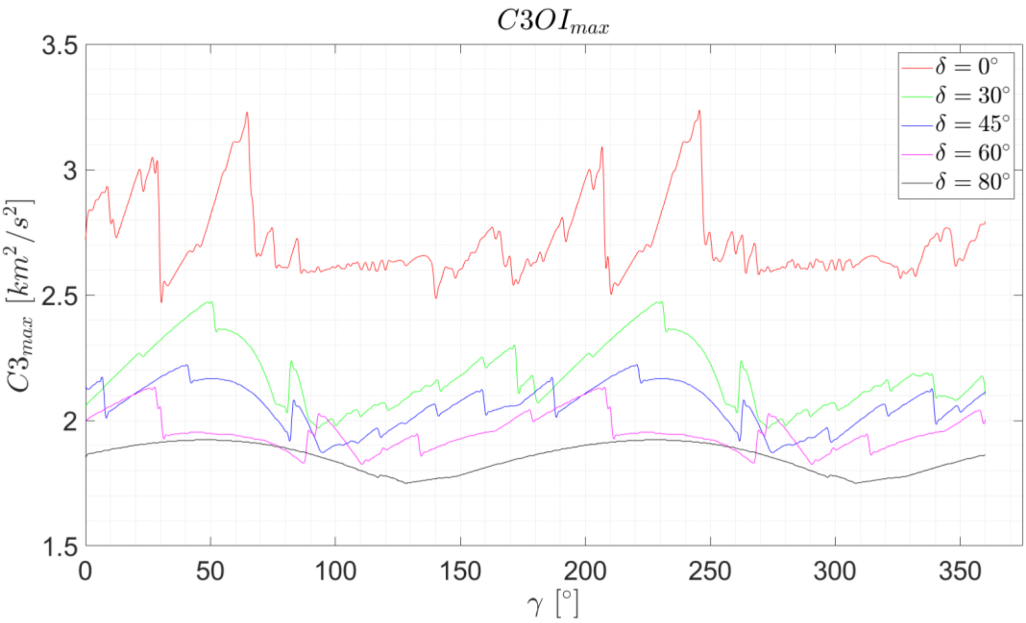

Figura 10.20: $C3_{max}$ per la famiglia OI

Per la famiglia OI l'andamento del $C3$ nel caso planare è compreso tra i 2.5 e i 3.2 $\frac{km^2}{s^2}$, con il massimo che si ottiene per γ pari a 60 deg (240 deg), mentre il minimo si ottiene intorno ai 30 deg (210 deg). A differenza delle altre famiglie esaminate il valore minimo del $C3_{max}$ è più alto, mentre il massimo di $C3$ si mantiene circa uguale.

Anche in questo caso come nei casi precedenti si ha un peggioramento del $C3_{max}$ al variare della declinazione.

Nella Figura 10.21, si ha l'andamento del valore massimo e del valore minimo di $C3_{max}$ al variare della declinazione, δ. Per la famiglia OI si ottiene un'energia di fuga superiore ai 3 $\frac{km^2}{s^2}$ per δ minore di 10 deg, mentre si riesce a garantire un $C3_{max}$ minimo superiore ai 2 $\frac{km^2}{s^2}$ per δ inferiori a 26 deg (206 deg). Aumentando la declinazione il valore del $C3_{max}$ sì diminuisce ma come si mantiene su livelli accettabili, infatti si riesce a garantire un'energia minima superiore a 1.7 $\frac{km^2}{s^2}$ per ogni valore di δ e γ.

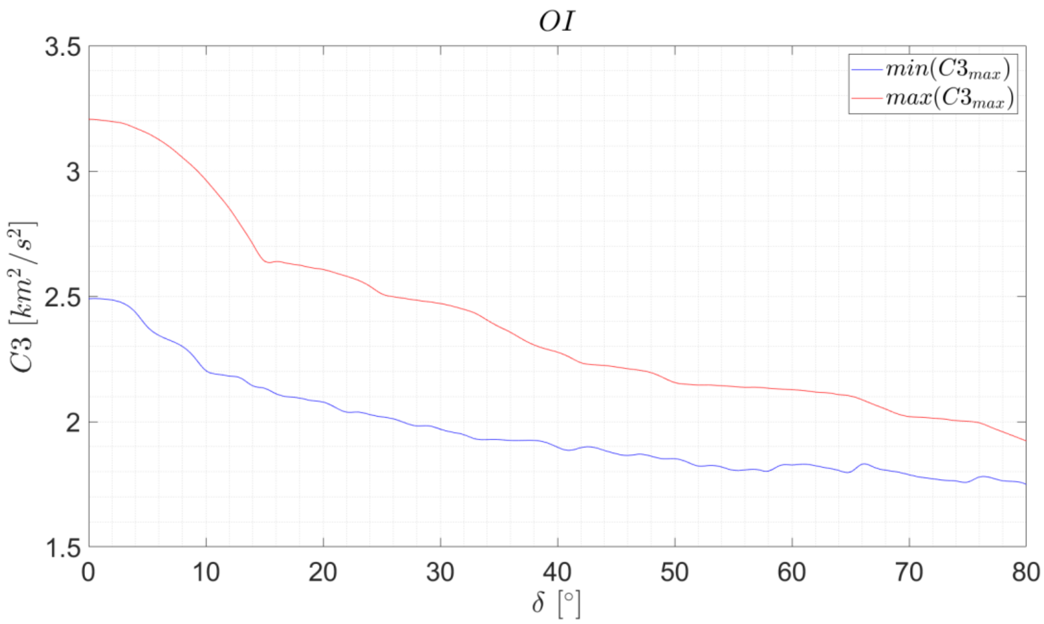

Figura 10.21: max $C3_{max}$ e **min $C3_{max}$** per la famiglia OI al variare di $\boldsymbol{\delta}$

10.4 Famiglia Oubound-Oubound

Infine, le traiettorie *OO* sono invece caratterizzate da una condizione iniziale e finale in cui l'angolo tra la velocità relativa e la velocità della Luna è positivo, Figura 10.22.

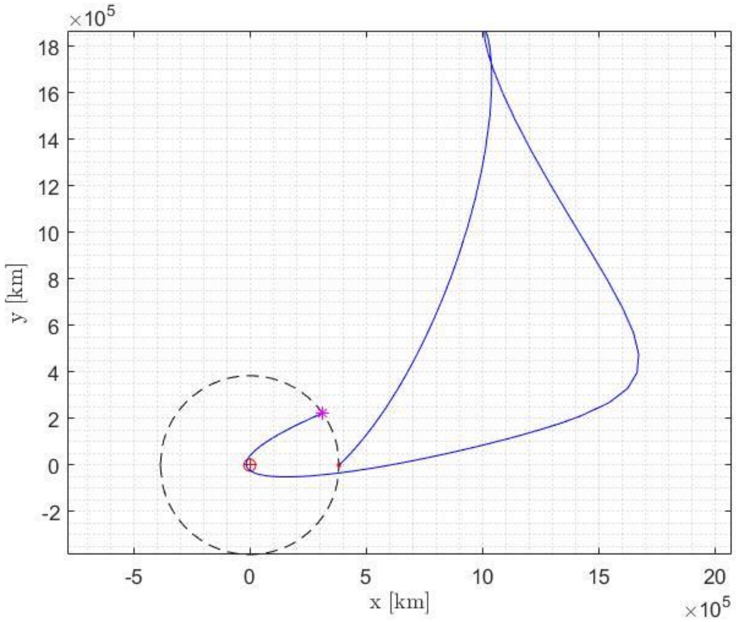

Figura 10.22: Esempio traiettoria OO

10.4.1 Orbite famiglia OO

Nella Figura 10.23 vengono riportati alcuni esempi di traiettorie OO, con un passo di θ_{S_0} pari a 5 deg.

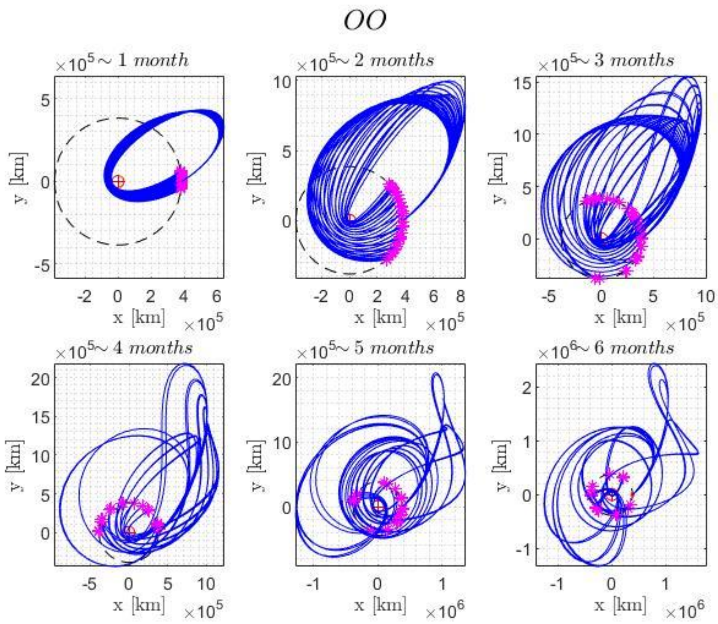

Figura 10.23: Orbite OO

Per la famiglia OO non è possibile ottenere soluzioni per cui il satellite incontra la traiettoria lunare una sola volta, poiché il satellite essendo più veloce rispetto alla Luna non riesce a incontrare la Luna immediatamente, l'unica soluzione ottenibile è quella in cui il punto iniziale coincide con quello finale al tempo $t = 0$, in cui i due flyby vanno a coincidere. Pertanto, si sono studiate solo le soluzioni in cui il satellite durante il suo moto incontra l'orbita lunare più volte. Anche in questo caso le orbite della famiglia A sono poco interessanti.

10.4.2 Valutazione Lunar Gravity Assist per la famiglia OO

Nella Figura 10.24 è riportato l'andamento del $C3_{max}$ in funzione di γ. Dalla figura è possibile vedere come l'energia di fuga oscilla, per il caso planare, tra 1.9 e 3.2 km^2/s^2; il massimo si ha per γ pari a 50 deg (230 deg), mentre il minimo si attesta intorno a γ pari a 140 deg (320 deg).

Nella Figura 10.25 è riportato l'andamento del massimo e del minimo $C3_{max}$ per le orbite OO. Dalla figura è possibile vedere che per alcuni valori di γ si ottiene un $C3_{max}$ maggiore di 3 km^2/s^2 per declinazioni inferiori ai 14 deg, mentre è garantito un minimo di $C3_{max}$ superiore all'unità per δ minore di 40 deg; per angoli superiori l'energia di fuga diminuisce rapidamente per cui la manovra non è più conveniente.

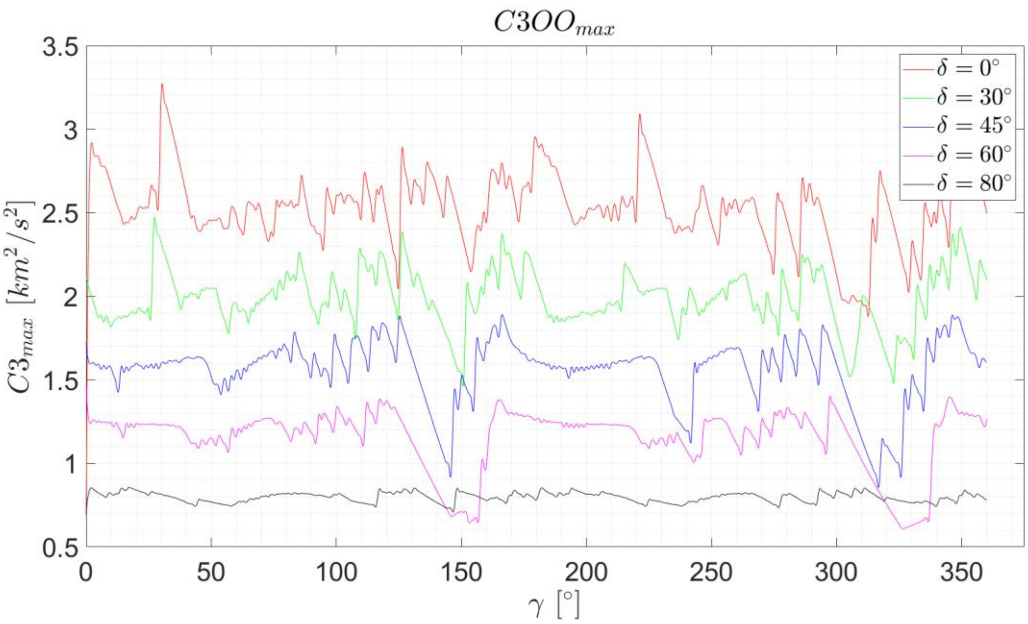

Figura 10.24: $C3_{max}$ per la famiglia OO

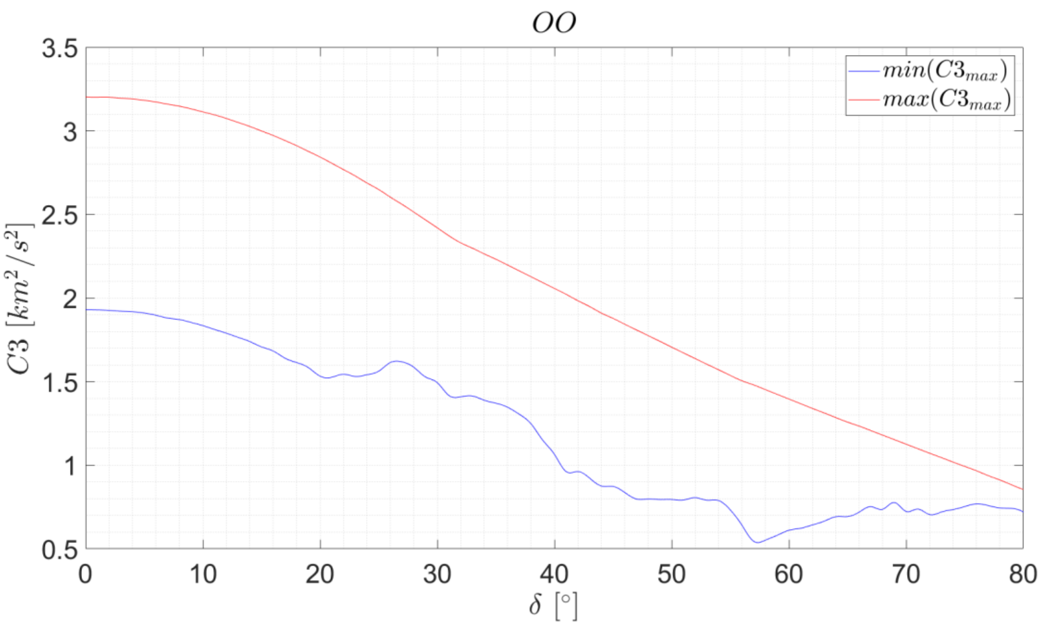

Figura 10.25: max $C3_{max}$ e **min $C3_{max}$** per la famiglia OO

10.5 Confronto tra le varie famiglie

Nelle Figura 10.26 e Figura 10.27 sono riportati gli andamenti dei valori massimi e dei valori minori dell'energia di fuga per le varie famiglie.

Dalla Figura 10.26 si può che per declinazioni minori di 30 deg le famiglie più energetiche sono la famiglia OO e IO. Per $\delta > 30$ deg invece l'andamento del $C3_{max}$ crolla per le famiglie OO e IO mentre rimane maggiore a 2 km^2/s^2 per le famiglie II e OI.

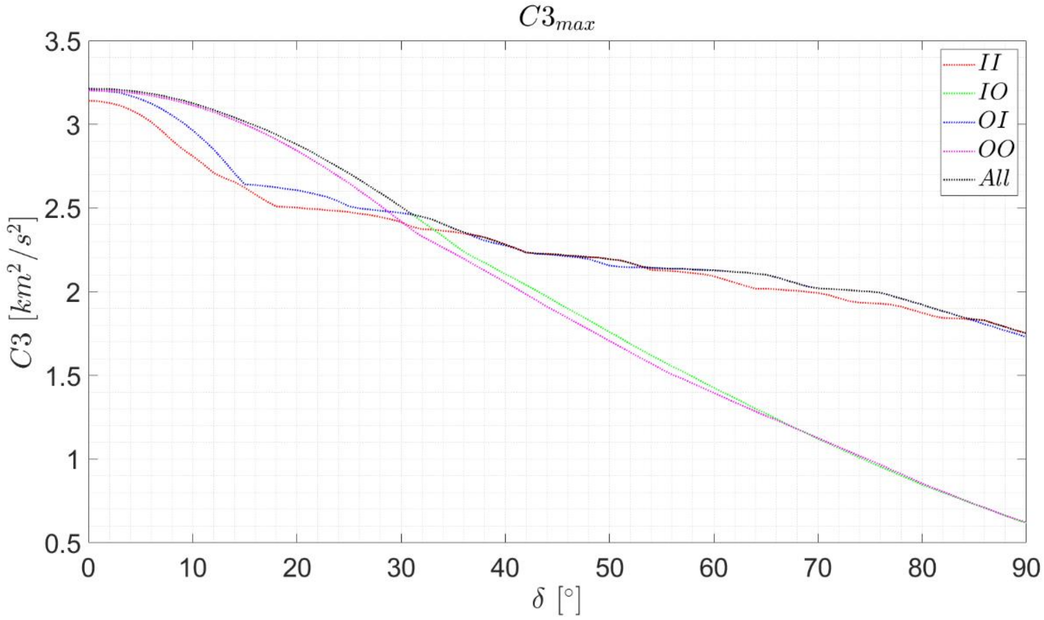

Figura 10.26: Confronto andamento $\boldsymbol{C3_{max}}$

Dalla Figura 10.27 si può vedere che le famiglie II e OI hanno un'energia minima di fuga maggiore rispetto alle altre famiglie. Per δ minore di 30 deg l'energia minima di fuga è superiore a 2 $\frac{km^2}{s^2}$ oltre ai 30 deg la diminuzione non è brusca e $C3_{min}$ si mantiene superiore a 1.7 $\frac{km^2}{s^2}$.

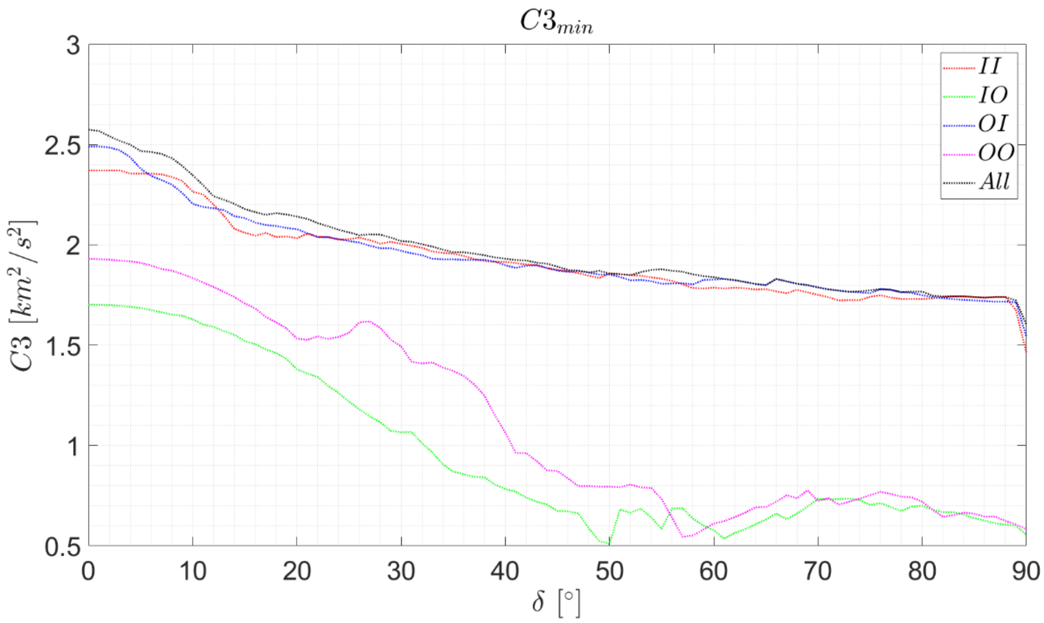

Figura 10.27: Confronto andamento $\boldsymbol{C3_{min}}$

10.6 Risultati finali

Mettendo insieme le varie famiglie si ottiene una curva univoca per il doppio flyby. In Figura 10.28 è riportato la sovrapposizione degli andamenti del $C3_{max}$ di tutte le famiglie. Dalla figura è possibile vedere come le curve vanno a compensarsi andando a generare la curva del $C3_{max}$ globale. Inoltre, è possibile vedere che questo procedimento permette di fare un fitting della soluzione andando a compensare i minimi delle varie famiglie, in questo modo è possibile aumentare il valore minimo di energia di fuga garantito dalla manovra di doppio flyby lunare.

Come mostrato nella Figura 10.28 la manovra di doppio flyby della Luna, che sfrutta le perturbazioni dovute alla forza gravitazione del Sole, permette di ottenere un'energia di fuga compresa tra i 2.6 e i $3.2\,\frac{km^2}{s^2}$, nel caso planare. I valori massimi di $C3$ superiori ai $3\,\frac{km^2}{s^2}$ si ottengono per γ che va dai 10 ai 40 deg e intorno ai 60 deg, e simmetricamente dai 190 ai 220 deg e intorno ai 240 deg. Per essere conservativi si assume che il massimo valore ottenibile per un'evasione lunare planare è pari al valore minimo ottenuto per tutto i γ, quest'assunzione è necessaria a causa delle semplificazioni adottate nel modello, come ad esempio l'orbita lunare considerata circolare e nel piano dell'eclittica. In questo caso si assume che il valore minimo per un'evasione planare è pari a 2.6 km^2/s^2.

Nella Figura 10.29 sono stati riportati gli andamenti del massimo e del minimo $C3_{max}$. Come ci si aspetta l'andamento è dell'energia di fuga decresce all'aumentare della declinazione. Dalla figura è possibile vedere che per declinazioni inferiori a 16 deg si ottiene un $C3_{max}$ superiore a $3\,\frac{km^2}{s^2}$. In particolare, è possibile vedere come il minimo si mantenga superiore a 1.7 km^2/s^2 per quasi tutte le declinazioni e mantenendosi superiore ai 2 km^2/s^2 fino a 30 deg.

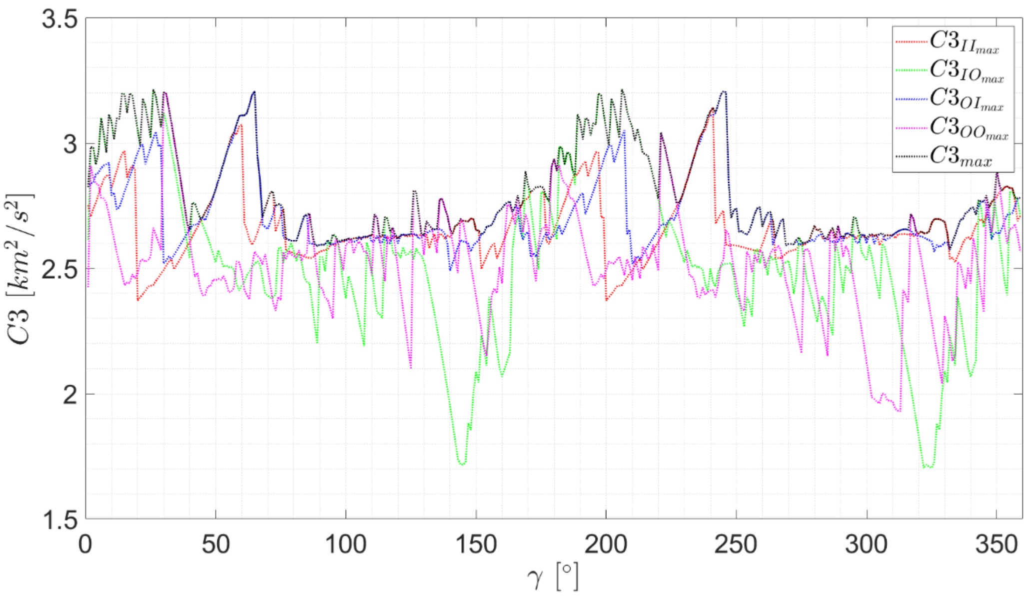

Figura 10.28: $C3_{max}$ $\delta = 0$ deg

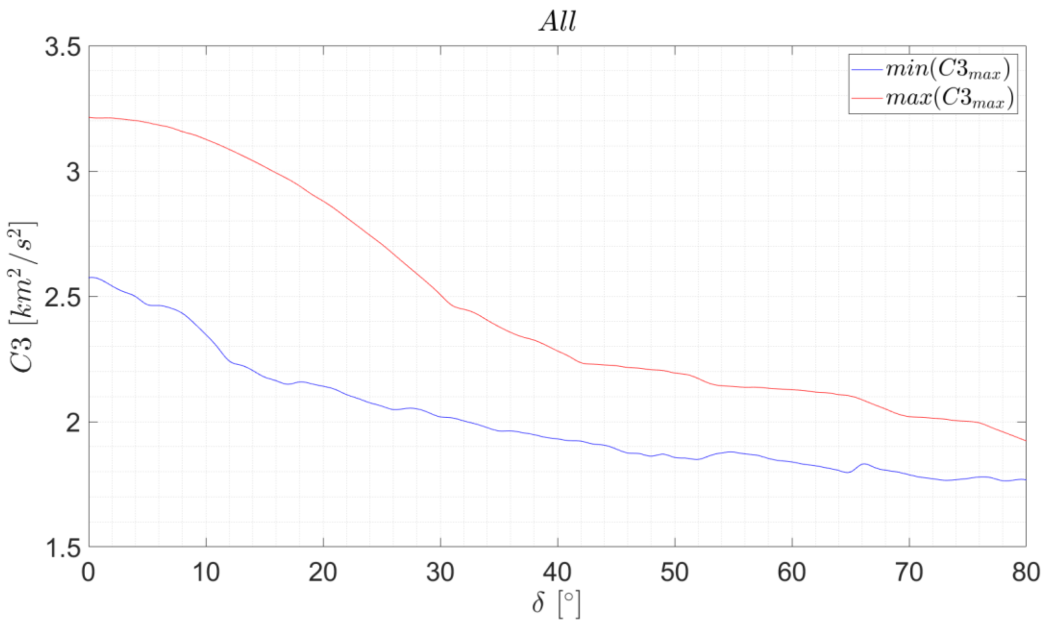

Figura 10.29: max $C3_{max}$ e **min $C3_{max}$** al variare di $\boldsymbol{\delta}$

La curva di maggior interesse è la curva del minimo valore del $C3_{max}$ che permette di essere conservativi, riportata in Figura 10.30. Questa curva ci dà la massima capacità di fuga garantita ottenibile tramite un doppio flyby lunare. Inoltre, questi risultati sono validi anche per il problema inverso quello di cattura di un satellite nel sistema Terra-Luna dallo spazio profondo.

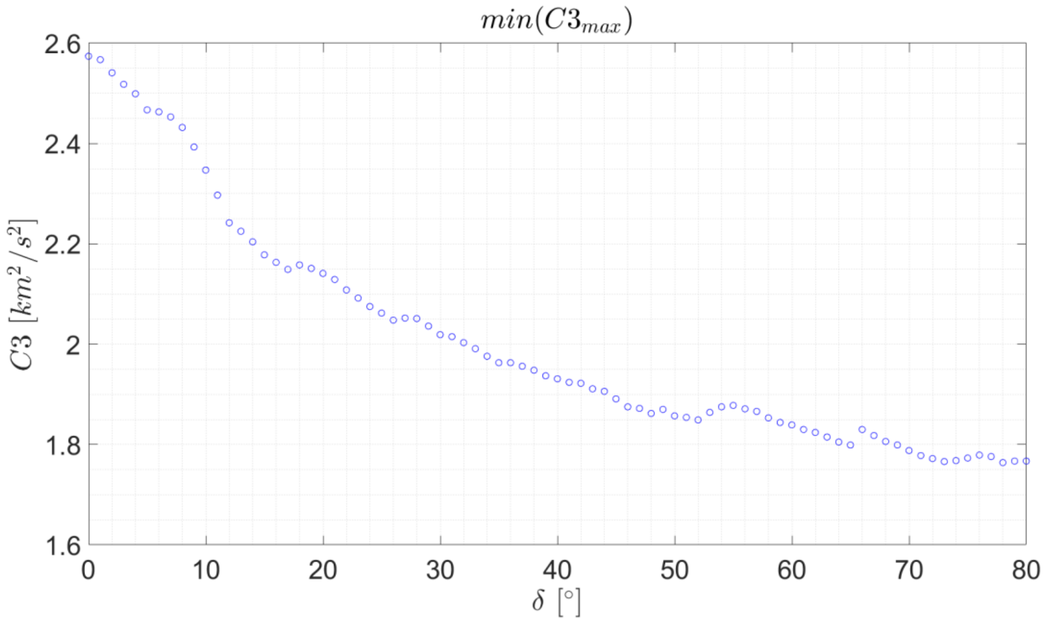

Figura 10.30: Massimo $\boldsymbol{C3}$ di fuga garantito utilizzando una manovra di lunar-assisted escape

La curva in Figura 10.30 può essere utilizzata come la curva di un velico di lancio "lunar-assisted" per facilitare il progetto di una traiettoria interplanetaria quando si usa una sequenza di fuga lunare. Infatti, le performance di un lanciatore sono effettivamente migliorate da una tecnica di questo tipo. Ed inoltre, poiché la sequenza di fuga è balistica, la curva può essere applicata a qualsiasi missione.

11 Conclusioni e sviluppi futuri

In questa sezione si andranno a riassumere tutti i concetti fondamentali che sono stati analizzati.

In questo lavoro di tesi è stato trattato il caso di un doppio lunar gravity assist con orbita Luna-Luna perturbata dall'influenza gravitazionale del Sole. Per valutare l'orbita si è integrato numericamente l'equazione del moto del problema dei tre corpi circolare ristretto considerando l'orbita terrestre intorno al Sole e l'orbita lunare intorno alla Terra circolari e complanari e inoltre si è trascurata l'attrazione gravitazionale della Luna. Per valutare invece il lunar gravity assist si è considerata la sfera d'influenza della Luna puntiforme per cui il flyby è stato approssimato con una rotazione istantanea del vettore velocità.

Dai risultati si è potuto verificare che aumentando la durata della missione è possibile aumentare l'energia di fuga iperbolica utilizzando un doppio lunar gravity assist grazie ad un guadagno gratuito dovuto alla perturbazione del Sole. Ad esempio, considerando un escape planare si può ottenere un'energia minima di fuga compresa tra 1,4 km^2/s^2 fino a 2 km^2/s^2.

In questo modo è possibile utilizzare i risultati ottenuti in Figura 10.30 come una curva del lanciatore 'lunar-assisted'. Infatti, è come se le performance di un lanciatore fossero aumentate dalla tecnica di evasione lunare. Idealmente l'intera curva può essere utilizzata in un tool di ottimizzazione per manovre interplanetarie così che sia possibile muoversi sulla curva durante il processo di ottimizzazione e trovare la soluzione ottima e le migliori condizioni di fuga. L'adattabilità di questo processo a metodi indiretti per il calcolo di orbite interplanetarie sarà oggetto di sviluppi futuri.

Bibliografia

[1] G. Lantoine, T. P. McElrath, D. Landau, D. Grebow, N. Strange, R. Wilson e J. Sims, «Using Gravity Assists in the Earth-Moon System as a Gateway to the Solar System,» in *Glabal Space Esploration Conference*, 2012.

[2] S. Camagnola, R. Jehn e C. Corral Van Damme, «Design of Lunar Gravity Assist for the BEPI-COLOMBO Mission to Mercury,» *AAS,* pp. paper AAS 04-130, 2004.

[3] G. Lantoine, T. P. McElrath e P. Timothy, «Families of Solar-Perturbed Moon-to-Moon Transfers,» *AAS,* pp. paper AAS 14-223, 2014.

[4] H. S., in *Astrodynamics Vol. 2*, London, Van Nostrand Reinhold, 1972, p. 304.

[5] K. Stumpff e E. H. Weiss, A Fast Method of Orbit Computation, Washington: NASA TN D-4470, 1968.

[6] J. L. Lagrange, «Memoire sur la théorie des variations des eléments des planètes,» in *Oeuvres de Lagrange, Vol. 6*, Paris, Gauthier-Villars, 1873, pp. 713-768.

[7] W. R. Fimple, «Optimum Midcourse Plane Change for Ballistic Interplanetary Trajectories,» *AIAA Journal,* vol. 1, n. 2, pp. 430-434, 1963.

[8] G. Lantoine, T. P. McElrath e P. Timothy, «Families of Solar-Perturbed Moon-to-Moon Transfers,» *AAS,* pp. 14-233, 2014.

[9] R. R. Bate, D. D. Mueller e J. E. Ehite, Foundamentals of Astrodynamics, New York: Dover Publications, Inc., 1971.

[10] J. W. Cornelisse, H. F. R. Schöyer e K. F. Wakker, Rocket Propulsion and Spaceflight Dynamics, Belfast: Pitman Publishing, 1979.

[11] L. Casalino e G. Lantoine, «Design of Lunar-gravity-assisted escape manuevers,» *Advances in the Astronautical Sciences,* vol. 165, pp. 663-676, 2018.