

POLITECNICO DI TORINO

**Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Meccanica**

Tesi di Laurea Magistrale

**Modellazione e simulazione dinamica di un
pantografo ferroviario**



Relatore
prof. Stefano Marchesiello

Candidato
Federico Strappa

Anno Accademico 2019/2020

Indice

1. Introduzione.....	1
1.1 Pantografo ATR95.....	3
1.2 Faiveley CX.....	6
1.3 Stemmann-Technik DSA.....	8
2. Sistema biella-manovella.....	10
3. Verifica angolo d'equilibrio statico biella-manovella.....	19
4. Quadrilatero articolato.....	21
5. Verifica angolo d'equilibrio statico quadrilatero articolato.....	28
6. Modello equivalente al quadrilatero articolato.....	31
7. Modello a due gradi di libertà.....	35
8. Estrazione dei parametri modali.....	39
9. Cenni di calcolo simbolico in Matlab.....	40
Conclusioni.....	41
Codice Matlab.....	42
Bibliografia.....	45

1 Introduzione

Il pantografo è un dispositivo posto sull'imperiale di un veicolo ferroviario che permette la captazione dell'energia elettrica da una linea aerea di contatto. Di fondamentale importanza è quindi l'interazione pantografo-linea di contatto (figura 1.1) in cui il pantografo esercita un'adeguata pressione sulla catenaria per garantire una captazione regolare della corrente ed evitare l'insorgere di archi elettrici in seguito ad un eventuale distacco. In particolare, con la richiesta d'innalzare la velocità dei treni moderni, ci si avvicina alla velocità di propagazione delle onde nei cavi, aggravando ulteriormente il problema.

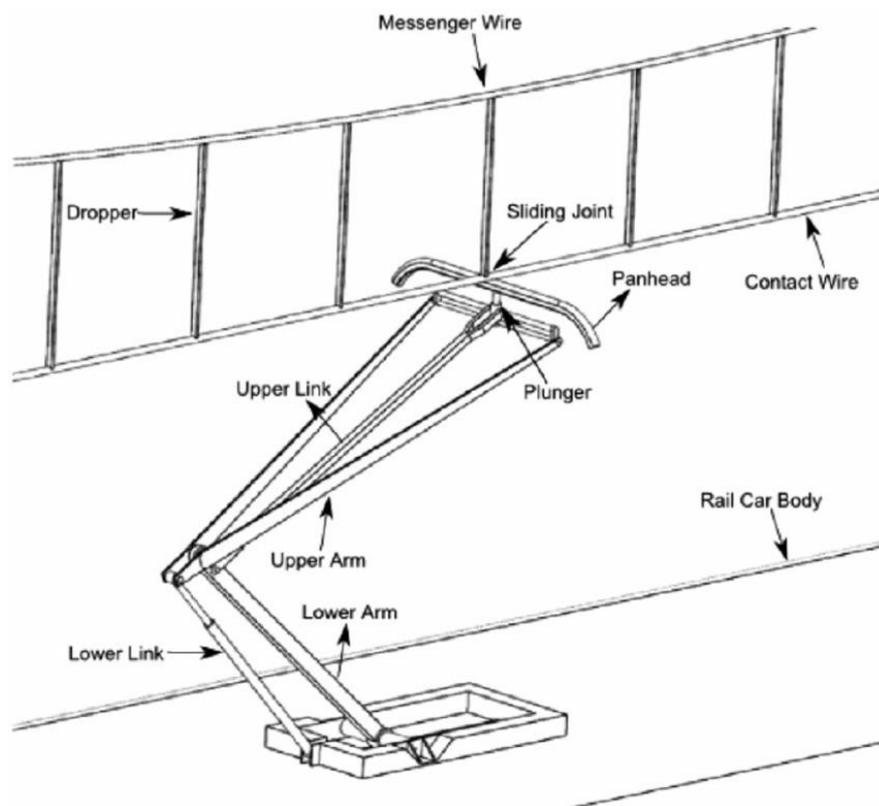


Figura 1.1: Pantografo-linea di contatto

Le caratteristiche richieste ad una linea di contatto ideale sono le seguenti:

- conduttore di contatto ad altezza costante anche durante il transito dei pantografi;
- poligonazione della linea di contatto per consentire un uniforme consumo degli striscianti;
- non risentire in modo rilevante dell'azione del vento laterale.

Il pantografo, a contatto con la linea aerea, è composto da un cinematismo a singolo o doppio braccio alla cui estremità superiore sono presenti degli striscianti realizzati in grafite e rame sinterizzati per ottenere un basso coefficiente d'attrito e una buona conducibilità elettrica. La forza esercitata dal pantografo deve essere sufficientemente alta per mantenere il contatto degli striscianti sulla linea ma non eccessiva per evitare fenomeni di usura prematura del materiale. Gli elementi strutturali del sistema sono costituiti in tubolari o scatolati d'acciaio necessari per ridurre le masse e conferire una sufficiente flessibilità.

1.1 Pantografo ATR95

Il pantografo scelto come modello per le successive analisi è l'ATR95 utilizzato nei treni ad alta velocità (ETR500) per linee a 25 kV in corrente alternata. Nella figura 1.2 sono visibili gli elementi costituenti il sistema:

- attuatore pneumatico per l'azionamento del dispositivo;
- quadrilatero inferiore;
- quadrilatero superiore;
- quadro, costituito da due archetti su cui sono posti gli striscianti.

La traslazione verticale degli striscianti sulla testa del pantografo avviene mediante un meccanismo comandato da una molla ad aria posta alla base del dispositivo.

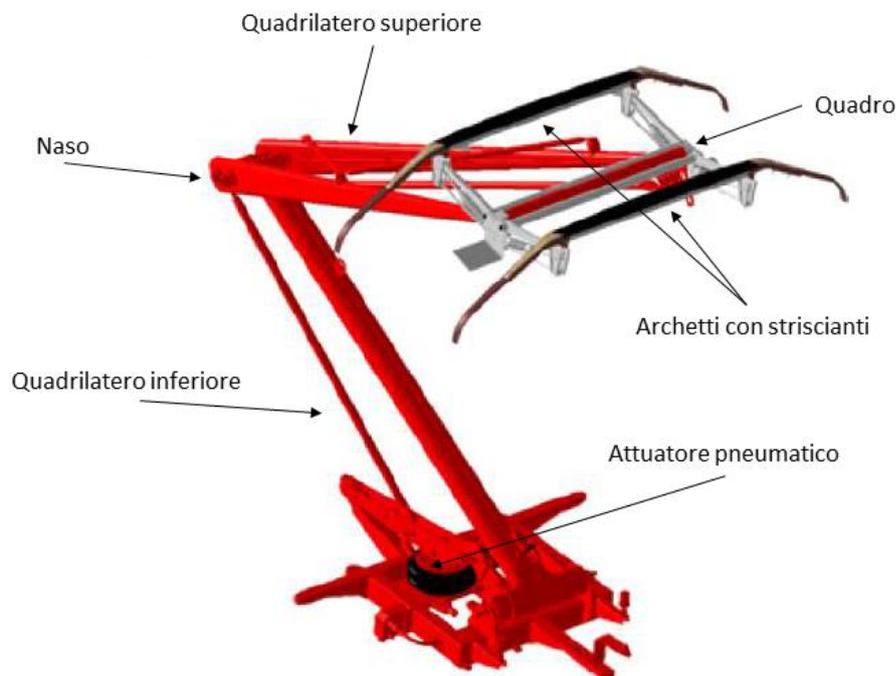


Figura 1.2: Componenti pantografo ATR95

L'azionamento dell'attuatore pneumatico mediante un meccanismo a camma permette la rotazione dell'asta del quadrilatero inferiore e attraverso il naso il moto viene trasmesso al quadrilatero superiore sollevando la testa del pantografo. Regolando la pressione nella molla ad aria (figura 1.3a) si modifica la sua lunghezza (L) e quindi l'angolo di rotazione (σ') del braccio o . Tramite una rotella di raggio r (figura 1.3b) si ha lo spostamento della camma solidale al quadrilatero inferiore.

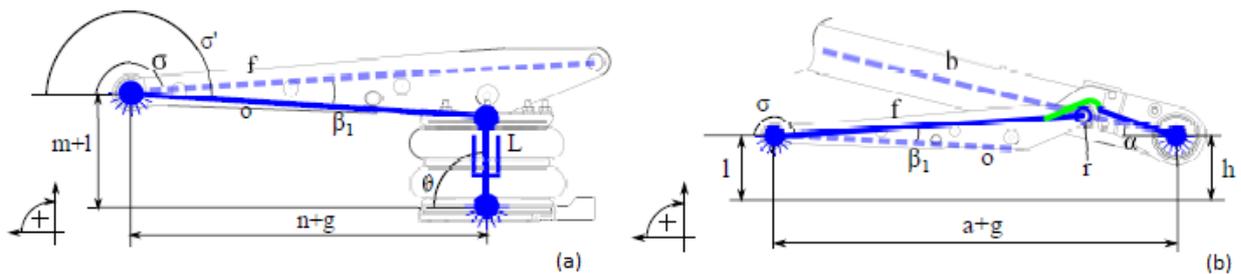


Figura 1.3: a) Molla ad aria, b) meccanismo con camma

La molla ad aria ha inoltre la funzione di fornire il precarico statico, ovvero la forza di contatto necessaria con la linea aerea. Tale forza dipende dalla componente statica esercitata dall'archetto sul filo e da quella aerodinamica che ad alte velocità produce un effetto rilevante. Per compensare le irregolarità del moto è presente una centralina pneumatica costituita da una valvola a tre vie (figura 1.4) contenente un diaframma con molla.

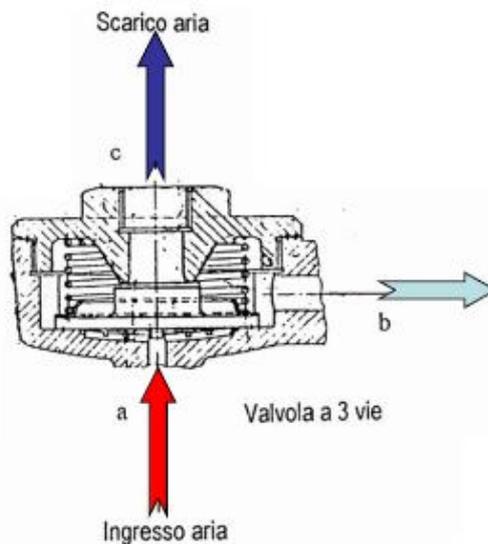


Figura 1.4: Valvola a tre vie

Per pressioni superiori ad un valore soglia si ha la comunicazione della porta *a* (ingresso aria) con quella *b* permettendo il sollevamento del pantografo, l'operazione inversa avviene invece collegando la porta *b* a quella *c* di scarico dell'aria.

Il quadrilatero superiore è costituito da due elementi principali di supporto collegati tra loro da due aste che formano una struttura triangolare per garantire un'adeguata rigidità. Gli archetti sono collegati al quadro mediante delle molle ad elica che fungono esse stesse da elemento smorzante. Nella testa i due archetti distinti possono traslare indipendentemente mentre la rotazione a rollio è impedita da due barre che vincolano gli estremi allo spostamento verticale.

1.2 Faiveley CX

Il modello di pantografo Faiveley CX (figura 1.5) è adottato nelle linee ad alta velocità francesi. Si differenzia principalmente dall'ATR95 per permettere il rollio degli archetti e vincolare la rotazione di beccheggio. Il quadrilatero superiore è costituito da una grande asta centrale affiancata da una di dimensioni ridotte. Il quadrilatero inferiore ha invece un'asta di diametro maggiore e lunghezza inferiore per conferire maggiore rigidità a flessione.



Figura 1.5: Faiveley CX

Nella testa è presente un sistema sospensivo (figura 1.6) formato da un elemento elastico ed uno smorzante che migliora la qualità del contatto con la linea aerea.

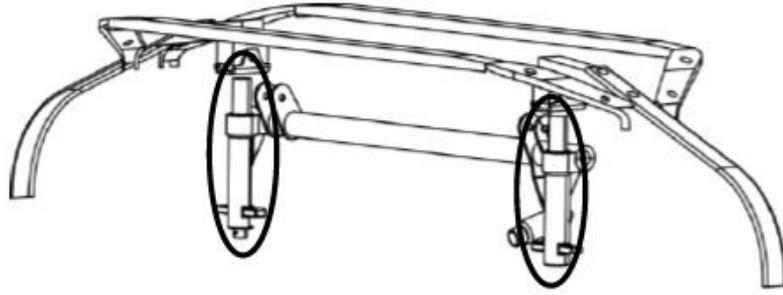


Figura 1.6: Testa con sistema sospensivo

Il Faiveley CX, utilizzato ad esempio dal TGV, ha come principale caratteristica il controllo elettronico a retroazione. Un dispositivo pneumatico munito di servovalvole regola la pressione nell'attuatore in tempo reale. La forza di contatto con la catenaria è quindi ottimizzata in funzione della velocità del treno e della capacità portante del pantografo.

1.3 Stemmann-Technik DSA

Il modello DSA (figura 1.7) è impiegato nei treni ad alta velocità in Germania. Tale pantografo costruito in tubolari d'acciaio o in alluminio (adottato per alte velocità) ha una struttura modulare che può essere modificata in base alle condizioni operative richieste. Il telaio di base è collegato al veicolo mediante tre isolatori elettrici e contiene l'attuatore pneumatico. Il sollevamento del pantografo avviene mediante l'invio di aria compressa nell'attuatore che espandendosi muove un cavo metallico e ruota il braccio inferiore. L'asta inferiore solleva poi la testa del pantografo realizzando il contatto meccanico con la linea aerea.



Figura 1.7: Stemmann-Technik DSA

Per ridurre le masse sospese e mantenere una sufficiente elasticità il braccio superiore è in alluminio. Sulla testa sono inoltre presenti dei cuscinetti che consentono di compensare eventuali tolleranze meccaniche o termiche. Un dispositivo automatico di sicurezza interviene invece in caso di rottura dello strisciante abbassando il pantografo ed interrompendo il circuito per evitare la generazione di un arco elettrico.

2 Sistema biella-manovella

Nel seguente capitolo si studia il cinematismo biella-manovella ad un grado di libertà come mostrato nella figura 2.1. Il codice Matlab realizzato contiene nella prima parte i dati geometrici, fisici e i parametri necessari per l'analisi del segnale. Gli elementi che intervengono nell'equazione del moto sono: la lunghezza della manovella (r) dotata di inerzia rotazionale (I_O), della biella (L), la massa puntiforme (m_1) in B, la rigidezza torsionale della molla (k_O) e lo smorzamento viscoso (C_O) in O. Nel punto B vi è inoltre applicata una forzante con andamento cosinusoidale e frequenza variabile linearmente tra 0,5 Hz e 2 Hz.

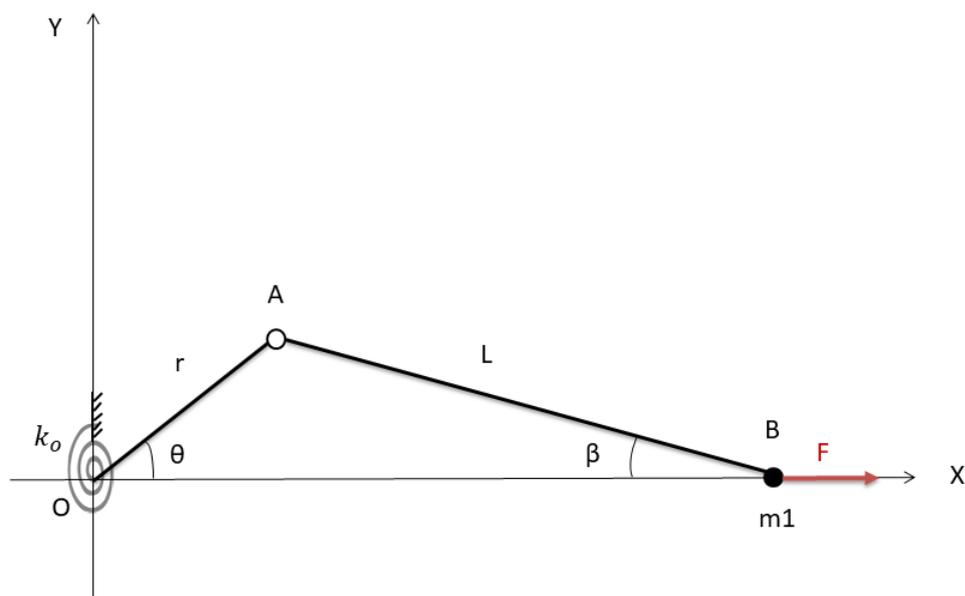


Figura 2.1: Schema meccanismo biella-manovella

Le relazioni geometriche relative all'angolo che la biella forma con l'asse orizzontale e lo spostamento del punto B sono le seguenti:

$$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{r}{L} \sin \theta\right) \quad (2.1)$$

$$x_B = r \cos \theta + L \cos \beta. \quad (2.2)$$

La velocità del punto B, ottenuta derivando l'espressione dello spostamento, è:

$$\dot{x}_B = -\dot{\theta}r \sin \theta - \dot{\beta}L \sin \beta, \text{ con } \dot{\beta} = r \cos \theta \dot{\theta} \left[L \sqrt{1 - \left(\frac{r \sin \theta}{L}\right)^2} \right]^{-1} \quad (2.3)$$

Si esprime l'energia cinetica del sistema in funzione dell'angolo di manovella (θ) e della sua derivata ($\dot{\theta}$):

$$T_1 = T_{OA} + T_B = \frac{1}{2}I_o \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_B^2 = f(\theta, \dot{\theta}). \quad (2.4)$$

L'energia potenziale elastica, tenendo conto dell'angolo di equilibrio (θ_0), è:

$$V_1 = \frac{1}{2}k_o(\theta - \theta_0)^2. \quad (2.5)$$

Analogamente la funzione dissipativa associata allo smorzatore viscoso in O è:

$$D = \frac{1}{2}C_o \dot{\theta}^2. \quad (2.6)$$

Infine l'equazione del moto è stata ricavata mediante l'approccio di Lagrange, utilizzando il calcolo simbolico in Matlab: essendo Q la componente lagrangiana della forza.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q - \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}, \text{ con } L = T_1 - V_1. \quad (2.7)$$

Successivamente sono stati sostituiti i valori numerici riportati in tabella 2.1 per ottenere i risultati cercati. Il comando "syms" seguito dai nomi delle variabili simboliche ne permette la loro creazione. Per la valutazione della soluzione numerica si è utilizzata la funzione *ode45* che consente l'integrazione di un sistema di equazioni differenziali in un determinato intervallo di tempo e con assegnate condizioni iniziali ($\theta(0) = 20^\circ, \dot{\theta}(0) = 0$ nel caso considerato).

Tabella 2.1: valori numerici utilizzati nel modello

r	1 m
L	2 m
I_0	5 kg · m ²
m_1	100 kg
k_0	2000 N · m/rad
F_0	40 N
C_0	10 N · m · s/rad

Nella figura 2.2 è stato diagrammato l'angolo di manovella a partire da una posizione di equilibrio definita dalla condizione iniziale ($\theta_0 = 20^\circ$) in funzione del tempo a causa dell'applicazione della forzante precedentemente definita. Si è poi osservato nella figura 2.3 lo spostamento del punto B in funzione del tempo. In entrambi i grafici ($F_0 = 4\text{ N}$, $F_0 = 40\text{ N}$) nei pressi dell'istante temporale pari a 250 s si ha una riduzione e poi un incremento dell'ampiezza a causa dell'effetto combinato della forzante con frequenza vicina a quella di risonanza e della presenza dello smorzamento. Nella figura 2.4 la densità spettrale di potenza calcolata mediante il metodo di Welch (*pwelch*) con il segnale opportunamente finestrato per ridurre il fenomeno del *leakage* presenta un picco in corrispondenza della frequenza propria del sistema pari a circa 1,29 Hz.

Nella figura 2.5 si ha lo spettrogramma nel quale con comportamento lineare ($F_0 = 4\text{ N}$) si ha una sola linea rappresentata in giallo mentre in presenza di non linearità ($F_0 = 80\text{ N}$) si trovano delle armoniche superiori. A parità di campioni utilizzati, pari a 2^{11} , non si può contemporaneamente migliorare la risoluzione per la frequenza e per il tempo, tale fenomeno rende la linea segmentata. Infine nella figura 2.6 si ha la rappresentazione della recettanza nell'intorno della frequenza propria ottenuta mediante la stima della funzione di trasferimento (*tfestimate*). Nel codice possono essere impostati tre valori differenti di ampiezza della forzante F_0 e si osserva nei grafici un comportamento del sistema fortemente non lineare per valori crescenti della forza applicata. Ad esempio, nella figura 2.3c (spostamento del punto B in funzione del tempo) si perde la simmetria del grafico e si hanno spostamenti elevati che raggiungono il limite superiore ammissibile pari a 3 m.

Per ottimizzare il codice e individuare eventuali operazioni che richiedono maggiore tempo nell'esecuzione è stata attivata la modalità profilazione con il comando *profile on* mentre con *profile viewer* si leggono i risultati. Le righe di codice che impiegano più tempo per essere eseguite sono evidenziate in rosso, ad esempio il comando *double* richiede un notevole onere computazionale, quindi i suoi risultati sono stati salvati in un vettore che può essere agevolmente richiamato per eseguire ulteriori analisi.

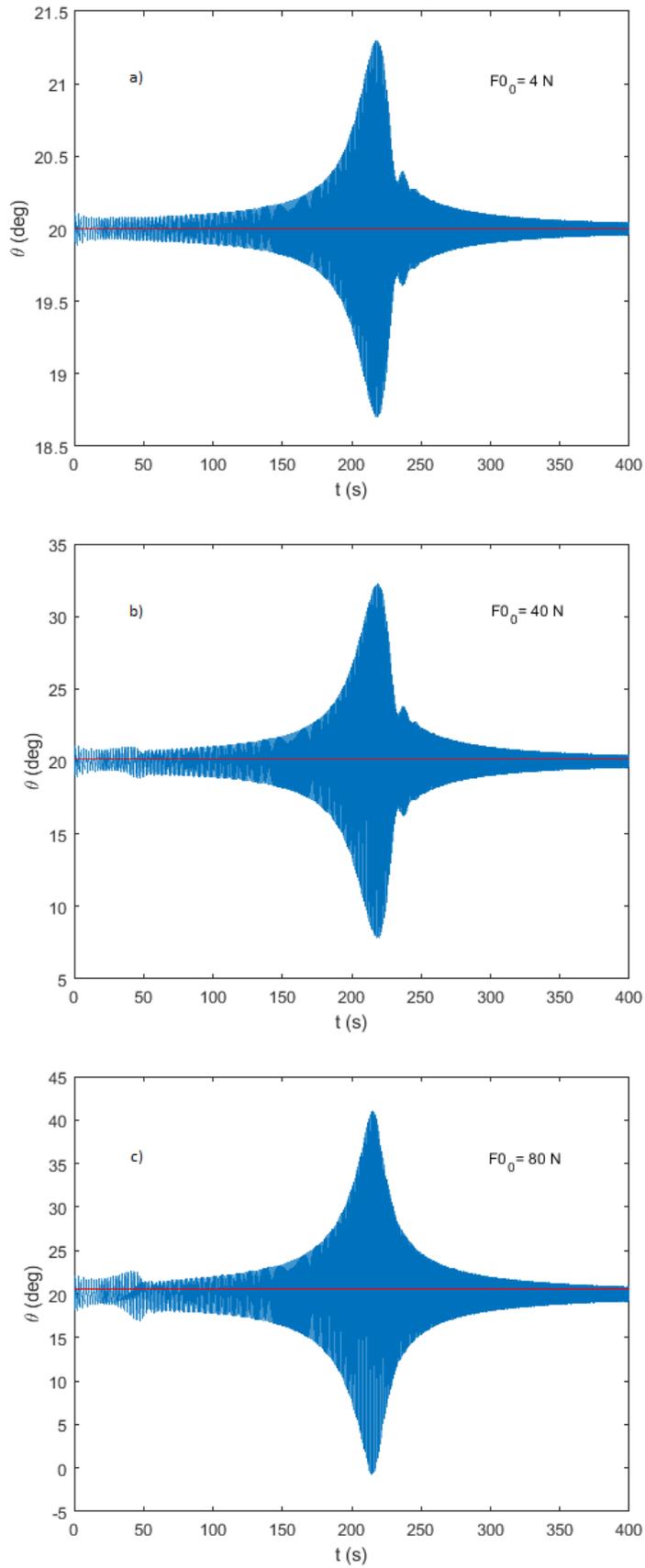


Figura 2.2: Angolo di manovella in funzione del tempo

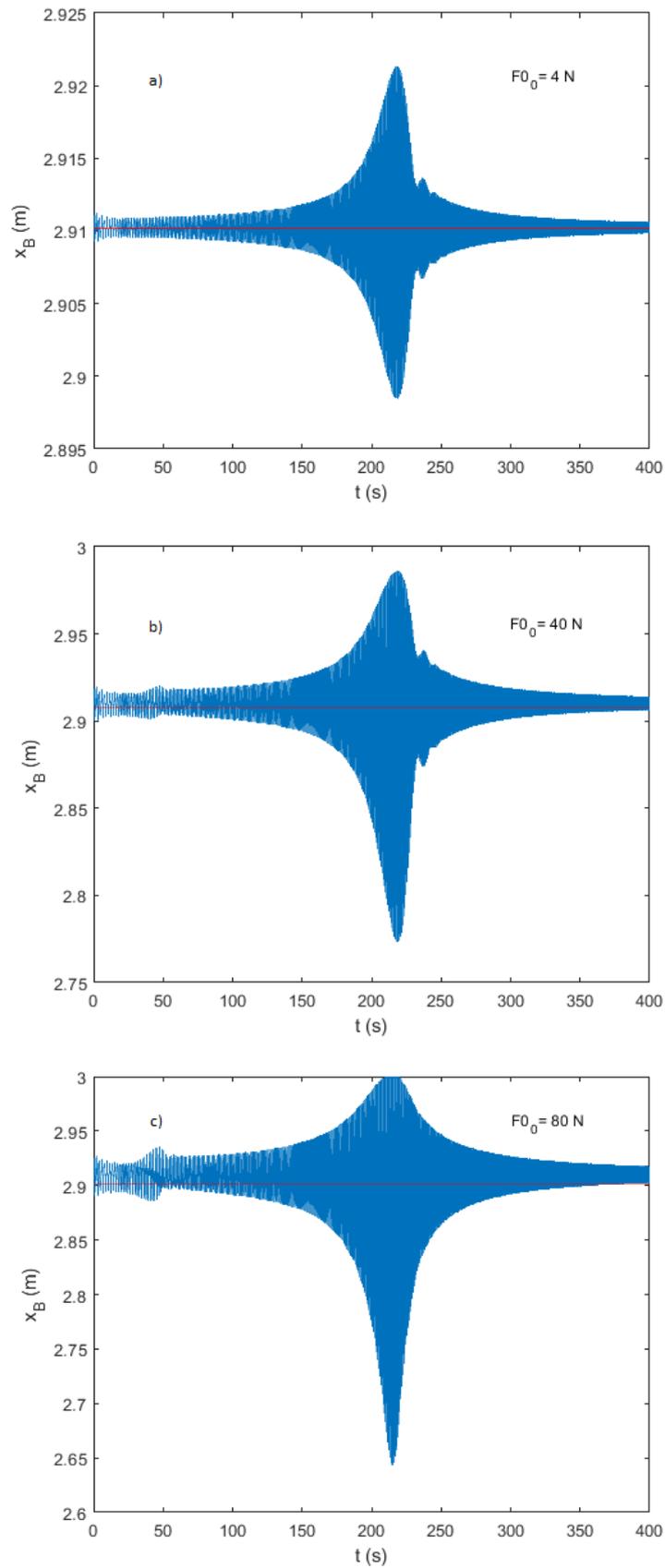


Figura 2.3: Spostamento del punto B in funzione del tempo

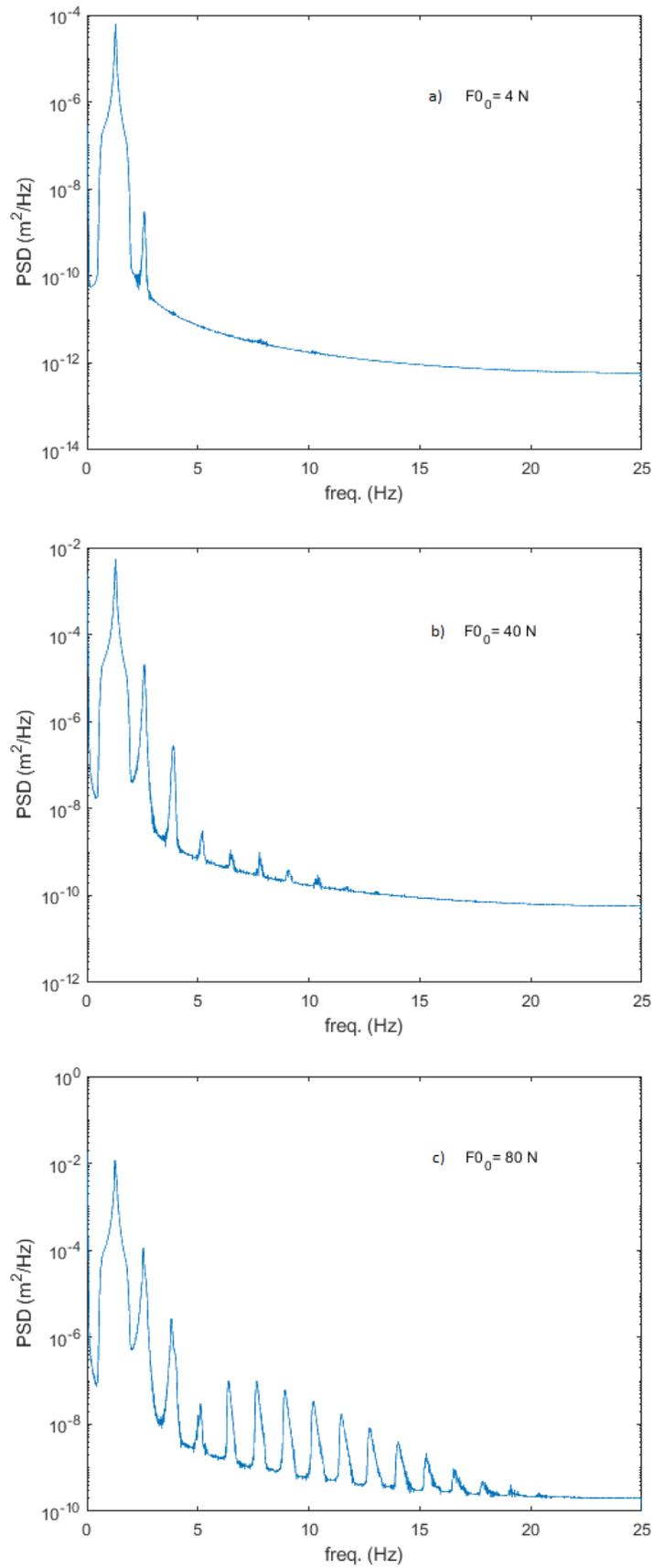


Figura 2.4: Densità spettrale di potenza

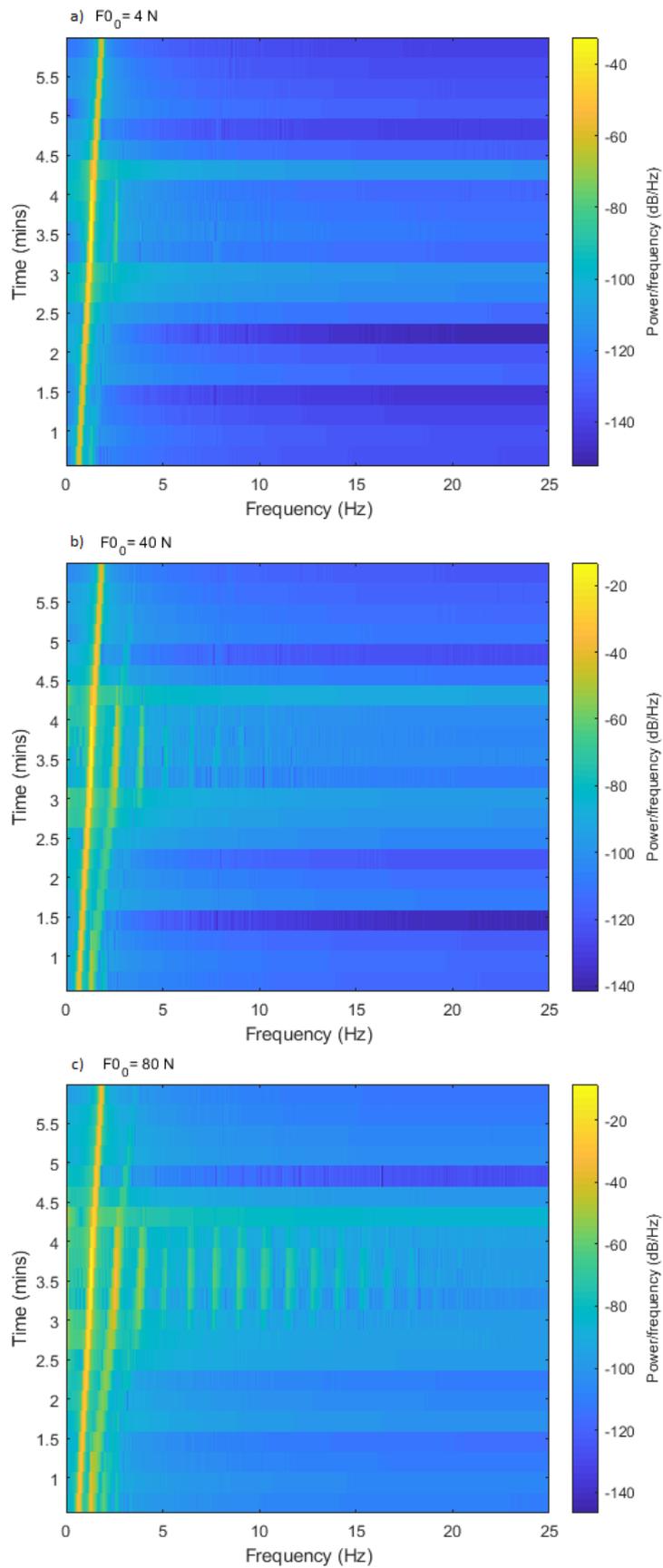


Figura 2.5: Spettrogramma

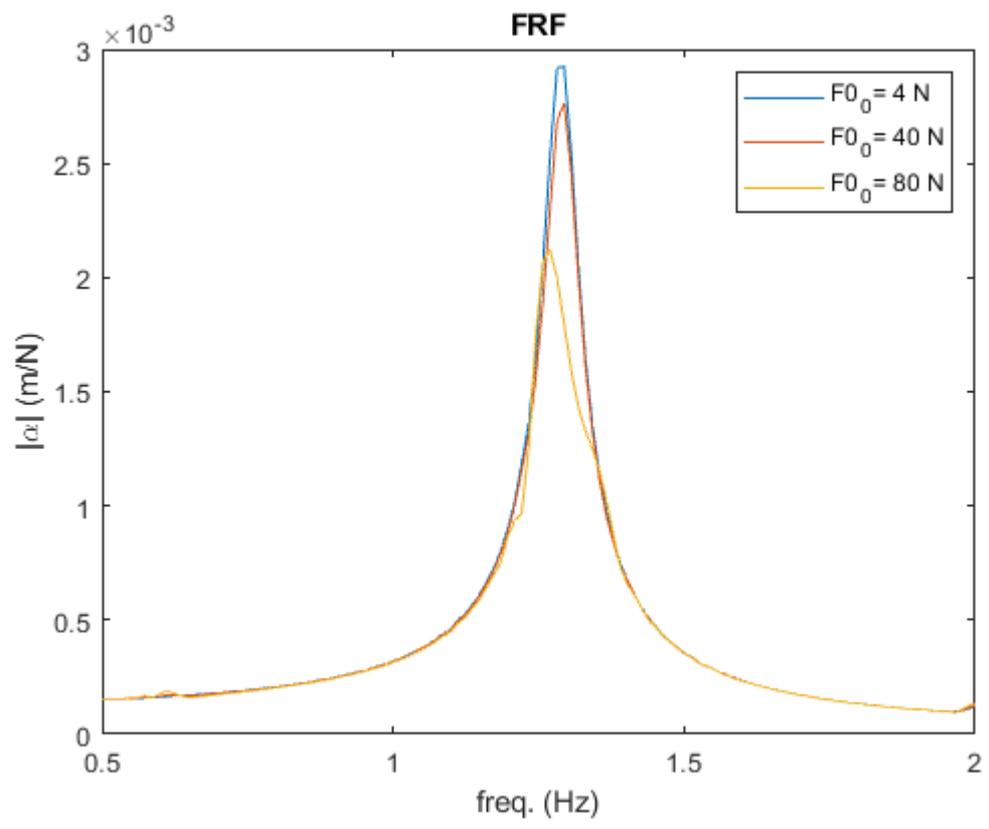


Figura 2.6: Modulo della recettanza

3 Verifica angolo d'equilibrio statico biella-manovella

Disponendo il cinematismo biella-manovella in un piano verticale (figura 3.1) è necessario considerare le forze peso agenti nel baricentro della manovella e nel punto B. Impostando nel codice una rigidezza (k_o) di 2174 Nm/rad e le seguenti condizioni iniziali: $\theta(0) = 10^\circ$, $\dot{\theta}(0) = 0$, esaurito il transitorio, si ha un angolo d'equilibrio statico pari a 30° (figura 3.8).

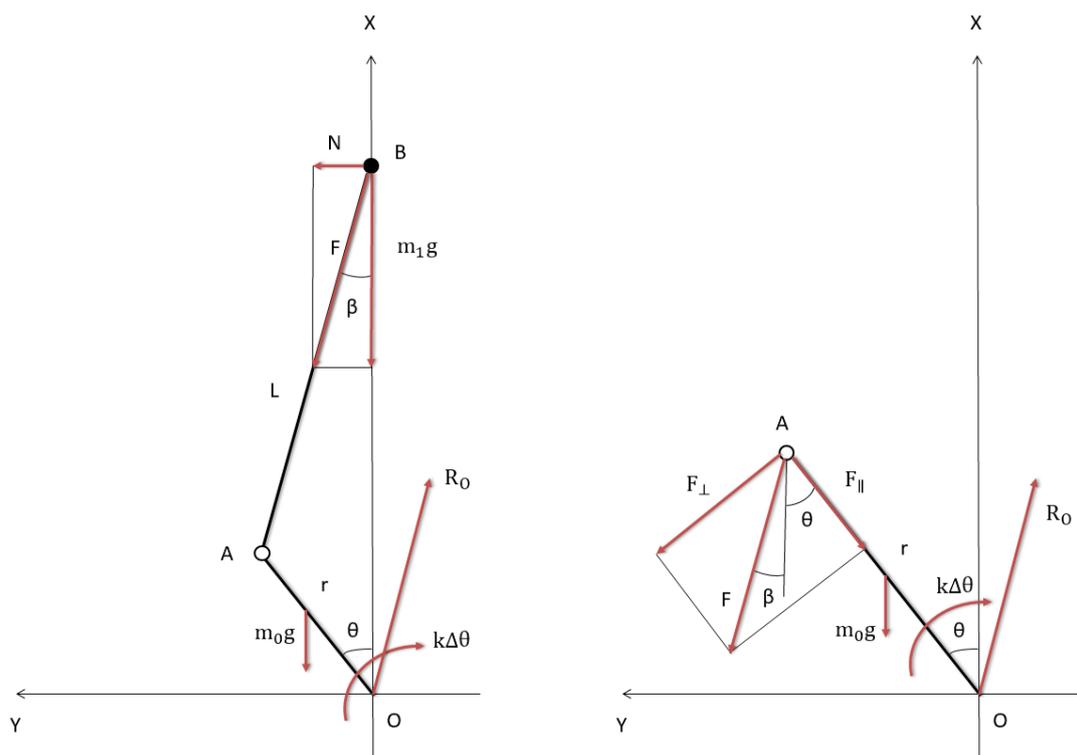


Figura 3.1: Forze agenti sul sistema biella-manovella verticale

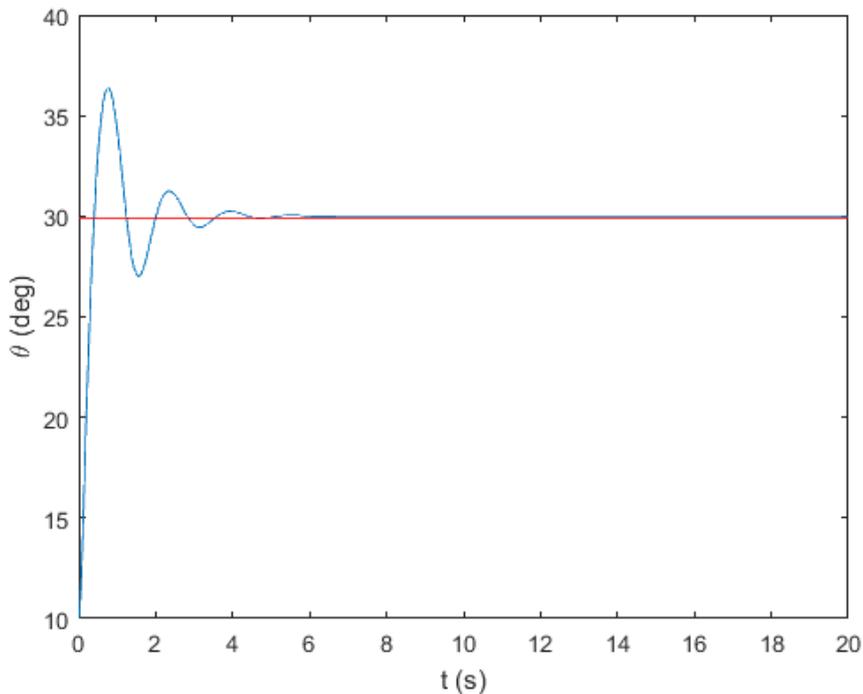


Figura 3.2: Angolo di manovella in funzione del tempo

È possibile confrontare tale risultato con il valore ottenuto da una verifica statica eseguita mediante un approccio newtoniano. Per l'equilibrio del sistema la somma dei momenti agenti sulla manovella deve essere pari a zero. Si sceglie come polo dei momenti il punto O.

$$F r \sin(\beta + \theta) + m_0 g \frac{r}{2} \sin \theta - k \Delta \theta = 0. \quad (3.1)$$

Sostituendo:

$$F = \frac{m_1 g}{\cos \beta}. \quad (3.2)$$

Si ottiene:

$$gr \left(\frac{m_1 \sin(\beta + \theta)}{\cos \beta} + \frac{m_0}{2} \sin \theta \right) - k(\theta - \theta_0) = 0. \quad (3.3)$$

Inserendo l'angolo ricavato dal grafico precedente ($\theta = 30^\circ$) e note le restanti quantità geometriche e fisiche, l'equazione 3.3 risulta verificata.

4 Quadrilatero articolato

Lo schema del quadrilatero articolato adottato nel modello e dotato di un grado di libertà è mostrato nella figura 4.1. Il meccanismo è costituito da quattro aste (b, c, d, e) collegate da coppie rotoidali e da tre masse concentrate (m_b, m_d, m_q). In D vi è il punto di contatto del cinematismo con la linea aerea. Le relazioni geometriche riportate nell'equazioni 4.1 sono state ottenute proiettando gli elementi lungo gli assi X e Y.

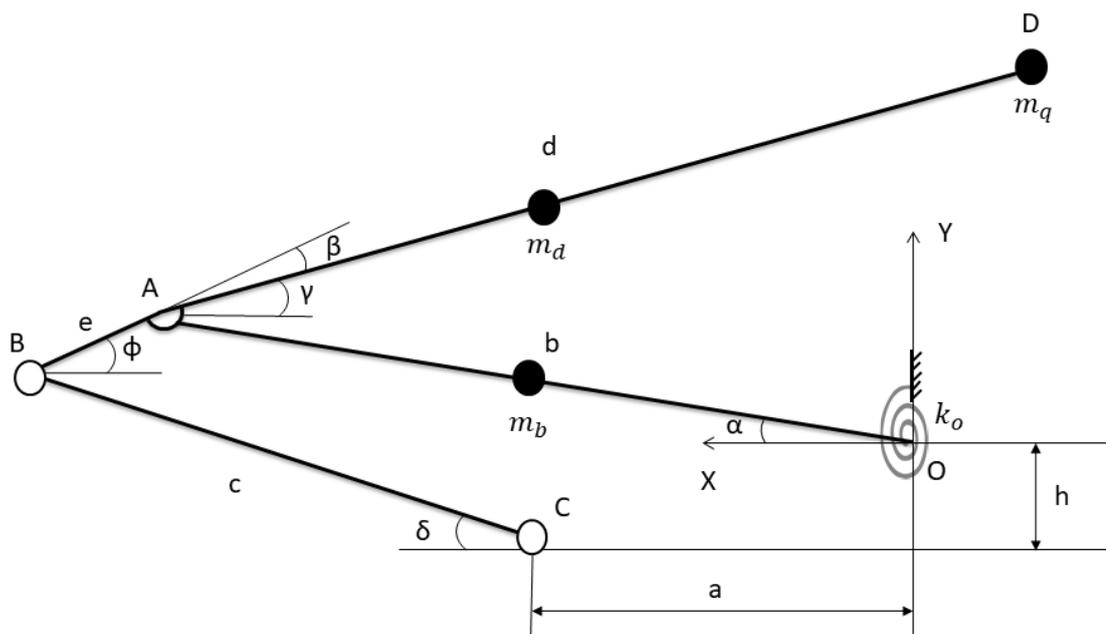


Figura 4.1: Schema quadrilatero articolato

$$\begin{cases} a + c \cos \delta - e \cos \varphi - b \cos \alpha = 0 \\ c \sin \delta + e \sin \varphi - b \sin \alpha - h = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} \cos \delta = \frac{b \cos \alpha - a + e \cos \varphi}{c} \\ \sin \delta = \frac{h + b \sin \alpha - e \sin \varphi}{c}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Elevando al quadrato le relazioni precedenti e sommandole si ottiene:

$$(b \cos \alpha - a + e \cos \varphi)^2 + (h + b \sin \alpha - e \sin \varphi)^2 = c^2 \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} b^2 + a^2 + e^2 + h^2 - c^2 - 2ba \cos \alpha + 2hb \sin \alpha + \\ + 2e(b \cos \alpha - a) \cos \varphi - 2e(h + b \sin \alpha) \sin \varphi = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ponendo:

$$\begin{cases} A = -2e(h + b \sin \alpha) \\ B = 2e(b \cos \alpha - a) \\ C = b^2 + a^2 + e^2 + h^2 - c^2 - 2ba \cos \alpha + 2hb \sin \alpha \end{cases} \quad (4.5)$$

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}. \quad (4.6)$$

La soluzione del sistema è:

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{BD - AC}{-BC - AD}. \quad (4.7)$$

Da relazioni trigonometriche si ricavano gli angoli rimanenti:

$$\delta = \tan^{-1} \frac{h + b \sin \alpha - e \sin \varphi}{b \cos \alpha - a + e \cos \varphi} \quad (4.8)$$

$$\gamma = \varphi - \beta. \quad (4.9)$$

Gli spostamenti nella mezzeria dell'asta d sono:

$$\begin{cases} x_d = b \cos \alpha - \frac{d}{2} \cos \gamma \\ y_d = b \sin \alpha + \frac{d}{2} \sin \gamma. \end{cases} \quad (4.10)$$

In D, nel quadro del pantografo:

$$\begin{cases} x_q = b \cos \alpha - d \cos \gamma \\ y_q = b \sin \alpha + d \sin \gamma. \end{cases} \quad (4.11)$$

Le componenti della velocità, in corrispondenza della massa m_d , sono state ottenute derivando le espressioni degli spostamenti:

$$\begin{cases} \dot{x}_d = -\dot{\alpha}b \sin \alpha + \dot{\gamma} \frac{d}{2} \sin \gamma \\ \dot{y}_d = \dot{\alpha}b \cos \alpha + \dot{\gamma} \frac{d}{2} \cos \gamma. \end{cases} \quad (4.12)$$

Analogamente in D:

$$\begin{cases} \dot{x}_q = -\dot{\alpha}b \sin \alpha + \dot{\gamma}d \sin \gamma \\ \dot{y}_q = \dot{\alpha}b \cos \alpha + \dot{\gamma}d \cos \gamma. \end{cases} \quad (4.13)$$

Elevando al quadrato e sommando si ha:

$$\begin{cases} v_d^2 = (\dot{x}_d^2 + \dot{y}_d^2) \\ v_q^2 = (\dot{x}_q^2 + \dot{y}_q^2). \end{cases} \quad (4.14)$$

L'energia cinetica del quadrilatero articolato è data dalla somma dei tre contributi delle rispettive masse:

$$T_1 = T_{OA} + T_d + T_q = \frac{1}{2}I_O \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_d v_d^2 + \frac{1}{2}m_q v_q^2. \quad (4.15)$$

L'energia potenziale elastica della molla torsionale nell'origine è:

$$V_1 = \frac{1}{2}k_O(\alpha - \alpha_0)^2. \quad (4.16)$$

In O è presente inoltre uno smorzatore viscoso, la cui funzione dissipativa è:

$$F = \frac{1}{2}C_O \dot{\alpha}^2. \quad (4.17)$$

Mediante l'approccio di Lagrange, utilizzando il calcolo simbolico in Matlab, è stata ricavata l'equazione del moto:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = Q - \frac{\partial F}{\partial \dot{\alpha}}, \text{ con } L = T_1 - V_1. \quad (4.18)$$

La forzante cosinusoidale è applicata in D con direzione verticale e frequenza variabile linearmente tra 0,3 Hz e 2 Hz. La coordinata indipendente scelta è l'angolo α e le condizioni iniziali sono: $\alpha(0) = 10^\circ, \dot{\alpha}(0) = 0$. Nella tabella 4.1 sono riportati i valori numerici delle quantità geometriche e fisiche impostate nel codice del quadrilatero articolato.

Tabella 4.1: valori numerici utilizzati nel modello

a	550 mm
b	1750 mm
c	1424,3 mm
d	1900,1 mm
e	228 mm
h	145 mm
m_b	22,68 kg
m_d	16,17 kg
m_q	14,58 kg
k_O	10000 N · m/rad
F_0	100 N
C_O	700 N · m · s/rad

Nella figura 4.2 è riportato l'andamento dell'angolo α in funzione del tempo in seguito dell'applicazione della forzante. Lo spostamento verticale del punto D nel tempo è diagrammato nella figura 4.3 dove si può osservare uno spostamento massimo pari a circa 0,6 m picco-picco. La densità spettrale di potenza nella figura 4.4 è stata ricavata con il metodo di Welch e mostra un picco in corrispondenza della frequenza propria del sistema pari a circa 0,9 Hz. Nello spettrogramma di figura 4.5 sono presenti due linee, in giallo, indice della presenza di non linearità nel sistema. La recettanza (nel punto D) di figura 4.6 è stata ottenuta con la stima della funzione di trasferimento utilizzando delle finestre con 2^{10} punti e un *overlap* pari all'81%.

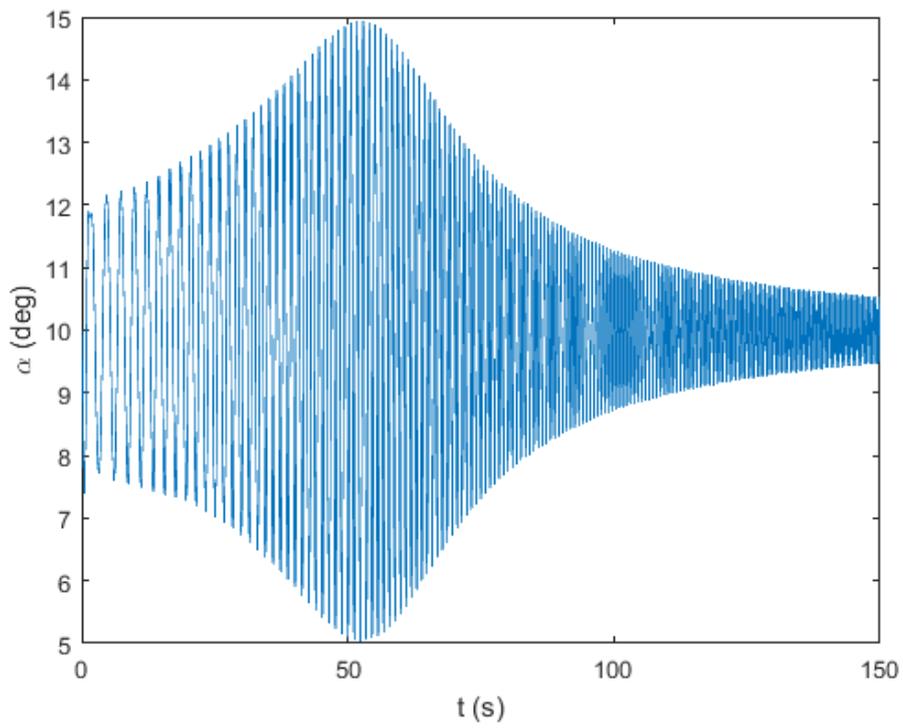


Figura 4.2: Angolo α in funzione del tempo

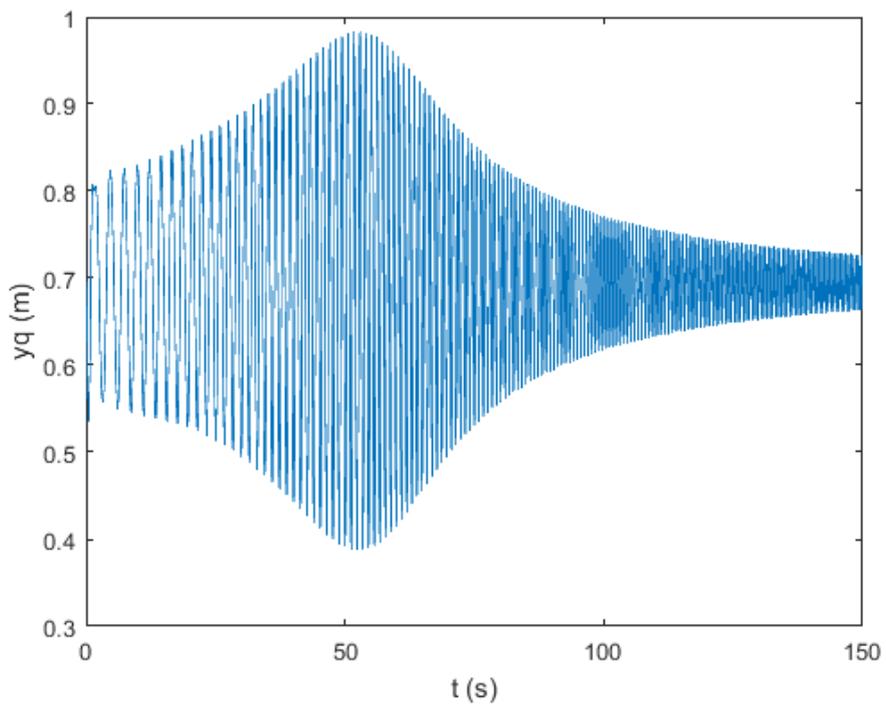


Figura 4.3: Spostamento verticale del punto D in funzione del tempo

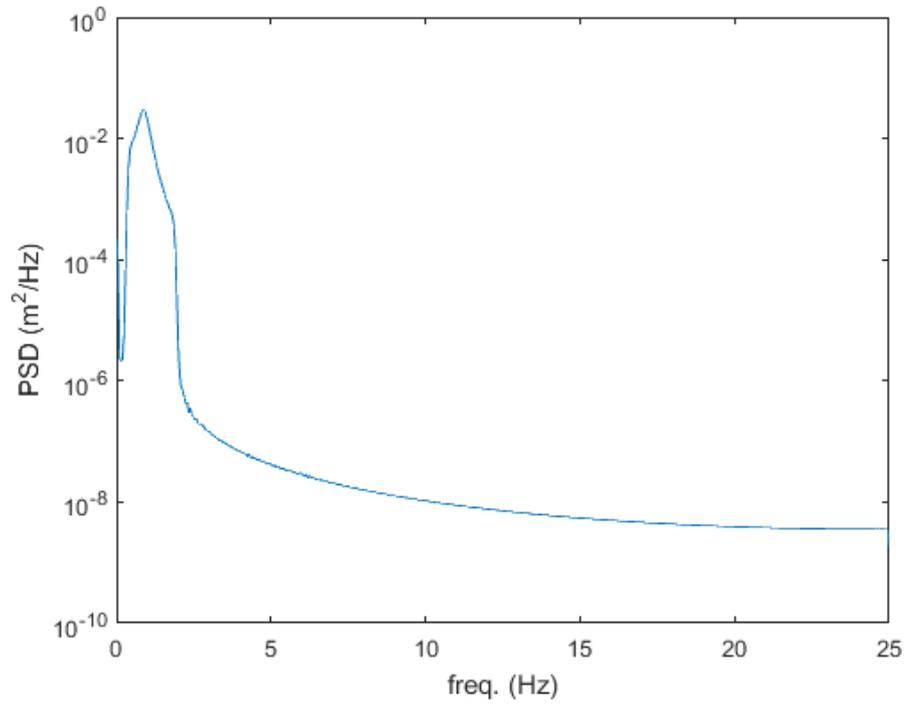


Figura 4.4: Densità spettrale di potenza

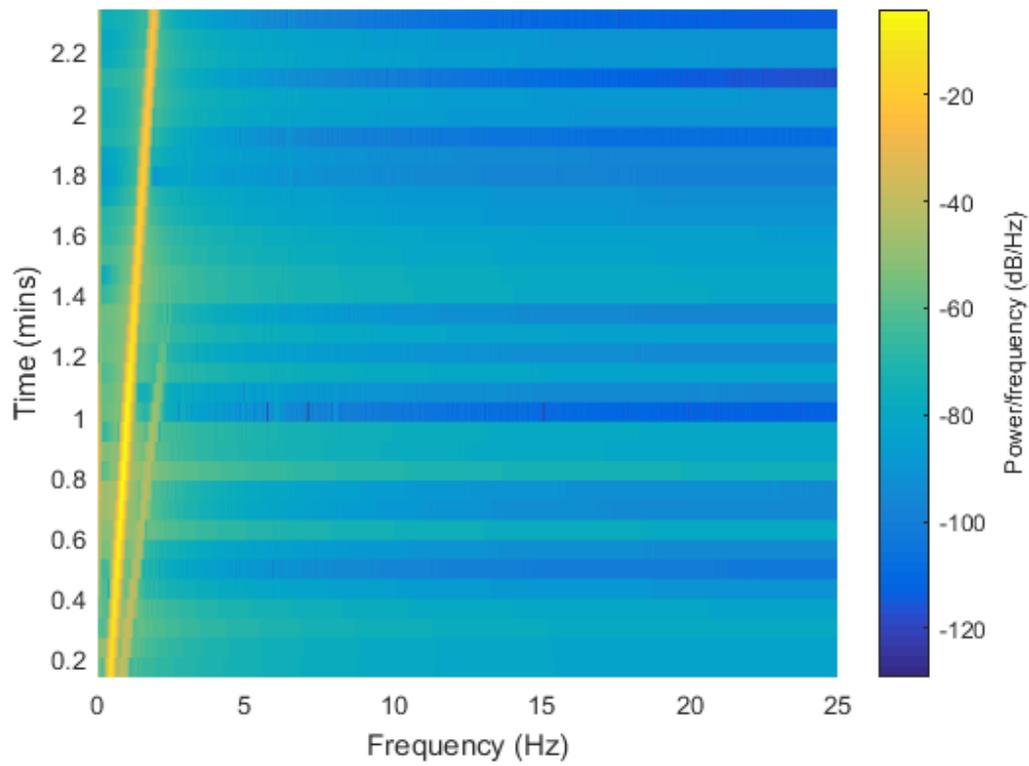


Figura 4.5: Spettrogramma

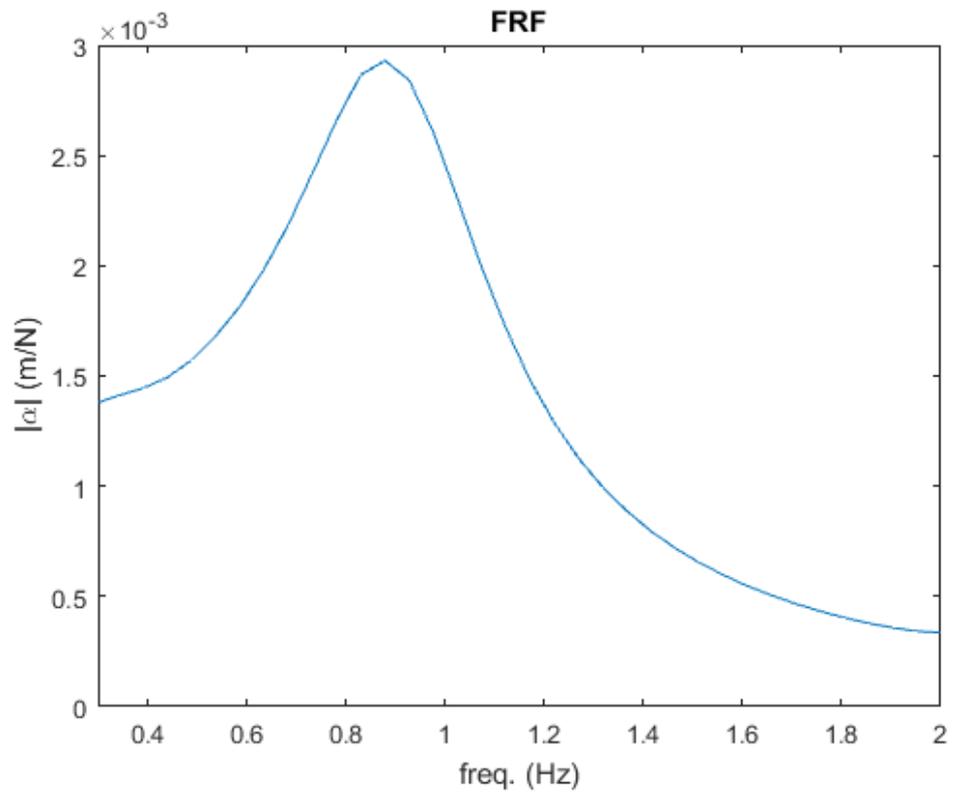


Figura 4.6: Modulo della recettanza nel punto D

5 Verifica angolo d'equilibrio statico quadrilatero articolato

Si considera la presenza di forze peso agenti sulle tre masse concentrate (figura 5.1). Impostando una rigidezza (k_o) di 10^4 Nm/rad e le seguenti condizioni iniziali: $\alpha(0) = 10^\circ$, $\dot{\alpha}(0) = 0$, esaurito il transitorio, si ha un angolo d'equilibrio statico pari a $8,4^\circ$ (figura 5.2).

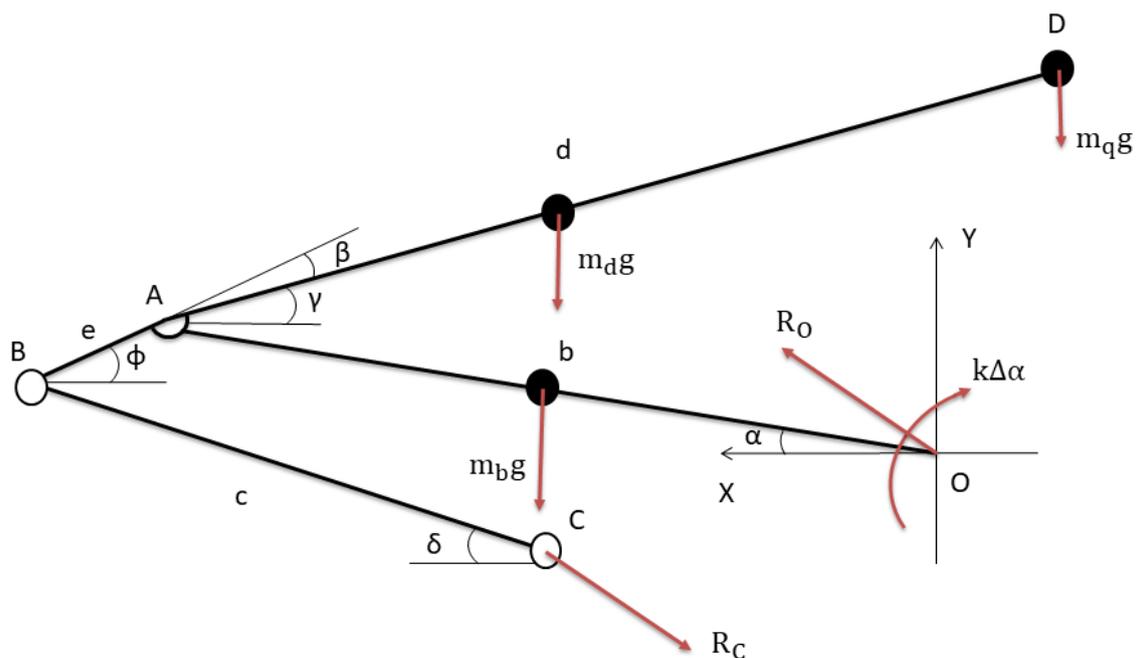


Figura 5.1: Forze agenti sul quadrilatero articolato

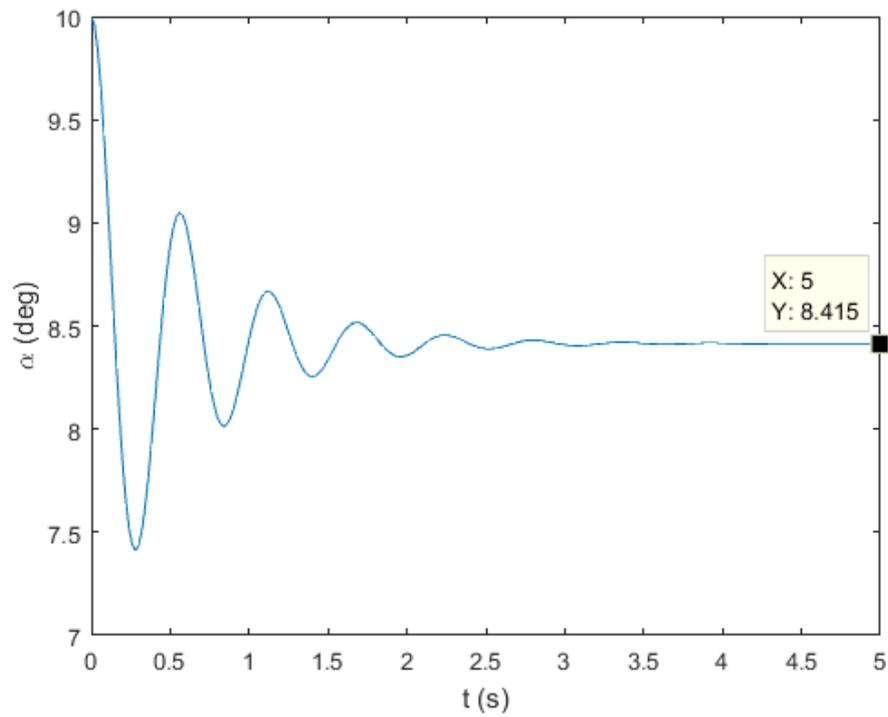


Figura 5.2: Angolo α in funzione del tempo

Tale valore è da confrontare con un'analisi statica del sistema. In figura 5.3 sono riportati i vari elementi e le forze scambiate.

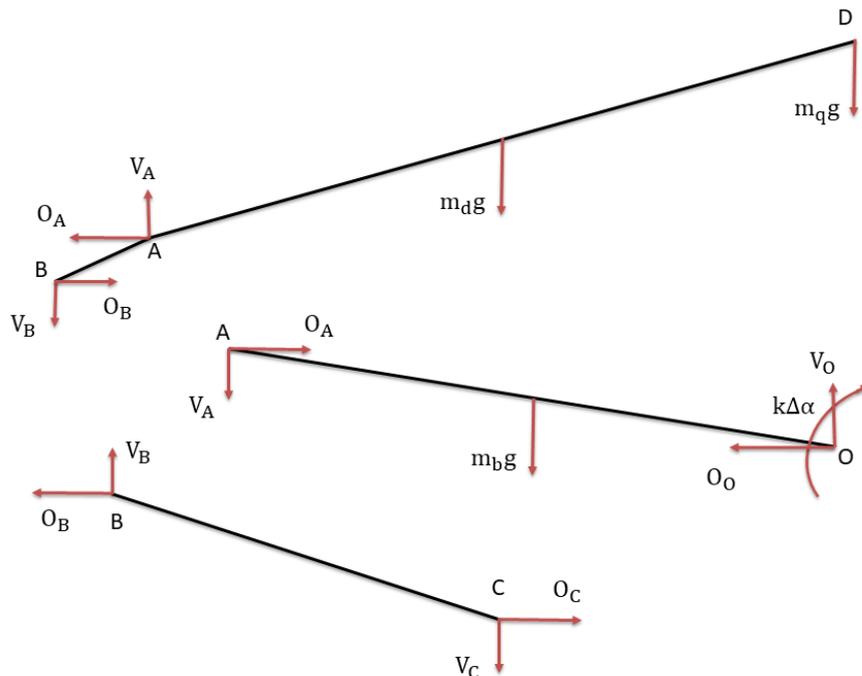


Figura 5.3: Forze agenti sui singoli elementi del sistema

Utilizzando le equazioni d'equilibrio alla traslazione orizzontale, verticale e alla rotazione dei singoli elementi, si hanno otto equazioni (5.1) e otto incognite ($V_A, O_A, V_B, O_B, V_C, O_C, V_O, O_O$) per cui il sistema è risolvibile.

$$\begin{cases} V_B c \cos \delta - O_B c \sin \delta = 0 \\ m_d g (e \cos \varphi + \frac{d}{2} \cos \gamma) + m_q g (e \cos \varphi + d \cos \gamma) - V_A e \cos \varphi - O_A e \sin \varphi = 0 \\ V_B - V_C = 0 \\ O_B - O_C = 0 \\ V_A - V_B - m_d g - m_q g = 0 \\ O_A - O_B = 0 \\ V_O - V_A - m_b g = 0 \\ O_O - O_A = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Ricavate le forze nel punto A (V_A, O_A), si calcola la risultante (R_{\perp}) agente perpendicolarmente all'asta b e applicata in A. Si confronta questo risultato con quello derivante dall'equazione d'equilibrio dei momenti nell'origine (5.2). A meno di scostamenti derivanti da approssimazioni nei calcoli, i valori sono coincidenti.

$$R_{\perp} b + m_b g \frac{b}{2} \cos \alpha - k(\alpha_0 - \alpha) = 0. \quad (5.2)$$

6 Modello equivalente al quadrilatero articolato

La costruzione di un modello equivalente (figura 6.1) ad un grado di libertà è stata realizzata mediante elementi massa e molla. Per ricavare il valore della massa (m_1) e della rigidezza equivalenti (k_1) si confronta l'energia cinetica e potenziale elastica con i risultati ottenuti dal codice della dinamica del quadrilatero articolato ad un grado di libertà privo della massa concentrata sul quadro, in quanto verrà poi aggiunta al secondo grado di libertà. La forzante cosinusoidale con frequenza variabile linearmente tra 3 Hz e 11 Hz è applicata in D e la rigidezza della molla (k_0) è pari a $3 \cdot 10^5$ Nm/rad.

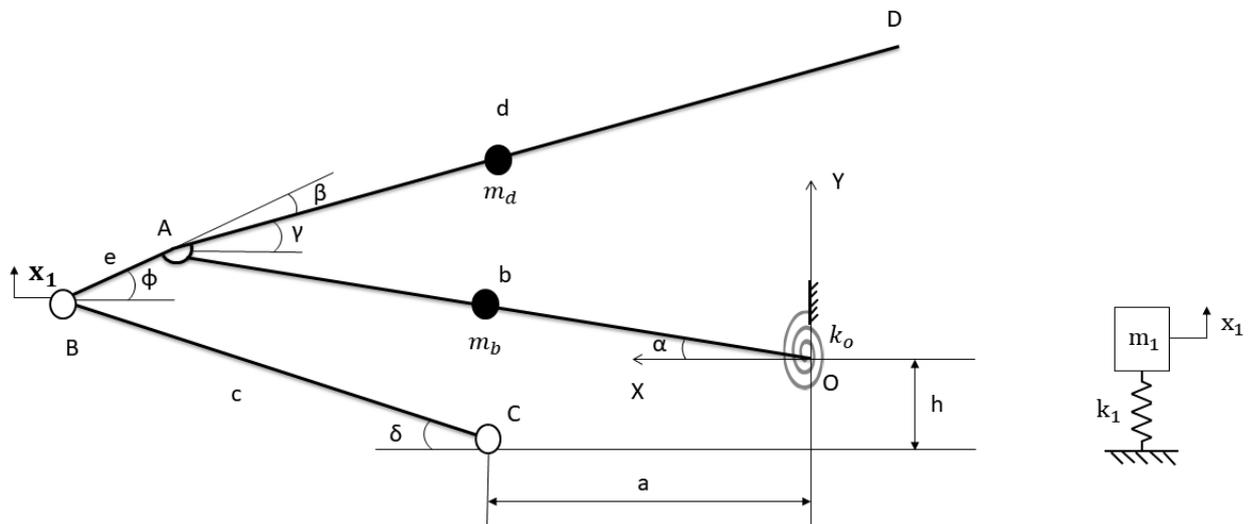


Figura 6.1: Quadrilatero articolato e modello equivalente

Si calcola l'energia cinetica considerando la componente verticale della velocità nel punto B e potenziale elastica del modello con un grado di libertà traslazionale. Impostando un intervallo di valori di masse e rigidzze si valutano i rispettivi errori energetici al fine di minimizzarli:

$$\min \left[\sum (E_{c1i} - E_{c2i})^2 \right] \quad (6.1)$$

$$\min \left[\sum (E_{p1i} - E_{p2i})^2 \right]. \quad (6.2)$$

Nella figura 6.2 e 6.3 sono rappresentati i risultati ottenuti rispettivamente per l'energia cinetica e potenziale elastica con un'ampiezza della forzante pari a 100 N.

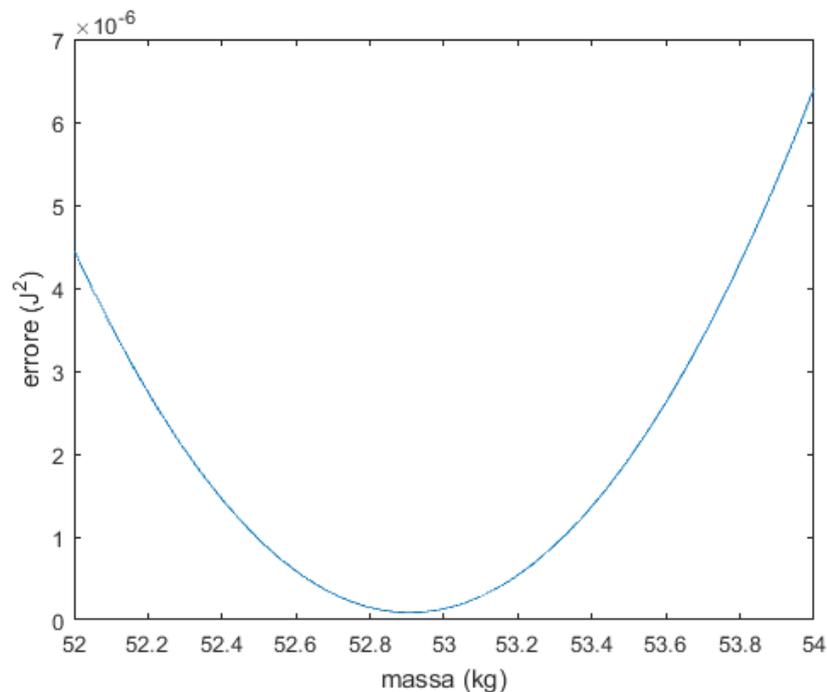


Figura 6.2: Errore energetico al variare della massa

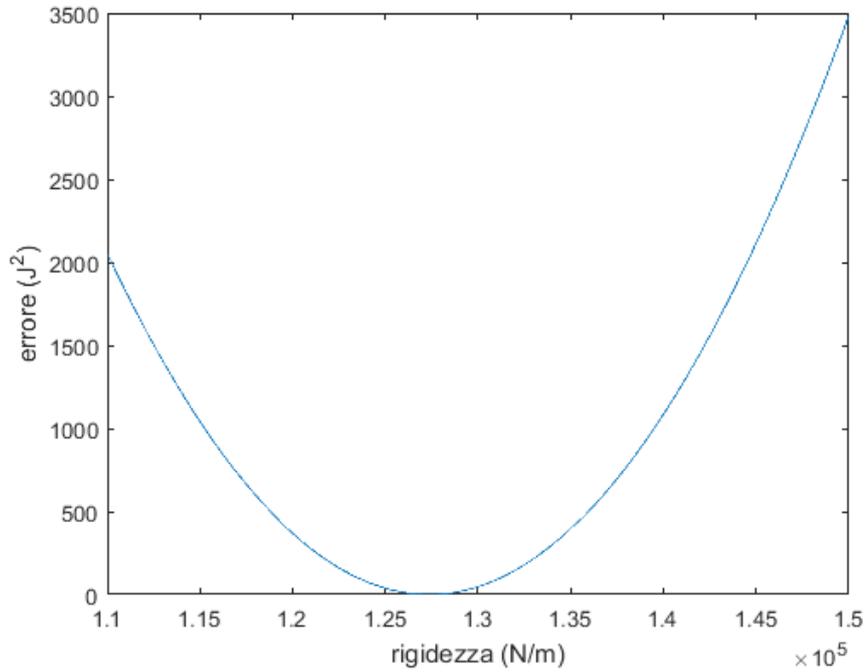


Figura 6.3: Errore energetico al variare della rigidezza

Gli spostamenti del quadro relativi al quadrilatero ad un grado di libertà sono stati diagrammati sovrapponendo le ampiezze derivanti da tre diverse forzanti (figura 6.4).

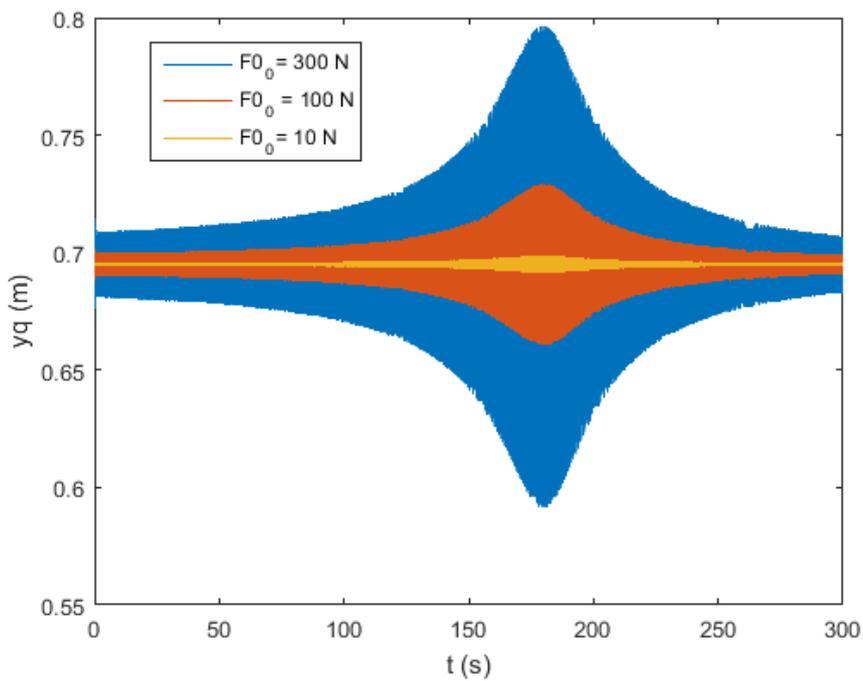


Figura 6.4: Spostamento del punto D in funzione del tempo

Si può osservare dal grafico la simmetria e l'invarianza della posizione dello spostamento massimo all'aumentare della forzante indice di un comportamento sostanzialmente lineare del sistema. Dall'esecuzione di un codice che permette l'estrazione dei parametri modali (capitolo 8) a partire dalla recettanza calcolata in B si ottengono i valori delle frequenze naturali (f_b) e si comparano con le precedenti (f_a). Nella tabella 6.1 sono presenti i valori calcolati, in particolari le frequenze naturali risultano circa costanti al variare della forzante.

Tabella 6.1: confronto frequenze naturali

F_0 (N)	Δy (cm)	m_1 (kg)	k_1 (N/m)	f_a (Hz)	f_b (Hz)	ζ (%)
10	0,7	52,905	127360	7,809	7,810	5,74
100	7	52,910	127370	7,809	7,810	5,75
300	20	52,940	127430	7,808	7,807	5,75

7 Modello a due gradi di libertà

Al modello realizzato nel capitolo precedente si è aggiunto un secondo grado di libertà (figura 7.1) corrispondente alla traslazione verticale degli archetti. È stata inserita una massa ($m_2 = m_q$) e una molla di rigidezza k_2 i cui valori numerici sono riportati in tabella 7.1.

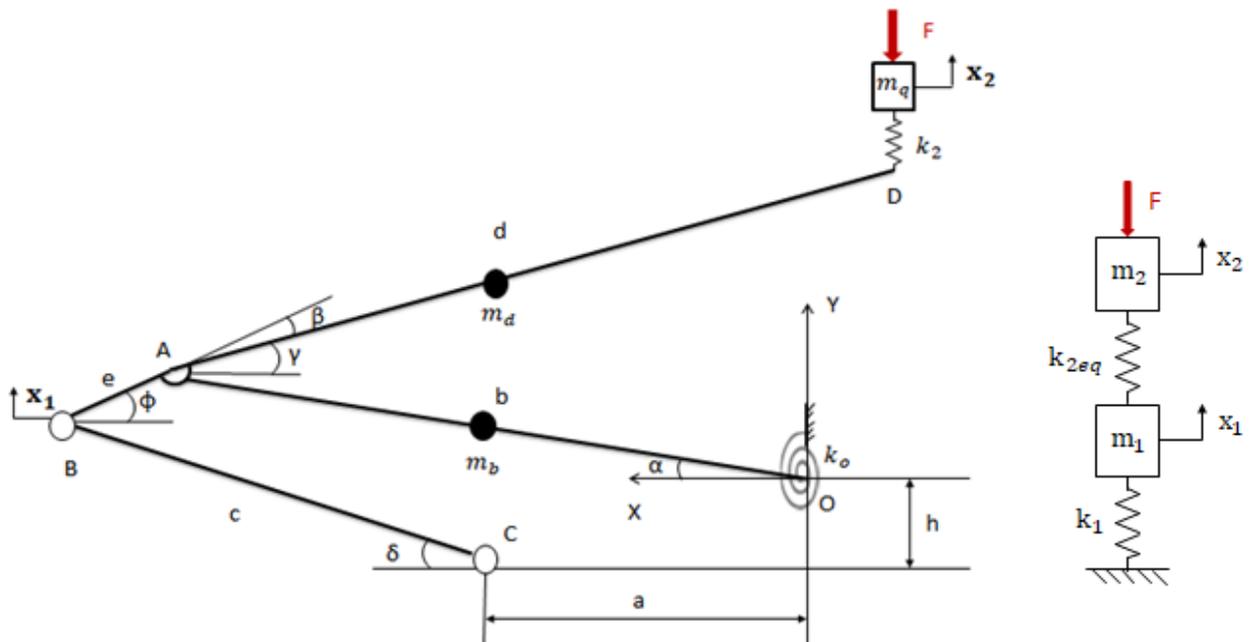


Figura 7.1: Modello a due gradi di libertà

Si esprime l'energia cinetica del sistema a due gradi di libertà:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2. \quad (7.1)$$

L'energia potenziale elastica è data dalla somma dei contributi delle due molle:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_D)^2. \quad (7.2)$$

Per il modello equivalente si ha:

$$V_{eq} = V_1 + V_{2eq} = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_{2eq}(x_2 - x_1)^2. \quad (7.3)$$

Tabella 7.1: valori numerici del modello a due gradi di libertà

k_1	127370 N/m
m_1	52,91 kg
k_2	8000 N/m
m_2	14,58 kg

Per le successive simulazioni è stata applicata una forzante cosinusoidale con frequenza variabile linearmente tra 3 Hz e 11 Hz. Nella figura 7.2 e 7.3 è rappresentata rispettivamente la recettanza incrociata (α_{12}) e puntuale (α_{22}). In entrambi i grafici sono evidenti i due picchi in corrispondenza delle frequenze di risonanze del sistema. Qualitativamente si differenziano per la presenza di un punto di sella (minimo locale) nella recettanza incrociata e di un'antirisonanza nella recettanza puntuale.

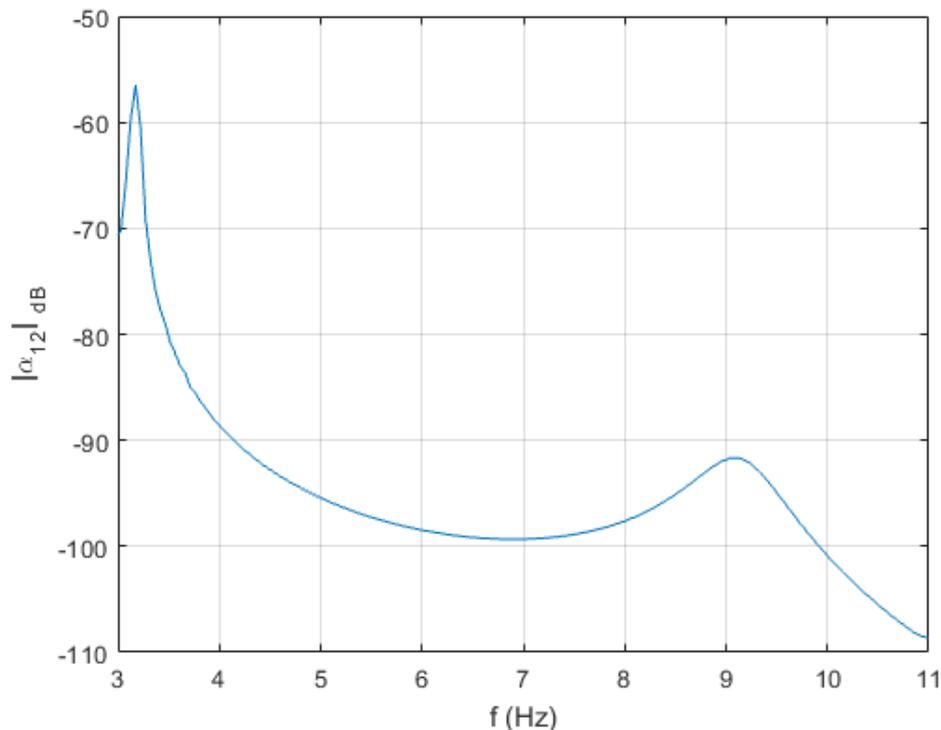


Figura 7.2: Modulo della recettanza α_{12}

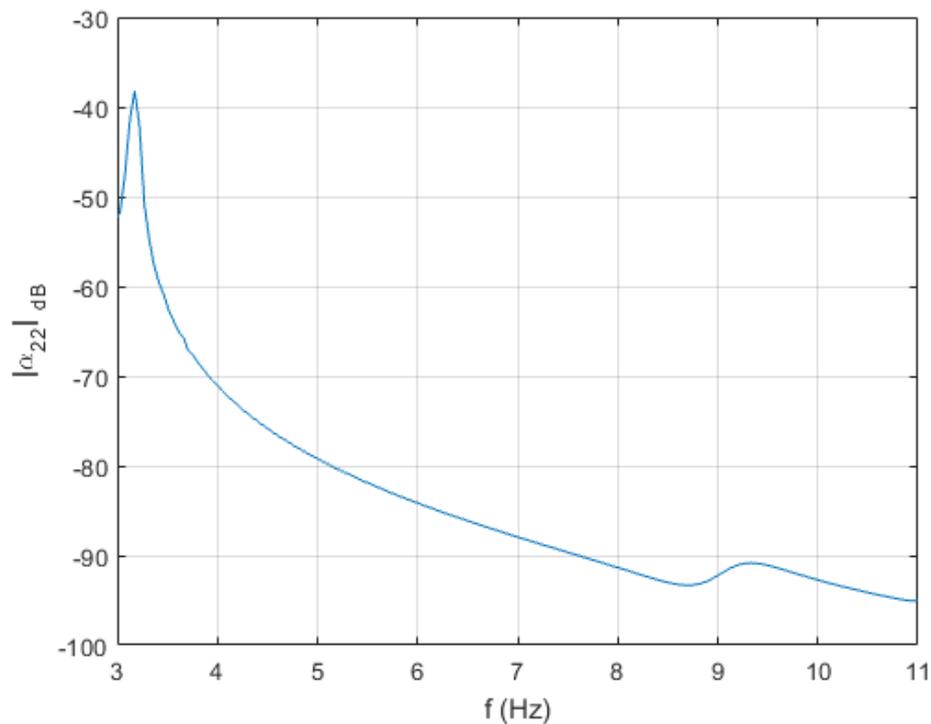


Figura 7.3: Modulo della recettanza α_{22}

Mediante un codice relativo all'estrazione dei parametri modali (capitolo 8) si ottengono le frequenze naturali del sistema e i fattori di smorzamento (tabella 7.2).

Tabella 7.2: parametri modali

ω_i (rad/s)	f_i (Hz)	ζ_i (%)
19,89	3,17	0,49
57,64	9,17	4,67

Nella figura 7.3 è rappresentata la recettanza α_{12} sperimentale (curva in blu) e quella ricostruita (curva in rosso) mediante l'espressione 8.4. Le differenze tra le due curve sono visibili solamente eseguendo degli ingrandimenti in prossimità dei due picchi.

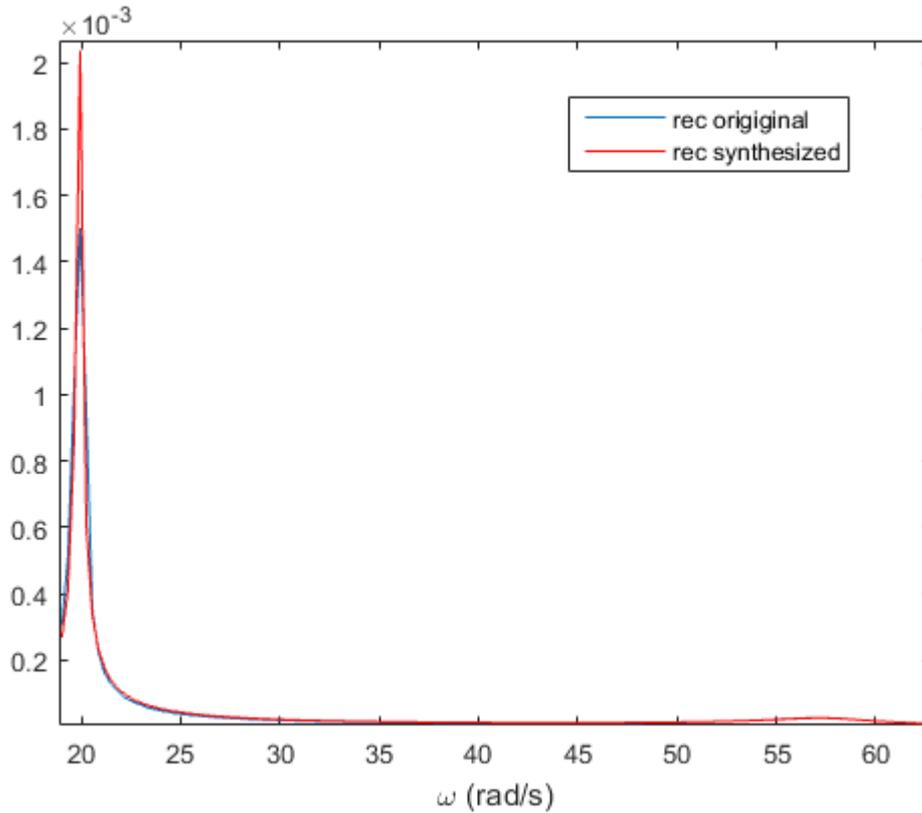


Figura 7.3: Recettanza α_{12} sperimentale e ricostruita

Il parametro mancante per la descrizione del modello equivalente è il valore della rigidità della seconda molla (k_{2eq}) che è possibile ricavare partendo dalle equazioni del moto in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_{2eq} & -k_{2eq} \\ -k_{2eq} & k_{2eq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -F \end{Bmatrix} \quad (7.4)$$

Impostando un intervallo di valori di rigidità si esegue quindi una procedura iterativa in cui ad ogni ciclo si risolve il seguente problema agli autovalori:

$$\det([k] - \omega^2[m]) = 0. \quad (7.5)$$

Si ricavano gli autovalori (ω_1^2, ω_2^2) le cui radici sono le pulsazioni naturali del sistema e si confrontano con i risultati di tabella 7.2 fino a trovare il valore della rigidità equivalente ($k_{2eq} = 6000 \text{ N/m}$).

8 Estrazione dei parametri modali

Il calcolo della frequenza naturale (ω_n) e del fattore di smorzamento (ζ) di un sistema ad un grado di libertà è stato eseguito con il metodo dei fratti semplici. A partire da un vettore contenente la pulsazione (Ω), la parte reale (R) e immaginaria (I) della recettanza calcolata per punti è possibile scrivere il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} R_m & -\Omega_m I_m & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{m+M} & -\Omega_{m+M} I_{m+M} & \vdots & \vdots \\ I_m & \Omega_m R_m & 0 & -\Omega_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I_{m+M} & \Omega_{m+M} R_{m+M} & \vdots & -\Omega_{m+M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_n^2 \\ 2\zeta\omega_n \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Omega_m^2 R_m \\ \vdots \\ \Omega_{m+M}^2 R_{m+M} \\ \Omega_m^2 I_m \\ \vdots \\ \Omega_{m+M}^2 I_{m+M} \end{Bmatrix} \quad (8.1)$$

Utilizzando $M + 1$ punti si hanno $2(M + 1)$ equazioni in quattro incognite ($\omega_n^2, 2\zeta\omega_n, B, C$) per cui il sistema (8.1) è sovradeterminato. Mediante l'impiego della matrice pseudo-inversa $[A]^+$ di $[A]$ è possibile risolvere il sistema:

$$\{z\} = [A]^+ \{b\} \text{ con } [A]^+ = ([A]^T [A])^{-1} [A]^T. \quad (8.2)$$

Dal primo elemento (z_1) del vettore $\{z\}$ si ottiene il quadrato della frequenza naturale, mentre dal secondo elemento (z_2) si ricava il valore del fattore di smorzamento:

$$\zeta = \frac{z_2}{2\omega_n}. \quad (8.3)$$

Dalla recettanza sperimentale si può quindi ricostruire l'andamento della curva interpolante i cui punti sono stati calcolati con la seguente espressione:

$$H(\Omega) = \frac{B + j \Omega C}{\omega_n^2 - \Omega^2 + j 2 \zeta \omega_n \Omega}. \quad (8.4)$$

9 Cenni di calcolo simbolico in Matlab

Per l'implementazione delle equazioni sono stati utilizzati dei comandi specifici relativi al calcolo simbolico in Matlab. Nel codice in particolare sono presenti le seguenti funzioni: “*syms*”, “*subs*”, “*diff*”, “*int*”.

Il comando “*syms*”, seguito dai nomi delle variabili separate da spazi, permette la creazione di oggetti simbolici. Questi possono assumere un valore costante o essere funzioni, con gli argomenti elencati tra parentesi tonde. Fondamentale è l'utilizzo del comando “*subs*” (*s*, *old*, *new*) per la sostituzione di variabili. Le variabili (*old*) contenute in un'espressione (*s*) sono sostituite da altre (*new*) di natura simbolica o numerica. Tale comando risulta particolarmente conveniente dopo la scrittura delle equazioni del moto in cui si devono attribuire dei valori numerici alle variabili. Il comando “*diff*” applicato ad una espressione simbolica permette il calcolo della sua derivata. Analogamente il comando “*int*” ne calcola l'integrale indefinito rispetto la sua variabile precedentemente definita (ad esempio il tempo).

Conclusioni

Nella parte introduttiva sono state illustrate diverse tipologie di pantografi ferroviari per treni ad alta velocità ed in particolare il funzionamento dell'ATR95. Il primo modello realizzato per descrivere il comportamento dinamico del pantografo è stato un sistema biella-manovella ad un grado di libertà soggetto ad una forzante cosinusoidale. Successivamente si è introdotto un cinematismo costituito da un quadrilatero articolato i cui parametri geometrici e fisici sono relativi all'ATR95. Per entrambi i modelli sono state fatte delle simulazioni dinamiche e rappresentate le funzioni di risposta in frequenza.

Mediante un confronto dell'energia cinetica e potenziale elastica del quadrilatero articolato è stato possibile ricavare un modello equivalente composto da una massa e una molla. È stato aggiunto infine un secondo grado di libertà corrispondente al moto verticale degli archetti e riportata la recettanza incrociata e puntuale del sistema in cui sono evidenti le frequenze di risonanza. Per il calcolo dei valori delle frequenze naturali e dei fattori di smorzamento si è utilizzato un codice per l'estrazione dei parametri modali mediante il metodo dei fratti semplici. Le simulazioni numeriche sono state eseguite con delle funzioni Matlab specifiche per il calcolo simbolico particolarmente convenienti per la scrittura delle equazioni del moto.

Codice Matlab

```
%Sistema biella-manovella, forzante cosinusoidale

clear all
close all
clc
profile on %attivazione modalità diagnosi
%variabili simboliche
syms r L Io m1 ko F0 omega Co teta(t) beta(t) f1 f2 TETA_P TETA

%Dati
r0=1; %lunghezza manovella (m)
L0=2; %lunghezza biella (m)
Io_0=5; %momento d'inerzia manovella (kg*m^2)
m1_0=100; %massa in B (kg)
ko_0=2000; %rigidezza torsionale in O (N*m/rad)
%F0_0=0.1*40; %ampiezza forzante (N)
F0_0=1*40;
%F0_0=2*40;
omega_0=2*pi*5; %pulsazione della forzante (rad/s)
Co_0=1*10; %smorzamento in O (N*m*s/rad)
inil=20; %angolo di equilibrio statico (deg)
ini2=0; %derivata prima di teta a t=0
tfin=400; %istante finale di tempo (s)
fs=1*50; %frequenza di campionamento (Hz)
%parametri per analisi segnale
NFFT=2^11;WINDOW=NFFT;NOVERLAP=ceil(.81*NFFT);
f1=0.5; %frequenza inizio sweep (Hz)
f2=2; %frequenza fine sweep (Hz)

%calcoli
dt=1/fs; %intervallo di campionamento (s)
beta(t)=asin(r/L*sin(teta(t))); %angolo beta
xb(t)=r*cos(teta(t))+L*cos(beta(t)); %posizione del punto B
xb2=subs(xb,[r L],[r0 L0]);
xb_p=diff(xb); %velocità del punto B
teta_p=diff(teta);
beta_p=diff(beta);
%calcolo energia cinetica del sistema
T1=1/2*(Io*(teta_p)^2+m1*(xb_p)^2);

T1a=subs(T1,teta_p,TETA_P);
dT1a=diff(T1a,TETA_P); %derivata T1 rispetto TETA_P
dT1aa=subs(dT1a,TETA_P,teta_p);

T1b=subs(T1,teta,TETA);
dT1b=diff(T1b,TETA); %derivata T1 rispetto TETA
dT1bb=subs(dT1b,TETA,teta);
dT1bbb=subs(dT1bb,TETA_P,teta_p);
```

```

V(t)=1/2*ko*(teta(t)-inil*2*pi/360)^2;           %energia potenziale
Vn=subs(V,teta,TETA);
dVn=diff(Vn,TETA);
dVnn=subs(dVn,TETA,teta);

arg=int(2*pi*(f2-f1)/tfin*t+2*pi*f1);           %sweep tra f1 e f2
Forz=F0*cos(arg);
xbn=subs(xb,teta,TETA);
g=diff(xbn,TETA);
gn=subs(g,TETA,teta);
Q=Forz*gn;                                       %Q

Diss(t)=1/2*Co*(teta_p)^2;                       %funzione dissipativa
Dissn=subs(Diss,teta_p,TETA_P);
dDissn=diff(Dissn,TETA_P);
dDissnn=subs(dDissn,TETA_P,teta_p);

ode=diff(dT1aa)-dT1bbb+dVnn==Q-dDissnn;         %equazione del moto

odel=subs(ode,[r L Io m1 ko F0 omega Co],[r0 L0 Io_0 m1_0 ko_0...
F0_0 omega_0 Co_0]);
V=odeToVectorField(odel);           %da ODE scalare a sistema ODE di 1° ordine
F=matlabFunction(V,'Vars',{'t','Y'});
%calcola soluzione numerica nell'intervallo e imposta condizioni
%iniziali
sol=ode45(F,[0 tfin],[inil*2*pi/360 ini2]);
time=0:dt:tfin;
y=deval(sol,time,1);                %valutazione soluzione nei punti creati
figure(1)
plot(time,y*360/2/pi)               %teta in funzione del tempo
hold on;
plot(time,mean(y)*360/2/pi*ones(1,size(time,2)),'r') %linea media
xlabel('t (s)')
ylabel('\theta (deg)')

pos=subs(xb2,teta(t),y);
xxB=double(pos);
figure(2)
plot(time,xxB)                       %xb in funzione del tempo
hold on;
plot(time,mean(xxB)*ones(1,size(time,2)),'r')
xlabel('t (s)')
ylabel('x_B (m)')

F1_t=subs(Forz,F0,F0_0);             %calcolo valori numerici in F_t
F2_t=subs(F1_t,t,time);
F_t=double(F2_t);

```

```

%analisi del segnale
%PSD con il metodo di Welch
[Pxx,freq] = pwelch(xxB-mean(xxB),WINDOW,NOVERLAP,NFFT,fs);
figure(3)
semilogy(freq,Pxx)
xlabel('freq. (Hz)')
ylabel('PSD (m^2/Hz)')
figure(4)
spectrogram(xxB-mean(xxB),WINDOW,NOVERLAP,NFFT,fs); %spettrogramma
figure(5)
%funzione trasferimento
[Txy,f]=tfestimate(F_t,xxB,WINDOW,NOVERLAP,NFFT,fs);
plot(f,abs(Txy))
title('FRF')
xlim([f1 f2])
xlabel('freq. (Hz)')
ylabel('|\alpha| (m/N)')

profile viewer %visualizzazione tempo esecuzione funzioni

```

Bibliografia

1. J. Benet, N. Cuartero, F. Cuartero, T. Rojo, P. Tendero, E. Arias, “An advanced 3D-model for the study and simulation of the pantograph catenary system”, 2013.
2. CENELEC, “Railway applications - Current collection systems – Validation of simulation of the dynamic interaction between pantograph and overhead contact line”, prEN 50318:2016.
3. Faiveley Transport, “Pantographs participate in the TGV speed record”, 2007.
4. A. Fasana, S. Marchesiello, “Meccanica delle vibrazioni”, Clut, 2006.
5. A. Florian, “Struttura e aspetti della catenaria della trazione elettrica”, Padova, 2017.
6. M. G. Gritti, “Progetto ed ottimizzazione del meccanismo di sollevamento di un pantografo”, Politecnico di Milano, 2011/2012.
7. M. Nessi, “Modellazione matematica e identificazione dei parametri per la simulazione dell’interazione dinamica tra pantografo e catenaria”, Politecnico di Milano, 2009/2010.
8. A. Scarinzi, “Sviluppo di un modello agli elementi finiti per lo studio dell’interazione tra due pantografi e la catenaria nei treni ad alta velocità”, Politecnico di Torino, 2017/2018.
9. Stemmann-Technik, “Railway technology systems”.
10. M. Tora, “Il fenomeno dell’arco elettrico nelle linee per l’alta velocità ferroviaria”, Politecnico di Milano, 2013/2014.
11. R. Vieira, “High speed train pantograph models identification”, Técnico Lisboa, 2016.