

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Gestionale

Tesi di Laurea Magistrale

**Azioni internazionali: problematiche della costruzione di
un portafoglio ottimizzato.**



Relatore

Franco Varetto

Candidato

Francesco Loiaconi

Anno Accademico 2019/2020

Sommario

Introduzione.....	4
Fondaco SGR S.p.A.....	8
Modelli di gestione di portafoglio	9
Introduzione	9
Modello di Markowitz	11
Capital Asset Pricing Model	15
Modello di Black e Litterman.....	18
Introduzione	18
L'approccio di equilibrio	19
View dell'investitore e livello di confidenza	21
Il teorema di Bayes e la determinazione dei rendimenti finali	23
Applicazione pratica dei modelli di matematici	27
Introduzione	27
Analisi dati.....	29
Microsoft Corporation	31
Apple Inc.....	33
Amazon.com, Inc.	35
Facebook, Inc.	37
Berkshire Hathaway Inc.....	39
JPMorgan Chase & Co.....	41
Google LLC	43
Johnson & Johnson	45
The Procter & Gamble Company	47
Exxon Mobil Corporation	49
Visa Inc.	51
AT&T Inc.....	53
The Home Depot, Inc.....	55
Verizon Communications Inc.	57
The Bank of America Corporation	59
Mastercard Incorporated	61
The Walt Disney Company.....	63

Intel Corporation.....	65
Chevron Corporation	67
Merck & Co., Inc.	69
Portafoglio di Markowitz.....	71
Procedimento risolutivo	71
Portafoglio con obiettivo di rendimento fissato	74
Portafoglio con inserimento del titolo risk free	78
Fragilità del modello	83
Portafoglio di Black e Litterman.....	87
Definizione dei parametri per l’approccio di equilibrio	87
Definizione delle view	91
Aggregazione di view e rendimenti d’equilibrio	97
Portafoglio con obiettivo di rendimento fissato	99
Portafoglio con inserimento del titolo risk-free	104
Conclusioni.....	109
Bibliografia	112
Sitografia	113

Introduzione

Il mercato azionario è ritenuto dagli operatori economici (famiglie, aziende e Stato) un mercato molto rischioso nel quale, cioè, esiste una elevata possibilità di realizzare grandi profitti ma anche ingenti perdite; anche se questa percezione non è del tutto corretta, è innegabile che l’investimento azionario sia, rispetto ad altre tipologie di investimento, maggiormente gravato da incertezza. È possibile avere un’idea della combinazione di alti profitti ed elevato rischio osservando l’andamento del mercato statunitense tramite la serie storica dell’indice Standard and Poor’s 500 (S&P500), negli anni che vanno dal primo gennaio del 2010 allo stesso giorno del 2020.



Figura 1. Qui rappresentato l'andamento dei prezzi giornalieri dell'indice S&P500 dal 2010 al 2020.

Dall’andamento del prezzo dell’indice si nota come un ipotetico investitore che avesse investito 1\$ nel mercato americano il 1/01/2010 si ritroverebbe ad averne quasi il triplo a dieci anni di distanza; se si pensa che i tassi d’interesse sui titoli decennali americani ad inizio 2010 erano pari circa al 4%, appare evidente come il mercato azionario americano sia stato estremamente più remunerativo di quello legato ai titoli di stato, per esempio. La misura che può invece aiutare a comprendere l’elevata volatilità che si trova nei mercati azionari è la variazione percentuale giornaliera dell’indice stesso: sarebbe infatti preferibile che tali cambiamenti si limitassero a piccoli aggiustamenti, in quanto in caso contrario

significherebbe che da un giorno all'altro il valore del proprio asset è cambiato in maniera significativa.

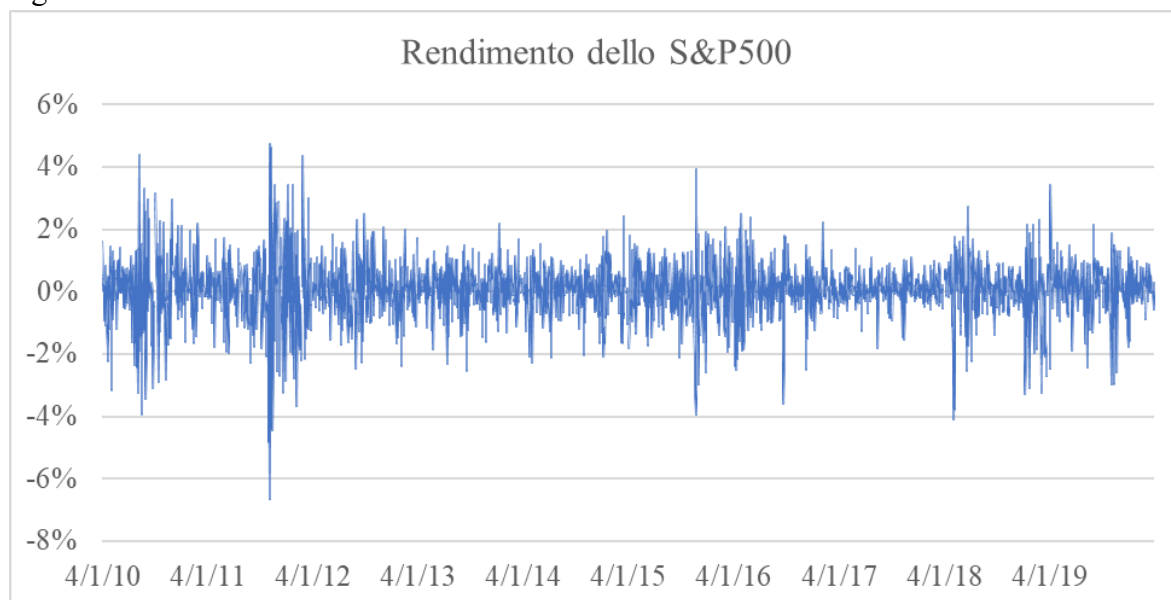


Figura 2. Variazioni percentuali del prezzo dell'indice S&P500 su base giornaliera, dal 2010 al 2020.

In questo grafico si osserva quanto siano volatili le quotazioni azionarie giornaliere, con picchi che toccano il 6%, ma in generale non è raro trovare inversioni di segno di importante entità; tutto ciò non depone a favore del mercato azionario, in quanto una variabilità giornaliera così elevata significa che il rischio di perdere ingenti somme di denaro non esiste soltanto su lunghi periodi ed in relazione a cambiamenti strutturali del mercato stesso, ma anche per eventi singoli e repentini che si verificano da un giorno all'altro.

Non deve quindi stupire il fatto che negli anni si siano sviluppate diverse ricerche in campo matematico per riuscire a “mitigare” il rischio di investimento nel mercato azionario, cercando di mantenere i tassi di rendimento elevati che lo caratterizzano. Da qui derivano i diversi modelli di gestione di portafoglio che si incontrano in letteratura, che cercano per l'appunto di rendere il più efficace possibile il processo di *Capital Allocation* (ovvero distribuire ed investire le proprie risorse finanziarie in modo da incrementarne l'efficienza massimizzandone i profitti). Il primo capitolo della tesi esplora tre dei principali modelli di gestione di portafoglio elaborati nel corso del secolo scorso, spiegandone il funzionamento ed elencandone i limiti. In particolare, il primo modello analizzato è quello proposto all'inizio degli anni Cinquanta da Harry Markowitz, che per primo diede un forte contributo alla causa; il modello è ritenuto così importante da essere tuttora considerato il punto di partenza della finanza moderna e tutti i modelli nati successivamente si sono dovuti

confrontare con questo. La rivoluzione proposta da Markowitz consiste nel fatto che per primo teorizzò il beneficio portato dalla diversificazione degli asset all'interno del portafoglio: fino ad allora infatti, la diversificazione dei titoli veniva applicata in modo sbagliato e non scientifico, acquistando cioè molti titoli appartenenti a settori diversi, credendo che in questo modo si sarebbe mitigato il rischio. Nonostante l'importanza scientifica che riveste questo modello per tutta la materia finanziaria, il suo utilizzo pratico nella realtà da parte degli investitori è stato estremamente contenuto, a causa dei suoi limiti e fragilità che verranno trattate in seguito. In generale il modello non offre dei risultati che possano essere considerati veramente affidabili dato che massimizza l'errore di stima, portando a sovrastimare quei titoli che presentano un elevato rendimento atteso, basso rischio e bassa correlazione con gli altri titoli. L'effetto di questo problema si nota nella composizione del portafoglio finale, che risulta essere molto concentrata in pochi asset. Inoltre, il modello, oltre a non essere affidabile nei risultati, risulta anche essere instabile nel tempo dato che è sufficiente una piccola variazione negli input per ottenere una composizione del portafoglio ottimale completamente diversa da quella calcolata precedentemente.

A partire dal modello di Markowitz, ne sono stati sviluppati altri che provassero a colmare le lacune di quest'ultimo; nella tesi viene successivamente presentato il modello di Sharpe, il Capital Asset Pricing Model. La novità introdotta in questo modello risiede nell'utilizzo del titolo risk-free, che permette di partire da un benchmark comune per tutti i portafogli; inoltre, assumendo che tutti gli investitori siano razionali, questi acquisteranno esattamente gli stessi titoli nelle stesse quote percentuali, andando di fatto a definire quello che nel modello viene chiamato Portafoglio di Mercato. In questo modo Sharpe cerca di eliminare la soggettività del modello precedente, ponendo come unica scelta quale percentuale da investire nel portafoglio di mercato e quale, in modo complementare, nel titolo privo di rischio. Sebbene questo nuovo modello offra molti spunti degni di nota, tuttavia riduce gli investitori ad un'entità quasi secondaria, in quanto tutti si comportano allo stesso modo; per questo motivo, anche questo modello funge da base per molti successivi, ma non ha trovato molte applicazioni nella realtà.

L'ultimo modello teorico presentato nella tesi è quello di Black e Litterman, che durante il loro periodo lavorativo all'interno di Goldman Sachs, elaborarono questa nuova teoria di

gestione di portafoglio, che permette di combinare l'approccio media-varianza di Markowitz con l'approccio di equilibrio derivante dal CAPM; la grossa novità del modello risiede però nella possibilità data ai manager di formulare delle ipotesi (*view*) riguardo i titoli, in modo da incrementarne o decrementarne i rendimenti da inserire nel modello. Inoltre, grazie alla *reverse optimization* derivante dall'approccio del CAPM, i dati in input non sono più stime come succede per il modello di Markowitz, ma derivano direttamente dal portafoglio di equilibrio facilmente osservabile; in questo modo si elimina una delle componenti critiche del primo modello, che era troppo dipendente dalle stime dei dati in input.

Nella seconda parte della tesi viene presentata un'applicazione dei modelli di Markowitz prima e Black e Litterman dopo, fornendo in precedenza una dettagliata analisi riguardante i dati utilizzati; questi sono relativi alle prime venti aziende in ordine di composizione all'interno dell'indice S&P500, e sono stati ricavati da Bloomberg, database di riferimento nel mondo della finanza, che è stato reso accessibile grazie alla collaborazione con Fondaco SGR S.p.A.. Nell'analisi dati vengono presentate le aziende, gli andamenti dei loro prezzi e rendimenti, ed infine le distribuzioni dei dati stessi, che devono essere normali per poter essere utilizzate nelle analisi successive. Nell'ultima parte della tesi viene riportata l'applicazione vera e propria, tramite la quale sono stati composti diversi portafogli variando i vincoli imposti di volta in volta, in modo da ottenere una serie di risultati da mettere a confronto per analizzare le differenze tra i due modelli. In particolare, i portafogli analizzati sono

- Con obiettivo di rendimento fissato a priori, sia in presenza che in assenza di vendite allo scoperto, con l'obiettivo di valutare quale modello riesca a minimizzare maggiormente la volatilità dato un rendimento in comune;
- Senza vincoli di rendimento, ma utilizzando come obiettivo la massimizzazione dell'indice di Sharpe, spesso utilizzato come indicatore di performance; anche in questo caso i portafogli sono stati analizzati sia in presenza che in assenza di vendite allo scoperto.

Le performance delle diverse composizioni di portafoglio così ottenute sono state messe a confronto sia utilizzando i semplici valori di rendimento atteso e rischio dei singoli portafogli nei due modelli, sia tramite l'indice di Sharpe, largamente utilizzato nel mondo finanziario, che ha permesso di avere un giudizio globale sui due metodi diversi.

Fondaco SGR S.p.A.

Come già accennato in precedenza, i dati utilizzati per le applicazioni dei modelli matematici sono stati reperiti grazie all'aiuto di Fondaco SGR, che ha reso possibile lo svolgimento della tesi sia dando la disponibilità all'utilizzo di Bloomberg come database, sia aiutando nello sviluppo delle view fondamentali per il modello di Black e Litterman.

L'azienda fa parte di un Gruppo indipendente composto dalla Società di Gestione di Risparmio italiana con sede a Torino e dalla Fondaco Lux SA, con sede in Lussemburgo; la parte italiana, da cui è stato possibile svolgere parte della tesi, si occupa di asset management per investitori istituzionali (banche, assicurazioni, fondi d'investimento ed enti pubblici). Fondaco SGR nasce nel 2002 dalla volontà di alcune tra le principali Fondazioni di origine bancaria italiane di creare un centro di competenze finanziarie condiviso, che potesse offrire la gestione attiva delle partecipazioni, la gestione di investimenti tradizionali (multi-asset e fondi diretti), la gestione di investimenti su fondi alternativi e la creazione di strumenti d'investimento personalizzati in funzione delle richieste del cliente.

In particolare, Fondaco si è specializzata nel controllo del rischio perché ritenuto fattore fondamentale per un investitore di lungo periodo in modo da potersi proteggere da perdite significative che possano compromettere il raggiungimento degli obiettivi pluriennali; l'azienda opera anche per questo motivo tramite soluzioni personalizzate sul cliente, distinguendo sempre in maniera chiara tra le attività di investimento a capo della società di gestione e le linee guida strategiche di Governance a capo dell'investitore. I prodotti offerti dall'azienda si basano dal 2013 sullo Yield Enhancement Program (YEP), che ha lo scopo di incrementare la redditività delle partecipazioni strategiche e minimizzare le perdite, tramite un team dedicato e specializzato e la politica di incasso dei dividendi periodici unita all'esercizio di voto in capo all'investitore; in questo senso esistono diversi tipi di fondi in cui investire: Multi-Asset su asset tradizionali o tramite allocazione delle risorse tattica e dinamica, oppure improntato su investimenti alternativi o sul mercato immobiliare del Nord e Centro Italia, o ancora fondi obbligazionari con partecipazioni a breve termine in titoli di stato Europei, Globali o di mercati emergenti.

Modelli di gestione di portafoglio

Introduzione

Innanzitutto, bisogna definire cosa sia un portafoglio: considerato un insieme di titoli $A=\{a_1, \dots, a_n\}$, un portafoglio o paniere è un insieme di quote λ_i acquistate per ciascun titolo a disposizione; da un punto di vista matematico un portafoglio è quindi interpretabile come un vettore a n componenti: $\Pi = \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \} \in \mathbf{R}^n$. Dato un portafoglio così definito, il suo rendimento è definito come $R_\Pi = \frac{A_\Pi}{P_\Pi} - 1$, dove A_Π e P_Π sono le somme ponderate dei prezzi dei titoli a_i con pesi λ_i ai tempi finale ed iniziale. Inoltre, poiché il rischio del mercato azionario è connesso con la variabilità dei rendimenti, la soluzione più utilizzata è quella di utilizzare come misura del rischio la deviazione standard dei rendimenti stessi σ_{R_Π} .

Le combinazioni di deviazione standard (asse X) e rendimento atteso (asse Y) relativi a tutti i possibili portafogli ottenuti a seconda delle diverse combinazioni di titoli vanno a formare il cosiddetto “insieme possibile”; all’interno di questo insieme si trova tutto lo spettro dei portafogli ottenibili, quindi saranno compresi sia quelli “migliori” che quelli “peggiori”. Dal punto di vista matematico, si dice che un portafoglio Π_1 domina un altro portafoglio Π_2 se, a parità di rischio, possiede un rendimento più elevato oppure se, a parità di rendimento, possiede un rischio più basso; con questa premessa, un portafoglio si dice *efficiente* se non dominato da nessun altro portafoglio, e l’insieme di tutti i portafogli efficienti si chiama *frontiera efficiente*.

Di seguito viene riportato un esempio di frontiera efficiente, in cui vengono sottolineati i singoli titoli (*individual security*) che sono racchiusi all’interno dei confini determinati proprio dalla frontiera stessa.

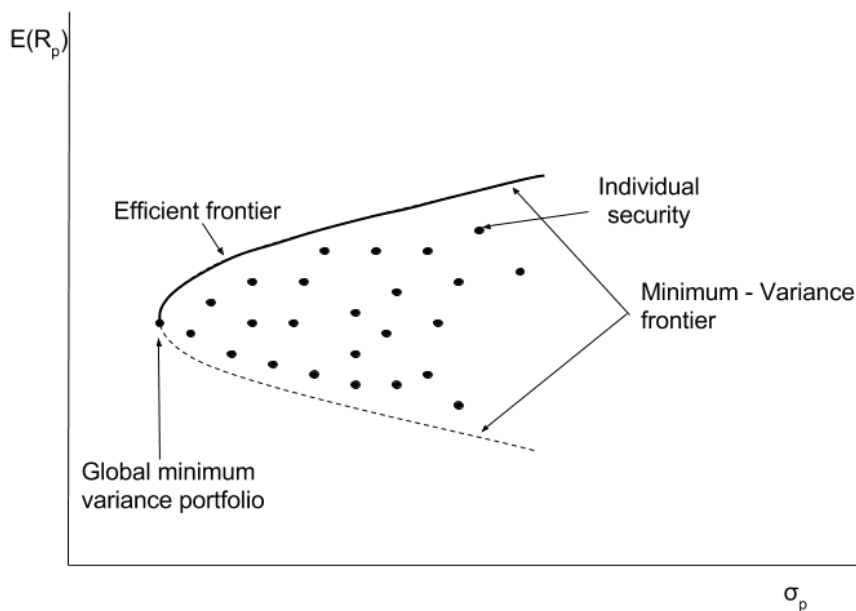


Figura 3. Esempio di insieme possibile, composto dai punti che raffigurano le coppie rischio-rendimento dei singoli titoli (*individual security*), e di frontiera efficiente segnata come linea continua.

È importante sottolineare il fatto che viene utilizzato solo il ramo superiore della frontiera dell'insieme possibile: appare evidente che qualsiasi punto della metà inferiore venga infatti dominato dal punto che si trova sulla retta parallela all'asse Y corrispondente allo stesso livello di rischio, ma ad un rendimento maggiore. Infine, il punto di minimo della frontiera efficiente viene definito *Minimum Variance Portfolio*, in quanto corrisponde alla combinazione di titoli che minimizza il rischio per l'investitore.

Da questo punto di partenza si sviluppano tutti i modelli di gestione di portafoglio, ed in particolare quelli che verranno di seguito analizzati: il modello di Markowitz, il Capital Asset Pricing Model e quello di Black-Litterman; il loro scopo, come già precedentemente accennato, è quello di trovare un'allocazione di capitale ottimale, in modo da avere un determinato rendimento di portafoglio riducendo al massimo la variabilità e quindi il rischio.

Modello di Markowitz

Come già accennato, lo scopo di un portafoglio di asset è quello di mitigare il rischio d'investimento mantenendo un rendimento obiettivo; prima dell'avvento delle idee di Markowitz, l'attenzione era prevalentemente concentrata sui singoli titoli, ed in particolare la tendenza era quella di investire guardando semplicemente alla volatilità di questi ultimi in modo da mantenere solo quelli con i valori più piccoli di deviazione standard. Con la pubblicazione dell'articolo di Harry Markowitz del 1952, *Portfolio Selection*, il mondo della finanza venne a contatto per la prima volta con il concetto di diversificazione supportato da dimostrazioni matematiche; nel suo articolo l'economista americano affermava infatti che per avere un portafoglio efficiente non si sarebbe dovuto guardare alle singole volatilità dei titoli, ma al sistema complesso di correlazioni tra tutti i titoli posseduti. Il modello proposto si basava su diverse assunzioni, di seguito elencate, che verranno poi riprese da tutti i modelli successivi anche se con alcune piccole variazioni:

- Gli investitori sono avversi al rischio e cercano di minimizzare la volatilità massimizzando i rendimenti; l'avversione al rischio è rappresentata tramite un coefficiente che indica quanto un investitore è disposto a pagare per “liberarsi dall'incertezza”^[1].
- Gli investitori sono razionali ed insaziabili, e si comportano in modo da massimizzare la propria utilità una volta fissato un budget; la curva di utilità è concava e crescente ed ha tale espressione:

$$U = E(r) - \lambda \sigma^2$$

Dove λ rappresenta il coefficiente di avversione al rischio dell'investitore, quindi l'utilità aumenta con rendimenti attesi elevati ma decresce con volatilità alte.

¹ Micocci e Masala, Manuale di Matematica finanziaria: Metodi e strumenti quantitativi per il risk management, 2012

Rappresentando sullo stesso piano di rendimento-volatilità le curve di indifferenza dell'investitore, ovvero le curve che in ogni loro punto identificano i portafogli che gli sono indifferenti in base alla propria avversione al rischio e che massimizzano l'utilità, e la frontiera efficiente, si individuano i portafogli ottimi in corrispondenza dei punti di tangenza.

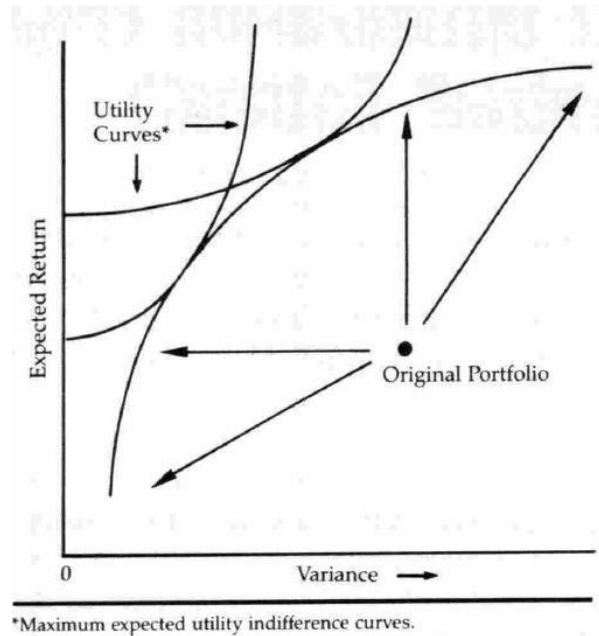


Figura 4. Tangenza tra curve di indifferenza e frontiera efficiente, Michaud (1989).

- Gli investitori hanno accesso garantito e gratuito a informazioni corrette sui rendimenti e volatilità dei titoli.
- Gli investitori basano le proprie scelte solo sui rendimenti attesi e sulla varianza o deviazione standard dei rendimenti stessi. Il rendimento atteso e la varianza di ogni portafoglio p possono essere calcolati con le seguenti formule, dove w identifica il peso che ogni titolo ha all'interno del portafoglio:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^n w_i E(r_i)$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{cov}(r_i, r_j)$$

- Il portafoglio è preso in considerazione su orizzonte uniperiodale.

Date le precedenti assunzioni, il modello di Markowitz individua la frontiera efficiente risolvendo uno dei due seguenti problemi di ottimizzazione vincolata:

$$[1] \begin{cases} \text{Max}(E(r_p)) \\ \sigma_p^2 = \tilde{\sigma} \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1 \end{cases} \quad [2] \begin{cases} \text{Min}(\sigma_p^2) \\ E(r_p) = \tilde{r} \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1 \end{cases}$$

dove $\tilde{\sigma}$ e $\tilde{r}$ sono rispettivamente la volatilità ed il rendimento obiettivo; a seconda di cosa si voglia trovare (rendimento massimo dato un rischio o rischio minimo dato un rendimento), si utilizzano il primo o secondo sistema. Il problema viene risolto con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, ottenendo come risultato i pesi ottimali dei titoli all'interno del portafoglio.

Nell'articolo veniva dimostrato come variasse la volatilità complessiva del portafoglio a seconda della correlazione esistente tra i titoli: immaginando quello più semplice, composto cioè soltanto da due titoli, e facendo variare il loro coefficiente di correlazione ρ si ottengono infatti risultati diversi.

Ponendo $\rho=-1$, e quindi perfetta correlazione negativa, la varianza di portafoglio si riduce a zero; al contrario, con perfetta correlazione positiva, ovvero $\rho=+1$, la varianza diventa massima, e pari a $\sigma_p^2 = (w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2)^2$, con w_1 e w_2 rispettivi pesi dei due titoli; infine, con $\rho=0$ la varianza è $\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2$ che è un valore positivo. Si nota quindi che la diversificazione gioca un ruolo fondamentale, in quanto con correlazione negativa si riesce ad abbassare la varianza in linea teorica fino al valore nullo. L'importante differenza rispetto ai predecessori di Markowitz è che la diversificazione, nel suo modello, viene raggiunta non tramite l'acquisto di molti titoli diversi, ma tramite l'investimento mirato di asset appartenenti a settori diversi o comunque le cui correlazioni risultino negative o nulle; la diversificazione non mira quindi a ridurre la volatilità di un titolo, ma il rischio interattivo tra due o più titoli in un portafoglio.

La teoria di Markowitz rappresenta ancora oggi il pilastro su cui si basa tutta la finanza moderna, tuttavia il suo impatto pratico nelle strategie d'investimento è rimasto limitato nel corso del tempo in quanto propone un metodo che non include l'apporto dei gestori dei

capitali: basandosi esclusivamente su media e varianza dei dati storici, non tiene conto delle opinioni esterne ai dati stessi, di fatto limitando il peso dell'esperienza e dello studio del mondo finanziario. Inoltre, un altro limite del modello è quello di essere altamente instabile: variando anche di poco la stima del valore atteso del rendimento di un titolo, la composizione del portafoglio varia più che proporzionalmente senza però impattare così significativamente sul rendimento e sul rischio del portafoglio stesso; appare evidente come questo non sia ideale per due motivi: il primo è che un'alta instabilità della composizione del portafoglio non dà sicurezza al cliente che usufruisce del servizio di gestione, ed il secondo, più pratico, è che, tenendo presente l'esistenza dei costi di transazione, non è vantaggioso compiere decine di transazioni giornalmente senza però incrementare in maniera considerevole rendimenti e rischi, in quanto il costo di tali operazioni supererebbe i benefici.

Per questi motivi, dall'articolo di Markowitz, è stata continua la ricerca di un metodo maggiormente inclusivo delle opinioni degli addetti ai lavori, che non si basasse esclusivamente sui dati storici, e che permettesse di avere una composizione di portafoglio più stabile; in quest'ottica nacque il modello di Black-Litterman.

Capital Asset Pricing Model

Circa un decennio dopo la pubblicazione dell'articolo di Markowitz un altro economista americano, William F. Sharpe, rielaborò i concetti di gestione di portafoglio basati sull'approccio media-varianza studiando il rapporto tra rendimento e rischio dei titoli sotto l'ipotesi di equilibrio tra domanda e offerta; il modello che risultò da quest'analisi venne chiamato Capital Asset Pricing Model (CAPM), ed una delle sue conclusioni più importanti fu quella di spiegare che non tutto il rischio di un asset viene ricompensato dal mercato sotto forma di maggiore rendimento, ma solo la frazione che non può essere ridotta dalla diversificazione.

Il CAPM si basa sostanzialmente sulle stesse ipotesi del modello di Markowitz:

- Gli investitori sono avversi al rischio e hanno come obiettivo la massimizzazione dell'utilità attesa;
- Gli investitori selezionano i portafogli in base al criterio media-varianza;
- L'orizzonte temporale uniperiodale.

Tuttavia, ne possiede alcune specifiche:

- Non ci sono restrizioni nel prendere o dare a prestito al tasso risk free;
- Non ci sono imposte o altre imperfezioni del mercato;
- Gli investitori hanno aspettative omogenee su valori attesi, varianze e covarianze dei rendimenti dei titoli.

A partire da quest'ultima ipotesi dando per assunto che tutti gli investitori ragionino secondo l'approccio media-varianza di Markowitz, si può concludere che la frontiera efficiente dei portafogli sia la stessa per tutti gli operatori; considerando infatti la frontiera lineare ottenuta grazie alla presenza di titolo non rischioso, il portafoglio di tangenza sarà unico, e per questo motivo viene chiamato portafoglio di mercato M. Vengono quindi eliminate le curve di utilità presenti nel modello di Markowitz e con esse la forte componente soggettiva nella scelta del portafoglio efficiente: il portafoglio è sempre quello di mercato, ciò che cambia

ora sono i pesi che si danno al suo interno, ed in particolare il peso dato al risk free, a seconda dell'avversione al rischio di ogni investitore.

Con queste premesse, la frontiera efficiente lineare ha equazione

$$E(r_p) = r_f + \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M} \cdot \sigma_p$$

e viene chiamata Capital Market Line (CML); il coefficiente angolare $\frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}$ è noto come indice di Sharpe, mentre il numeratore $\mu_M - r_f$ rappresenta il premio per il rischio. I portafogli su questa frontiera sono quindi ottenuti combinando una quota di titoli risk free con una quota del portafoglio di mercato M; da qui risulta che la componente di rischio remunerata dal mercato è solamente quella sistematica, in quanto quella relativa alla diversificazione è già mitigata dal portafoglio di mercato stesso.

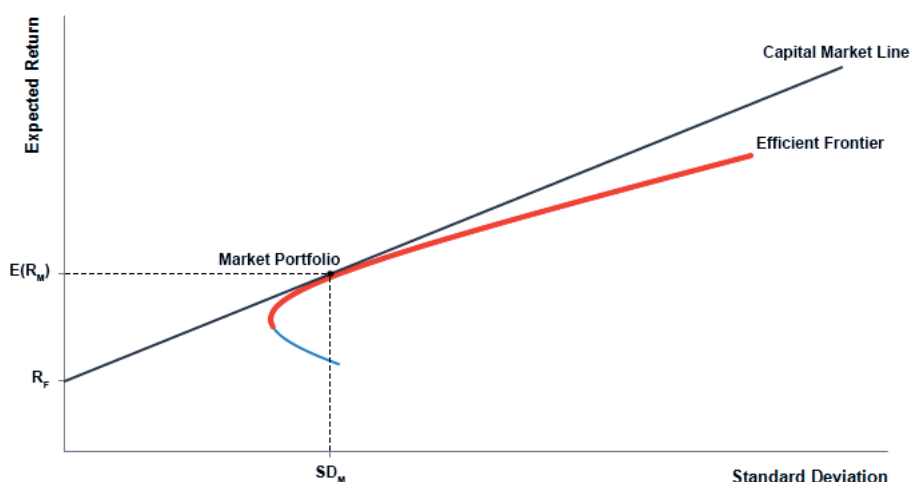


Figura 5. Capital Market Line nel piano rendimento-rischio.

Tenendo inoltre presente che ogni portafoglio giacente sulla CML è perfettamente correlato con il portafoglio di mercato ($\rho_{pM}=1$) e che $\rho_{pM} = \frac{cov(r_p, r_M)}{\sigma_p \cdot \sigma_M}$, l'equazione della frontiera efficiente si può riscrivere come $E(r_p) = r_f + \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M^2} \cdot cov(r_p, r_M)$.

Ricordando l'espressione del *beta* di un titolo $\beta_k = \frac{cov(r_k, r_M)}{\sigma_M^2}$, la relazione precedente si può riscrivere, per un portafoglio generico, come:

$$E(r_p) = r_f + (E(r_M) - r_f) \cdot \beta_p$$

L'equazione così ottenuta viene chiamata Security Market Line (SML) e mostra come il rendimento atteso di un portafoglio è proporzionale al premio per il rischio, dove la costante di proporzionalità è data dal *beta* del portafoglio stesso.

Modello di Black e Litterman

Introduzione

Come già accennato, i problemi più importanti del modello di Markowitz sono l'instabilità dei pesi di portafoglio in seguito ad una piccola variazione nei dati in input e la poca attenzione che viene data alle opinioni dei gestori di fondi; nell'ottica di risolvere queste imperfezioni Fischer Black e Robert Litterman nei primi anni novanta lavorarono ad un nuovo modello di gestione di portafoglio, in cui le stime dei rendimenti attesi fossero un output e non un input (risolvendo quindi il problema dell'instabilità a questi legata) e che tenesse conto delle aspettative dei managers riguardanti i titoli su cui investire (le cosiddette "view"). Nei due articoli in cui presentavano il loro modello, *Asset Allocation: combining investor views with market equilibrium* del 1991 e *Global Portfolio Optimization* del 1992, Black e Litterman mostrarono quanto si riuscisse ad ottenere una maggiore stabilità dei portafogli rispetto ai modelli precedenti; questo avviene poiché il loro modello permette di formulare aspettative solo in merito agli asset su cui si è in grado di esprimersi, lasciando la composizione degli altri all'equilibrio di mercato. Il modello si fonda quindi su due capisaldi che lo distinguono:

- Il cosiddetto "approccio di equilibrio", che garantisce la stabilità dei portafogli ottenuti ancorandoli ad un determinato portafoglio scelto come riferimento di equilibrio (spesso è il benchmark di mercato, composto tramite le diverse capitalizzazioni degli asset);
- La possibilità di esprimere le proprie view dando loro un peso a seconda del livello di confidenza che si ha in merito.

Il meccanismo alla base del modello considera l'equilibrio di mercato scelto come riferimento; viene in seguito chiesto al gestore di formulare delle view riguardanti i rendimenti attesi di alcuni titoli specificando l'intervallo di confidenza attribuito ad ognuna di esse. Combinando le view così ottenute con i rendimenti di equilibrio si ottengono i "rendimenti di Black e Litterman", che vengono successivamente utilizzati come input del classico processo di ottimizzazione media-varianza di Markowitz; ne risulta un portafoglio

in cui gli scostamenti dai valori iniziali di equilibrio sono maggiori per i titoli su cui ci si è espressi mentre gli altri rimangono maggiormente “ancorati” al benchmark di mercato.

L'approccio di equilibrio

Uno dei principali problemi del modello di Markowitz è rappresentato, come già detto, dall'eccessiva sensibilità dei risultati alle ipotesi di rendimento formulate dal gestore; da qui la necessità di fissare un punto di partenza neutrale, attorno al quale costruire gli input del processo di ottimizzazione. Il concetto di equilibrio non è però da intendersi come un mercato sempre in equilibrio, in quanto sarebbe poco realistico, ma più che altro come un perno a cui ancorare le diverse quote di mercato; più in particolare Black e Litterman propongono di scegliere ex ante un'allocazione di equilibrio e determinare previsioni neutrali sui rendimenti futuri in modo che, se inserite nel classico sistema di ottimizzazione media-varianza, restituiscano proprio l'allocazione di riferimento iniziale. Questa tecnica viene chiamata *Reverse Optimization*, perché sfrutta il processo di ottimizzazione non per ottenere la composizione ideale di portafoglio, ma, al contrario, parte da essa per ricavare i rendimenti in eccesso impliciti nel portafoglio di mercato, tenendo presente che gli extra-rendimenti sono i premi per il rischio dei vari asset (ovvero, i rendimenti puri a cui viene sottratto il rendimento del risk free). Il punto di partenza più coerente con le idee di mercato in equilibrio come punto di riferimento è quello del CAPM, che viene infatti scelto da Black e Litterman come modello economico ideale per determinare i rendimenti in eccesso di equilibrio, tenendo però conto della *reverse optimization*; tradizionalmente infatti, il processo di massimizzazione dell'utilità quadratica ha la seguente forma:

$$Max_w \left[w^T \Pi - \frac{\lambda w^T \Sigma w}{2} \right]$$

dove w rappresenta il vettore delle quote di portafoglio, Π è il vettore dei rendimenti attesi in eccesso, λ è il coefficiente di avversione al rischio e Σ è la matrice varianza-covarianza.

La soluzione dell'ottimizzazione ha come equazione per i pesi ottimi di portafoglio la seguente:

$$w = (\lambda \Sigma)^{-1} \Pi.$$

Al contrario, con la tecnica della *reverse optimization* si assume che una composizione di pesi di portafoglio sia ottima, e si risolve l'equazione per il vettore degli extra-rendimenti impliciti ottenendo

$$\Pi = \lambda \Sigma w_{mkt}$$

dove w_{mkt} rappresenta il vettore delle quote del portafoglio di riferimento scelto dal manager, che in questo caso coincide con il vettore composto secondo le quote del portafoglio di mercato. Eseguendo quindi un'ottimizzazione a partire dai rendimenti così ottenuti (extra-rendimenti impliciti), si otterranno come pesi ottimali quelli del portafoglio di mercato scelto inizialmente come punto di riferimento; di conseguenza, scegliendo come benchmark il portafoglio di mercato, le quote di portafoglio date dalla capitalizzazione del mercato saranno anche i pesi ottimi se il mercato è in equilibrio (ipotizzando, cioè, la validità del CAPM). Bisogna tenere in considerazione che il valore di partenza di Π corrisponde al vettore degli extra-rendimenti impliciti del mercato, a cui deve ancora essere sommato il risk free in quanto i primi rappresentano, per l'appunto, un eccesso di rendimento attribuito dal mercato ai titoli presi in considerazione, a partire dal titolo non rischioso; da questo punto in avanti si deve quindi intendere Π come vettore composto dai rendimenti risultanti dalla somma dei rendimenti impliciti e del risk free.

Assumendo poi che i rendimenti teorici di equilibrio siano distribuiti come una normale multivariata, con valore atteso pari a Π e matrice delle varianze e covarianze proporzionale a quella storica Σ , ma ridimensionata tramite uno *shrinkage factor* τ , la distribuzione degli extra-rendimenti attesi d'equilibrio sarà:

$$[3] E(R) \sim N(\Pi, \tau \Sigma).$$

Il valore di τ non è fisso e varia a seconda del suo utilizzo, ma di norma viene scelto tra i valori che vanno da 0,01 a 0,05; in particolare, “dal momento che l'incertezza della media è minore dell'incertezza dei rendimenti attesi, il valore di τ dovrà essere vicino a zero”^[2].

² Drobetz, How to avoid the pitfalls in portfolio optimization? : Putting the Black-Litterman approach at work, 2001

Tuttavia, è stato dimostrato^[3] che se la matrice relativa all'incertezza sulle view (Ω), come si vedrà più avanti, viene calcolata in un determinato modo, l'influenza di τ sul modello è irrilevante: facendolo variare da 0.025 a 15 non cambiano i rendimenti finali di Black e Litterman.

View dell'investitore e livello di confidenza

L'altra grande novità del modello rispetto a quelli precedenti, oltre l'approccio di equilibrio, è quella di combinare il portafoglio che risulta da quest'ultimo con le personali aspettative dell'investitore; a ciascuna view viene inoltre assegnato un livello di confidenza in termini probabilistici, che permette all'asset manager differenziare le aspettative tra loro a seconda della loro fondatezza: se la confidenza è alta, la view impatterà molto sul modello, altrimenti sarà marginale.

Le view possono essere espresse in maniera assoluta, per esempio “ci si aspetta che il titolo X produca in futuro un rendimento del 5%”, o relativa, ad esempio “ci si aspetta che il titolo X produrrà un rendimento maggiore di quello del titolo Y del 2%”; queste affermazioni vengono riportate nella matrice P , che tiene conto delle relazioni tra i diversi titoli per ogni aspettativa, e nella matrice q , che tiene conto del valore quantitativo delle view.

Per capire meglio come viene costruita la matrice P si riporta un esempio pratico^[4]:

Si ipotizza di possedere in portafoglio soltanto quattro asset A_1 , A_2 , A_3 e A_4 , e di esprimere su di essi le seguenti view:

1. *View 1*: l'asset A_2 produrrà un rendimento in eccesso assoluto del 5,25%;
2. *View 2*: l'asset A_1 produrrà un rendimento in eccesso di 0,25% in più rispetto all'asset A_3 ;
3. *View 3*: gli asset A_1 e A_3 produrranno un rendimento in eccesso del 2% rispetto agli asset A_2 e A_4 .

³ Idzorek, A step-by-step guide to the Black-Litterman model, 2004

⁴ Micocci e Masala, Manuale di Matematica finanziaria: Metodi e strumenti quantitativi per il risk management, 2012

Ciascuna di queste view è incorporata in un vettore riga $1 \times n$, per cui k view saranno sintetizzate in una matrice P di dimensioni $k \times n$; nell'esempio la matrice risultante è una 3×4 . L'espressione di un'aspettativa assoluta si traduce in un vettore che possiede un peso pari all'unità in corrispondenza dell'asset interessato, mentre assume valori nulli per tutti gli altri; per quanto riguarda la view 1, per esempio, il vettore che la rappresenta è $(0 \ 1 \ 0 \ 0)$. Per quanto riguarda le aspettative relative invece, si considera pari a 1 il peso dell'asset che si ipotizza avrà un rendimento in eccesso, mentre sarà pari a -1 il peso dell'asset che si ipotizza avrà un calo di rendimento; seguendo l'esempio, il vettore relativo alla view 2 è $(1 \ 0 \ -1 \ 0)$, sottolineando che nelle view relative gli elementi del vettore riga hanno somma nulla. La view 3 non interessa nessun asset in modo "pieno", ma ne coinvolge due in maniera positiva e due in maniera negativa; per realizzare il suo vettore si divide l'unità per il numero degli asset coinvolti positivamente o negativamente, ottenendo $(0,5 \ -0,5 \ 0,5 \ -0,5)$.

La matrice P nella sua totalità risulta essere quindi $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}$,

mentre la matrice q è $q = \begin{pmatrix} 0,0525 \\ 0,0025 \\ 0,02 \end{pmatrix}$.

Sostanzialmente le view vengono rappresentate sotto forma di matrici che incorporano il livello di fiducia del gestore nei confronti delle proprie opinioni riguardanti i rendimenti attesi futuri degli asset in portafoglio; si assume quindi che le view abbiano la forma di k vincoli lineari sul vettore di n rendimenti attesi espressi tramite la matrice P di dimensioni $k \times n$, tale che:

$$[4] \ P \cdot E(R) = q + \varepsilon$$

dove $E(R)$ è il vettore di dimensione $n \times 1$ che riporta i rendimenti degli asset presi in considerazione dalle view, q è il vettore di dimensioni $k \times 1$ che esprime a livello quantitativo i valori attesi delle view espresse dall'investitore, mentre ε è un vettore i cui elementi rappresentano un termine d'errore, che riporta le incertezze sulle view. La distribuzione di quest'ultimo parametro, ε , ha media nulla e varianza pari a Ω , matrice diagonale, se si

suppone che le view formulate siano indipendenti tra loro; dal momento che $\varepsilon \sim N(0, \Omega)$, si deduce che:

$$[5] P \cdot E(R) \sim N(q, \Omega).$$

La matrice Ω è, assieme allo scalare τ , il parametro più astratto e difficile da spiegare: esprimendo rispettivamente il grado d'incertezza delle aspettative e il peso delle aspettative stesse (il parametro è chiamato *weight on views* da Black e Litterman), non esiste una vera e propria metodologia unica per il loro calcolo, in quanto esprimono valori soggettivi, che variano per ogni caso specifico. Il metodo proposto da He e Litterman nel loro articolo del 1999, *The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolios*, consiste nel calibrare il livello di confidenza delle aspettative in modo tale che il rapporto $\frac{\Omega}{\tau}$ sia esattamente equivalente alla varianza della view, ovvero $P\Sigma P^T$; in questo modo, la matrice diagonale Ω risulta essere $\Omega = \text{diag}(\tau \cdot P\Sigma P^T)$, ed il valore dello scalare τ diventa irrilevante, dal momento che soltanto il rapporto $\frac{\Omega}{\tau}$ entrerà nel modello, come già osservato in precedenza.

Il teorema di Bayes e la determinazione dei rendimenti finali

L'idea fondamentale del modello di Black e Litterman è quella di combinare tra loro l'informazione derivante dall'equilibrio con quella messa a disposizione dal gestore del fondo; essendo entrambi concetti espressi in termini probabilistici, la maggior parte della letteratura consiglia l'utilizzo di un approccio di tipo bayesiano [4]⁵. Il teorema di Bayes permette infatti di combinare due diverse fonti d'informazione tramite il calcolo di probabilità condizionali; dati due eventi, A e B , si ha infatti che la probabilità che si verifichino congiuntamente ($P(A \cap B)$) sia pari a

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

in cui $P(A|B)$ è la probabilità che si verifichi A condizionata al verificarsi di B , $P(B|A)$ è la probabilità che si verifichi B condizionata al verificarsi di A , $P(A)$ e $P(B)$ sono rispettivamente le probabilità che si verifichino A e B ; dalla prima espressione si ottiene che:

⁵ Christodoulakis e Cass, Bayesian Optimal Portfolio Selection: the Black-Litterman Approach, 2002

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

dove A e B possono essere interpretati come i rendimenti attesi dal gestore (evento A) e i rendimenti attesi neutrali (evento B). Di conseguenza si può affermare che la funzione di probabilità (pdf) dei rendimenti attesi condizionata ai rendimenti di equilibrio, $P(A|B)$, è data dal prodotto tra pdf dei rendimenti d'equilibrio condizionata ai rendimenti attesi, $P(B|A)$, e la pdf dell'evento A , $P(A)$, che esprime le view dell'asset manager, essendo il tutto calcolato in unità di probabilità marginale dei rendimenti di equilibrio, $P(B)$. In questo modo il teorema di Bayes propone un metodo formale per combinare le view soggettive con i rendimenti neutrali, attraverso le probabilità condizionate.

Indicando con $E(R) = E(R_{t+1}|I_t)$ il vettore dei rendimenti attesi dal gestore per il tempo $t+1$, condizionati alle informazioni possedute al tempo t , e con Π il vettore dei rendimenti neutrali, il teorema di Bayes si può riscrivere come:

$$P(E(R)|\Pi) = \frac{P(\Pi|E(R)) \cdot P(E(R))}{P(\Pi)}$$

dove:

- $P(E(R)|\Pi)$ è la probabilità condizionata a posteriori dei rendimenti attesi dal modello;
- $P(\Pi|E(R))$ è la probabilità dei rendimenti d'equilibrio, condizionata alle view del gestore;
- $P(E(R))$ è la probabilità a priori che esprime le view del manager;
- $P(\Pi)$ è la probabilità marginale, ovvero che si verifichi un evento semplice, relativa ai rendimenti d'equilibrio.

Date queste premesse, e ricordando le equazioni [3] e [5], si può affermare che la funzione di densità dei rendimenti attesi del modello $P(E(R)|\Pi)$, ovvero i rendimenti medi a posteriori trovati tramite il teorema di Bayes μ_{post} , sia una normale multivariata:

$$\mu_{post} \sim N(M_{BL}, V_{BL})$$

$$\text{Con media } M_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P] \cdot [(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^T\Omega^{-1}q]$$

$$\text{E varianza } V_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}$$

La media può anche essere scritta come:

$$M_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P] \cdot [(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + (P^T\Omega^{-1}P)(P^TP)^{-1}P^Tq];$$

inoltre, riscrivendo la [4] nella seguente forma

$$(P^TP)^{-1}P^Tq = \overline{E(R)}$$

in cui $\overline{E(R)}$ rappresenta la stima delle aspettative soggettive, i rendimenti di Black e Litterman possono essere riscritti nel seguente modo:

$$M_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P] \cdot [(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + (P^T\Omega^{-1}P)\overline{E(R)}].$$

Il termine nelle seconde parentesi quadre rappresenta una media in cui i rendimenti d'equilibrio Θ sono ponderati per il fattore $(\tau\Sigma)^{-1}$, mentre la stima dei rendimenti attesi dal manager $\overline{E(R)}$ è ponderata con il termine $(P^T\Omega^{-1}P)$. Inoltre, se la distribuzione dei rendimenti attesi attorno ai rendimenti neutrali è stretta, allora la sua varianza sarà piccola: perciò il termine $\tau\Sigma$ avrà un valore basso, mentre il suo inverso $(\tau\Sigma)^{-1}$ assumerà un valore elevato, determinando quindi un maggior peso di Θ rispetto a $\overline{E(R)}$ nel calcolo dei rendimenti attesi condizionati. Infine, se l'investitore ha molta fiducia nelle sue aspettative, Ω assumerà valori bassi, determinando corrispettivi bassi valori di $(P^T\Omega^{-1}P)$, che a loro volta incideranno positivamente sul peso di $\overline{E(R)}$.

Di seguito viene riportato uno schema riassuntivo presentato da Idzorek nel suo articolo del 2004, *A Step-by-Step guide to the Black-Litterman model*, volto per l'appunto a mostrare gli aspetti salienti del modello di Black e Litterman, offrendone una breve sintesi visiva.

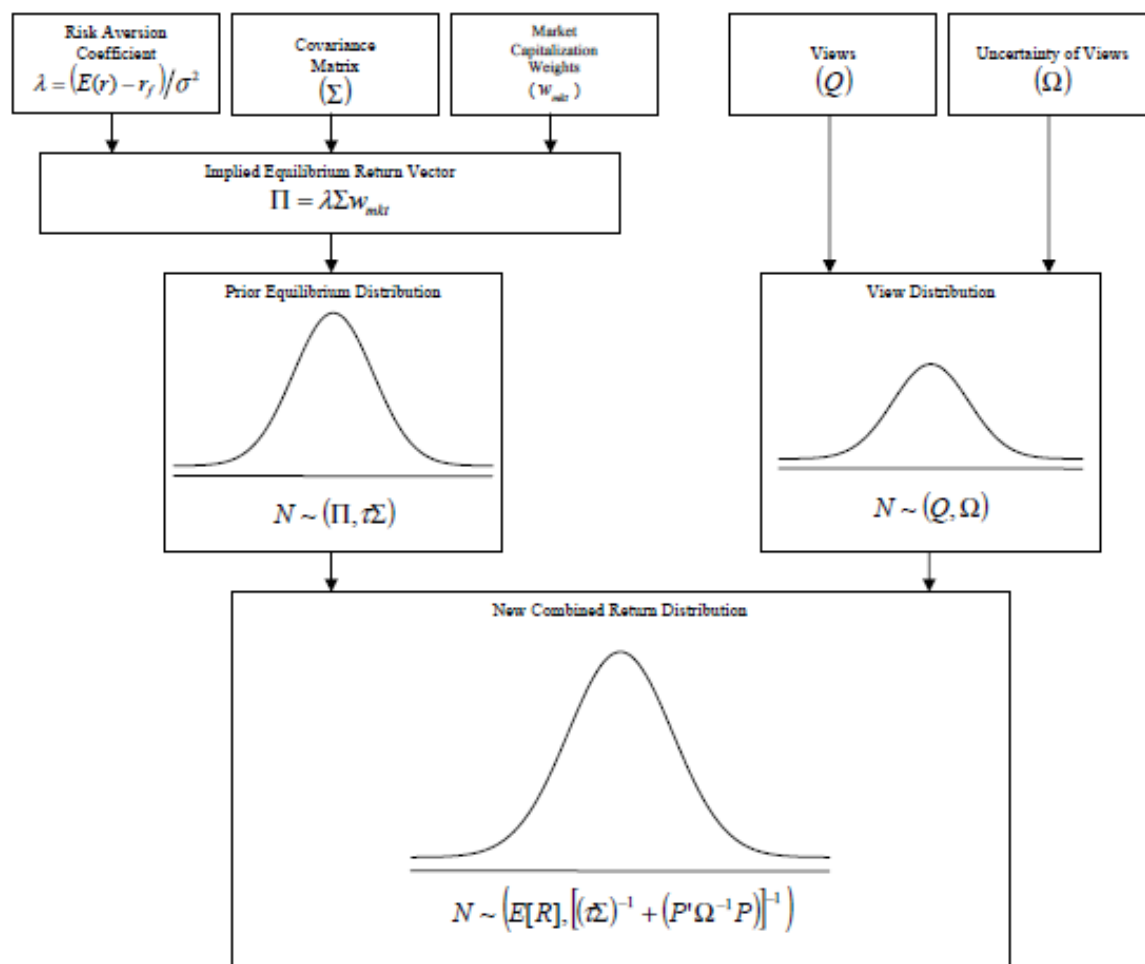


Figura 6. Schema del Modello di Black e Litterman, Idzorek (2004).

Applicazione pratica dei modelli di matematici

Introduzione

Per l'applicazione dei modelli di Markowitz e Black-Litterman sono stati presi in considerazione venti titoli quotati sul mercato statunitense e presenti all'interno dell'indice S&P500, che raggruppa cinquecento delle più grandi aziende americane; sono stati scelti i primi venti titoli, in ordine di composizione percentuale, appartenenti a questo indice in quanto è opinione comune che l'S&P500 rappresenti al meglio il mercato dei titoli statunitensi. I componenti al suo interno vengono scelti da un comitato apposito, che decide in base a diversi criteri (capitalizzazione di mercato, liquidità disponibile, percentuale di azionariato pubblico e durata della quotazione sono i più importanti) affinché l'insieme di aziende rappresenti uno spaccato dei diversi settori dell'economia americana. L'S&P500 è un indice “pesato sulla capitalizzazione di mercato”, ovvero il suo valore varia a seconda della capitalizzazione dei titoli che lo compongono, ed in particolare varierà maggiormente al variare dei titoli con maggiore capitalizzazione; il valore attribuito all'indice è calcolato come rapporto tra la somma delle capitalizzazioni di tutti i titoli al suo interno ed un parametro chiamato semplicemente *Divisor*, la cui entità esatta non è conosciuta in quanto rimane proprietà dell'azienda che lo ha creato e che si occupa dell'indice tutt'oggi (Standard & Poor's).

Di questi venti titoli sono stati raccolti i dati relativi ai prezzi giornalieri a partire dall'8/11/2012 fino all'8/11/2019, per un totale di 1827 osservazioni, tenendo presente che si intende come prezzo di un titolo quello che viene registrato a fine giornata; inoltre, va tenuto conto del fatto che i prezzi non tengono conto dello stacco dei dividendi, in quanto sono stati presi in considerazione i prezzi “puri” offerti dal mercato. L'impatto dei dividendi non è importante per la nostra analisi principalmente per due motivi: il primo è che, dato l'orizzonte giornaliero, lo stacco dei dividendi impatta sul singolo dato ma la sua influenza rimane bassa a causa della scarsa frequenza con cui avviene rispetto all'enorme mole di dati analizzati; il secondo è che la nostra analisi non si basa tanto sulla performance del portafoglio di per sé preso, ma su diversi modelli di gestione, da cui si ricava che se una

stessa “imperfezione” viene applicata per entrambi non influirà sul risultato. Dai prezzi sono state calcolate le statistiche descrittive di base (rendimento medio, varianza e covarianza dei rendimenti) per poter poi utilizzare questi nuovi dati nelle applicazioni dei due modelli, ottenendo diverse frontiere efficienti e quindi diversi portafogli ottimali. Oltre alle statistiche elencate in precedenza, per l’applicazione del modello di Black e Litterman sono stati utilizzati anche rendimento medio e varianza dell’indice S&P500 stesso, in quanto preso come riferimento del mercato americano, nonché delle aspettative sui rendimenti di alcuni titoli, elaborate in collaborazione con Fondaco.

Analisi dati

Un primo problema si pone con la scelta della misura che si utilizzerà come rendimento dell'azienda, da cui ricavare tutte le statistiche descrittive che servono per l'analisi; nel caso in questione sono stati utilizzati i prezzi giornalieri relativi all'azione semplice della compagnia presa in questione, riuscendo in questo modo a raccogliere una mole importante di dati. Dai prezzi sono stati poi ricavati i rendimenti come performance di un giorno t posta a confronto con la performance del giorno precedente, $t - 1$; in particolare sono stati utilizzati i log-rendimenti in quanto, assumendo che i prezzi siano distribuiti seguendo una log-normale, la distribuzione dei rendimenti è una normale pura: questa ipotesi è molto importante per l'applicazione dei modelli di gestione di portafoglio, che come assunto fondamentale hanno la distribuzione normale dei dati in input. Inoltre, quando i rendimenti sono molto piccoli (cosa che accade nell'analisi tra giorni susseguenti di titoli azionari), i log-rendimenti approssimano in maniera più che soddisfacente i rendimenti puri, possedendo però la proprietà di additività: data una serie di log-rendimenti giornalieri per un mese, il rendimento mensile si ottiene semplicemente sommando quelli giornalieri, non dovendo quindi calcolarlo a parte. I log-rendimenti sono stati quindi ottenuti come:

$$r_i = \log \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right)$$

dove P_t e P_{t-1} sono i prezzi giornalieri al tempo t e $t - 1$. Nelle stringhe di dati relative ai prezzi spesso sono stati rilevati giorni privi di valore o mancanti: questo avviene perché la borsa americana non rimane aperta tutto l'anno, ma chiude tutti i weekend e per le festività nazionali o internazionali; in questi casi specifici i dati sono stati filtrati in maniera opportuna, in modo da avere serie di dati continui: nei giorni con valori nulli o mancanti è stato inserito il dato di chiusura del giorno precedente. Inoltre, i prezzi presi in considerazione erano in origine espressi in dollari statunitensi, appartenendo a compagnie quotate sul mercato americano; essendo l'analisi svolta nell'ottica di un investitore europeo, tutti i prezzi sono stati convertiti tramite il vettore contenente i tassi di cambio giornalieri tra dollaro ed euro. Per questo motivo, tutte le analisi effettuate hanno come unità di misura l'euro, così come i grafici e le tabelle proposti nell'analisi dei dati.

Dalle stringhe di log-rendimenti così ottenuti sono poi state calcolate quattro statistiche descrittive importanti per l'analisi successiva:

- Valore atteso (*media*), che esprime il valor medio della distribuzione secondo la sua media aritmetica;
- Varianza e deviazione standard, che esprimono la dispersione attraverso le loro formule campionarie;
- Curtosi, che esprime il livello di “appiattimento” delle code e quindi l'allontanamento dalla distribuzione normale;
- Skewness, che esprime il grado di asimmetria della distribuzione rispetto al suo valor medio.

Infine, sono state calcolate le correlazioni esistenti tra i diversi titoli in modo da poter successivamente elaborare la matrice delle covarianze, fondamentale per l'applicazione dei modelli di Markowitz e Black-Litterman.

Di seguito verranno riportate le aziende analizzate nell'ordine secondo cui compaiono nello S&P500 e, per ogni titolo, i grafici relativi all'andamento giornaliero del prezzo dall'8 novembre 2012 all'8 novembre 2019, i rispettivi log-rendimenti e la distribuzione che meglio descrive la serie di dati. I criteri con cui vengono testati i fitting delle distribuzioni sono le valutazioni dei p-value risultanti dai test di K-S e Chi-Quadro; in particolare, vengono ritenute adatte le distribuzioni che restituiscono un p-value minore dell'1%, facendo presupporre un livello di confidenza del 99%. Per il fitting della distribuzione è stato utilizzato l'Add-On di *Input Analyzer* presente nel pacchetto più ampio relativo al software *Arena*. Vengono infine riportate la curtosi e l'asimmetria della distribuzione campionaria: un valore diverso da zero della prima corrisponde ad una maggiore presenza di dati nelle code rispetto alla normale, segnalando un titolo rischioso; la seconda mostra quanto la distribuzione sia sbilanciata verso destra o sinistra, segnalando il rischio di stima del valor medio se la distribuzione non è perfettamente simmetrica rispetto ad esso.

Microsoft Corporation



Grafico 1.1 Andamento del prezzo di Microsoft.

Nel grafico è stato riportato l'andamento giornaliero del prezzo delle azioni di Microsoft, da novembre 2012 a novembre 2019; si può notare come sia rimasto in crescita costante, escludendo dei piccoli cali nel 2015 ed a fine 2018, con l'ultimo anno che ha portato il titolo ad una crescita del 60% contribuendo così a far alzare il market cap dell'azienda oltre il trilione di dollari americani. Assumendo che la distribuzione di tali prezzi segua una log-normale, si possono come già accennato utilizzare i log-rendimenti, di cui viene riportato l'andamento qui sotto:

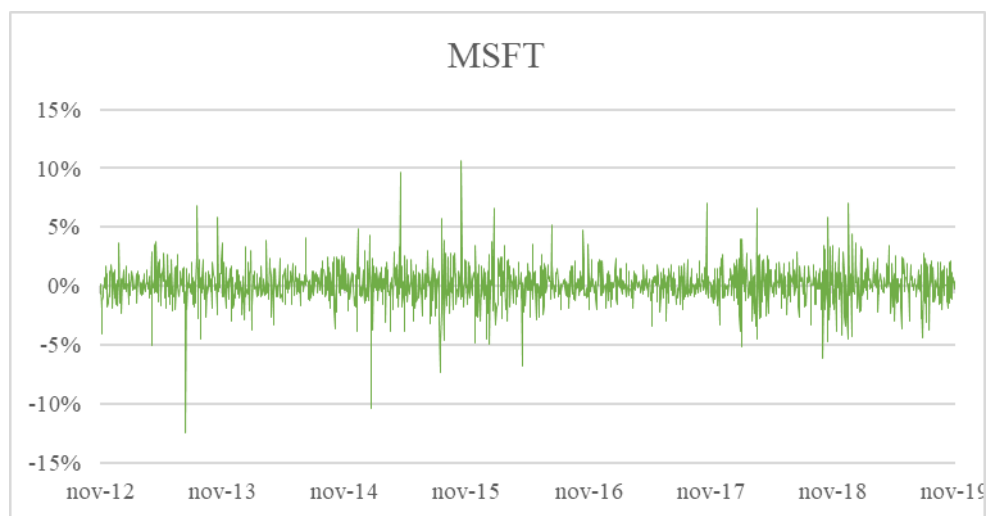


Grafico 1.2 Andamento dei log-rendimenti di Microsoft.

Si può osservare come ci siano degli outliers molto importanti (attorno al 10% sia in negativo che in positivo) nella prima parte del periodo analizzato, mentre successivamente la variabilità è diminuita; in generale Microsoft appare essere un titolo relativamente rischioso, avendo la maggioranza dei log-rendimenti giornalieri al di sotto del 4%, valore soglia della rischiosità ricavato dall'analisi della Figura 2 relativa ai log-rendimenti dell'S&P500, ma facendo comunque registrare alcuni valori al di sopra, con picchi che superano il 10%.

Di seguito sono inoltre riportati i test relativi al fitting, eseguiti sulla distribuzione dei log-rendimenti e volti a provare la loro normalità, requisito fondamentale dei modelli analizzati:

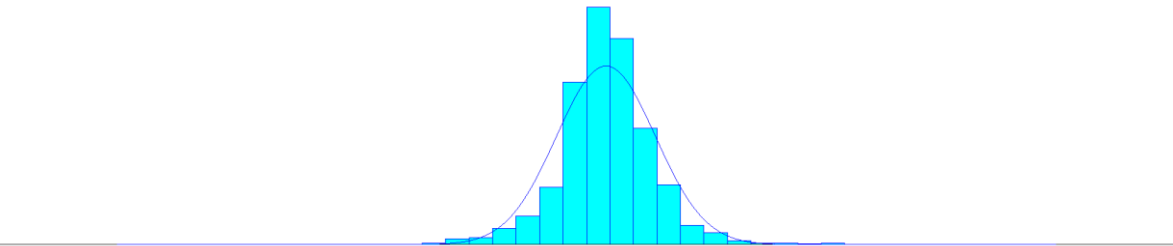


Grafico 1.3 Distribuzione campionaria dei log-rendimenti di Microsoft.

Distribution Summary	
Distribution:	Normal
Expression:	NORM(0.000957, 0.0153)
Square Error:	0.009935
Chi Square Test	
Number of intervals	= 12
Degrees of freedom	= 9
Test Statistic	= 167
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0753
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1827
Min Data Value	= -0.125
Max Data Value	= 0.107
Sample Mean	= 0.000957
Sample Std Dev	= 0.0153

Tabella 1.1 Risultati relativi al fitting dei log-rendimenti di Microsoft.

-0,15787361: mentre quest'ultimo valore è in linea con la normalità della distribuzione (la normale ha asimmetria nulla, essendo perfettamente centrata sul valor medio), la curtosi positiva o *leptocurtosi* segnala l'importante presenza di dati nelle code, che risultano quindi più "grosse" rispetto a quelle della normale standard (fenomeno delle *fat tails*).

In particolare, si può notare come entrambi i test eseguiti sui dati campionari (K-S e Chi Quadro), riportino valori soddisfacenti del p-value: rimane infatti sempre inferiore all'1% che era stato fissato come obiettivo; inoltre, risulta che lo *square error* relativo alla distribuzione normale sia il minore tra tutte le distribuzioni fittate, sottolineando quindi la bontà della distribuzione stessa. Infine, si hanno valori di curtosi e asimmetria rispettivamente pari a 7,593292093 e

Function	Sq Error
Normal	0.00993
Beta	0.0108
Lognormal	0.0159
Weibull	0.0174
Erlang	0.0602
Gamma	0.0603
Triangular	0.108
Uniform	0.14
Exponential	0.153

Tabella 1.2 Dati relativi agli square error derivanti dal fitting di Microsoft.

Apple Inc.

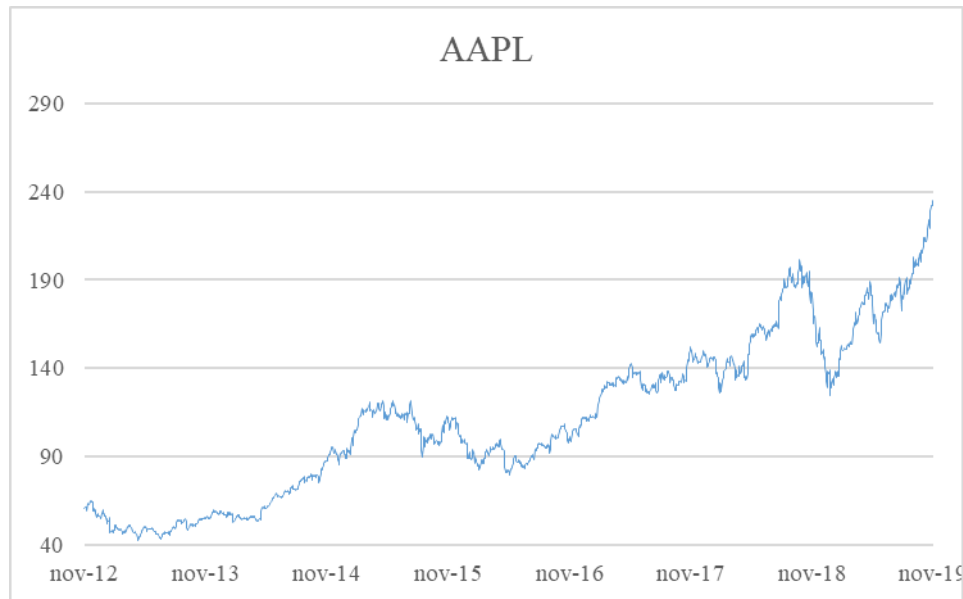


Grafico 2.1 Andamento del prezzo di Apple.

In questo caso si possono notare dei cali vistosi verso fine 2015 ma soprattutto nella seconda metà del 2018, quest'ultimo probabilmente dovuto all'inasprirsi della guerra dei dazi tra USA e Cina che ha messo in una brutta posizione l'azienda a causa del suo affidamento a questa Nazione per quanto riguarda la produzione del prodotto di punta, l'iPhone; in ogni caso anche per Apple il 2019 ha portato ad una crescita esponenziale del valore, facendo assestare anche in questo caso la compagnia sul trilione di dollari per quanto riguarda la capitalizzazione di mercato.

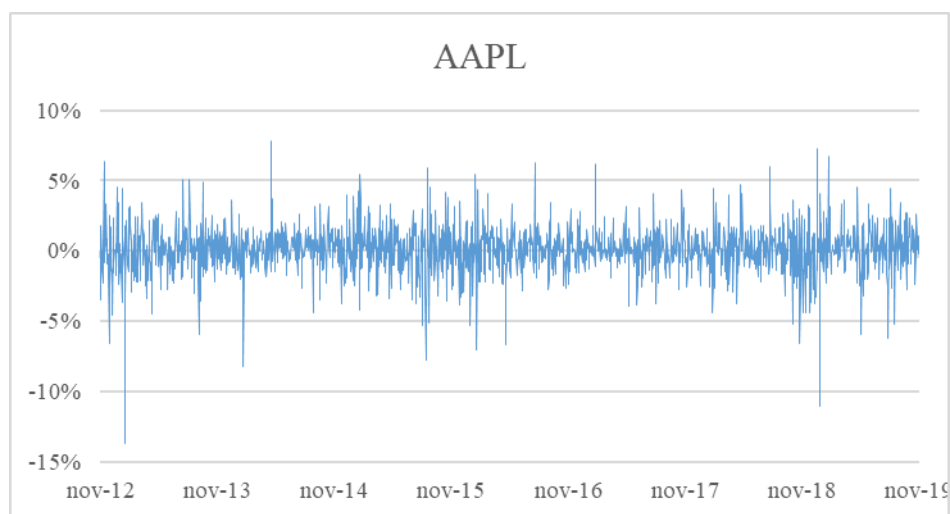


Grafico 2.2 Andamento dei log-rendimenti di Apple.

Per quanto riguarda i log-rendimenti si può osservare come il titolo appaia maggiormente volatile rispetto a quello precedente, in quanto la percentuale che supera la soglia del 4% è più elevata di prima; inoltre, gli outliers che superano il 10% sono distribuiti su tutto il periodo, e non più situati solo in una sua porzione.

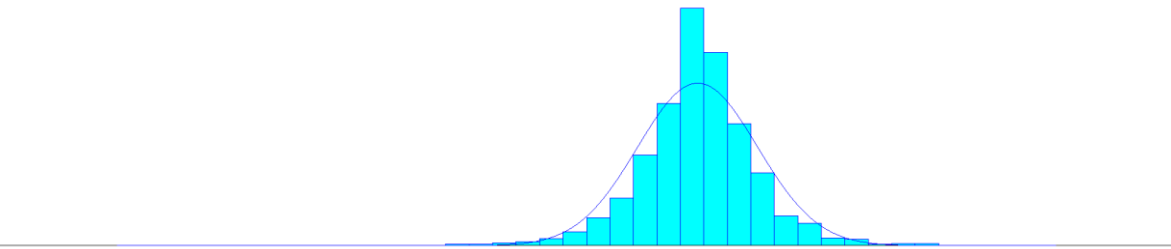


Grafico 2.3 Distribuzione campionaria dei log-rendimenti di Apple.

Distribution Summary	
Distribution:	Normal
Expression:	NORM(0.000724, 0.0166)
Square Error:	0.008966
Chi Square Test	
Number of intervals	= 14
Degrees of freedom	= 11
Test Statistic	= 164
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0693
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1827
Min Data Value	= -0.137
Max Data Value	= 0.0784
Sample Mean	= 0.000724
Sample Std Dev	= 0.0166

Tabella 2.1 Risultati relativi al fitting dei log-rendimenti di Apple.

Anche in questo caso la distribuzione che meglio fitta i dati risulta essere una normale, che si può notare dai valori dei p-value trovati e dal migliore *square error* rispetto a tutte le altre scelte possibili. Anche in questo caso l’asimmetria si trova in linea con quella della normale anche se leggermente tendente verso destra con un valore pari a -0,578106975, mentre per la curtosi vale lo stesso discorso fatto prima sulla presenza di dati nelle code, essendo il suo valore pari a 5,890027457.

Function	Sq Error
Normal	0.00897
Beta	0.00983
Lognormal	0.0152
Weibull	0.0173
Erlang	0.0481
Gamma	0.0482
Triangular	0.0789
Uniform	0.111
Exponential	0.125

Tabella 2.2 Dati relativi agli square error derivanti dai fitting di Apple.

Amazon.com, Inc.



Grafico 3.1 Andamento del prezzo di Amazon.

Per Amazon si osserva una crescita bassa fino a metà 2015, quando è ha iniziato ad essere più importante, fino a diventare esponenziale nel corso del 2018; anche qui si rileva l'importante flessione degli ultimi mesi di questo anno, legata allo scenario geopolitico statunitense e più generale globale (guerra dei dazi, rialzo dei tassi da parte della FED, instabilità politica interna). Dopo aver brevemente toccato il trilione di dollari per capitalizzazione di mercato a fine 2017 e di nuovo a metà 2019, il suo valore si è assestato sui 900 miliardi.

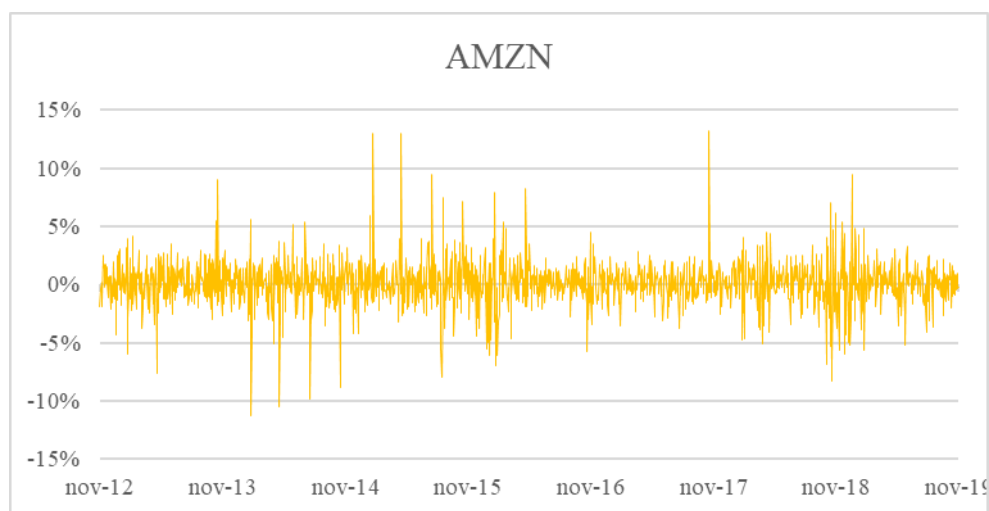


Grafico 3.2 Andamento dei log-rendimenti di Amazon.

Anche in questo caso i log-rendimenti mostrano diversi punti fuori dai limiti “fisiologici” del 4% ed altri anche oltre il 10%, ma sono principalmente situati nella prima metà del periodo, sintomo della maggiore stabilità di cui gode l’azienda negli ultimi anni; la forte volatilità legata alla fine del 2018 è ben visibile dal numero più elevato di “punte” nel grafico.

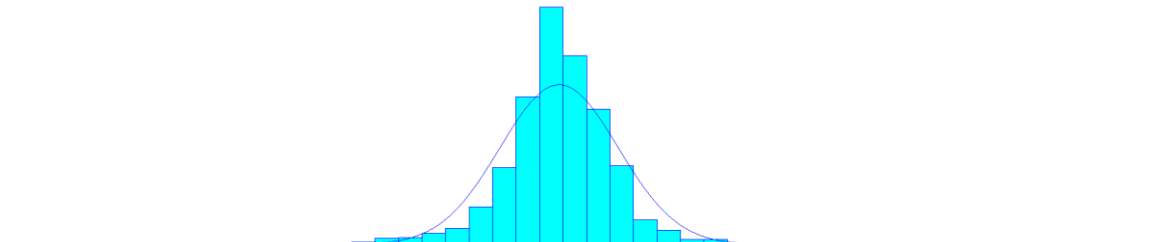


Grafico 3.3 Distribuzione campionaria dei log-rendimenti di Amazon.

Distribution Summary	
Distribution:	Normal
Expression:	NORM(0.0012, 0.0189)
Square Error:	0.011020
Chi Square Test	
Number of intervals	= 14
Degrees of freedom	= 11
Test Statistic	= 238
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0757
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1827
Min Data Value	= -0.113
Max Data Value	= 0.132
Sample Mean	= 0.0012
Sample Std Dev	= 0.0189

Tabella 3.1 Risultati relativi al fitting dei log-rendimenti di Amazon.

Utilizzando i test di K-S e Chi Quadro si ottengono anche in questo caso risultati soddisfacenti per quanto riguarda la normalità della distribuzione, trovando p-value al di sotto della soglia minima; la solidità dell’ipotesi di normalità è anche sottolineata dal minimo square error che si associa a questa distribuzione. Per quanto riguarda curtosi e asimmetria si trovano valori simili a quelli riscontrati con Microsoft (rispettivamente 7,489815674 e 0,122491587), con la differenza che questa volta la curva è leggermente sbilanciata verso sinistra.

Function	Sq Error
Normal	0.011
Beta	0.0121
Weibull	0.0158
Lognormal	0.0175
Erlang	0.037
Gamma	0.0371
Triangular	0.0864
Uniform	0.119
Exponential	0.131

Tabella 3.2 Dati relativi agli square error derivanti dal fitting di Amazon.

Facebook, Inc.



Grafico 4.1 Andamento del prezzo di Facebook.

Facebook è l'ultima azienda, in ordine di tempo e tra quelle prese in considerazione, ad essersi quotata sul mercato americano: la sua IPO (Initial Public Offering) è infatti avvenuta soltanto nel 2012; per questo l'andamento che si riporta qui rappresenta tutta la sua storia: crescita lieve nel primo anno dopo la quotazione, e poi lineare nel quinquennio 2013-2017. Dal 2018 in poi si sono registrate invece importanti cali e riprese legate all'enorme volatilità che ha investito tutto il mercato americano e più in particolare l'azienda stessa, soprattutto a causa degli scandali che l'hanno colpita (Russiagate e multe da parte dell'Unione Europea relative alla privacy).

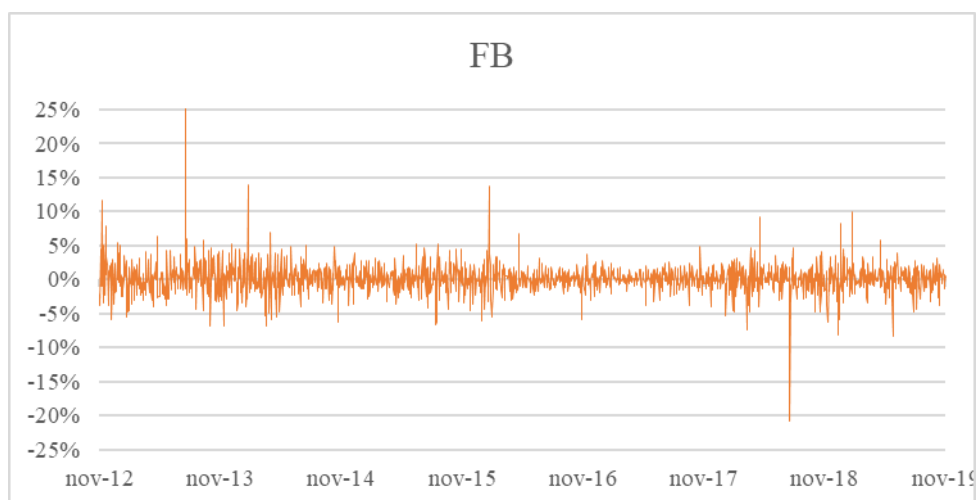


Grafico 4.2 Andamento dei log-rendimenti di Facebook.

L'andamento dei log-rendimenti mostra ancora meglio la volatilità del titolo: gli outliers raggiungono picchi superiori al 20%, i rendimenti maggiori del 4% sono più numerosi rispetto ai casi visti in precedenza e sembrano aumentare negli ultimi due anni, in linea con la maggior volatilità del mercato americano già accennata in precedenza.

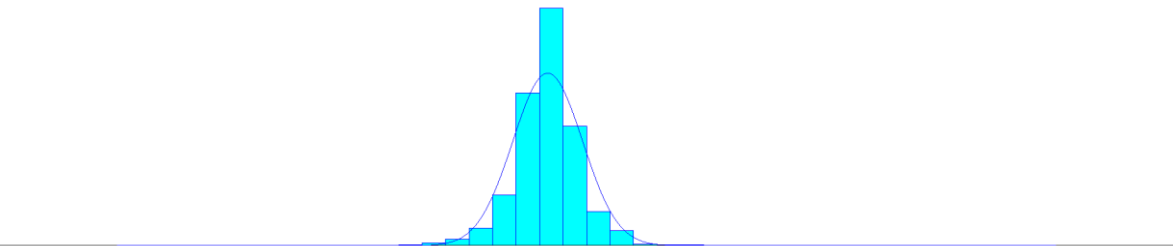


Grafico 4.3 Distribuzione campionaria dei log-rendimenti di Facebook.

Distribution Summary	
Distribution:	Normal
Expression:	NORM(0.0013, 0.0212)
Square Error:	0.016138
Chi Square Test	
Number of intervals	= 9
Degrees of freedom	= 6
Test Statistic	= 171
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0766
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1827
Min Data Value	= -0.209
Max Data Value	= 0.258
Sample Mean	= 0.0013
Sample Std Dev	= 0.0212

Tabella 4.1 Risultati relativi al fitting dei log-rendimenti di Facebook.

normale, anche se con un leggero sbilanciamento verso sinistra, sintomo dell'importante presenza di dati sotto il valor medio.

Per quanto riguarda la distribuzione dei log-rendimenti, anche qui i test utilizzati danno risultati soddisfacenti, sebbene lo *square error* risulti maggiore che negli altri casi, ma ancora il migliore rispetto a quelli delle altre possibili distribuzioni. La curtosi assume, di nuovo, un valore più elevato se paragonato alle altre compagnie analizzate finora (20,08005331): viene ancora una volta sottolineato il fatto che le code sono ricche di dati, e quindi che il titolo risulta altamente volatile; infine, l'asimmetria fa registrare un valore pari a 0,746845613, che certifica la vicinanza alla

Function	Sq Error
Normal	0.0161
Lognormal	0.0221
Erlang	0.112
Gamma	0.113
Beta	0.149
Triangular	0.185
Uniform	0.213
Exponential	0.225
Weibull	0.301

Tabella 4.2 Dati relativi agli square error derivanti dai fitting di Facebook.

Berkshire Hathaway Inc.



Grafico 5.1 Andamento del prezzo di Berkshire Hathaway.

Berkshire Hathaway è l'unico titolo tra quelli presi in considerazione, e quindi tra i primi 20 del mercato americano, che si riferisce ad una holding: l'azienda infatti acquista quote partecipative di altre compagnie, ed in particolare investe in modo importante proprio su quelle che fanno parte dell'S&P500; in questo modo si spiega l'andamento costante del suo prezzo: grazie alla diversificazione negli investimenti, Berkshire Hathaway è riuscita a smorzare la volatilità nel tempo, ottenendo al contempo una più che discreta crescita.

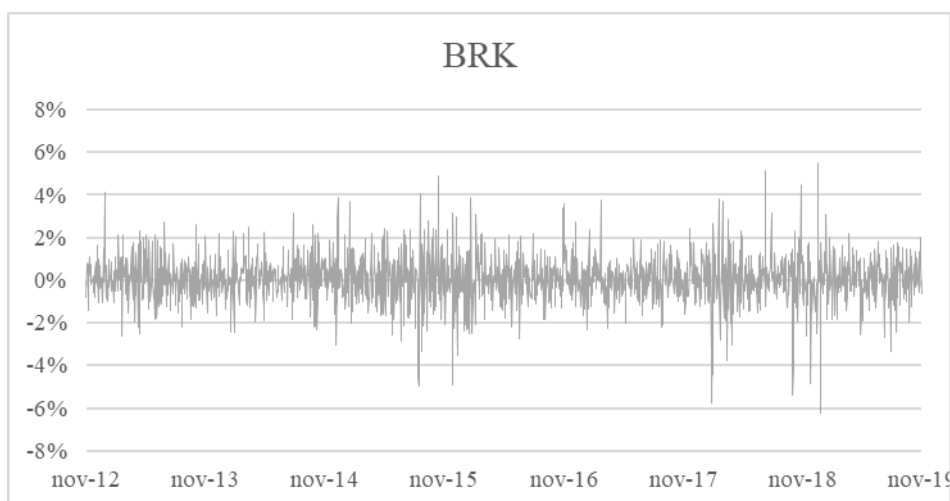


Grafico 5.2 Andamento dei log-rendimenti di Berkshire Hathaway.

Se si osservano i log-rendimenti infatti, si possono trovare rarissimi casi in cui abbiano passato la soglia di stabilità del 4%; inoltre, si può notare come la volatilità sia aumentata nel corso del 2018, proprio a causa dell'instabilità che ha colpito tutto il mercato statunitense a cui Berkshire Hathaway è legata a doppio filo.

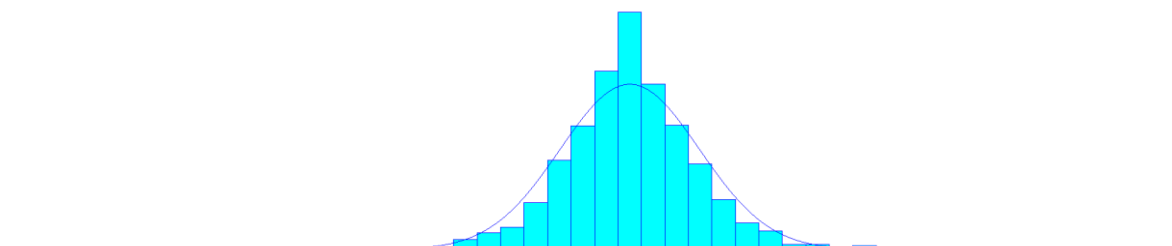


Grafico 5.3 Distribuzione campionaria dei log-rendimenti di Berkshire Hathaway.

Distribution Summary	
Distribution:	Normal
Expression:	NORM(0.0006, 0.0111)
Square Error:	0.004988
Chi Square Test	
Number of intervals	= 17
Degrees of freedom	= 14
Test Statistic	= 124
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0472
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1827
Min Data Value	= -0.0621
Max Data Value	= 0.0552
Sample Mean	= 0.0006
Sample Std Dev	= 0.0111

Tabella 5.1 Risultati relativi al fitting dei log-rendimenti di Berkshire Hathaway.

In questo caso il fitting fornisce i risultati migliori relativamente all'ipotesi di normalità: a parte i p-value soddisfacenti, si trova uno *square error* che è sempre il più piccolo tra quelli proposti, ma è anche estremamente contenuto in valore assoluto (0,5%). Inoltre, anche la curtosi ha un valore decisamente basso, pari a 3,329403192, che ancora una volta mostra la scarsa presenza di outliers nella distribuzione, che risulta essere fortemente concentrata

Function	Sq Error
Normal	0.00499
Beta	0.00539
Weibull	0.00693
Lognormal	0.00839
Erlang	0.0207
Gamma	0.0208
Triangular	0.0594
Uniform	0.0863
Exponential	0.0994

Tabella 5.2 Dati relativi agli *square error* derivanti dal fitting di Berkshire Hathaway.

attorno al suo valor medio; l'asimmetria è invece in linea con i valori trovati in precedenza (-0,149792136), delineando un lieve sbilanciamento verso sinistra, e quindi verso rendimenti positivi.

JPMorgan Chase & Co.



Grafico 6.1 Andamento del prezzo di JPMorgan.

JPMorgan è, assieme a Bank of America che sarà presentata in seguito, una delle due uniche banche presenti tra le aziende analizzate; anche in questo caso le fluttuazioni del prezzo sono minori rispetto agli altri titoli, in quanto sono legate al mercato stesso su cui JPM investe e opera. La crescita risulta essere quindi lieve nella prima metà del periodo analizzato e più marcata, ma con evidenti fluttuazioni, a partire dalla fine del 2016; anche questo andamento rientra nel pattern di maggiore instabilità individuato in precedenza, che ha investito tutto il mercato americano negli ultimi due anni.

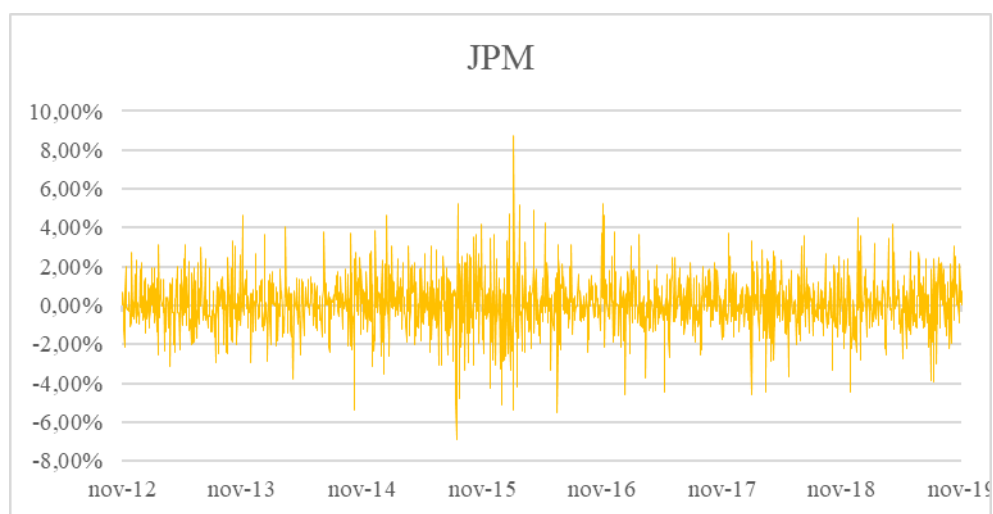


Grafico 6.2 Andamento dei log-rendimenti di JPMorgan.

Anche dall'andamento dei log-rendimenti si evince la stabilità del titolo, legata al tipo di azienda a cui fa riferimento: raramente si trovano punte superiori al 4%, con massimi pari all'8% in positivo e 6% in negativo; a differenza dei casi visti in precedenza, non appare invece evidente l'aumento di volatilità degli ultimi anni ma, al contrario, sembra si sia verificata una maggiore stabilità.

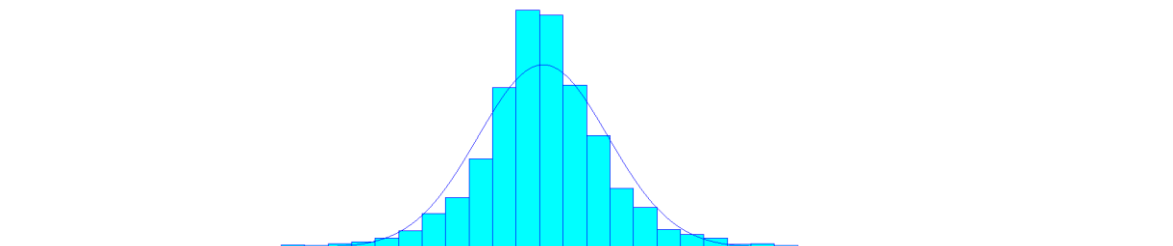


Grafico 6.3 Distribuzione campionaria dei log-rendimenti di JPMorgan.

Distribution Summary	
Distribution:	Normal
Expression:	NORM(0.000718, 0.0139)
Square Error:	0.005819
Chi Square Test	
Number of intervals	= 15
Degrees of freedom	= 12
Test Statistic	= 143
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0548
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1827
Min Data Value	= -0.0687
Max Data Value	= 0.0874
Sample Mean	= 0.000718
Sample Std Dev	= 0.0139

Tabella 6.1 Risultati relativi al fitting dei log-rendimenti di JPMorgan.

Come per BRK, anche qui si ottengono risultati più che soddisfacenti per quanto riguarda sia p-value che *square error*, pari in questo caso ad un ridotto 0,6%. I valori di curtosi e asimmetria sono invece i minori in assoluto di tutta la serie di dati (rispettivamente 2,63998157 e 0,044778103), sintomo della quasi perfetta normalità della distribuzione, che non risulta né influenzata da *fat tails* né da valori asimmetrici rispetto alla media.

Function	Sq Error
Normal	0.00582
Beta	0.00622
Weibull	0.00732
Lognormal	0.00878
Erlang	0.0175
Gamma	0.0176
Triangular	0.0629
Uniform	0.0943
Exponential	0.105

Tabella 6.2 Dati relativi agli *square error* derivanti dal fitting di JPMorgan.

Google LLC



Grafico 7.1 Andamento del prezzo di Google.

Per Google è necessaria una premessa: nello S&P500 sono presenti due titoli diversi appartenenti all'azienda, in quanto esistono due classi di azioni (A e B), che differiscono tra loro solo per i diritti di voto, i quali sono attribuiti alla prima ma non alla seconda; per gli scopi dell'analisi, è stato scelto come prezzo quello relativo alla classe A, utilizzando però come capitalizzazione di mercato il totale della compagnia, in quanto altrimenti non sarebbe stata rappresentata correttamente la sua importanza sul mercato americano. Per quanto riguarda il suo andamento, si può notare una crescita costante, che negli ultimi due anni ha visto amplificarsi le fluttuazioni del prezzo, come già osservato per altri titoli.

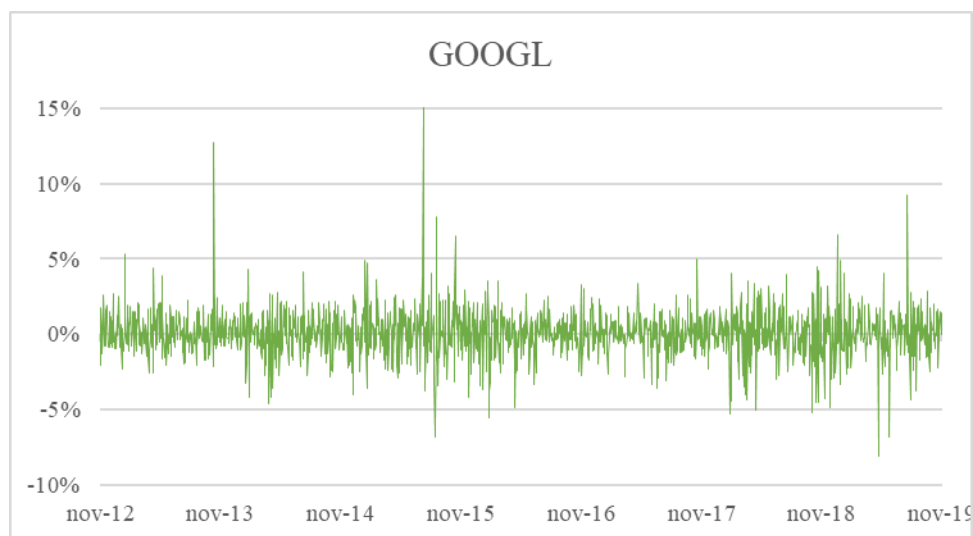


Grafico 7.2 Andamento dei log-rendimenti di Google.

Nei log-rendimenti si notano invece importanti picchi oltre il 10%, ma come già visto in precedenza sono confinati nella prima del periodo analizzato, mentre per il resto si trovano valori in linea con un accettabile 4%; si sottolinea anche qui però che negli ultimi anni la volatilità è aumentata, portando ad avere diversi casi sul limite ed alcuni fuori, cosa che prima succedeva più raramente.

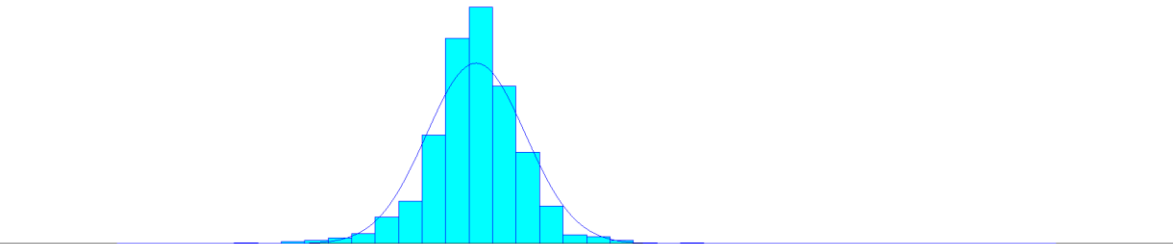


Grafico 7.3 Distribuzione campionaria dei log-rendimenti di Google.

Distribution Summary	
Distribution:	Normal
Expression:	NORM(0.000829, 0.0153)
Square Error:	0.007939
Chi Square Test	
Number of intervals	= 12
Degrees of freedom	= 9
Test Statistic	= 149
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0668
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1827
Min Data Value	= -0.0812
Max Data Value	= 0.152
Sample Mean	= 0.000829
Sample Std Dev	= 0.0153

Tabella 7.1 Risultati relativi al fitting dei log-rendimenti di Google.

una maggiore concentrazione dei log-rendimenti nella parte sinistra della curva.

Nei test per la distribuzione campionaria si trovano ancora una volta risultati soddisfacenti per quanto riguarda la distribuzione normale, con p-value inferiori all’1% ed uno *square error* non solo minimo rispetto alle altre possibilità, ma anche ridotto in valore assoluto (0,7%). La leptocurtosi è discretamente presente con un valore pari a 10,36159441, che sottolinea l’importante presenza di valori nelle code e quindi la volatilità medio-alta del titolo; anche l’asimmetria è abbastanza marcata con un valore di 0,714795726, che segnala

Function	Sq Error
Normal	0.00794
Beta	0.00901
Lognormal	0.0114
Weibull	0.028
Erlang	0.033
Gamma	0.0332
Triangular	0.104
Uniform	0.137
Exponential	0.146

Tabella 7.2 Dati relativi agli square error derivanti dal fitting di Google.

Johnson & Johnson

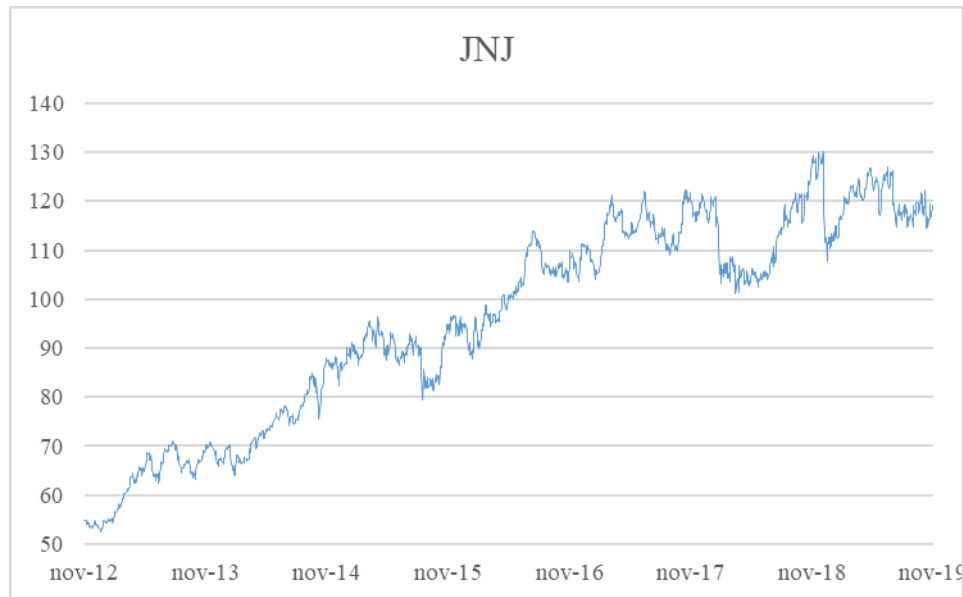


Grafico 8.3 Andamento del prezzo di Johnson & Johnson.

Johnson & Johnson è un'azienda che opera nel settore farmaceutico e di beni di consumo, per cui l'andamento del suo prezzo varia per motivi diversi rispetto a quelli visti per le altre aziende: la guerra dei dazi, per esempio, non ha particolarmente influito sul suo andamento, che è invece estremamente legato alle diverse cause legali che hanno portato la compagnia a pagare svariate multe negli ultimi anni, dovute a prodotti nocivi per la salute (l'ultima, nel 2018, di 7,4 miliardi di dollari).

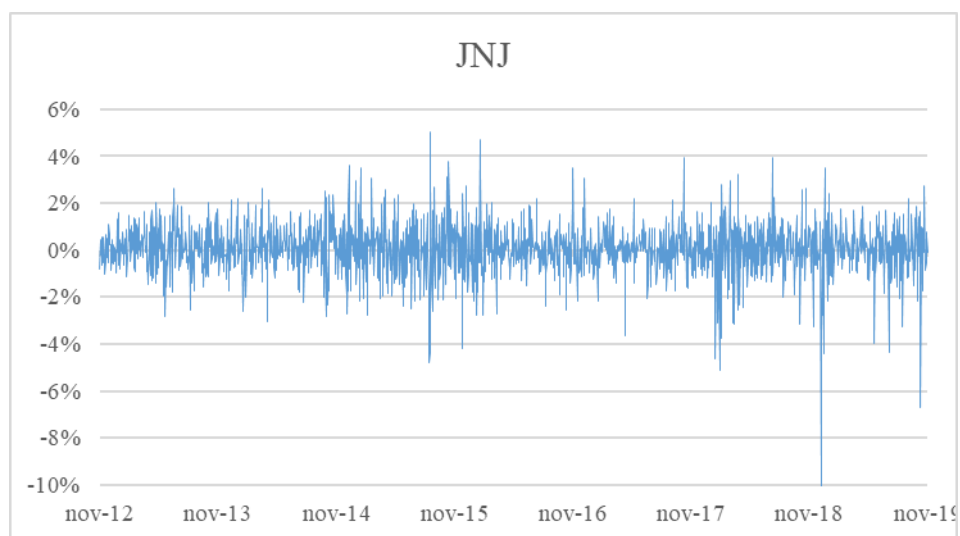


Grafico 8.2 Andamento dei log-rendimenti di J&J.

La forte dipendenza da eventi singoli, come la chiusura di un processo in tribunale a proprio sfavore, è ben visibile nell’andamento dei log-rendimenti: non ci sono infatti molti valori maggiori del 4%, cifra più che accettabile, ma quando si verificano sono di importante magnitudine, arrivando anche a toccare il 10% proprio nel caso della multa nel 2018.

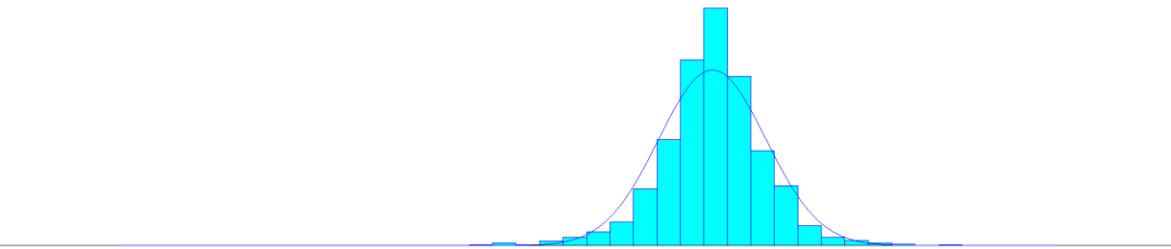


Grafico 8.3 Distribuzione campionaria dei log-rendimenti di J&J.

Distribution Summary	
Distribution:	Normal
Expression:	NORM(0.000421, 0.0109)
Square Error:	0.006781
Chi Square Test	
Number of intervals	= 13
Degrees of freedom	= 10
Test Statistic	= 133
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0607
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1827
Min Data Value	= -0.101
Max Data Value	= 0.0505
Sample Mean	= 0.000421
Sample Std Dev	= 0.0109

Tabella 8.1 Risultati relativi al fitting dei log-
rendimenti di J&J.

Anche in questo caso la distribuzione che meglio descrive i log-rendimenti risulta essere una normale, in cui i valori di curtosi e asimmetria sono rispettivamente 6,761929695 e -0,77618791: il primo è in linea con la media di quelli trovati finora, mentre il secondo mostra un maggior sbilanciamento verso destra, e corrisponde quindi ad un numero elevato di rendimenti positivi.

Function	Sq Error
Normal	0.00678
Beta	0.00689
Weibull	0.00761
Lognormal	0.0129
Erlang	0.0582
Gamma	0.0583
Triangular	0.0885
Uniform	0.121
Exponential	0.136

Tabella 8.2 Dati relativi agli
square error derivanti dal
fitting di J&J.

The Procter & Gamble Company

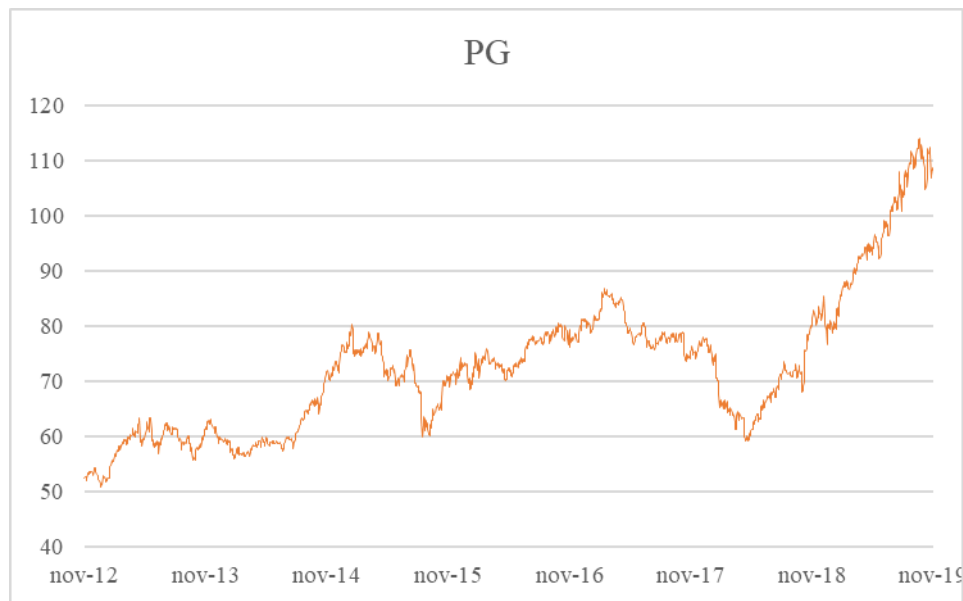


Grafico 9.1 Andamento del prezzo di Procter & Gamble.

Anche Procter & Gamble opera nel settore dei beni di consumo, e per questo vale lo stesso discorso sul suo andamento fatto per J&J; in particolare si osserva una crescita statica fino ad inizio 2018, momento che fissa l'inizio di trend estremamente positivo, principalmente legato a performance aziendali (record di vendite rispetto ai precedenti 5 anni e market share in aumento) e non ad avvenimenti esterni.

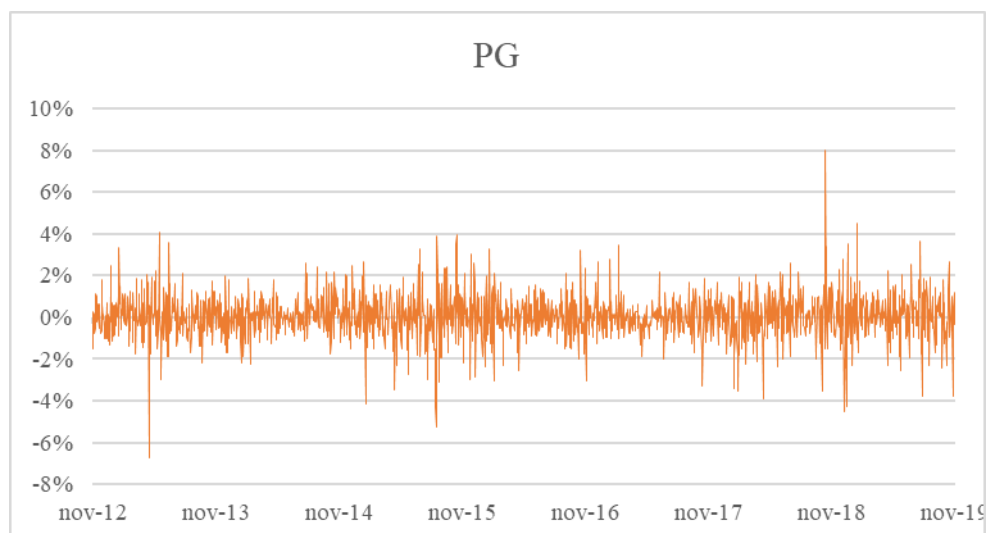


Grafico 9.2 Andamento dei log-rendimenti di P&G.

Il titolo mostra poca variabilità in generale, con la stragrande maggioranza dei log-rendimenti giornalieri che non supera il 4%, fatta eccezione per rarissimi casi che comunque non arrivano a sfiorare l'8%; proprio questa soglia è stata toccata nel 2018, in seguito al resoconto delle vendite (*earnings report*) che ha riportato risultati record rispetto ai 5 anni precedenti, mentre il dato maggiormente negativo si registra ad aprile 2013 con un calo del 6%.

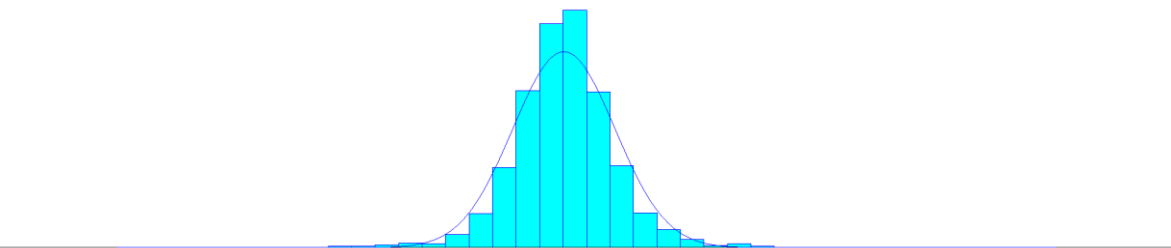


Grafico 9.3 Distribuzione campionaria dei log-rendimenti di P&G.

Distribution Summary	
Distribution:	Normal
Expression:	NORM(0.000389, 0.0103)
Square Error:	0.004682
Chi Square Test	
Number of intervals	= 12
Degrees of freedom	= 9
Test Statistic	= 90.1
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0538
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1827
Min Data Value	= -0.0675
Max Data Value	= 0.0802
Sample Mean	= 0.000389
Sample Std Dev	= 0.0104

Tabella 9.1 Risultati relativi al fitting dei log-rendimenti di P&G.

La distribuzione che meglio fitta i dati è, ancora una volta, la normale, che fa registrare ottimi valori sia del p-value che dello *square error*, quest’ultimo pari solo a 0,47%. Anche curtosi e asimmetria, pari rispettivamente a 4,932399584 e -0,014911704 vanno nella stessa direzione, non facendo registrare grosse incongruenze rispetto all’ipotesi di normalità.

Function	Sq Error
Normal	0.00468
Beta	0.00478
Lognormal	0.00762
Weibull	0.00889
Erlang	0.0397
Gamma	0.0398
Triangular	0.0936
Uniform	0.125
Exponential	0.137

Tabella 9.2 Dati relativi agli *square error* derivanti dal fitting di P&G.

Exxon Mobil Corporation

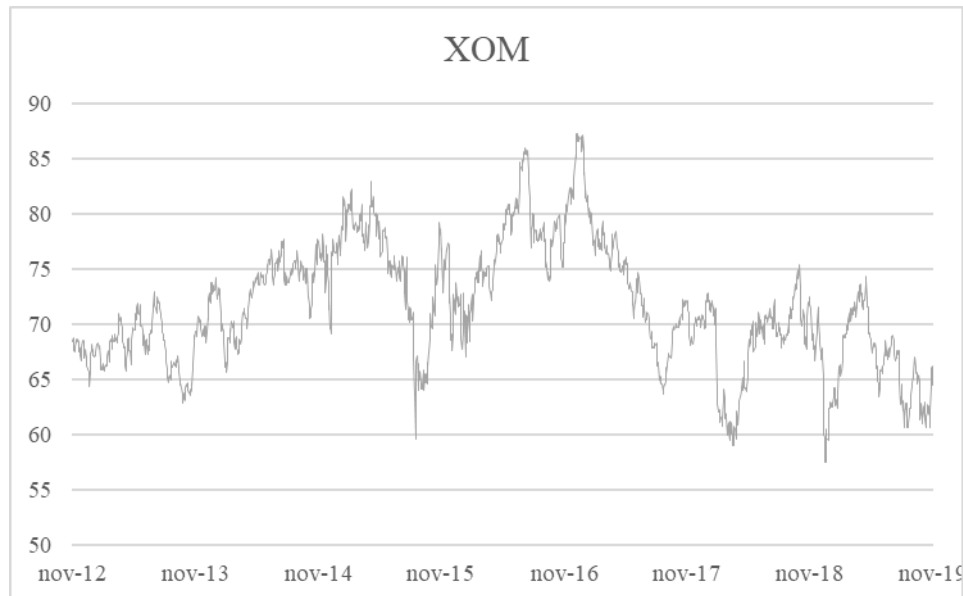


Grafico 10.1 Andamento del prezzo di Exxon Mobil.

Exxon è la più grande compagnia petrolifera privata al mondo (viene infatti surclassata da Saudi Aramco, che è però al 98,5% di proprietà statale), ed il suo andamento viene inevitabilmente influenzato dal prezzo del petrolio; per questo il prezzo del titolo risulta essere altamente volatile e poco prevedibile, come si osserva anche dal grafico qui sopra. In generale, a partire dal 2016 con la scoperta dei giacimenti di petrolio di scisto statunitensi, tutte le compagnie petrolifere mondiali hanno visto calare i propri risultati, e questo vale anche per Exxon, come si può vedere dal netto calo del prezzo negli ultimi tre anni.

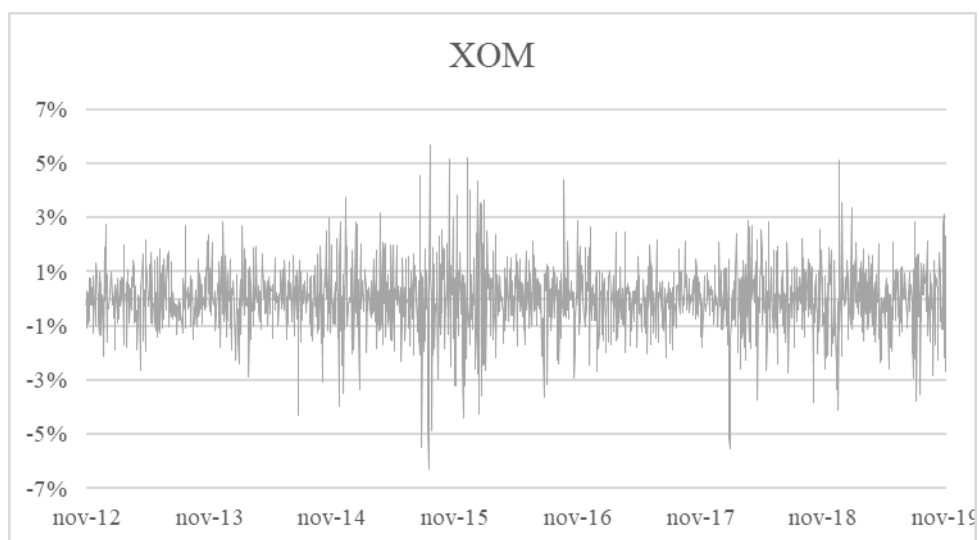


Grafico 10.2 Andamento dei log-rendimenti di Exxon.

Per quanto riguarda i log-rendimenti, sebbene il prezzo sia altamente volatile, le entità delle sue variazioni sono contenute e per questo il titolo di per sé non risulta essere particolarmente rischioso; non si hanno infatti molti valori fuori dai limiti del 4%, e quelli che ne escono sono comunque contenuti (mai oltre il 7%). In particolare, si osserva un trend di alta volatilità a fine 2015, in concomitanza con gli annunci delle scoperte dei giacimenti di *shale oil* statunitensi, che hanno gettato portato insicurezza nel mondo del petrolio.

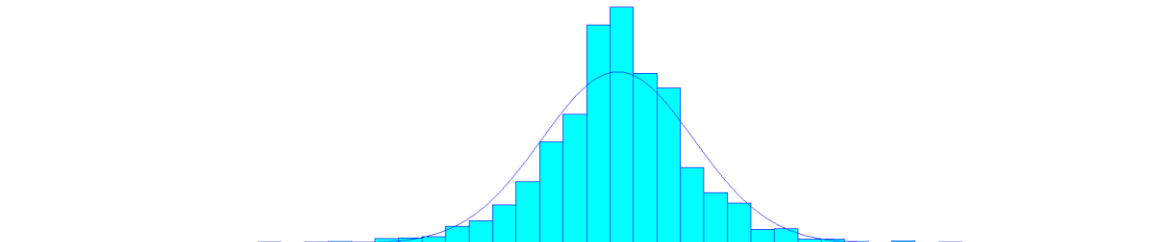


Grafico 10.3 Distribuzione campionaria dei log-rendimenti di Exxon.

Distribution Summary	
Distribution:	Normal
Expression:	NORM(-3.87e-005, 0.0122)
Square Error:	0.005578
Chi Square Test	
Number of intervals	= 17
Degrees of freedom	= 14
Test Statistic	= 129
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0584
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1827
Min Data Value	= -0.063
Max Data Value	= 0.057
Sample Mean	= -3.87e-005
Sample Std Dev	= 0.0122

Tabella 10.1 Risultati relativi al fitting dei log-rendimenti di Exxon.

asimmetria non sembrano andare contro all’ipotesi di normalità, mostrando valori pari a 2,636121322 e -0,13524295, del tutto in linea con quelli trovati in precedenza.

In questo caso i risultati del p-value per quanto riguarda l’ipotesi di normalità sono soddisfacenti, ma lo *square error* relativo a questa distribuzione non è il migliore possibile: viene infatti superato come efficienza da quello relativo ad una distribuzione Weibull (0,56% contro 0,42%); tuttavia, essendo la differenza così ridotta, l’approssimazione ad una normale non porta ad incongruenze per quanto riguarda il campione, mentre i benefici sono enormi in quanto rendono possibile l’utilizzo dei modelli matematici su cui si basa la nostra analisi. Inoltre, anche i valori di curtosi e

Function	Sq Error
Weibull	0.0042
Normal	0.00558
Beta	0.00638
Lognormal	0.00947
Erlang	0.0162
Gamma	0.0163
Triangular	0.0482
Uniform	0.078
Exponential	0.091

Tabella 10.2 Dati relativi agli square error risultanti dal fitting di Exxon.

Visa Inc.

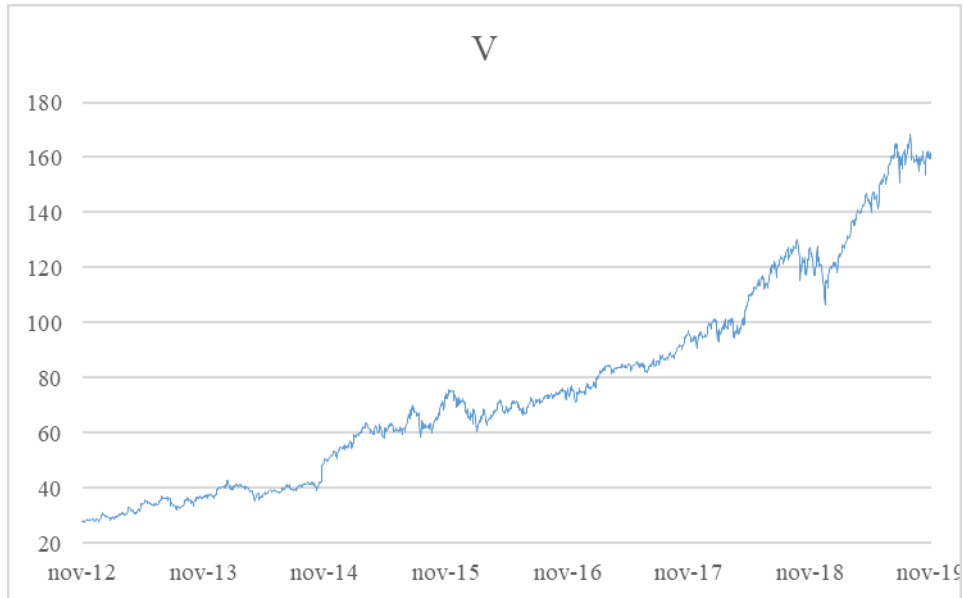


Grafico 11.1 Andamento del prezzo di Visa.

Per Visa, azienda leader dei servizi finanziari, l'andamento è rimasto di crescita lieve ma costante per il periodo che va dal 2012 al 2018 quando, esclusa un'importante flessione a fine anno, è diventata estremamente più marcata; in particolare nel solo 2019 l'azienda ha aumentato il proprio valore quasi del 50%, principalmente grazie alle ottime performance aziendali e ad un sempre maggiore market share.

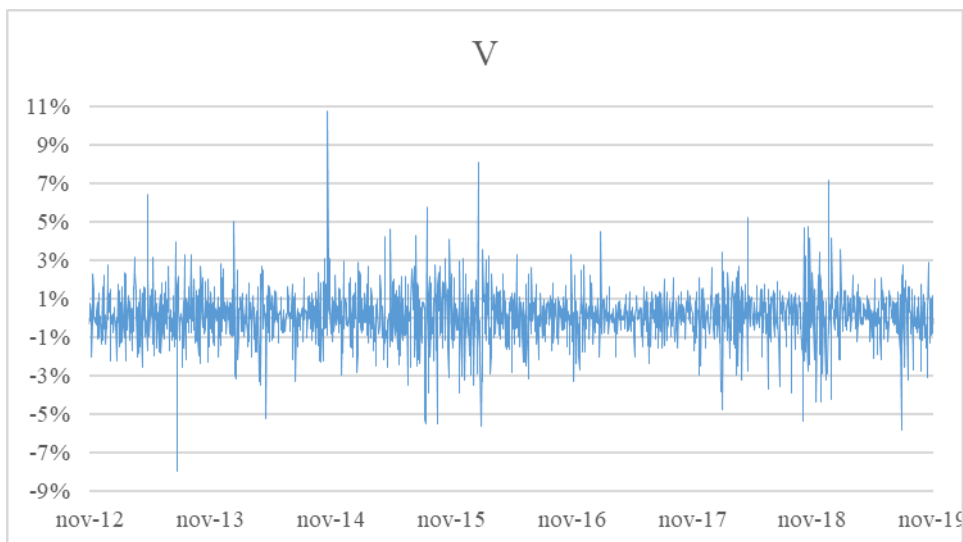


Grafico 11.2 Andamento dei log-rendimenti di Visa.

Andando ad analizzare i log-rendimenti si notano, come spesso è già successo, diversi outlier superiori al 4% ma sono quasi tutti localizzati nei primi anni del periodo preso in considerazione; in particolare si ha un massimo poco al di sotto dell'11% ad inizio 2015, in corrispondenza dell'annuncio di Visa del primo aumento di capitale a partire dalla sua IPO. A parte questo, si possono trovare diversi rendimenti prossimi al 4%, che rendono di fatto il titolo mediamente rischioso con un picco di rischiosità pari all'8% a metà 2013.

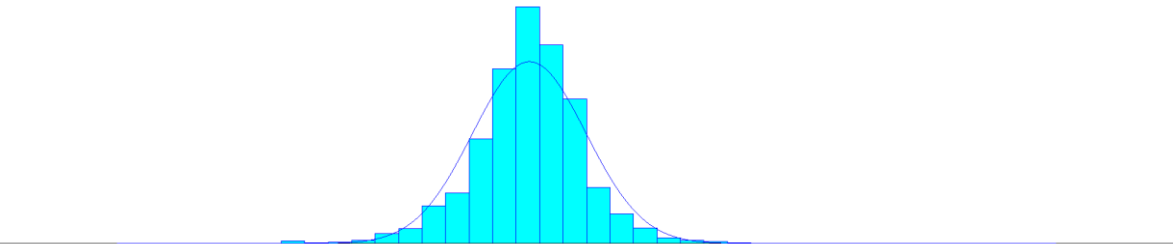


Grafico 11.3 Distribuzione campionaria dei log-rendimenti di Visa.

Distribution Summary	
Distribution:	Normal
Expression:	NORM(0.000962, 0.0139)
Square Error:	0.006074
Chi Square Test	
Number of intervals	= 13
Degrees of freedom	= 10
Test Statistic	= 120
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.054
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1827
Min Data Value	= -0.08
Max Data Value	= 0.107
Sample Mean	= 0.000962
Sample Std Dev	= 0.0139

Tabella 11.1 Risultati relativi al fitting della distribuzione dei log-rendimenti di Visa.

In questo caso p-value e *square error* danno entrambi risultati soddisfacenti testando l'ipotesi di normalità, con valori largamente al di sotto di quelli richiesti; la curtosi presenta un valore pari a 4,81172766, quindi nella media con quelli trovati in precedenza, sintomo di una leggera presenza eccessiva di dati nelle code rispetto alla normale, mentre l'asimmetria fa registrare un valore di 0,11311865, sintomo questa volta di un lieve sbilanciamento verso la parte sinistra della curva.

Function	Sq Error
Normal	0.00607
Beta	0.00702
Weibull	0.00947
Lognormal	0.0108
Erlang	0.0267
Gamma	0.0268
Triangular	0.0797
Uniform	0.112
Exponential	0.123

Tabella 11.2 Dati relativi agli square error derivanti dal fitting di Visa.

AT&T Inc.



Grafico 12.1 Andamento del prezzo di AT&T.

AT&T è la più grande compagnia di telecomunicazioni del mondo, nonché una delle più antiche; osservando l'andamento del prezzo si possono notare due serie formate da un trend negativo seguito da uno positivo: la prima riguarda in calo il 2013 ed in crescita il triennio 2014-2016, mentre la seconda parte dalla fine del 2016 raggiungendo il picco minimo a fine 2018 e risalendo per tutto il 2019. Questa variabilità è dovuta al settore fortemente influenzato dall'innovazione tecnologica degli ultimi anni, che ne fa variare i trend a seconda della direzione intrapresa.

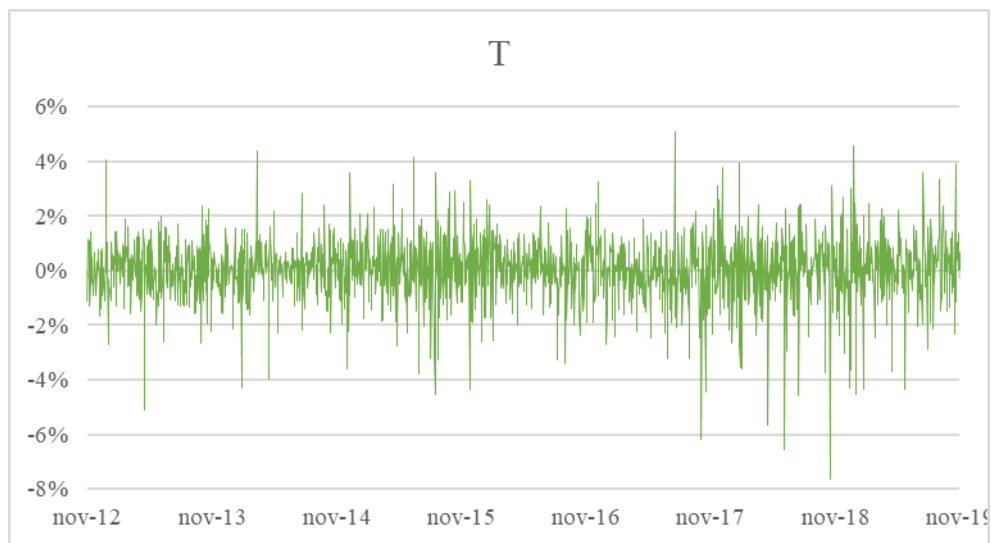


Grafico 12.2 Andamento dei log-rendimenti di AT&T.

Tuttavia questa variabilità del prezzo non riscontra corrispondenza nei log-rendimenti del titolo, che raramente sfiora il limite fisiologico del 4%; come molti altri titoli visti finora, inoltre, AT&T sembra performare con maggiore volatilità nella seconda parte del periodo analizzato, ovvero dopo il 2016. A differenza dei casi precedenti, in questo caso l'andamento non è legato alla maggiore instabilità geopolitica, essendo un'azienda che agisce puramente sul suolo statunitense; la volatilità si spiega con l'acquisizione da parte di AT&T di Time Warner, colosso dell'entertainment, che ha lasciato nell'incertezza i mercati, in quanto business completamente diverso dal core originale.

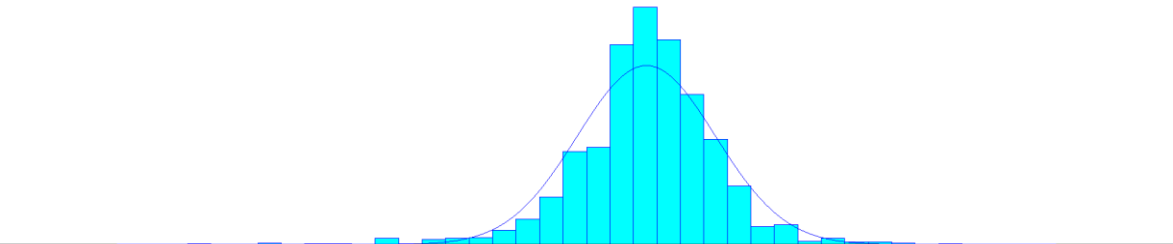


Grafico 12.3 Distribuzione campionaria dei log-rendimenti di AT&T.

Distribution Summary	
Distribution:	Normal
Expression:	NORM(0.000166, 0.0118)
Square Error:	0.005540
Chi Square Test	
Number of intervals	= 16
Degrees of freedom	= 13
Test Statistic	= 150
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0686
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1827
Min Data Value	= -0.0762
Max Data Value	= 0.051
Sample Mean	= 0.000166
Sample Std Dev	= 0.0118

Tabella 12.1 Risultati relativi al fitting dei log-rendimenti di AT&T.

relativo alla curtosi è 3,718107089, del tutto in linea con quelli trovati precedentemente, mentre l'asimmetria pare essere leggermente più marcata (-0,595496069) anche se non in maniera rilevante.

Anche in questo caso i risultati relativi al p-value sono soddisfacenti, ma si incontra un'incongruenza con lo *square error*: il minore è infatti legato ad una Weibull e non ad una normale. Tuttavia, esattamente come in precedenza, la differenza tra gli errori quadratici è estremamente ridotta (0,43% contro 0,55%), e per questo motivo l'adattamento della distribuzione campionaria ad una normale non porta cambiamenti significativi, essendo per contro fondamentale per l'analisi successiva. Il valore

Function	Sq Error
Weibull	0.00432
Normal	0.00554
Beta	0.00616
Lognormal	0.0115
Erlang	0.0254
Gamma	0.0255
Triangular	0.0658
Uniform	0.0883
Exponential	0.102

Tabella 12.2 Dati relativi agli square error risultanti dal fitting di AT&T.

The Home Depot, Inc.



Grafico 13.1 Andamento del prezzo di Home Depot.

Home Depot opera nel settore dell'arredamento casalingo, per cui, come già visto in precedenza per altre aziende, l'andamento del prezzo del titolo è legato principalmente a performance aziendali e risultati di fine trimestre; in quest'ottica la crescita è rimasta stabile nei primi due anni, per poi cominciare ad essere più accentuata fino ad una brusca inversione di rotta a fine 2018, legata a vendite al di sotto delle aspettative e performance importanti da parte dei competitors. Tuttavia, nel corso del 2019 l'azienda pare aver ripreso un ottimo ritmo di crescita, portandola a crescere del 50% in un singolo anno.

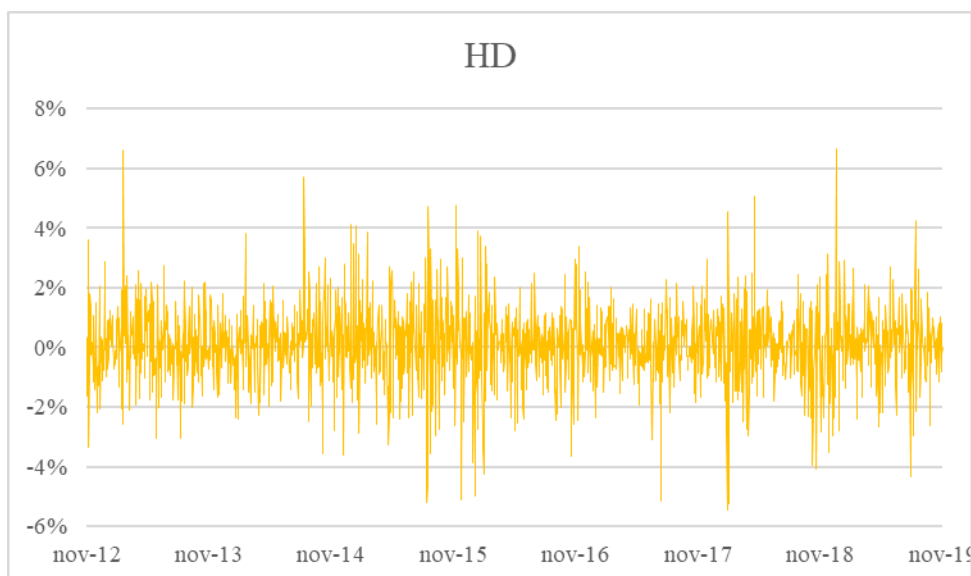


Grafico 13.2 Andamento dei log-rendimenti di Home Depot.

Dal grafico relativo ai log-rendimenti si può comprendere ancora meglio quanto il settore a cui appartiene l'azienda di fatto la renda poco rischiosa: raramente si supera il 4% giornaliero, e anche quando accade ci si spinge al massimo vicino al 6% che è un valore del tutto accettabile se paragonato ai casi visti finora. Questo accade perché Home Depot sfrutta un ottimo posizionamento sul territorio americano ed i suoi megastore per abbattere i costi, in un contesto in cui le vendite raramente subiscono repentini cali.

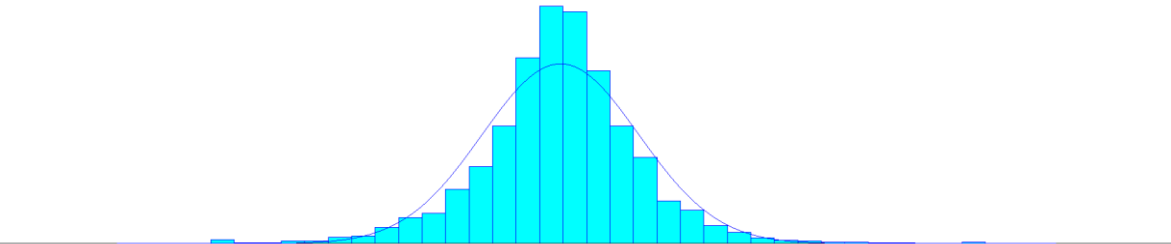


Grafico 13.3 Distribuzione campionaria dei log-rendimenti di Home Depot.

Distribution Summary	
Distribution:	Normal
Expression:	NORM(0.000804, 0.0125)
Square Error:	0.004766
Chi Square Test	
Number of intervals	= 18
Degrees of freedom	= 15
Test Statistic	= 119
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.06
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1827
Min Data Value	= -0.0544
Max Data Value	= 0.0665
Sample Mean	= 0.000804
Sample Std Dev	= 0.0125

Tabella 13.1 Risultati relativi al fitting dei log-rendimenti di Home Depot.

In questo caso la distribuzione normale descrive perfettamente la distribuzione dei dati, ottenendo un p-value soddisfacente ed il minore *square error* tra quelli proposti, essendo anche estremamente ridotto in valore assoluto (0,48%). Inoltre, curtosi e asimmetria riportano due tra i valori più bassi incontrati finora (rispettivamente 2,656014579 e -0,05512593), sottolineando ancora l’attendibilità della distribuzione normale.

Function	Sq Error
Normal	0.00477
Beta	0.00565
Weibull	0.00837
Erlang	0.00953
Gamma	0.00957
Lognormal	0.00971
Triangular	0.0447
Uniform	0.0741
Exponential	0.0856

Tabella 13.2 Dati relativi agli square error derivanti dal fitting di Home Depot.

Verizon Communications Inc.

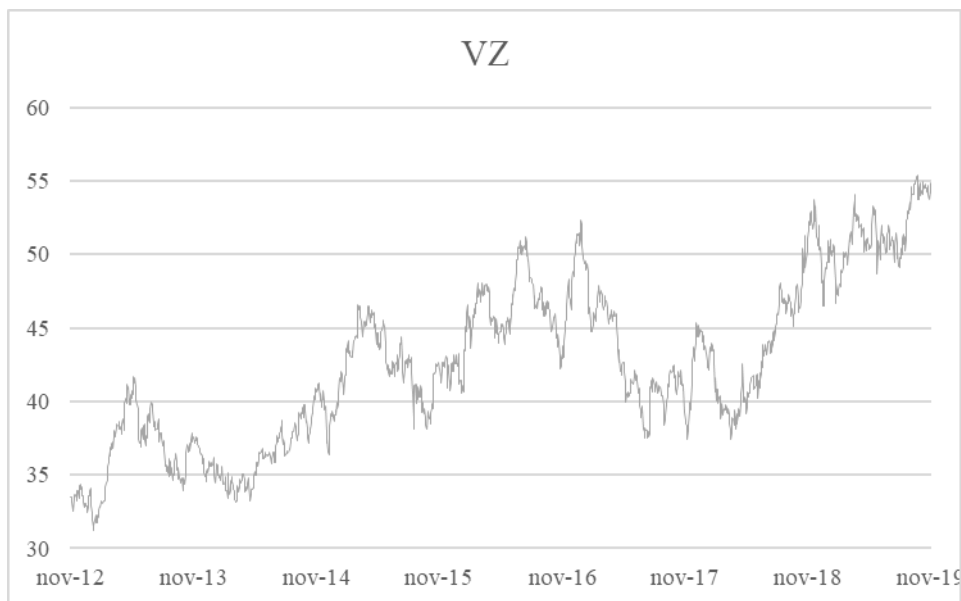


Grafico 14.1 Andamento del prezzo di Verizon.

Per Verizon vale sostanzialmente lo stesso discorso fatto in precedenza per AT&T: nel settore delle telecomunicazioni si assiste continuamente ad innovazioni tecnologiche, che ne cambiano l'aspetto in modo radicale e repentino. Per questo il prezzo del titolo è relativamente volatile, anche se in maniera diversa rispetto al suo rivale: non ci sono infatti macro-trend distribuiti su più anni, ma piccole e medie variazioni che riguardano qualche mese; inoltre, nel periodo preso in considerazione, Verizon è cresciuta dell'80%, mentre AT&T solo del 40%, esattamente la metà.

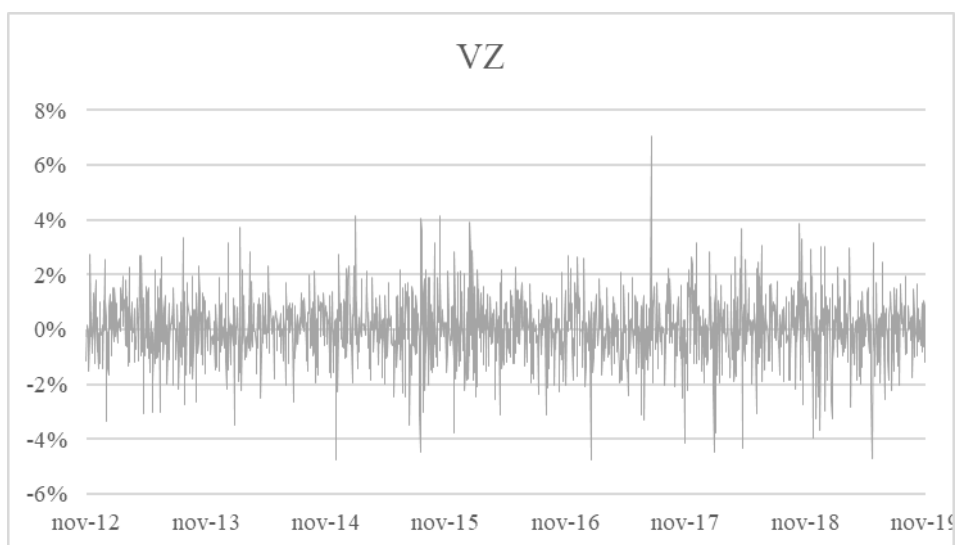


Grafico 14.2 Andamento dei log-rendimenti di Verizon.

Anche in questo caso i rendimenti rimangono praticamente sempre al di sotto del 4%, con un massimo di poco superiore al 6% ma in corrispondenza di una performance positiva. Non appaiono evidenti concentrazioni di rendimenti di importante entità in particolari periodi, sintomo di un andamento abbastanza costante nel tempo.

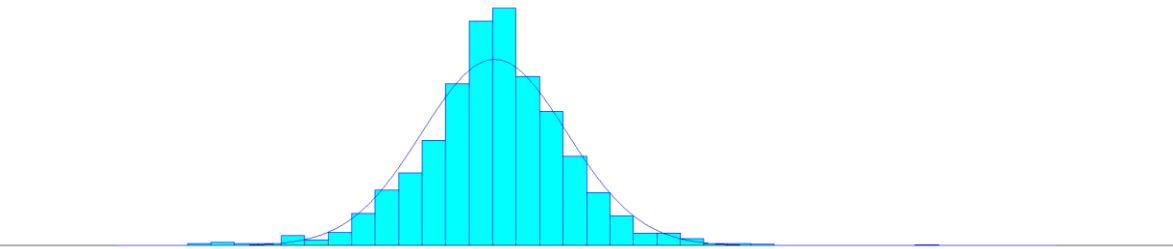


Grafico 14.3 Distribuzione campionaria dei log-rendimenti di Verizon.

Distribution Summary	
Distribution:	Normal
Expression:	NORM(0.000257, 0.0116)
Square Error:	0.003179
Chi Square Test	
Number of intervals	= 16
Degrees of freedom	= 13
Test Statistic	= 77.8
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.046
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1827
Min Data Value	= -0.0477
Max Data Value	= 0.0708
Sample Mean	= 0.000257
Sample Std Dev	= 0.0116

Tabella 14.1 Risultati relativi al fitting dei log-rendimenti di Verizon.

distribuzione campionaria ad una normale teorica.

Come già osservato in alcuni casi (AT&T ed Exxon), la distribuzione che meglio descrive i dati campionari non è una normale, ma una Beta con errore quadratico pari a 0,3%; tuttavia, dato che i test relativi ad una normale restituiscono risultati soddisfacenti per quanto riguarda il p-value e la differenza di tra *square error* è minima (con la normale è infatti pari a 0,32%), si può adottare quest’ultima come distribuzione dei log-rendimenti. A supporto di ciò, si registrano valori di curtosi (1,991184644) e asimmetria (-0,079612209) estremamente ridotti, che mostrano la vicinanza della

Function	Sq Error
Beta	0.00298
Normal	0.00318
Weibull	0.00346
Gamma	0.00577
Erlang	0.00579
Lognormal	0.00835
Triangular	0.0603
Uniform	0.0769
Exponential	0.0861

Tabella 14.2 Dati relativi agli square error derivanti dal fitting di Verizon.

The Bank of America Corporation



Grafico 15.1 Andamento del prezzo di Bank of America.

Anche in questo caso vale lo stesso discorso già fatto per JPMorgan, ovvero che il settore bancario appare maggiormente stabile di altri. Tuttavia, a differenza di JPMorgan, in questo caso si osserva un andamento molto particolare nel 2016: un primo calo improvviso, dovuto al parallelo calo del prezzo del petrolio, a cui Bank of America è molto legata a causa dei forti sussidi dati al settore energetico americano, ed un'altrettanto improvvisa crescita a fine anno, legata principalmente all'elezione presidenziale di Donald Trump che ha confermato diversi provvedimenti positivi per il mondo bancario. Tolto questo peculiare anno, si può notare come il prezzo abbia avuto una crescita abbastanza costante senza grandi fluttuazioni.

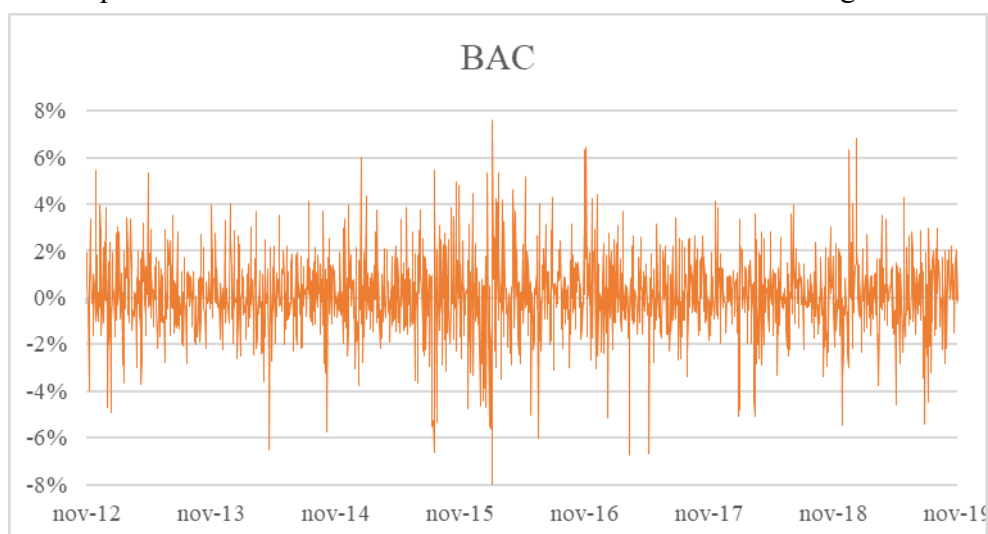


Grafico 15.2 Andamento dei log-rendimenti di Bank of America.

Anche nel grafico relativo ai log-rendimenti appare evidente una maggiore volatilità rispetto a JPMorgan: si incontrano infatti diversi punti oltre il limite del 4%, massimi attorno all’8%. Se si pensa che questi dati sono relativi alla seconda banca più importante degli Stati Uniti, non ne risulta un quadro rassicurante; l’unico punto a favore di Bank of America è che, tolto il 2016, l’andamento dei log-rendimenti sembra essere più stabile.

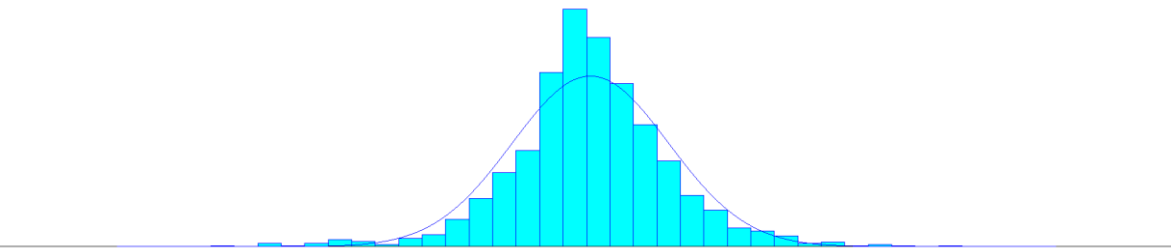


Grafico 15.3Distribuzione campionaria dei log-rendimenti di Bank of America.

Distribution Summary	
Distribution:	Normal
Expression:	NORM(0.00078, 0.0167)
Square Error:	0.004984
Chi Square Test	
Number of intervals	= 18
Degrees of freedom	= 15
Test Statistic	= 139
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0582
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1827
Min Data Value	= -0.0799
Max Data Value	= 0.0758
Sample Mean	= 0.00078
Sample Std Dev	= 0.0167

Tabella 15.1 Risultati relativi al fitting dei log-rendimenti di Bank of America.

Per quanto riguarda i test relativi alla distribuzione campionaria, si trova che i log-rendimenti seguono una Beta e non una normale; tuttavia, dato che i p-value relativi ai test su quest’ultima danno risultati soddisfacenti e che la differenza tra *square error* è estremamente ridotta (0,41% contro 0,5%), non è un problema approssimare la distribuzione ad una normale. Questo provvedimento è anche supportato, ancora una volta, dai valori di curtosi e asimmetria estremamente contenuti (2,20051796 e -0,082523809), che permettono di attuare questo adattamento in maggiore tranquillità.

Function	Sq Error
Beta	0.0041
Normal	0.00498
Weibull	0.0073
Lognormal	0.00817
Erlang	0.0114
Gamma	0.0115
Triangular	0.045
Uniform	0.0744
Exponential	0.0867

Tabella 15.2 Dati relativi agli square error derivanti dal fitting di Bank of America.

Mastercard Incorporated



Grafico 16.1 Andamento del prezzo di Mastercard.

In questo caso si osserva una crescita costante per tutto il periodo analizzato, anche se fino al 2018 appare più lenta mentre per gli ultimi due anni ha assunto valori molto più elevati (nel solo 2019 il prezzo è cresciuto del 70%). Tutto sommato, se si esclude un importante calo a fine 2018, il titolo sembra essere poco variabile ed assume sostanzialmente lo stesso andamento della rivale, Visa.

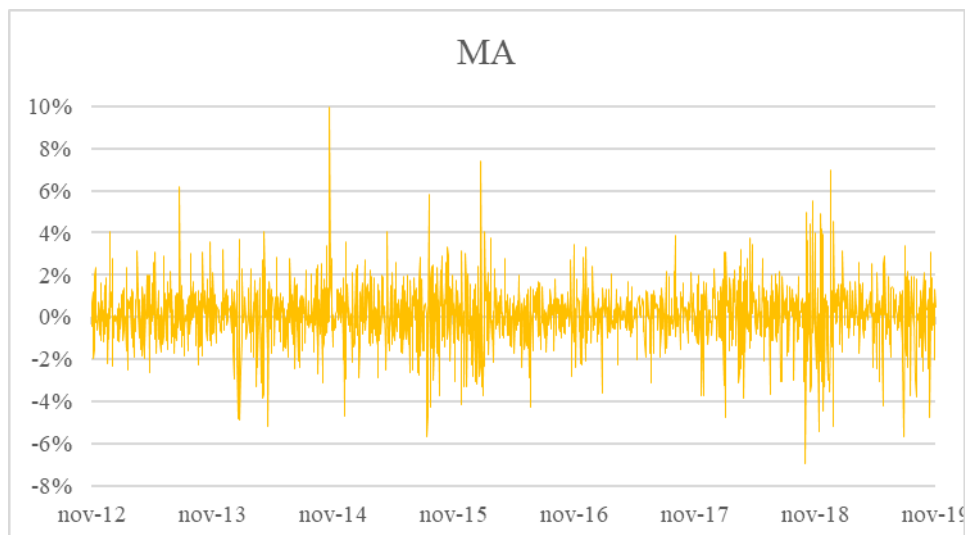


Grafico 16.2 Andamento dei log-rendimenti di Mastercard.

Osservando l'andamento dei rendimenti si trovano diversi punti oltre il 4%, con un'alta concentrazione verso la fine del 2018, cosa che rientra nello schema presentato in precedenza; in generale il titolo appare a rischio medio, con soli 5 punti che superano il 6% ed un picco massimo negativo al 7%.

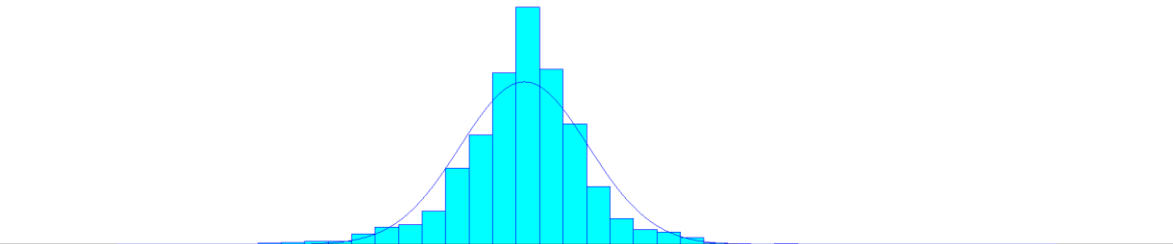


Grafico 16.3 Distribuzione campionaria dei log-rendimenti di Mastercard.

Distribution Summary	
Distribution:	Normal
Expression:	NORM(0.00105, 0.0143)
Square Error:	0.007948
Chi Square Test	
Number of intervals	= 15
Degrees of freedom	= 12
Test Statistic	= 181
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0625
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1827
Min Data Value	= -0.0695
Max Data Value	= 0.0997
Sample Mean	= 0.00105
Sample Std Dev	= 0.0143

Tabella 16.1 Risultati relativi al fitting dei log-rendimenti di Mastercard.

In questo caso la normale appare immediatamente come la distribuzione che meglio fitta i log-rendimenti, sia a causa dei p-value che rientrano nei limiti dell'1% sia perché lo *square error* è il minore tra quelli proposti. Inoltre, la curtosi assume un valore pari a 3,576436956, in linea con quelli trovati in precedenza, mentre l'asimmetria è estremamente ridotta e pari a -0,007492504.

Function	Sq Error
Normal	0.00795
Beta	0.00857
Weibull	0.00942
Lognormal	0.0135
Erlang	0.0204
Gamma	0.0204
Triangular	0.0789
Uniform	0.101
Exponential	0.111

Tabella 16.2 Dati relativi agli square error derivanti dal fitting di Mastercard.

The Walt Disney Company

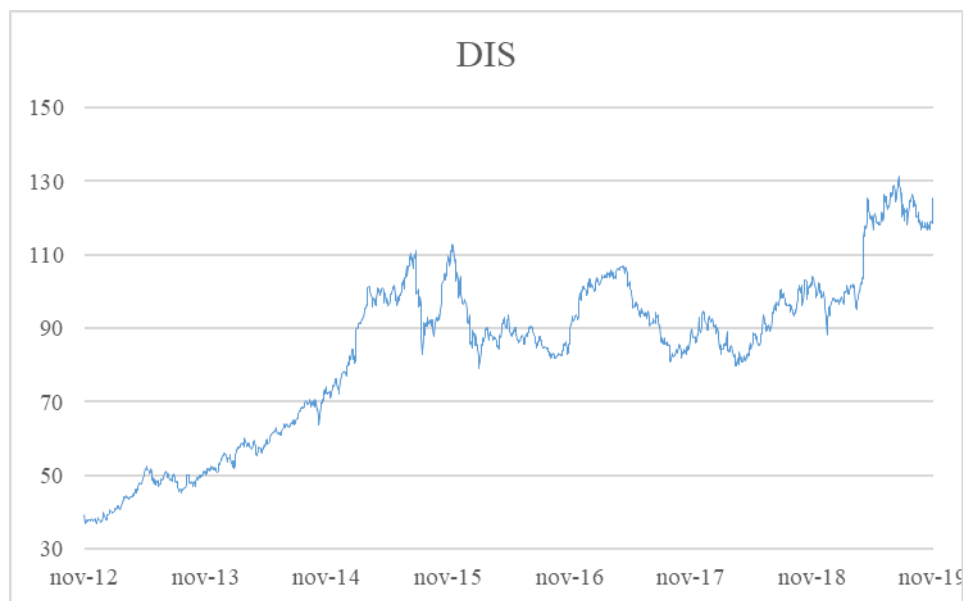


Grafico 17.1 Andamento del prezzo di Disney.

Disney è uno dei più grossi conglomerati industriali nel campo dell'entertainment, i cui asset variano da serie tv e film a parchi a tema e merchandising, entrambi legati ai prodotti cinematografici; per questo motivo, le variazioni del prezzo non sono particolarmente legate ad andamenti di mercato, quanto più a performance di nuovi titoli ed in generale ad ogni novità che riguardi l'azienda. In questo senso vanno le più importanti fluttuazioni presenti nel grafico: la crescita improvvisa di fine 2015 è legata all'uscita del primo film della saga di Star Wars da quando è stata acquisita dalla Disney, mentre quella più recente di metà 2019 è legata all'annuncio della nascita di Disney+, la piattaforma di streaming del colosso.

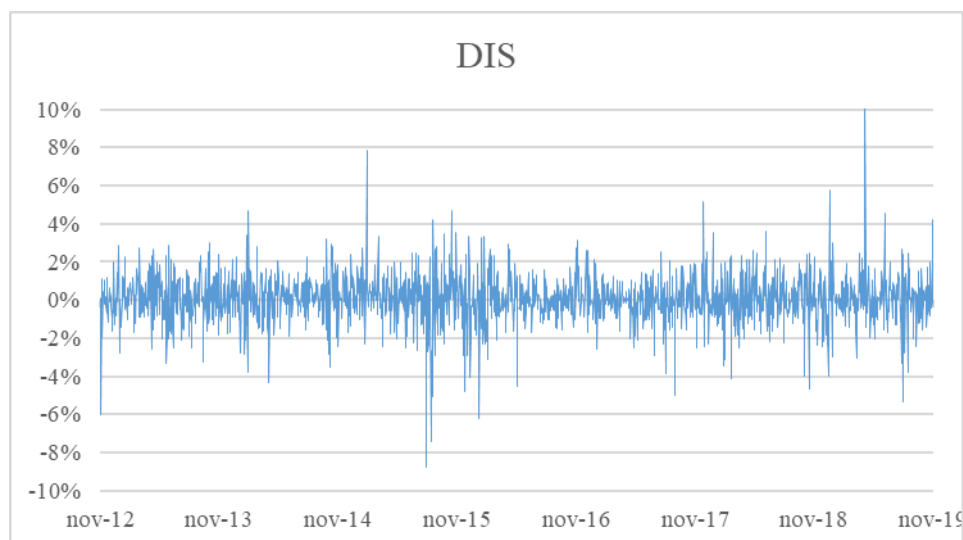


Grafico 17.2 Andamento dei log-rendimenti di Disney.

Questi stessi picchi di rendimento sono visibili nel grafico qui sopra: essendo legati ad annunci e non a trend del settore o del mercato intero, sono estremamente imprevedibili e repentini, e per questo aumentano la volatilità del titolo; a parte questi picchi isolati si ritiene comunque che Disney sia mediamente rischioso poiché la maggior parte dei log-rendimenti si trova al di sotto della soglia del 4%, anche se alcuni la superano.

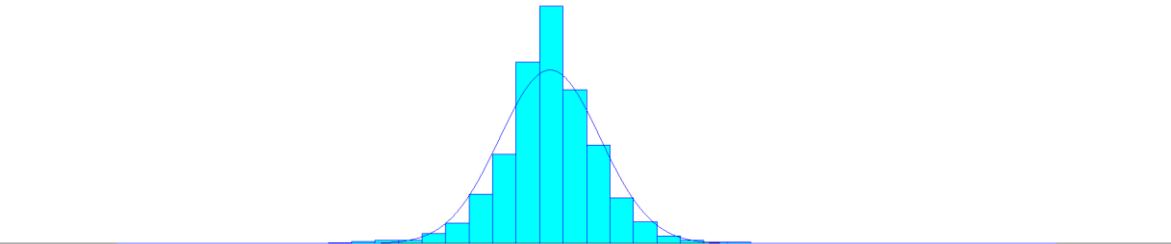


Grafico 17.3 Distribuzione campionaria dei log-rendimenti di Disney.

Distribution Summary	
Distribution:	Normal
Expression:	NORM(0.000637, 0.0129)
Square Error:	0.007515
Chi Square Test	
Number of intervals	= 12
Degrees of freedom	= 9
Test Statistic	= 122
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0608
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1827
Min Data Value	= -0.088
Max Data Value	= 0.106
Sample Mean	= 0.000637
Sample Std Dev	= 0.0129

Tabella 17.1 Risultati derivanti dal fitting dei log-rendimenti di Disney.

Analizzando i risultati ottenuti dal fitting dei log-rendimenti si può affermare con tranquillità che la normale sia la distribuzione che meglio li descrive, in quanto i p-value sono soddisfacenti e lo *square error* è minimo. La curtosi è abbastanza marcata, con un valore di 6,357084577, proprio perché ci sono diversi valori nelle code della distribuzione corrispondenti agli outlier visti in precedenza, mentre l'asimmetria fa registrare un valore estremamente basso (-0,089627129), dando una conferma della

Function	Sq Error
Normal	0.00751
Beta	0.00823
Weibull	0.0112
Lognormal	0.0121
Erlang	0.0427
Gamma	0.0428
Triangular	0.103
Uniform	0.131
Exponential	0.142

Tabella 17.2 Dati relativi agli square error derivanti dal fitting di Disney.

bontà dell'utilizzo della distribuzione normale.

Intel Corporation

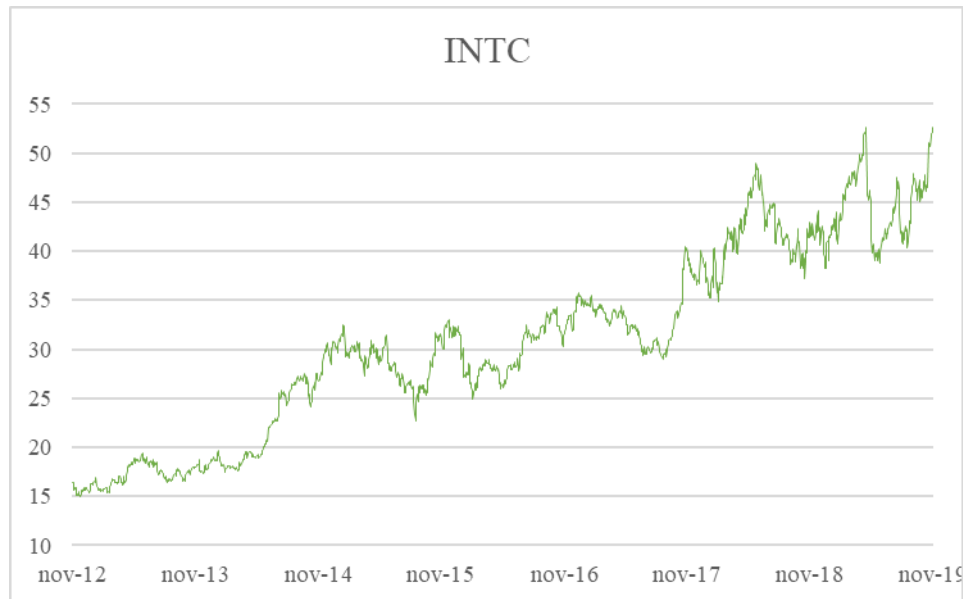


Grafico 18.1 Andamento del prezzo di Intel.

Intel, operando nel settore dei semiconduttori, è una delle aziende rimaste più colpite dalla guerra dei dazi tra Stati Uniti e Cina, che per la maggior parte riguardavano proprio questi prodotti; si può infatti osservare un'esplosione di volatilità nel prezzo del titolo a partire dal 2018, anno di inizio delle schermaglie: con la maggiore incertezza legata alla produzione di chip, ogni annuncio di sanzioni o spiraglio di risoluzione ha impattato sul prezzo dell'azienda.

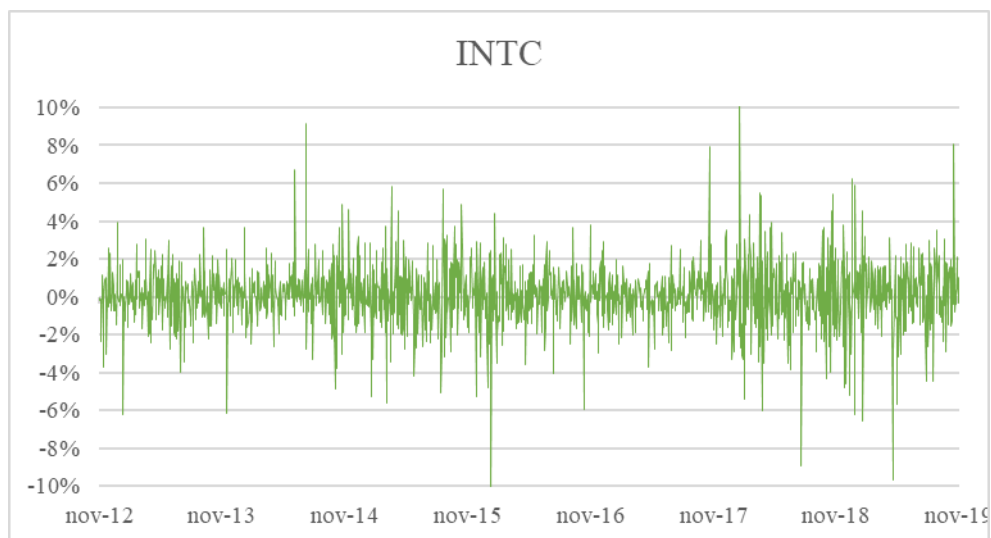


Grafico 18.2 Andamento dei log-rendimenti di Intel.

La maggior volatilità è ben visibile nel grafico relativo ai log-rendimenti: a partire dalla fine del 2017 i punti che superano il 4% sono aumentati per frequenza arrivando a toccare picchi del 10%. Inoltre, si può notare che anche a inizio 2016 il titolo aveva avuto una pessima giornata, andando a toccare il -10%: in quell’occasione le ragioni scatenanti furono gli scarsi risultati aziendali e la forte correlazione con la crescita economica cinese che, in calo in quel periodo, obbligò Intel a rivedere le proprie previsioni di vendita. A causa di questa sua forte dipendenza da una Nazione “instabile” come la Cina, il titolo viene spesso ritenuto rischioso.

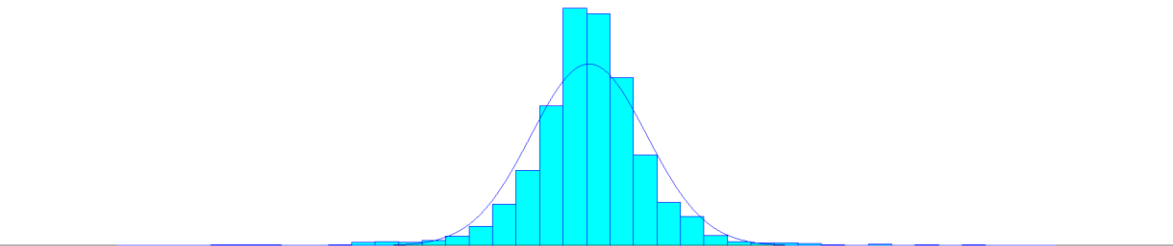


Grafico 18.3 Distribuzione campionaria dei log-rendimenti di Intel.

Distribution Summary	
Distribution:	Normal
Expression:	NORM(0.000637, 0.0161)
Square Error:	0.007903
Chi Square Test	
Number of intervals	= 14
Degrees of freedom	= 11
Test Statistic	= 160
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0651
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1827
Min Data Value	= -0.104
Max Data Value	= 0.105
Sample Mean	= 0.000637
Sample Std Dev	= 0.0161

Tabella 18.1 Risultati relativi al fitting dei log-rendimenti di Intel.

Anche in questo caso la distribuzione che meglio descrive quella campionaria è una normale, come si può vedere dagli *square error*. Curtosi e asimmetria riportano valori nella media rispetto a quelli visti finora (5,525331401 e -0,125206177), con la presenza di dati nelle code ed un leggero sbilanciamento della distribuzione verso destra.

Function	Sq Error
Normal	0.0079
Beta	0.00879
Lognormal	0.0131
Weibull	0.0149
Erlang	0.0372
Gamma	0.0373
Triangular	0.0819
Uniform	0.115
Exponential	0.127

Tabella 18.2 Dati relativi agli square error derivanti dal fitting di Intel.

Chevron Corporation

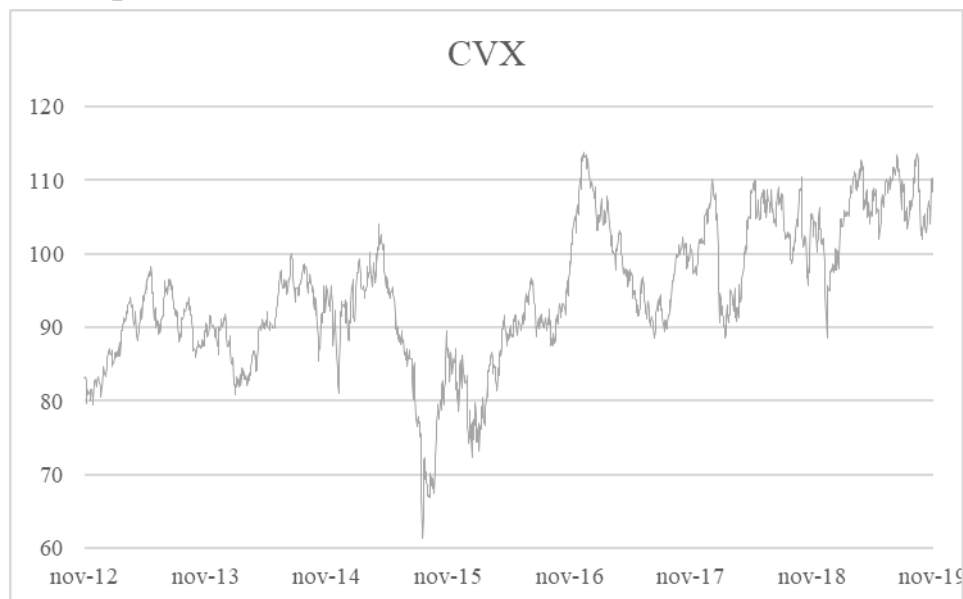


Grafico 19.1 Andamento del prezzo di Chevron.

Per Chevron appare evidente, come già per Exxon, il legame tra prezzo del titolo e prezzo del petrolio: essendo quest'ultimo estremamente volatile e poco prevedibile, di conseguenza anche per l'azienda stessa si ha un andamento altalenante, come a metà 2015, periodo in cui nel giro di due mesi circa il prezzo è sceso del 40%. A queste fluttuazioni si deve aggiungere, a partire dal 2016, la presenza della competizione dello *shale oil* che, come già accennato in precedenza, aumenta la variabilità del prezzo come si può vedere negli ultimi anni.

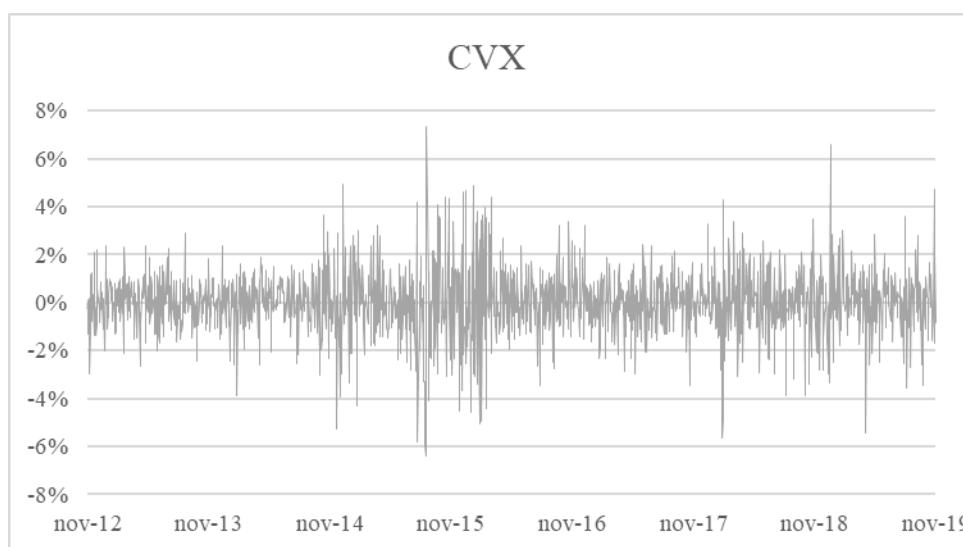


Grafico 19.2 Andamento dei log-rendimenti di Chevron.

Così come per Exxon, i rendimenti non riflettono esattamente l'andamento del prezzo: non c'è grande volatilità, in quanto le cattive performance sono per l'appunto legate al prezzo del petrolio ed ai competitors, e non ha singoli eventi che influiscono di colpo sui log-rendimenti (come accade invece, per esempio, nelle aziende tech). Quando l'azienda va male, lo fa in maniera continuata abbassando anche di molto il prezzo della propria azione, ma non da un giorno all'altro, e questo si osserva dai rari casi di rendimenti che escono dai limiti del 4%.

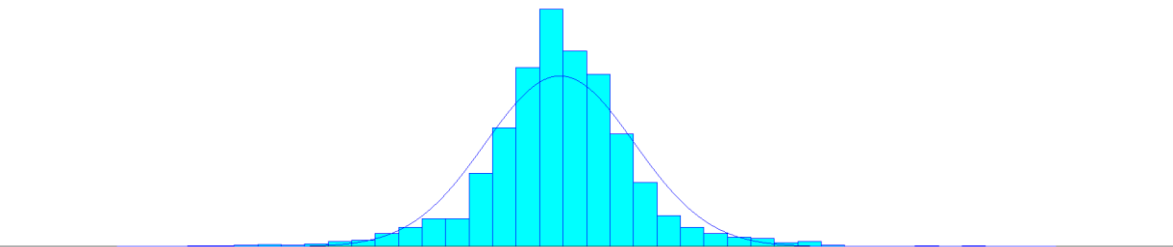


Grafico 19.3 Distribuzione campionaria dei log-rendimenti di Chevron.

Distribution Summary	
Distribution:	Normal
Expression:	NORM(0.000143, 0.0135)
Square Error:	0.005829
Chi Square Test	
Number of intervals	= 17
Degrees of freedom	= 14
Test Statistic	= 176
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0625
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1827
Min Data Value	= -0.0638
Max Data Value	= 0.0736
Sample Mean	= 0.000143
Sample Std Dev	= 0.0135

Tabella 19.1 Risultati relativi al fitting dei log-rendimenti di Chevron.

Come già osservato in altri casi (AT&T ed Exxon), la distribuzione che meglio descrive i dati è una Weibull; tuttavia, l'adozione della normale non porta particolari incongruenze, come si nota dai p-value dei test relativi a questa distribuzione, dal suo *square error* simile a quello della Weibull (0,38% contro 0,58%) e dai valori di curtosi (2,860390212) e asimmetria (-0,06476977) del tutto in linea con la media degli altri titoli che sono descritti da una normale.

Function	Sq Error
Weibull	0.00384
Normal	0.00583
Beta	0.00679
Lognormal	0.0108
Erlang	0.013
Gamma	0.0131
Triangular	0.0515
Uniform	0.0816
Exponential	0.0931

Tabella 19.2 Dati relativi agli *square error* derivanti dal fitting di Chevron.

Merck & Co., Inc.



Grafico 20.1 Andamento del prezzo di Merck & Co.

Merck & Co. è la più grande compagnia mondiale nel settore farmaceutico, e l'andamento del suo prezzo è fortemente legato alle performance dei propri prodotti o a novità riguardanti l'approvazione o immissione sul mercato di altri prodotti; in questo modo si spiega l'importante crescita degli ultimi due anni: il suo farmaco di punta ha raggiunto un market share sempre maggiore, portando risultati positivi ad ogni report trimestrale. Inoltre, allo stesso modo si spiegano i cali negli anni precedenti: nel 2017, per esempio, l'azienda ha deciso di non portare questo farmaco sul mercato europeo, e l'azione ne ha risentito in maniera importante.

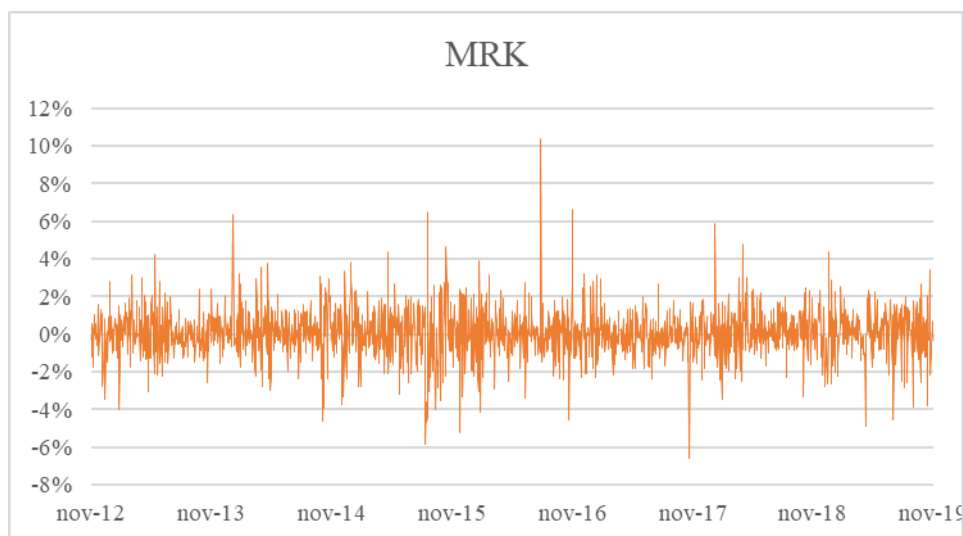


Grafico 20.2 Andamento dei log-rendimenti di Merck & Co.

Dai log-rendimenti si osserva che il titolo non presenta grande volatilità, essendo la maggior parte dei punti all'interno del limite posto pari al 4%; di più, la performance peggiore è stata raggiunta a novembre del 2017 con un calo pari al 6% in corrispondenza dell'annuncio accennato in precedenza di non portare il proprio farmaco best-seller sul mercato europeo.

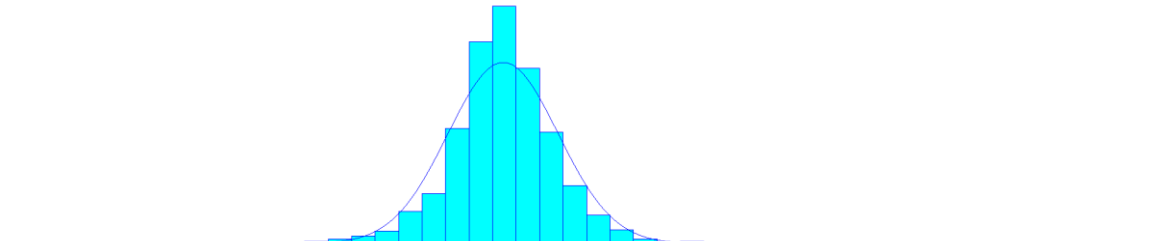


Grafico 20.3 Distribuzione campionaria dei log-rendimenti di Merck & Co.

Distribution Summary	
Distribution:	Normal
Expression:	NORM(0.000424, 0.0129)
Square Error:	0.006077
Chi Square Test	
Number of intervals	= 13
Degrees of freedom	= 10
Test Statistic	= 112
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0598
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1827
Min Data Value	= -0.066
Max Data Value	= 0.104
Sample Mean	= 0.000424
Sample Std Dev	= 0.0129

Tabella 20.1 Risultati relativi al fitting dei log-rendimenti di Merck & Co.

Per quanto riguarda la distribuzione che meglio fitta quella campionaria dei log-rendimenti, in questo caso la scelta ricade subito sulla normale; infatti, i risultati del p-value sono soddisfacenti, lo *square error* relativo è il minore tra quelli possibili e i valori di curtosi (4,795028944) e asimmetria (0,193434851) non vanno in direzione opposta.

Function	Sq Error
Normal	0.00608
Beta	0.00636
Lognormal	0.00955
Weibull	0.011
Erlang	0.0247
Gamma	0.0248
Triangular	0.084
Uniform	0.117
Exponential	0.127

Tabella 20.2 Dati relativi agli square error derivanti dal fitting di Merck & Co.

Portafoglio di Markowitz

Procedimento risolutivo

Per l'applicazione pratica di questo modello, e per la parte finale dell'applicazione di quello di Black e Litterman, sono state utilizzate alcune funzioni presenti all'interno del Financial Toolbox di Matlab; queste sfruttano la programmazione quadratica per risolvere problemi di ottimizzazione con vincoli lineari. In particolare, la funzione obiettivo da minimizzare corrisponde alla varianza del portafoglio e si esprime come:

$$\text{Min}_x \left(\frac{1}{2} x^T \Sigma x \right)$$

Dove:

- $1/2$ è uno scalare inserito per ottenere una maggiore semplicità computazionale, senza però che risulti influente per quanto riguarda la soluzione del problema;
- x è il vettore che riporta i pesi di portafoglio, mentre x^T è il suo trasposto;
- Σ è la matrice di varianza-covarianza tra i diversi titoli esaminati.

A questa funzione vengono applicati alcuni vincoli, che possono variare a seconda del risultato che si vuole ottenere; tuttavia, i due vincoli che vengono sempre usati come base di partenza sono:

- $x^T \cdot \mu = \tilde{\mu}_p$, che fissa un obiettivo di rendimento ($\tilde{\mu}_p$) da raggiungere tramite la composizione di portafoglio (x^T) applicata ai rendimenti medi dei titoli (μ);
- $x^T \cdot \text{ones} = 1$, in cui ones è un vettore composto da 1, che segnala il totale investimento dei propri asset all'interno del portafoglio.

Il problema si risolve tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange che, a partire dalla seguente equazione:

$$L = \frac{1}{2} x^T \Sigma x - \lambda_1 (x^T \mu - \tilde{\mu}_p) - \lambda_2 (x^T \text{ones} - 1)$$

Trova la composizione di portafoglio che minimizza il rischio, dato un rendimento obiettivo.

Per quanto riguarda i dati che fungono da input per la funzione *Portfolio*, sono stati ricavati i rendimenti giornalieri medi e le relative deviazioni standard dei 20 titoli analizzati:

Titolo	Ticker	Medie	Deviazione Standard
Microsoft	MSFT	0,0957%	1,5290%
Apple	AAPL	0,0724%	1,6624%
Amazon	AMZN	0,1195%	1,8904%
Facebook	FB	0,1303%	2,1167%
Berkshire Hathaway	BRK	0,0600%	1,1136%
JPMorgan Chase	JPM	0,0718%	1,3858%
Google	GOOGL	0,0829%	1,5266%
Johnson & Johnson	JNJ	0,0421%	1,0854%
Procter and Gamble	PG	0,0389%	1,0351%
Exxon Mobil	XOM	-0,0039%	1,2162%
Visa	V	0,0962%	1,3905%
AT&T	T	0,0166%	1,1773%
Home Depot	HD	0,0804%	1,2519%
Verizon	VZ	0,0257%	1,1607%
Bank of America	BAC	0,0780%	1,6671%
Mastercard	MA	0,1051%	1,4294%
Disney	DIS	0,0637%	1,2903%
Intel Corporation	INTC	0,0637%	1,6061%
Chevron Corporation	CVX	0,0143%	1,3491%
Merck & Co.	MRK	0,0424%	1,2924%

Tabella 21. Rendimenti medi e relative deviazioni standard dei 20 titoli analizzati.

È stata inoltre calcolata la matrice di varianza-covarianza relativa ai titoli (Σ), che non verrà riportata a causa delle dimensioni estese, trattandosi di una matrice 20×20; questa riporta sulla diagonale i valori relativi alla varianza di ciascun titolo, mentre nelle altre caselle compaiono le covarianze esistenti tra le differenti coppie di titoli presi in considerazione di volta in volta.

Di seguito viene riportato il grafico che rappresenta il posizionamento di ciascun asset all'interno del piano rischio-rendimento:

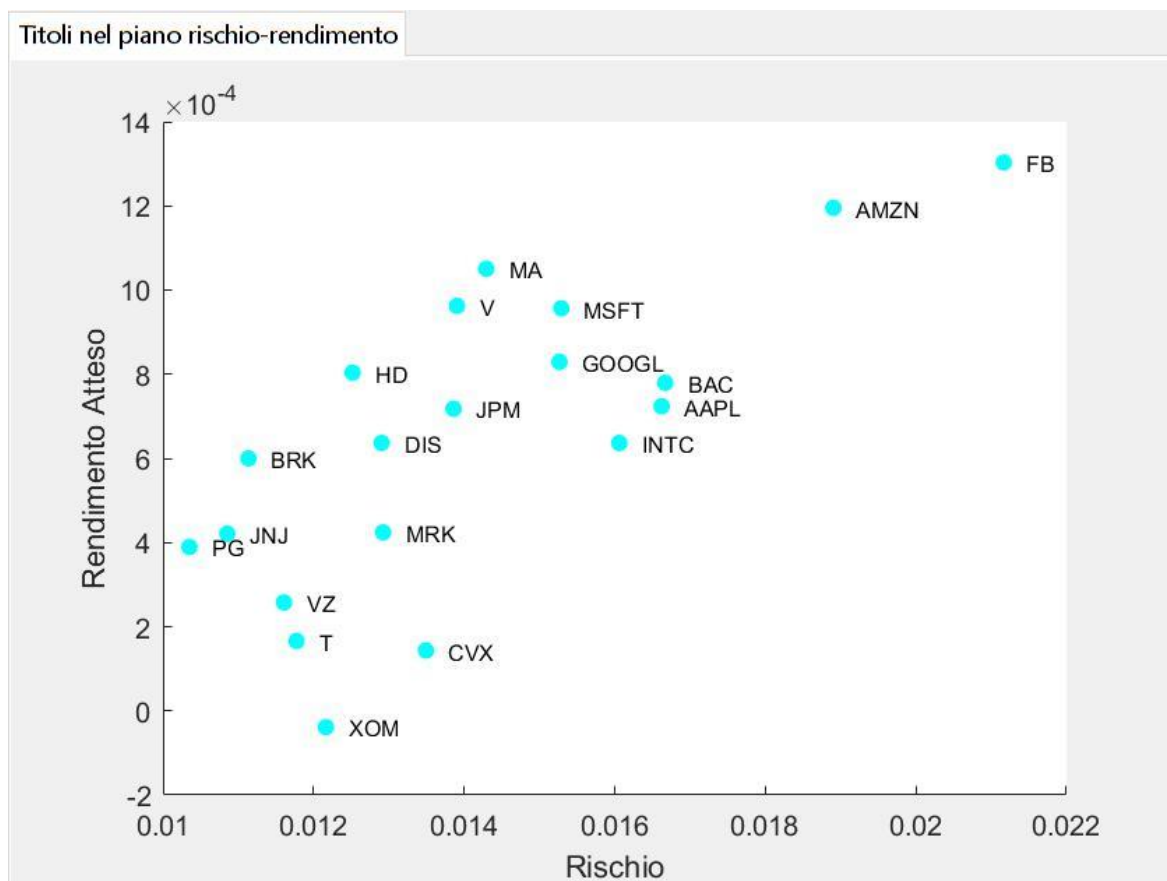


Figura 7. Posizionamento dei titoli nel piano rischio-rendimento.

Da questo punto di partenza si possono trovare le frontiere efficienti, e quindi i relativi portafogli ottimali, a seconda dei vincoli posti al problema. Di seguito vengono riportati i risultati ottenuti per tre portafogli di Markowitz differenti (fissando un rendimento obiettivo, utilizzando il titolo risk free e cercando il portafoglio di minima varianza globale), tenendo presente che il procedimento può essere eseguito con *short selling* o senza; per *short selling* o “vendita allo scoperto”, si intende la possibilità di avere un peso negativo in portafoglio per quanto riguarda uno o più titoli, facendo sottintendere che si possa vendere un titolo che ancora non si possiede.

Portafoglio con obiettivo di rendimento fissato

Come primo scenario è stato preso in considerazione quello maggiormente fedele alla realtà, in cui cioè l'investitore fissa un obiettivo di rendimento da ottenere e cerca di minimizzare il rischio associato al portafoglio che ne risulta. In particolare, come rendimento obiettivo è stato scelto il rendimento medio del pool di 20 titoli negli ultimi due anni: in questo modo si ottiene un ritorno più che accessibile e relativamente aggiornato rispetto all'andamento del mercato; ne è risultato un rendimento dello 0,06% giornaliero, ovvero pari circa al 17% annuo. Considerando che la miglior performance su tutto il periodo è data da Facebook, con uno 0,13% giornaliero, e la peggiore è relativa ad Exxon, con un valore di poco inferiore allo 0, l'obiettivo posto risulta trovarsi esattamente a metà dello spettro dei rendimenti, e per questo non dovrebbero esserci problemi nel suo raggiungimento. Di seguito sono riportate le composizioni di portafoglio trovate, in assenza e poi in presenza di *short selling*, con le relative frontiere efficienti:

Titolo	Ticker	Composizione (%)
Microsoft	MSFT	1,2433
Apple	AAPL	2,4686
Amazon	AMZN	2,6316
Facebook	FB	5,5723
Berkshire Hathaway	BRK	4,9647
JPMorgan Chase	JPM	0,0000
Google	GOOGL	0,0000
Johnson & Johnson	JNJ	13,1164
Procter and Gamble	PG	26,9000
Exxon Mobil	XOM	0,0000
Visa	V	1,4148
AT&T	T	1,0828
Home Depot	HD	14,9529
Verizon	VZ	9,4317
Bank of America	BAC	0,0000
Mastercard	MA	4,9401
Disney	DIS	7,8797
Intel Corporation	INTC	0,0000
Chevron Corporation	CVX	0,0000
Merck & Co.	MRK	3,4011

Tabella 23. Composizione del portafoglio senza short selling.

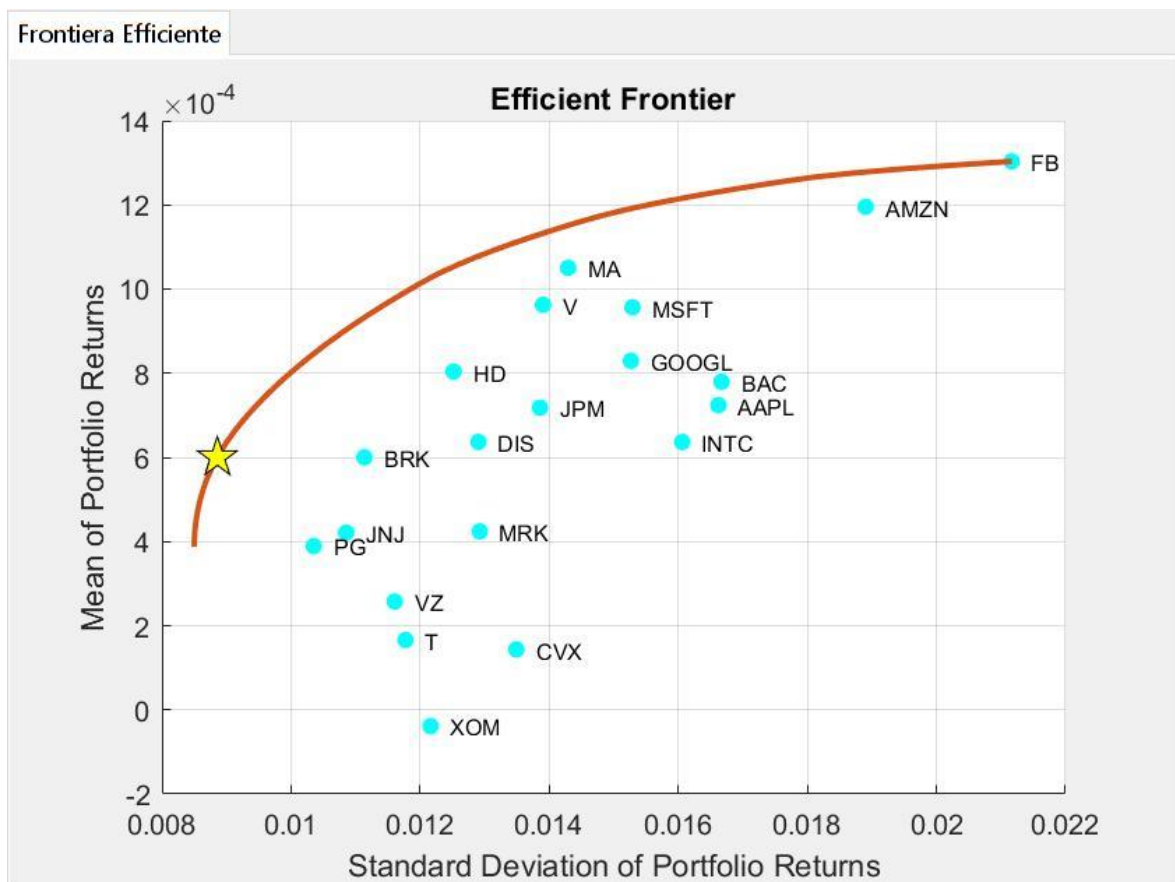


Figura 7. Frontiera efficiente con rendimento fissato.

La stella gialla rappresenta il portafoglio ottimale trovato sulla frontiera efficiente, di cui Matlab riporta soltanto il ramo superiore come già spiegato in precedenza. In linea con l'utilizzo della media semplice dei rendimenti del campione come obiettivo di rendimento, il portafoglio si pone praticamente a metà tra i rendimenti dei diversi titoli: appare evidente dalla frontiera efficiente come esistano combinazioni migliori rispetto a quella trovata, ma l'obiettivo della nostra analisi non è tanto la valutazione della performance pura quanto più il suo confronto a seconda del metodo utilizzato. In particolare, il rendimento del portafoglio ottenuto in questo modo è esattamente pari a quello fissato, 0,06%, mentre la deviazione standard è pari a 0,89%.

Titolo	Ticker	Composizione (%)
Microsoft	MSFT	0,6032
Apple	AAPL	3,4081
Amazon	AMZN	2,2891
Facebook	FB	4,8070
Berkshire Hathaway	BRK	9,1714
JPMorgan Chase	JPM	1,2799
Google	GOOGL	-0,6740
Johnson & Johnson	JNJ	15,1113
Procter and Gamble	PG	28,1017
Exxon Mobil	XOM	-10,4229
Visa	V	1,2059
AT&T	T	4,7037
Home Depot	HD	13,6466
Verizon	VZ	9,5074
Bank of America	BAC	-3,3474
Mastercard	MA	3,5867
Disney	DIS	8,8373
Intel Corporation	INTC	-0,3800
Chevron Corporation	CVX	4,1051
Merck & Co.	MRK	4,4597

Tabella 22. Composizione del portafoglio con short selling: in arancione sono segnalati i titoli da vendere.

Anche in questo caso il rendimento del portafoglio ottenuto combacia con l'obiettivo dello 0,06%, mentre la deviazione standard si abbassa allo 0,88%: questo avviene grazie alla presenza di vendite allo scoperto, che permettono di utilizzare posizioni lunghe e corte, ottimizzando la composizione di portafoglio a seconda dei rendimenti dei titoli. Questo meccanismo è ben visibile nel caso di Exxon Mobil: nello scenario senza *short selling* il titolo non veniva comprato, in quanto possiede rendimento medio negativo; in questo caso invece, il titolo può essere sfruttato per la sua bassa rischiosità tramite una posizione corta, diminuendo quindi la rischiosità complessiva del portafoglio.

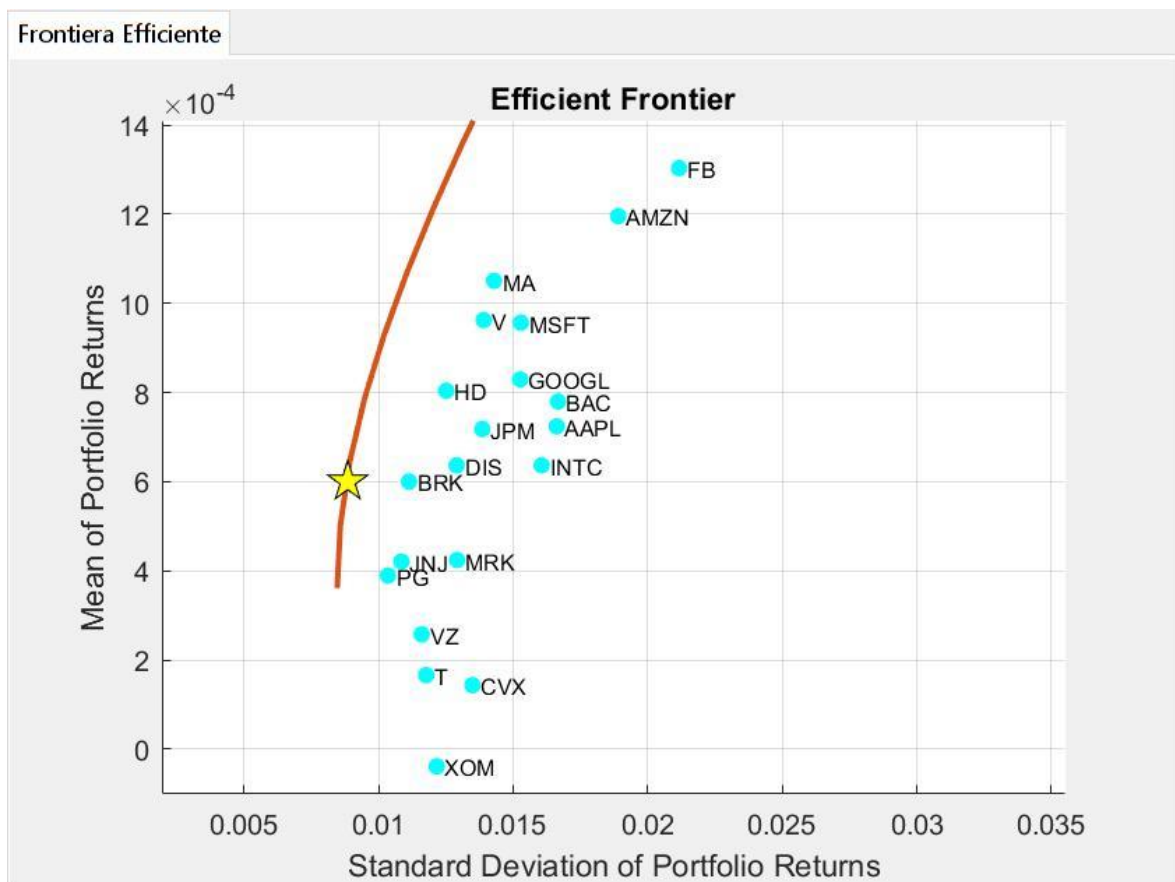


Figura 8. Frontiera efficiente con rendimento fissato e short selling.

Appare subito evidente come la frontiera efficiente abbia un andamento molto diverso da quello presentato nella teoria: questo avviene perché, grazie alle vendite allo scoperto, si riescono ad ottenere risultati estremamente migliori in quanto si riesce a sfruttare ancor di più il meccanismo di diversificazione, “esasperando” le posizioni corte o lunghe a seconda del rendimento dei titoli. Non bisogna dimenticare però che lo *short selling* comporta anche un maggior rischio di esposizione, di cui i modelli qui presentati non tengono conto: se infatti si sommano i valori assoluti delle quote in assenza di vendite allo scoperto, si ottiene un’esposizione finanziaria pari a 1, mentre in loro presenza l’esposizione totale è pari a 1,3; questo vuol dire che, se nel primo caso si vuole investire 1€ nel portafoglio, in questo secondo caso si investirà 1,3€, con un evidente maggior rischio in caso di andamento anomalo del mercato.

Portafoglio con inserimento del titolo risk free

Dopo aver trovato la composizione di portafoglio vincolata ad un rendimento obiettivo, utilizzando quindi il metodo che trova maggiormente risolto nei casi reali, si è passati poi all'analisi del miglior portafoglio possibile, ottenuto basandosi sulla massimizzazione dell'indice di Sharpe, che si calcola con la seguente formula:

$$S = \frac{r_a - r_f}{\sigma_a}$$

dove r_a esprime il ritorno atteso dell'asset, r_f è il tasso privo di rischio e σ_a rappresenta la deviazione standard del rendimento in eccesso dell'asset rispetto al risk-free. Questo indicatore viene spesso utilizzato come misura di performance in quanto mette in relazione l'asset utilizzato con il tasso risk-free offerto dal mercato, riuscendo quindi a dare la soluzione migliore in assoluto tenendo presente il mercato in cui si opera. In particolare, in questo caso la composizione ottima si troverà nel punto di incontro tra la frontiera efficiente e la tangente ad essa originata nel punto corrispondente al tasso risk-free, proprio perché risultato di una procedura di ottimizzazione non più vincolata ad un rendimento obiettivo. La procedura così definita non viene utilizzata nella realtà, sia perché raramente si vuole ottenere un portafoglio ottimo senza conoscere in partenza il livello di rendimento o rischio a cui si punta, sia perché i parametri relativi al risk-free (media e varianza) variano molto a seconda del mercato e periodo di tempo preso in considerazione.

Per la nostra analisi, il tasso privo di rischio utilizzato è quello relativo al titolo di stato statunitense a tre mesi, pari al 1,9% all'8/11/2019, data di fine delle stringhe di dati utilizzate. Chiaramente bisogna mettere in conto che il tasso risk-free è cambiato molto durante il periodo di tempo analizzato, e per questo motivo utilizzarne uno singolo è un'imprecisione in quanto si otterrà un portafoglio che si basa su quest'ultimo tasso ma che utilizza rendimenti relativi ad anni in cui il risk-free era estremamente diverso; di nuovo però, lo scopo dell'analisi non è tanto quello di valutare la performance pura, quanto quello di mettere a confronto i risultati ottenuti con i due modelli di gestione, e quindi l'imprecisione appena descritta non è rilevante per i nostri scopi.

Di seguito sono riportate le composizioni di portafoglio, senza e con *short selling*, accompagnate dalle relative rappresentazioni delle frontiere efficienti.

Titolo	Ticker	Composizione (%)
Microsoft	MSFT	10,6628
Apple	AAPL	0,0000
Amazon	AMZN	10,9805
Facebook	FB	18,0133
Berkshire Hathaway	BRK	0,0000
JPMorgan Chase	JPM	0,0000
Google	GOOGL	0,0000
Johnson & Johnson	JNJ	0,0000
Procter and Gamble	PG	0,0000
Exxon Mobil	XOM	0,0000
Visa	V	3,5879
AT&T	T	0,0000
Home Depot	HD	27,4565
Verizon	VZ	0,0000
Bank of America	BAC	0,0000
Mastercard	MA	29,2989
Disney	DIS	0,0000
Intel Corporation	INTC	0,0000
Chevron Corporation	CVX	0,0000
Merck & Co.	MRK	0,0000

Tabella 24. Composizione del portafoglio con massimizzazione dell'indice di Sharpe e senza short selling.

In questo caso l'investimento si concentra tutto in 6 titoli, che una volta messi in relazione tra loro portano al miglior risultato possibile; in particolare, Facebook, Microsoft, Amazon, Visa e Mastercard sono i 5 migliori titoli per rendimento atteso, mentre Home Depot si piazza settima di poco sotto a Google ma con una rischiosità più ridotta. Appare evidente che il risultato di per sé preso non abbia molto significato: è bastato utilizzare i titoli di maggior successo per avere la performance migliore; tuttavia, come già accennato in precedenza, il risultato sarà più interessante una volta confrontato con lo stesso procedimento ma all'interno del modello di Black e Litterman.

Frontiera Efficiente

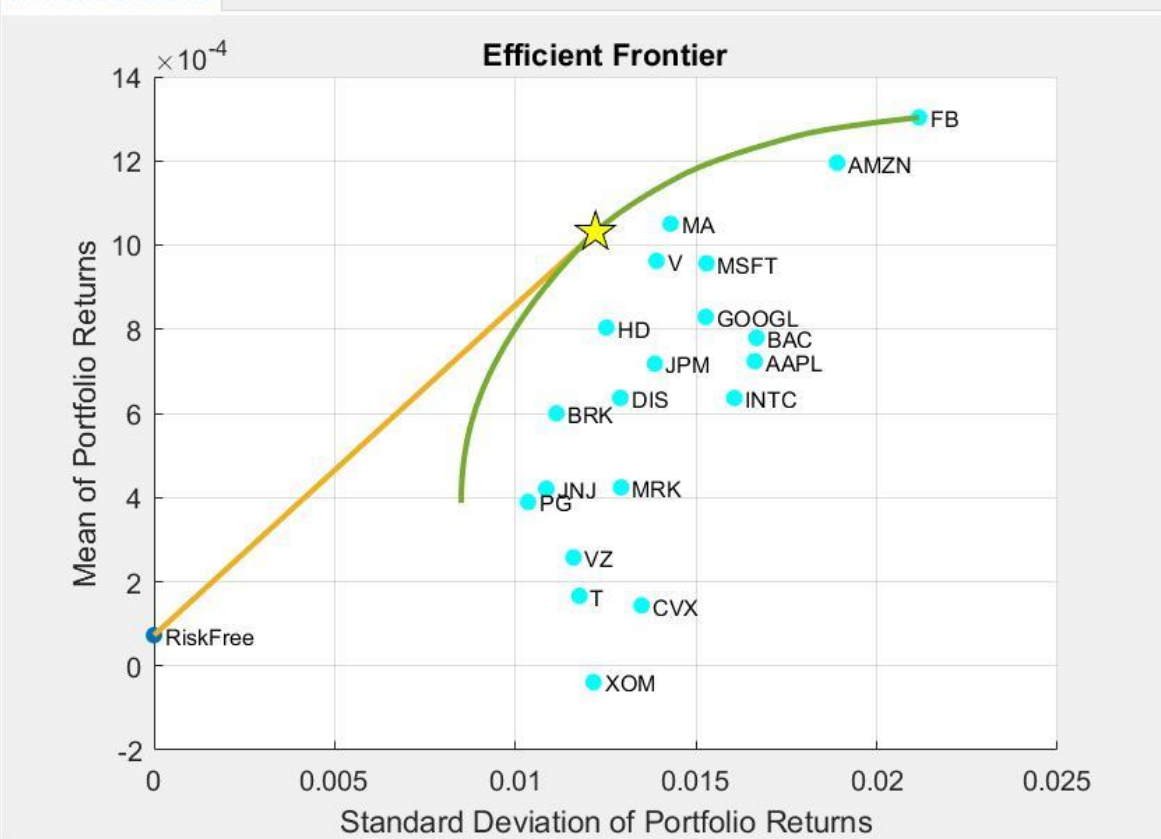


Figura 9. Frontiera efficiente e relativa retta tangente, originata nel punto corrispondente al titolo privo di rischio, in assenza di vendite allo scoperto.

Nella Figura 9, oltre alla frontiera efficiente e al portafoglio ottimo rappresentato dalla stella, è stata riportata anche la retta tangente alla frontiera stessa, avente origine nel punto che identifica il titolo risk-free: esso ha infatti deviazione standard nulla e rendimento attesi pari a $7,2 \times 10^{-5}$, corrispondente all'1,9% annuo del titolo americano riportato in base giornaliera. La combinazione trovata nel punto di tangenza tra retta e frontiera efficiente è il portafoglio ottimo cercato, ovvero che massimizza l'indice di Sharpe; in particolare, il portafoglio ha rendimento atteso pari allo 0,10% mentre il rischio è dato dalla deviazione standard dell'1,22%. Entrambi i valori sono maggiori rispetto a quelli trovati fissando il rendimento obiettivo, in quanto utilizzando una massimizzazione non vincolata si riesce a trovare l'ottimo globale relativo alla frontiera efficiente presa in esame.

Titolo	Ticker	Composizione (%)
Microsoft	MSFT	28,1452
Apple	AAPL	-2,1715
Amazon	AMZN	17,6025
Facebook	FB	25,8638
Berkshire Hathaway	BRK	30,0609
JPMorgan Chase	JPM	34,6645
Google	GOOGL	-16,4124
Johnson & Johnson	JNJ	2,6388
Procter and Gamble	PG	21,6027
Exxon Mobil	XOM	-100,0000
Visa	V	7,6406
AT&T	T	-37,3433
Home Depot	HD	53,7566
Verizon	VZ	3,3281
Bank of America	BAC	-8,5796
Mastercard	MA	46,4149
Disney	DIS	15,5311
Intel Corporation	INTC	-5,6410
Chevron Corporation	CVX	-14,8942
Merck & Co.	MRK	-2,2077

Tabella 25. Composizione del portafoglio con massimizzazione dell'indice di Sharpe e con short selling: in arancione sono segnalati i titoli da vendere.

Inserendo la possibilità di vendite allo scoperto, come già osservato in precedenza, sia il rendimento atteso che la volatilità del portafoglio aumentano ma, di nuovo a causa dell'assenza di un vincolo su uno di questi due parametri, il loro cambiamento è ancora maggiore rispetto al caso di rendimento fissato: il primo diventa infatti 0,21% (più del doppio rispetto allo scenario senza *short selling*), mentre la deviazione standard è pari al 1,98%. Questo si spiega di nuovo tramite lo sfruttamento di posizioni sia corte che lunghe, che permettono di ottenere risultati estremi grazie al meccanismo della diversificazione; si osserva per esempio che la quota relativa alla vendita allo scoperto di Exxon non è più del 10% ma passa ad essere totale. Inoltre, è importante sottolineare come, proprio grazie al meccanismo di diversificazione, ad un incremento del rendimento atteso del 107% rispetto al caso senza vendite allo scoperto corrisponda un aumento “solo” del 62% del rischio: la combinazione di posizioni corte e lunghe permette di mitigare il rischio meglio rispetto all'utilizzo di sole posizioni lunghe.

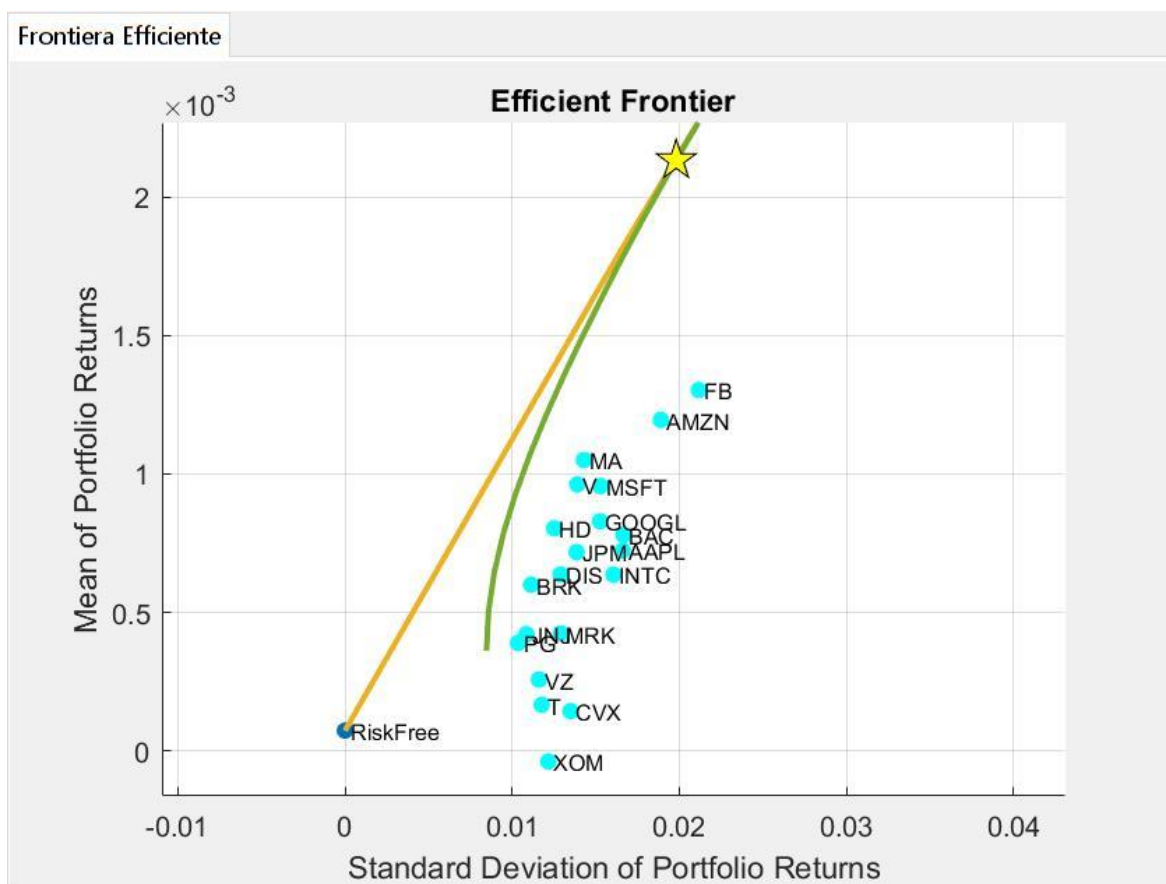


Figura 10. Frontiera efficiente e relativa retta tangente, originata nel punto corrispondente al titolo privo di rischio, in presenza di vendite allo scoperto.

La curva assume l'andamento particolare già osservato in precedenza a causa dello *short selling*, che permette di ottenere risultati estremi: il portafoglio ottimo in questo caso ha un rendimento molto maggiore rispetto a quello del titolo più performante (Facebook) ma mantiene una rischiosità più bassa. Si deve sempre tenere in considerazione, però, il discorso relativo all'esposizione finanziaria, che nel caso di massimizzazione non vincolata assume valori ancora più marcati: se infatti senza vendite allo scoperto si utilizza 1€ come investimento, in loro presenza il patrimonio investito diventa di 4,75€, esponendo l'investitore ai rischi che ne derivano e che non vengono percepiti dal modello matematico. Di seguito viene riportato un riassunto dei risultati ottenuti nelle varie ottimizzazioni:

Portafoglio	Rendimento atteso (%)	Deviazione Standard (%)
Rendimento fissato	0,0600%	0,8858%
Rendimento fissato e short selling	0,0600%	0,8800%
Massimizzazione di Sharpe	0,1031%	1,2216%
Massimizzazione di Sharpe e short selling	0,2133%	1,9815%

Tabella 26. Rendimenti attesi e deviazioni standard dei portafogli ottimi ottenuti.

Fragilità del modello

Come già accennato in precedenza, il modello di Markowitz presenta diverse fragilità che ne limitano l'utilizzo nelle applicazioni reali: innanzitutto, riduce l'importanza dei managers poiché, basandosi unicamente su media e varianza, non necessita di opinioni personali di esperti del settore. Di più, i gestori dei fondi tendono di solito a focalizzarsi su un piccolo segmento del potenziale universo di investimenti (selezione di azioni e altri asset che ritengono sottovalutati, ricerca di asset in fase di crescita, nicchie di mercato estremamente profittevoli), mentre la teoria di Markowitz necessita, irrealisticamente, di specificare il rendimento atteso di ogni asset presente all'interno dell'universo che si vuole analizzare. Inoltre, l'ottimizzazione rispetto alla media ed alla varianza implica un *trade-off* rischio/rendimento lungo la frontiera efficiente ed i pesi del portafoglio sono il risultato di questa relazione. In realtà però i manager ragionano direttamente in termini di pesi, trovando il procedimento per derivare pesi da un processo di ottimizzazione non intuitivo e perciò inappropriato per essere implementato per la composizione dei portafogli dei clienti^[6].

Un altro aspetto limitante del modello, dal punto di vista matematico, è che il procedimento porta ad una massimizzazione dell'errore di stima, intendendo con errore di stima la possibilità di commettere errori nel calcolo del portafoglio dovuta a imprecisioni nella stima degli input necessari per il processo di ottimizzazione. Questo porta infatti a sovrastimare i titoli che presentano un elevato rendimento atteso, correlazioni negative e bassa varianza, facendo di questi i componenti privilegiati del portafoglio; sono però proprio questi asset quelli maggiormente soggetti alla possibilità di errore di stima. Ne derivano spesso composizioni fortemente concentrate in pochi titoli ad alto rendimento e bassa volatilità, scenario poco plausibile nella realtà che tende invece a preferire portafogli composti da quote più piccole ma numero maggiore di asset. Questo è un limite importante ma superabile, per esempio grazie all'aiuto di vincoli applicati all'interno del modello che ne indirizzino il comportamento, in modo da avere quote massime o minime per ogni titolo e ridurre quindi il fenomeno della concentrazione.

⁶ He e Litterman, The intuition behind Black-Litterman model portfolios, 1999

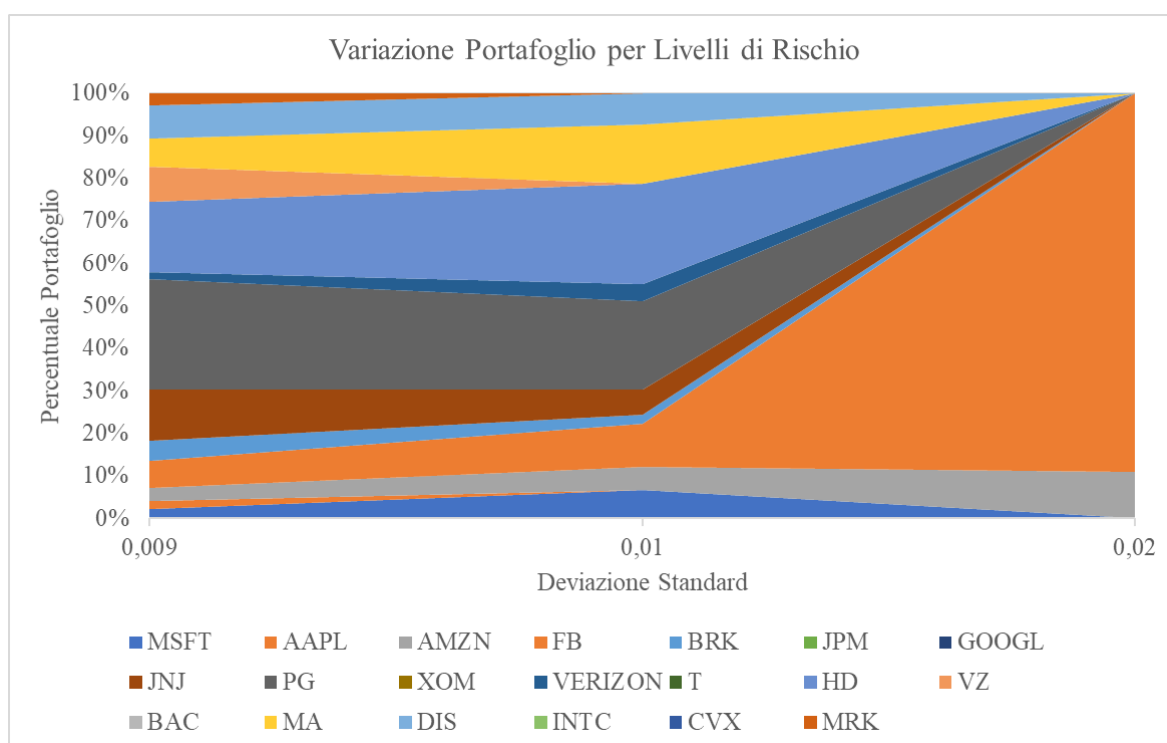


Figura 11. Variazione della composizione di portafoglio a seconda del livello di rischio.

La Figura 11 riporta una rappresentazione grafica del problema relativo alla concentrazione: è stata fatta variare la composizione ottima di portafoglio in dipendenza dal valore di deviazione standard e senza vendite allo scoperto, in modo da ottenere scenari corrispondenti a tre livelli di rischio diverso; si nota come già con rischio ridotto i titoli acquistati non siano 20 ma 13, e questo comportamento risalta ancor di più con rischio elevato: come già accennato in questo caso il modello di media-varianza tende a preferire un determinato tipo di titolo (alto rendimento atteso, bassa varianza e correlazioni negative), ritrovandosi con due soli titoli in portafoglio.

L'ultimo e forse più importante limite del modello di Markowitz è la forte instabilità dei suoi risultati in seguito a cambiamenti dei dati in input: basandosi puramente su medie e varianze, infatti, ad una piccola variazione dei rendimenti attesi o della matrice delle varianze-covarianze, le composizioni del portafoglio ottimo "esplodono", portando a variazioni più che proporzionali rispetto a quelle operate sui dati in ingresso. Nella realtà dei fondi di gestione, le variazioni nelle stime degli input, dovuti ad esempio a nuove previsioni di mercato, sono abbastanza frequenti e di conseguenza lo è anche l'aggiornamento del portafoglio ottimo, che vede di volta in volta la modifica della sua composizione interna; se però la variazione di composizione non porta ad un evidente miglioramento della performance del portafoglio, il cliente rimane giustamente insoddisfatto, in quanto paga costi di transazione virtualmente inutili perdendo anche fiducia nel

manager stesso. Questo meccanismo è ben spiegato da Best e Grauer che nel loro articolo del 1991, *On the sensitivity of mean-variance-efficient portfolios to changes in assets means: Some analytical and computational results*, mostrano come la variazione del rendimento atteso di un solo asset all'interno di un portafoglio composto da 10 elementi ne sconvolga la composizione senza però trovare un riscontro nella nuova performance; in particolare, nell'articolo viene dimostrato come un incremento del 50% del rendimento atteso del primo asset faccia uscire dal portafoglio metà degli altri titoli, variando rendimento e varianza complessivi solo del 13%.

È stato dunque applicato lo stesso ragionamento al nostro set di dati, per controllarne l'instabilità dovuta ad una leggera variazione dei dati in input: sono stati elaborati tre scenari nei quali il solo rendimento atteso di un titolo veniva aumentato del 5%, senza andare ad intaccare la matrice delle varianze e covarianze; se nel primo scenario l'asset incrementato è Microsoft, nel secondo scenario gli si aggiunge Apple e nel terzo Amazon, in modo da valutare sia l'apporto di un singolo cambiamento che quello di più variazioni congiunte. Di seguito vengono riportati i risultati relativi alle composizioni dei portafogli nei tre diversi scenari con i relativi scostamenti percentuali rispetto allo scenario di partenza.

Ticker	Base	Scenario 1	Scostamenti	Scenario 2	Scostamenti	Scenario 3	Scostamenti
MSFT	28,1452%	37,4361%	9,2909%	36,7707%	8,6254%	35,7143%	7,5691%
AAPL	-2,1715%	-2,9155%	-0,7441%	1,1063%	3,2778%	0,8716%	3,0430%
AMZN	17,6025%	16,8345%	-0,7679%	16,6417%	-0,9608%	23,1542%	5,5518%
FB	25,8638%	26,0719%	0,2080%	25,7397%	-0,1242%	24,7468%	-1,1171%
BRK	30,0609%	29,9462%	-0,1147%	29,5041%	-0,5567%	29,6586%	-0,4022%
JPM	34,6645%	34,1286%	-0,5359%	33,8944%	-0,7701%	34,3361%	-0,3283%
GOOGL	-16,4124%	-18,5032%	-2,0908%	-18,9372%	-2,5248%	-21,2563%	-4,8439%
JNJ	2,6388%	2,6586%	0,0198%	2,8074%	0,1686%	2,5355%	-0,1034%
PG	21,6027%	21,0404%	-0,5623%	20,7697%	-0,8331%	21,1777%	-0,4250%
XOM	-100,0000%	-100,0000%	0,0000%	-100,0000%	0,0000%	-100,0000%	0,0000%
V	7,6406%	6,8189%	-0,8217%	6,8916%	-0,7489%	6,5182%	-1,1224%
T	-37,3433%	-37,0518%	0,2915%	-37,2114%	0,1320%	-37,4039%	-0,0606%
HD	53,7566%	53,8430%	0,0864%	53,3734%	-0,3832%	52,8773%	-0,8793%
VZ	3,3281%	2,4168%	-0,9113%	2,7329%	-0,5952%	3,2127%	-0,1154%
BAC	-8,5796%	-8,3512%	0,2284%	-8,3450%	0,2346%	-8,6141%	-0,0344%
MA	46,4149%	45,6529%	-0,7620%	44,8881%	-1,5268%	43,1154%	-3,2995%
DIS	15,5311%	15,5865%	0,0554%	15,4416%	-0,0895%	15,1039%	-0,4272%
INTC	-5,6410%	-7,6018%	-1,9607%	-8,1292%	-2,4882%	-7,9868%	-2,3457%
CVX	-14,8942%	-15,6459%	-0,7516%	-15,5361%	-0,6419%	-15,7545%	-0,8603%
MRK	-2,2077%	-2,3651%	-0,1574%	-2,4026%	-0,1950%	-2,0067%	0,2009%

Tabella 26. Composizioni di portafoglio nei diversi scenari e relativi scostamenti rispetto all'originale.

Per ogni scenario sono poi stati registrati i relativi rendimenti attesi e deviazioni standard, in modo da valutarne le performance e metterle a confronto con quella originale; sono state anche valutate le variazioni delle composizioni dei portafogli in valore assoluto, in modo da avere una misura dei cambiamenti relativi alle loro strutture in ogni scenario.

	Base	Caso 1	Δ (%)	Caso 2	Δ (%)	Caso 3	Δ (%)
Deviazione standard	0,0198	0,0201	1,2620	0,0200	0,9426	0,0201	1,5432
Rendimento	0,0021	0,0022	1,9585	0,0022	1,6324	0,0022	2,7760
Variazione Portafoglio			20,360		24,876		32,729

Tabella 27. Confronto tra performance originale e degli scenari.

I risultati sono in linea con quelli ottenuti da Best e Grauer: per un incremento del 5% del rendimento atteso di Microsoft, il portafoglio cambia la propria composizione del 20% mentre rendimento atteso e deviazione standard aumentano solo del 2% e 1% rispettivamente; questo comportamento è confermato anche dagli altri due scenari ed in particolare dall'ultimo, in cui il portafoglio varia di un terzo rispetto a quello originale ottenendo però incrementi di performance estremamente ridotti. Chiaramente in assenza di costi di transazione non ci sarebbero problemi: se acquistare e vendere titoli non avesse costi, anche un grosso cambiamento sarebbe accettabile per ottenere un piccolo incremento di performance; nella realtà però questi costi esistono, ed è quindi normale che un investitore sia scettico in relazione ad un modello che potrebbe portarlo a cambiare i propri investimenti molto spesso senza però ottenere pari benefici.

L'approccio di Markowitz fu innovativo perché diede maggior risalto alla diversificazione, portandola in primo piano nella scelta degli investimenti; tuttavia il modello presenta le fragilità appena viste, che ne hanno limitato molto l'utilizzo nel mondo reale. Per questo si è reso necessario pensare ad un metodo innovativo, che mettesse al centro non più i dati in ingresso ma le opinioni dei manager che operavano gli investimenti, giustificando i maggiori costi con l'esperienza nel settore ed una conseguente maggiore stabilità: in quest'ottica nacque il modello di Black e Litterman.

Portafoglio di Black e Litterman

Il procedimento si basa sull'approccio di equilibrio e sulla definizione delle views, che vengono infine combinati tramite l'applicazione del teorema di Bayes; da questo si ricavano i nuovi rendimenti di Black e Litterman, da inserire poi all'interno del classico sistema di ottimizzazione già visto con Markowitz, implementato attraverso l'utilizzo del Financial Toolbox di Matlab.

Definizione dei parametri per l'approccio di equilibrio

Come si è visto nella teoria relativa al modello, il fine ultimo dell'approccio di equilibrio è definire la distribuzione dei rendimenti attesi di equilibrio $E(R)$, in modo da poterli in seguito utilizzare come base su cui applicare le view; ricordando l'equazione [3]:

$$E(R) \sim N(\Pi, \tau\Sigma)$$

avendo definito in precedenza la media come $\Pi = \lambda\Sigma w_{mkt}$, Σ è la matrice delle varianze e covarianze già vista nel modello di Markowitz e τ è uno scalare il cui comportamento è già stato presentato in precedenza. Per continuare l'analisi è quindi necessario specificare quali valori numerici sono stati dati a ciascun parametro, con le relative motivazioni.

- λ

Il coefficiente di avversione al rischio λ sintetizza il trade-off tra rischio e rendimento atteso del mercato; per il suo calcolo si utilizza la formula proposta da Idzorek nel suo paper, *A Step by Step Guide to the Black-Litterman Model* del 2004:

$$\lambda = \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M^2}$$

in cui al numeratore compare il “premio per il rischio”, ovvero la differenza tra il rendimento del mercato ed il rendimento del titolo privo di rischio, mentre al denominatore viene posto il rischio relativo al mercato in cui si opera, espresso come la sua varianza. Nella nostra applicazione per descrivere il mercato sono state utilizzate la media e la varianza relative ai

log-rendimenti dell'S&P500 nel periodo che va dall'8/11/2012 all'8/11/2019, dopo aver riportato i dati in euro in modo da essere coerenti con i dati utilizzati per i titoli; per il risk free, come già detto, è stato utilizzato il titolo di stato statunitense a 3 mesi, pari all'1,9% su base annuale. È stato dunque ottenuto il valore dell'avversione al rischio come:

$$\lambda = \frac{0,000516 - 0,000073}{0,009460} = 4,956577$$

- w_{mkt}

Il vettore composto dalle quote di portafoglio di mercato si ottiene facilmente a partire dalle capitalizzazioni di mercato dei singoli titoli rapportate alla capitalizzazione totale del campione; in questo modo ogni componente del vettore si ricava come:

$$w_i = \frac{c_i}{c_{TOT}}$$

Di seguito vengono riportate le diverse capitalizzazioni ed il vettore w_{mkt} :

Ticker	MarketCap (m\$)	MarketShare (w)
MSFT	1143939,402	13,6670%
AAPL	1179083,906	14,0869%
AMZN	864888,5025	10,3331%
FB	479344,4059	5,7269%
BRK	303310,139	3,6237%
JPM	417573,7248	4,9889%
GOOGL	396712,2617	4,7396%
JNJ	367330,4307	4,3886%
PG	310379,8475	3,7082%
XOM	289280,7217	3,4561%
V	311006,7704	3,7157%
T	279160,575	3,3352%
HD	232559,7193	2,7785%
VZ	251393,6431	3,0035%
BAC	298367,7125	3,5647%
MA	289419,8538	3,4578%
DIS	266827,0427	3,1879%
INTC	243817,5	2,9130%
CVX	220142,7145	2,6301%
MRK	225561,4651	2,6948%

Tabella 28. Capitalizzazione di mercato delle aziende analizzate in miliardi di dollari e relativo peso percentuale all'interno del vettore w_{mkt} .

- Π

Il vettore degli extra rendimenti impliciti si ottiene come prodotto dei due fattori appena definiti e la matrice delle varianze e covarianze Σ ; il vettore così ottenuto rappresenta gli eccessi di rendimento che il mercato assegna ai titoli, impliciti nella loro capitalizzazione. Trattandosi di extra rendimenti, il passo successivo è sommare al vettore appena trovato il tasso risk-free, che riportato su base giornaliera ha valore pari a $7,3 \times 10^{-5}$, in modo da trovare il vero e proprio vettore dei rendimenti neutrali del mercato.

Ticker	Extra-Rendimenti Impliciti	Rendimenti Neutrali (Π)
MSFT	0,0650%	0,0722%
AAPL	0,0637%	0,0710%
AMZN	0,0736%	0,0809%
FB	0,0698%	0,0771%
BRK	0,0458%	0,0531%
JPM	0,0539%	0,0612%
GOOGL	0,0616%	0,0689%
JNJ	0,0360%	0,0433%
PG	0,0300%	0,0372%
XOM	0,0417%	0,0490%
V	0,0570%	0,0642%
T	0,0331%	0,0404%
HD	0,0445%	0,0518%
VZ	0,0312%	0,0385%
BAC	0,0596%	0,0669%
MA	0,0598%	0,0670%
DIS	0,0437%	0,0510%
INTC	0,0562%	0,0635%
CVX	0,0435%	0,0508%
MRK	0,0383%	0,0456%

Tabella 29. Extra-rendimenti e rendimenti veri e propri relativi ai titoli analizzati.

Da un confronto con i rendimenti storici utilizzati per il modello di Markowitz emerge che quelli trovati ora sono estremamente più contenuti, in linea con il pensiero di Black e Litterman: il vettore Π riporta i rendimenti attesi da parte del mercato che, tornando sempre in una situazione di equilibrio sul lungo periodo, sottintende che le oscillazioni nei rendimenti dei titoli che lo compongono saranno contenute.

- τ

Il parametro τ , come già spiegato nella teoria del modello, non influisce particolarmente sui risultati e dunque per determinarne il valore si possono utilizzare diversi metodi. Per la nostra applicazione è stato scelto quello proposto da Blamont e Firoozye (2003), che interpretano $\tau\Sigma$ come l'errore standard della stima dei rendimenti attesi d'equilibrio e pertanto lo scalare τ è approssimativamente pari a 1 diviso il numero delle osservazioni; nel nostro caso le osservazioni coincidono con i titoli, la cui numerosità è pari a 20, e perciò il valore scelto per il parametro è 0,05.

A partire dai parametri così trovati si può quindi descrivere la distribuzione dei rendimenti attesi di equilibrio tramite la normale multivariata di media Π e varianza $\tau\Sigma$, tenendo quindi presente dello *shrinkage factor* τ per quanto riguarda il calcolo di quest'ultima; per mostrare la differenza rispetto al modello di Markowitz è stato analizzato l'andamento del portafoglio costruito a partire dai rendimenti impliciti per diversi livelli di rischio.

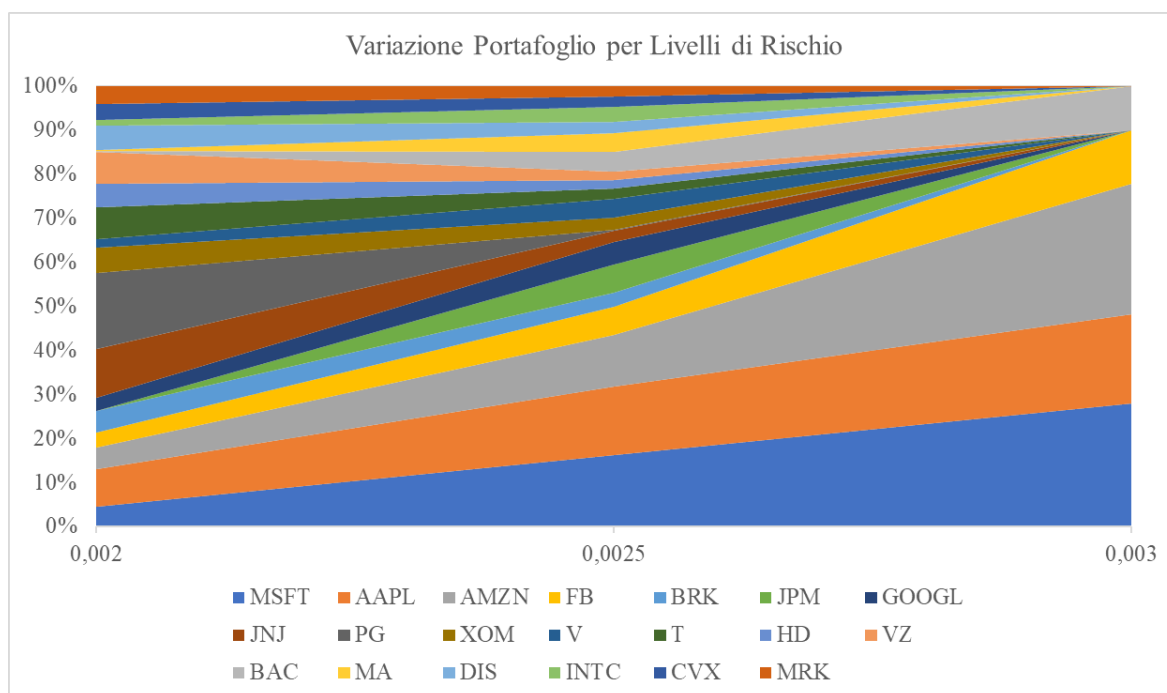


Figura 12. Variazione della composizione di portafoglio a seconda del livello di rischio.

Con le dovute proporzioni legate al differente ordine di grandezza tra i rendimenti impliciti e quelli storici utilizzati in precedenza, si nota come la composizione sia più eterogenea,

presentando tutti e 20 i titoli al livello minimo di rischio e mantenendone comunque 7 a livello massimo, ovvero più del doppio rispetto al caso visto in precedenza. Questo avviene proprio grazie all'efficienza del mercato, che mantiene lo stesso andamento sul lungo periodo, evitando grandi oscillazioni.

Definizione delle view

L'aspetto innovativo del modello di Black e Litterman è proprio l'introduzione all'interno del processo di ottimizzazione delle opinioni dei manager, che indirizzano gli investimenti non solo a seconda di media e varianza del data set ma seguendo anche le proprie intuizioni; le view vengono definite come matrici P e q , a cui si aggiunge la matrice Ω che riporta il livello di confidenza nell'assunzione di ciascuna aspettativa. Di seguito viene riportato l'elenco delle view elaborate in collaborazione con Fondaco, descrivendo i ragionamenti e dettagliando i dati utilizzati per l'analisi; in particolare, sono stati presi in considerazione gli ultimi *earnings report* disponibili per ogni azienda, in modo da valutare l'andamento del trimestre più recente rispetto allo stesso trimestre dell'anno precedente. Inoltre, sono stati tenuti in considerazione i P/E, ovvero il rapporto tra prezzo del titolo ed i suoi *earnings per share*; questo indicatore è universalmente riconosciuto come uno dei più importanti a livello finanziario, poiché indica quanto un'azienda sia sopravvalutata rispetto ai profitti che fa pervenire agli azionisti. Un *ratio* particolarmente elevato significa infatti che un investitore deve aspettarsi di investire più denaro nel titolo rispetto a quanto quest'ultimo sia in grado di restituire, implicando quindi che ci siano delle opportunità di crescita importanti che spingono la valutazione del titolo stesso.

- **Microsoft – View Assoluta**

Microsoft ha riportato risultati eccellenti per quanto riguarda il trimestre conclusosi a settembre 2019; in particolare i ricavi totali sono stati pari a 33 miliardi di dollari, rispetto ai 29 nello stesso periodo dell'anno precedente. Inoltre, l'aumento delle vendite non è legato ad un'espansione che ne avrebbe aumentato i costi operativi, in quanto anche il reddito operativo è aumentato di circa tre miliardi, passando da 9,9 a 12,7 miliardi di dollari per lo stesso trimestre. Anche gli utili netti e gli *earnings per share* (EPS) sono aumentati di pari passo, testimoniando non solo una buona performance dal punto di vista del business ma

anche un'ottima gestione aziendale. Negli ultimi anni Microsoft ha sempre tenuto altissimi ritmi di crescita, ma in quest'ultimo trimestre ha fatto registrare nuove partnership con T-Mobile, provider telefonico statunitense, e Nokia per progetti relativi a streaming videoludico, intelligenza artificiale ed Internet of Things; inoltre, gli ottimi risultati del trimestre sono fortemente legati alla performance straordinaria fatta registrare dal cloud commerciale dell'azienda, chiamato Azure, che è cresciuto del 36% rispetto all'anno precedente, conquistando il secondo posto per market share dopo Amazon Web Services. In generale Microsoft mantiene un PE Ratio di 28, minore rispetto alla media del settore del Computer Software a cui appartiene, pari a 45: dati gli importanti risultati ottenuti questo valore è sintomo di una sottovalutazione da parte del mercato, in quanto le opportunità di crescita sono elevate. Per questo motivo si è deciso di applicare una view assoluta che includesse una crescita importante dell'azienda.

- Apple – View Assoluta

Per l'ultimo trimestre Apple ha fatto registrare risultati in linea con quelli che gli analisti si aspettavano per quanto riguarda il fatturato, che ha toccato i 64 miliardi di dollari, in crescita del 2% rispetto all'anno passato; tuttavia, il 2019 si è chiuso in negativo per l'azienda, che ha avuto introiti totali pari a 260 miliardi contro 265 dell'anno precedente, con un calo ancora maggiore nei proventi operativi, passati da 70 a 63 miliardi. Questo andamento è legato principalmente alle vendite di iPhone, prodotto che da solo produce circa il 50% dei ricavi totali: la scena si è arricchita di competitor a livello globale, ed in particolare in Cina dove Huawei ha scalzato la Apple come primo produttore di smartphone, togliendole di fatto il più importante mercato per introiti. Sebbene il quarto trimestre dell'anno abbia visto una crescita importantissima di Services, Wearables e iPad rispetto l'anno precedente, questi compongono una parte troppo piccola del fatturato di Apple per poter porre rimedio al calo legato agli iPhone. L'azienda ha un PE Ratio in linea con quello del settore, pari a 22, sintomo che il mercato valuta in modo equo il suo prezzo, grazie alle solide performance degli anni passati; ciò significa che le opportunità di crescita sono simili a quelle dei competitor, e quindi il titolo non è in realtà particolarmente appetibile. Per queste ragioni è stata scelta una view leggermente negativa.

- Visa e Mastercard – View Relativa

Visa e Mastercard operano nel settore dei servizi finanziari, e sono aziende molto simili come business e impostazione. La prima ha registrato un fatturato pari a 6 miliardi nell'ultimo trimestre, mentre la seconda si è fermata a 4,5; tuttavia, se per Mastercard questo ha significato un incremento del 12,2% rispetto all'anno precedente, per Visa invece la crescita è stata pari all'11,5%. Andando a valutare le performance di prodotto, si trova che l'incremento di transazioni per Visa è stato dell'11% rispetto all'anno precedente, mentre Mastercard ha registrato un incremento del 21%, quasi il doppio; inoltre, quest'ultima ha acquistato TransFast, compagnia che si occupa di facilitare le transazioni tra nazioni diverse e presente già in 125 paesi, ed ha stretto una partnership strategica con R3, importante azienda che si occupa di software per blockchain: proprio quest'ultimo accordo è visto dagli analisti come fortemente vantaggioso nel paragone con i rivali di Visa, in quanto permette di essere avvantaggiati in un campo nuovo e su cui si ritiene si svolgeranno le prossime sfide importanti. Per concludere, il PE Ratio di Visa è in linea con quello settoriale, pari a 31, mentre per Mastercard si ha un valore di 42: il mercato ritiene quindi che le opportunità di crescita siano maggiori per la seconda azienda; per questi motivi, la view relativa che interessa entrambe è mediamente a favore di Mastercard.

- Exxon Mobil e Chevron Corporation – View Relativa

L'industria petrolifera, soprattutto americana, ha subito negli ultimi anni dei cambiamenti importanti a causa dell'avvento dello *shale oil*, che ne ha chiaramente intaccato i profitti: sia Exxon che Chevron hanno fatto registrare trimestri in negativo rispetto all'anno precedente, con ricavi rispettivamente pari a 65 e 36 miliardi di dollari; tuttavia, se per la prima questi risultati hanno significato un calo del 21%, per la seconda si è trattato del 18%. La differenza più importante, però, si ha comparando l'andamento degli utili netti: per Exxon si tratta infatti di 3 miliardi nel 2019 contro i 6 dell'anno precedente, pari ad un calo del 50%, mentre per Chevron si tratta di 2,5 miliardi contro 4, con un calo del 38%; quest'ultima è infatti la migliore azienda tra le major del petrolio per efficienza nel processo estrattivo, arrivando a raggiungere il breakeven con un prezzo di 51\$ a barile, che le ha permesso di limitare le perdite sugli utili rispetto ai competitor. Inoltre, Exxon ha annunciato di voler disinvestire

negli stabilimenti norvegesi, e ci sono rumors di vendite anche per quanto riguarda quelli del Golfo del Messico, mentre Chevron continua ad attuare una politica di investimenti mirati nel bacino Permiano alla ricerca di nuovi giacimenti di *shale oil* ma anche nel Golfo stesso. Gli indici PE delle due aziende sono sostanzialmente simili (20 e 17) e pari circa al doppio di quello del settore; la differenza di efficienza non impatta su questo indicatore in quanto Exxon distribuisce molti più dividendi di Chevron, “gonfiando” la valutazione da parte del mercato. La view relativa pende quindi a favore di Chevron con intensità media.

- Intel Corporation – View Assoluta

Il settore dei semiconduttori, a cui appartiene Intel, è sicuramente uno di quelli rimasti maggiormente colpiti dalla guerra dei dazi tra USA e Cina negli ultimi anni; se infatti i ricavi non sono cambiati rispetto all’anno scorso per quanto riguarda l’ultimo trimestre, i proventi operativi sono scesi del 13,5% da 7,4 a 6,4 miliardi di dollari. Questa differenza è dovuta alle politiche attuate dall’azienda per far fronte alla crisi accennata in precedenza, che l’ha vista costretta a ridurre i prezzi di vendita per non diminuire eccessivamente i volumi, intaccando però in questo modo la gestione dei costi. Inoltre, Intel ha perso la leadership del mercato a favore di Samsung che già nel 2017 l’aveva superata per market share conquistando il primo posto con il 14,6% contro il 13,8%, ma che ha soprattutto allungato le distanze nel 2018 portandosi al 16%, mentre Intel è rimasta stabile; l’azienda ha anche dovuto affrontare la “rinascita” di AMD, i rivali storici nella produzione di microprocessori, che sono tornati competitivi grazie a nuovi modelli a prezzi modesti. Anche per queste ragioni il PE Ratio di Intel è pari a 13, circa la metà rispetto a quello del settore, sintomo di come il mercato faccia fatica a credere nell’azienda rispetto ai competitor; la view adottata è negativa con intensità media e non forte, in quanto la compagnia ha fatto registrare segnali di ripresa in quest’ultimo trimestre.

- Procter and Gamble – View Assoluta

Nell’ultimo trimestre P&G ha fatto registrare un aumento dei ricavi, passati da 16,7 a 17,8 miliardi di dollari, con un parallelo aumento dei proventi operativi da 3,5 a 4,3 miliardi: ad una crescita del 6,5% dei primi è corrisposto un incremento del 22,9% dei secondi, sintomo di quanto l’azienda sia in grado di gestire i propri costi ed il processo produttivo. Fino al

2018 P&G si trovava in una situazione stagnante, in quanto non riusciva a penetrare nuovi mercati o ad abbassare i costi; poi, negli ultimi due anni, grazie a tagli nella gestione e riorganizzazione del management, le performance aziendali sono tornate ad essere in forte crescita; per questo il PE Ratio è estremamente maggiore rispetto a quello del settore (77 contro 26), e quindi la view espressa è positiva con intensità media, in quanto sebbene l'andamento sia più che positivo, non è legato ad avvenimenti singoli particolari che possano rivelarsi estremamente proficui ma a semplici riorganizzazioni aziendali.

- AT&T e Verizon – View Relativa

Le due compagnie di comunicazioni americane sono molto simili per andamento e struttura: entrambe hanno fatto registrare trimestri in linea con quelli dell'anno precedente, anche se AT&T è risultata in leggero calo (-2,6%) al contrario di Verizon, mentre i proventi operativi sono aumentati per entrambe, sintomo di una gestione dei costi efficiente. La grossa differenza tra le due aziende è l'acquisizione nel 2018 di Time Warner, colosso dell'intrattenimento, da parte di AT&T: il mercato non ha valutato positivamente l'espansione in un business che non appartiene alla tradizionale impostazione delle telecomunicazioni, ed il prezzo ha conseguentemente registrato un calo del 22% su tutto l'anno. L'azienda si è poi ripresa, anche grazie agli investimenti sul 5G in USA e all'annuncio del lancio di HBO Max, nuovo servizio di streaming, ma dato il pari sviluppo della rete 5G di Verizon, che possiede anche un market share maggiore, e la minor volatilità del prezzo, si è scelto di applicare una view che favorisse quest'ultima con media intensità.

- Amazon – View Assoluta

Il terzo trimestre di Amazon si è concluso con 70 miliardi di dollari di fatturato, in crescita del 23% rispetto allo stesso periodo dell'anno precedente; tuttavia i proventi operativi sono rimasti stabili, così come gli utili netti. Questa discrepanza è dovuta ai forti investimenti attuati dall'azienda: nuovi centri di smistamento su tutto il suolo americano, la creazione di un centro dedicato allo sviluppo nel campo della robotica e nuovi progetti di stampo eco-friendly in USA e UK. L'azienda ha anche comunicato le proprie previsioni per l'ultimo trimestre del 2019, con vendite in crescita stabile al 20% e proventi operativi in calo rispetto all'anno precedente; anche in questo caso dunque devono essere tenuti in considerazione gli

aspetti legati agli investimenti, che impattano sulle vendite in positivo ma sui profitti in negativo. Amazon ha un PE Ratio enorme se comparato a quello del settore di riferimento, 77 contro 29, tuttavia sarebbe sbagliato prendere questi dati senza analizzarli: l'azienda infatti appartiene al settore del retail in cui si trovano player tradizionali come Walmart, Costco e Tesco, per cui il confronto non è “alla pari”, in quanto opera in realtà tramite canali diversi rispetto alle aziende appena citate. Per Amazon si è quindi deciso di applicare una view solo mediamente positiva, proprio per le conclusioni tratte finora.

Le view descritte finora sono state raccolte nella matrice P, di cui si è già parlato nella teoria del modello, che viene riportata di seguito:

	MSFT	AAPL	AMZN	FB	BRK	JPM	GOOGL	JNJ	PG	XOM	V	T	HD	VZ	BAC	MA	DIS	INTC	CVX	MRK
View 1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
View 2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
View 3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
View 4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
View 5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
View 6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
View 7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0
View 8	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabella 30. Matrice P.

Per quanto riguarda l'entità delle view, e quindi la composizione della matrice q, si è scelto di applicare un valore di rendimento preso dai dati relativi alle aziende, in modo da non dover formulare un'ipotesi astratta basata sulle nostre conoscenze limitate. Essendo le distribuzioni dei log-rendimenti affette da forte curtosi si è scelto di utilizzare valori corrispondenti a quantili della distribuzione relativamente ridotti, per far sì che fossero abbastanza vicini alla media campionaria e indenni dagli effetti degli outliers; in questo modo si è cercato di ridurre l'effetto della forte deviazione standard delle nostre distribuzioni. Perciò, ad una view di bassa intensità è stato associato il quantile pari al 5%, per quelle di media intensità il 10% e per quelle forti il 15%, tenendo presente che per le view relative che riguardando quindi due aziende contemporaneamente il valore va diviso per entrambe (quindi, per esempio, per una view relativa media si è scelto il 5% per entrambe le aziende, in modo da avere un 10% complessivo). La matrice q riporta quindi i valori assoluti dei quantili considerati o, nel caso di view relative, la somma dei due valori assoluti dei quantili; le view sono riportate seguendo l'ordine con cui sono state descritte in precedenza.

View 1	0,00202
View 2	0,00066
View 3	0,00127
View 4	0,00107
View 5	0,00136
View 6	0,00095
View 7	0,00088
View 8	0,00229

Tabella 31. Matrice q .

L'ultima matrice relativa alla definizione delle view è la matrice diagonale Ω , che sostanzialmente ne raccoglie il grado di incertezza; questa è, assieme allo scalare τ detto anche *weight on views*, in assoluto il parametro di più difficile specificazione di tutto il modello. Per la sua determinazione è stato utilizzato il metodo proposto da Idzorek, che consiste nel calibrare Ω in modo proporzionale alla varianza delle view, ovvero $\Omega = \text{diag}(P(\tau\Sigma)P^T)$; in questo modo si otterrà una matrice diagonale i cui valori saranno molto vicini allo zero, e ciò significa che le aspettative vengono formulate con una discreta fiducia.

	View 1	View 2	View 3	View 4	View 5	View 6	View 7	View 8
View 1	1,17E-05	0	0	0	0	0	0	0
View 2	0	1,38E-05	0	0	0	0	0	0
View 3	0	0	3,11E-06	0	0	0	0	0
View 4	0	0	0	3,47E-06	0	0	0	0
View 5	0	0	0	0	1,29E-05	0	0	0
View 6	0	0	0	0	0	5,36E-06	0	0
View 7	0	0	0	0	0	0	3,99E-06	0
View 8	0	0	0	0	0	0	0	1,79E-05

Tabella 32. Matrice Ω .

Aggregazione di view e rendimenti d'equilibrio

Dopo aver definito tutti i parametri si può concludere il procedimento risolutivo, ottenendo i rendimenti attesi e la matrice delle varianze e covarianze di Black e Litterman utilizzando le formule già presentate in precedenza:

$$E(r)_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P] \cdot [(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^T\Omega^{-1}q]$$

$$V_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}$$

I risultati così ottenuti sono riportati nella tabella seguente:

Ticker	Medie B&L	Deviazione Standard B&L
MSFT	0,1152%	0,2154%
AAPL	0,0228%	0,2450%
AMZN	0,1471%	0,2791%
FB	0,0958%	0,4183%
BRK	0,0533%	0,1994%
JPM	0,0615%	0,2614%
GOOGL	0,0867%	0,2689%
JNJ	0,0511%	0,2090%
PG	0,0619%	0,1573%
XOM	0,0326%	0,2326%
V	0,0511%	0,2402%
T	0,0210%	0,2263%
HD	0,0550%	0,2377%
VZ	0,0659%	0,2239%
BAC	0,0653%	0,3263%
MA	0,1146%	0,2411%
DIS	0,0486%	0,2505%
INTC	-0,0049%	0,2344%
CVX	0,0896%	0,2496%
MRK	0,0504%	0,2586%

Tabella 33, Rendimenti e deviazioni standard di Black e Litterman.

Di seguito viene riportato il confronto tra i rendimenti di B&L e quelli impliciti di equilibrio, in modo da sottolineare le differenze dovute all'immissione delle view nel modello.

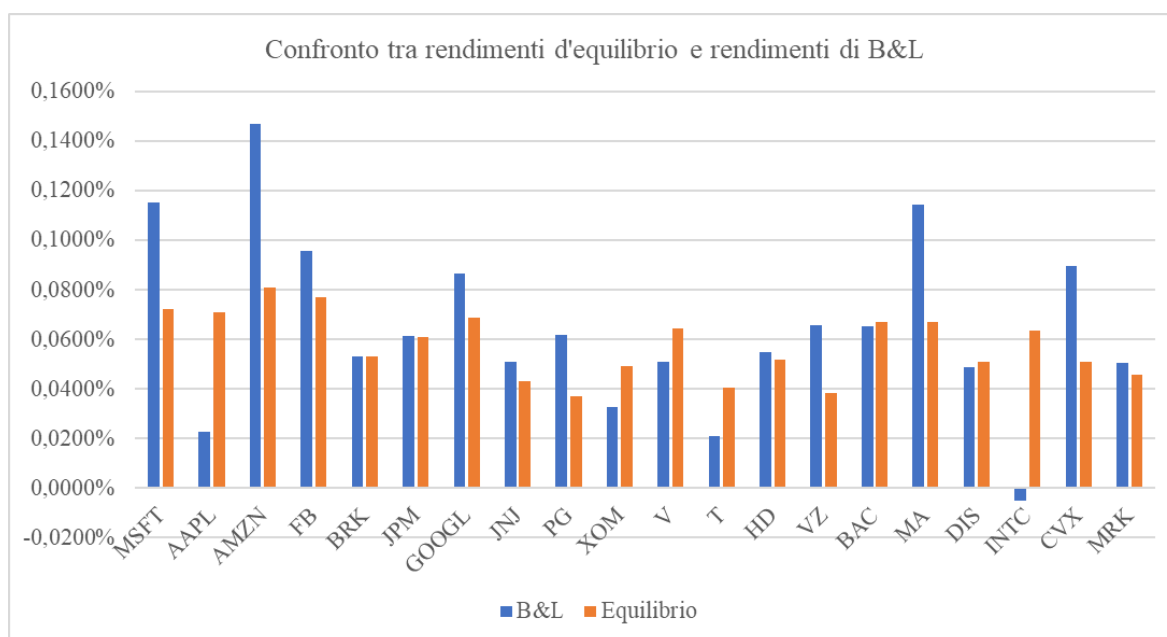


Figura 13. Confronto tra rendimenti di B&L e di equilibrio.

Come si può notare, i rendimenti dei titoli non toccati dalle views non hanno subito variazioni (BRK, JPM) o ne hanno subite di intensità ridotta (GOOGL, FB); al contrario, i titoli che hanno subito cali o crescite di rendimento importanti sono quelli per cui sono stati espressi delle aspettative precise: Microsoft, su cui ci si è espressi in maniera fortemente positiva, è cresciuto di molto mentre Apple è diminuito a causa della view leggermente negativa.

A partire da questi nuovi rendimenti è stato lanciato il processo di ottimizzazione classico già visto per Markowitz, per trovare le nuove composizioni di portafoglio e le loro performance. Un piccolo accorgimento riguarda la varianza della distribuzione dei rendimenti di B&L da inserire come input nell'ottimizzazione: come spiega Meucci nel suo articolo del 2010, *The Black-Litterman Approach: Original Model and Extensions*, la varianza della distribuzione a posteriori rappresenta la varianza della stima della media della distribuzione stessa, e non la varianza dei rendimenti veri e propri $E(r)$. Questo significa che la matrice di varianza e covarianza da inserire nel modello di non è V_{BL} , ma $V^* = \Sigma + V_{BL}$.

Portafoglio con obiettivo di rendimento fissato

Anche in questo caso, come per Markowitz, le ottimizzazioni partono dal procedimento più realistico che consiste nel fissare un obiettivo di rendimento e minimizzare il rischio legato alla composizione di portafoglio utilizzata per ottenerlo; per coerenza è stato posto lo stesso vincolo di rendimento già usato nel modello precedente, pari allo 0,06% giornaliero ovvero circa 17% su base annuale; di seguito verranno riportati i risultati ottenuti senza e successivamente con *short selling*, insieme alle frontiere efficienti relative ad ogni caso.

Titolo	Ticker	Composizione (%)
Microsoft	MSFT	0,0000
Apple	AAPL	1,9042
Amazon	AMZN	2,0816
Facebook	FB	1,5736
Berkshire Hathaway	BRK	0,2438
JPMorgan Chase	JPM	0,0000
Google	GOOGL	0,7824
Johnson & Johnson	JNJ	15,6808
Procter and Gamble	PG	31,0574
Exxon Mobil	XOM	1,3409
Visa	V	0,0000
AT&T	T	6,4305
Home Depot	HD	6,3808
Verizon	VZ	13,5904
Bank of America	BAC	0,0000
Mastercard	MA	0,0000
Disney	DIS	6,1132
Intel Corporation	INTC	0,0000
Chevron Corporation	CVX	8,2968
Merck & Co.	MRK	4,5235

Tabella 34. Composizione del portafoglio senza short selling.

Non si trovano grandi differenze rispetto al modello di Markowitz per quanto riguarda la composizione di portafoglio con rendimento fissato, in quanto l'obiettivo dello 0,06% è facilmente raggiungibile con il pool di titoli messi a disposizione, rendendo quindi i risultati ottenuti con i due metodi abbastanza simili. Di conseguenza, anche le performance di portafoglio non sono molto distanti tra loro: il rendimento è chiaramente pari a quello fissato in partenza, mentre la deviazione standard è ora pari a 0,863%, in leggerissima diminuzione rispetto al caso di Markowitz.

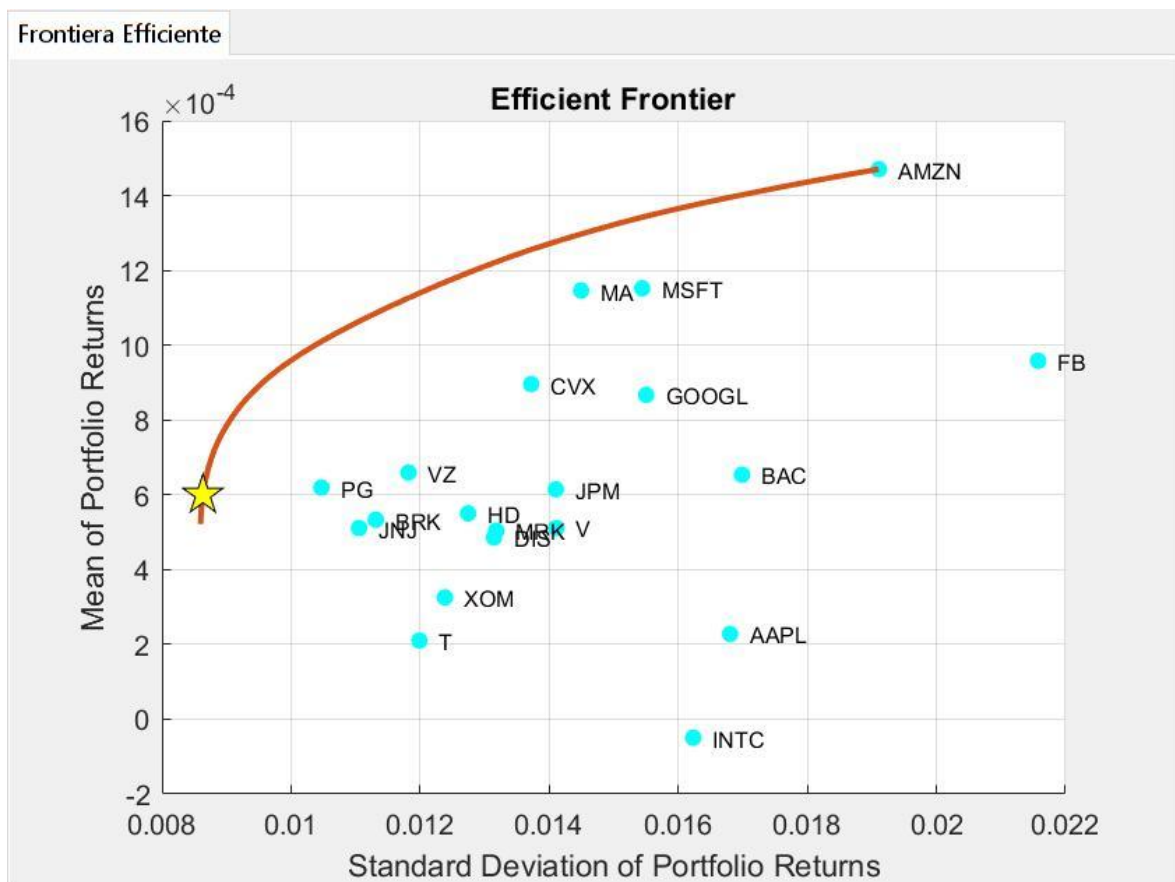


Figura 14. Frontiera efficiente con rendimento fissato.

Dalla rappresentazione della nuova frontiera efficiente con i relativi titoli nel piano rischio-rendimento si nota come l'obiettivo di rendimento fissato per il portafoglio di Markowitz risulti in questo caso quasi pari al portafoglio di minima varianza globale: essendo infatti cambiati i rendimenti del pool di titoli, la frontiera si è a sua volta spostata. Il titolo con il rendimento più elevato, dopo l'applicazione delle view, risulta essere Amazon e non più Facebook, che è rimasto però il più rischioso; inoltre, Exxon ha lasciato l'ultima posizione a Intel come titolo meno performante, con un rendimento addirittura inferiore allo zero.

Titolo	Ticker	Composizione (%)
Microsoft	MSFT	-0,6184
Apple	AAPL	3,0434
Amazon	AMZN	1,6490
Facebook	FB	1,8473
Berkshire Hathaway	BRK	5,4994
JPMorgan Chase	JPM	-3,6210
Google	GOOGL	1,4481
Johnson & Johnson	JNJ	15,7939
Procter and Gamble	PG	30,0935
Exxon Mobil	XOM	3,6985
Visa	V	-4,4374
AT&T	T	7,3828
Home Depot	HD	7,4487
Verizon	VZ	12,6641
Bank of America	BAC	-2,2327
Mastercard	MA	2,4068
Disney	DIS	7,2754
Intel Corporation	INTC	-1,9457
Chevron Corporation	CVX	7,4934
Merck & Co.	MRK	5,1109

Tabella 35. Composizione del portafoglio con short selling.

In caso di *short selling* le differenze rispetto al modello di Markowitz cominciano a vedersi con maggiore evidenza: le posizioni corte non superano mai il 5%, cosa che avveniva in precedenza per quanto riguarda Exxon; questo avviene perché con lo spostamento della frontiera efficiente, il rendimento obiettivo è estremamente prossimo a quello di minima varianza, e quindi risulta difficile ridurre il rischio tramite l'utilizzo di posizioni lunghe e corte che non vengono per questo motivo sfruttate più di tanto.

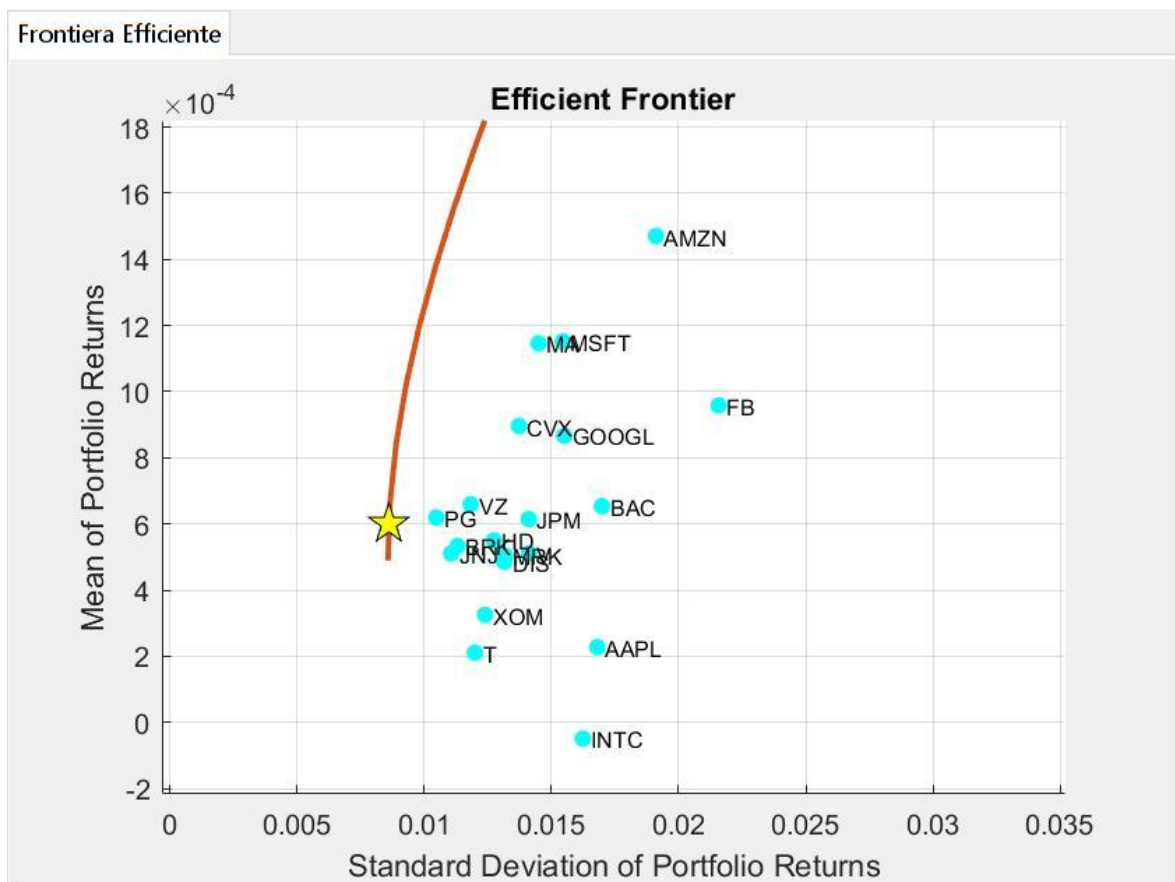


Figura 15. Frontiera efficiente con short selling.

Il miglioramento di performance del portafoglio in presenza di vendite allo scoperto è estremamente ridotto: il rendimento atteso rimane lo stesso, essendo fissato a priori, mentre la deviazione standard scende dello 0,4% rispetto al caso senza *short selling* portandosi allo 0,86%. Bisogna tenere in considerazione però la differente esposizione finanziaria, esattamente come successo per il caso di Markowitz: l'ultimo portafoglio riportato ha un'esposizione pari a 1,25 rispetto a quella unitaria del caso senza commistione di posizioni corte e lunghe, e possiede quindi un rischio maggiore legato a fattori non percepiti dal modello matematico.

Portafoglio con inserimento del titolo risk-free

Questo è lo scenario in cui si vedono meglio le differenze rispetto al modello di Markowitz, in quanto il portafoglio non è più vincolato ad un rendimento obiettivo ma ricerca la composizione ottima in assoluto sulla frontiera efficiente; è stato di nuovo utilizzato come risk-free il titolo di stato americano a 3 mesi, con rendimento pari all'1,9% su base annuale.

Titolo	Ticker	Composizione (%)
Microsoft	MSFT	14,0729
Apple	AAPL	0,0000
Amazon	AMZN	23,4303
Facebook	FB	0,0000
Berkshire Hathaway	BRK	0,0000
JPMorgan Chase	JPM	0,0000
Google	GOOGL	0,0000
Johnson & Johnson	JNJ	0,0000
Procter and Gamble	PG	11,7304
Exxon Mobil	XOM	0,0000
Visa	V	0,0000
AT&T	T	0,0000
Home Depot	HD	0,0000
Verizon	VZ	14,3072
Bank of America	BAC	0,0000
Mastercard	MA	19,3761
Disney	DIS	0,0000
Intel Corporation	INTC	0,0000
Chevron Corporation	CVX	17,0832
Merck & Co.	MRK	0,0000

Tabella 36. Composizione del portafoglio in assenza di short selling.

Come si può notare gli unici titoli che vengono acquistati sono quelli su cui sono state effettuate view positive: ciò avviene perché il grado di incertezza relativo alle aspettative formulate è estremamente alto a causa del metodo di costruzione della matrice diagonale Ω ; inoltre, a causa della forte deviazione standard dei titoli, la variazione di rendimento legata alle view assume entità importanti e per questo motivo gli asset diventano “dominanti” rispetto a quelli su cui non ci si è espressi o per i quali i giudizi sono stati negativi.

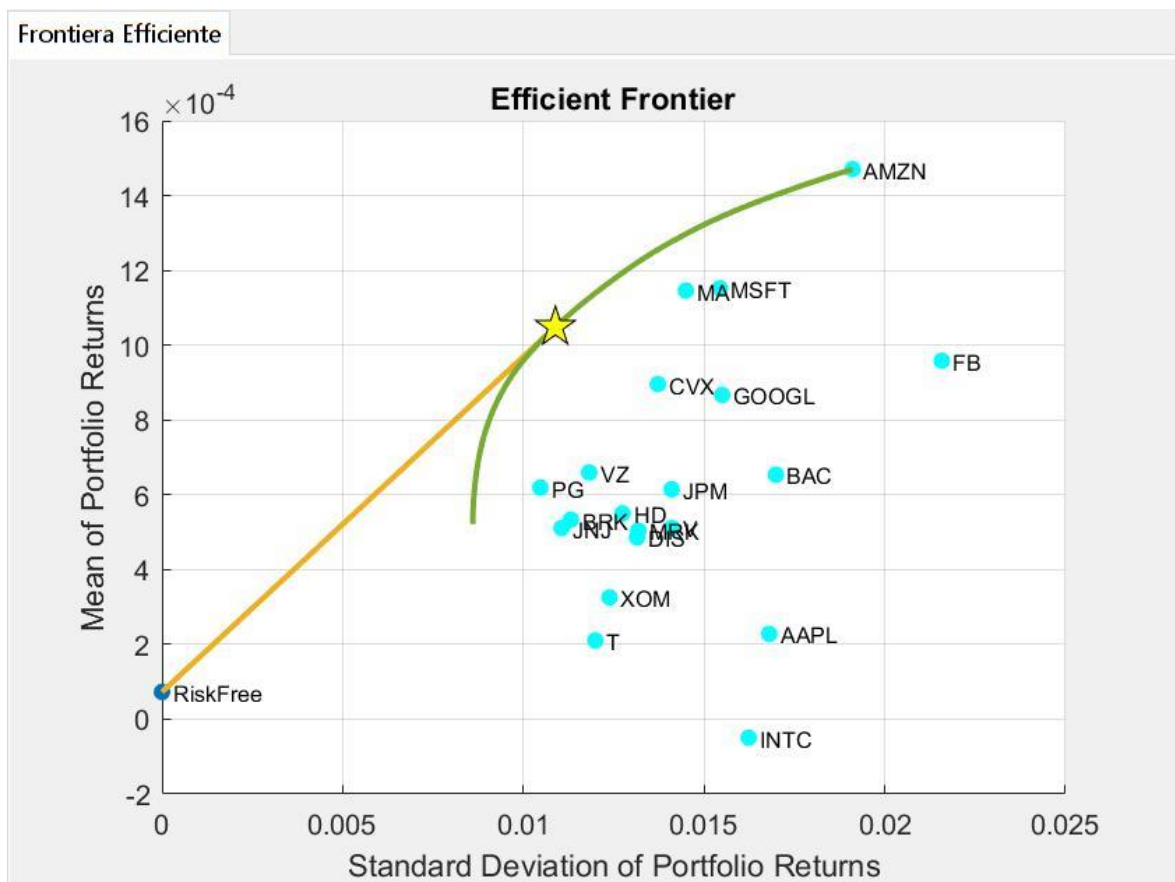


Figura 16. Frontiera efficiente con titolo privo di rischio e in assenza di short selling.

A differenza del modello di Markowitz in questo caso non vengono semplicemente scelti i migliori titoli, ma appare più evidente il trade-off tra rischio e rendimento: titoli ad alto rendimento ma mediamente o altamente rischiosi come Google e Facebook non sono più inseriti nel portafoglio ottimo, ma vengono sostituiti da Procter&Gamble e Verizon, che sono meno volatili. Questo è un meccanismo più simile a ciò che avviene nella realtà, in quanto la mitigazione del rischio è importante quanto la massimizzazione del rendimento, cosa che invece nel modello precedente non si apprezzava molto a causa della predilezione per i titoli ad performance individuale; in questo caso infatti il rendimento di portafoglio è pari allo 0,105% ed è molto simile a quello trovato con Markowitz, mentre il rischio scende a 1,088%, che è inferiore dell'11% rispetto a quello visto in precedenza.

Titolo	Ticker	Composizione (%)
Microsoft	MSFT	56,3196
Apple	AAPL	-31,5965
Amazon	AMZN	36,9903
Facebook	FB	3,2969
Berkshire Hathaway	BRK	1,4361
JPMorgan Chase	JPM	2,4738
Google	GOOGL	2,1416
Johnson & Johnson	JNJ	5,1985
Procter and Gamble	PG	49,3541
Exxon Mobil	XOM	-91,8947
Visa	V	-100,0000
AT&T	T	-65,5930
Home Depot	HD	1,6357
Verizon	VZ	74,8583
Bank of America	BAC	0,7661
Mastercard	MA	116,3323
Disney	DIS	2,6608
Intel Corporation	INTC	-64,9965
Chevron Corporation	CVX	98,7377
Merck & Co.	MRK	1,8787

Tabella 37. Composizione del portafoglio in presenza di short selling.

Con le vendite allo scoperto la composizione cambia parecchio rispetto a quanto visto in precedenza, in quanto i titoli su cui si assumono posizioni corte sono solo quelli su cui sono state espresse view negative: questo avviene, di nuovo, per il meccanismo di dominanza spiegato in precedenza, dovuto alla forte deviazione standard dei dati e al relativo grado di certezza elevato assunto nella formulazione delle view. In linea con la teoria di equilibrio, i titoli su cui non sono state formulate view hanno percentuali più basse all'interno del portafoglio.

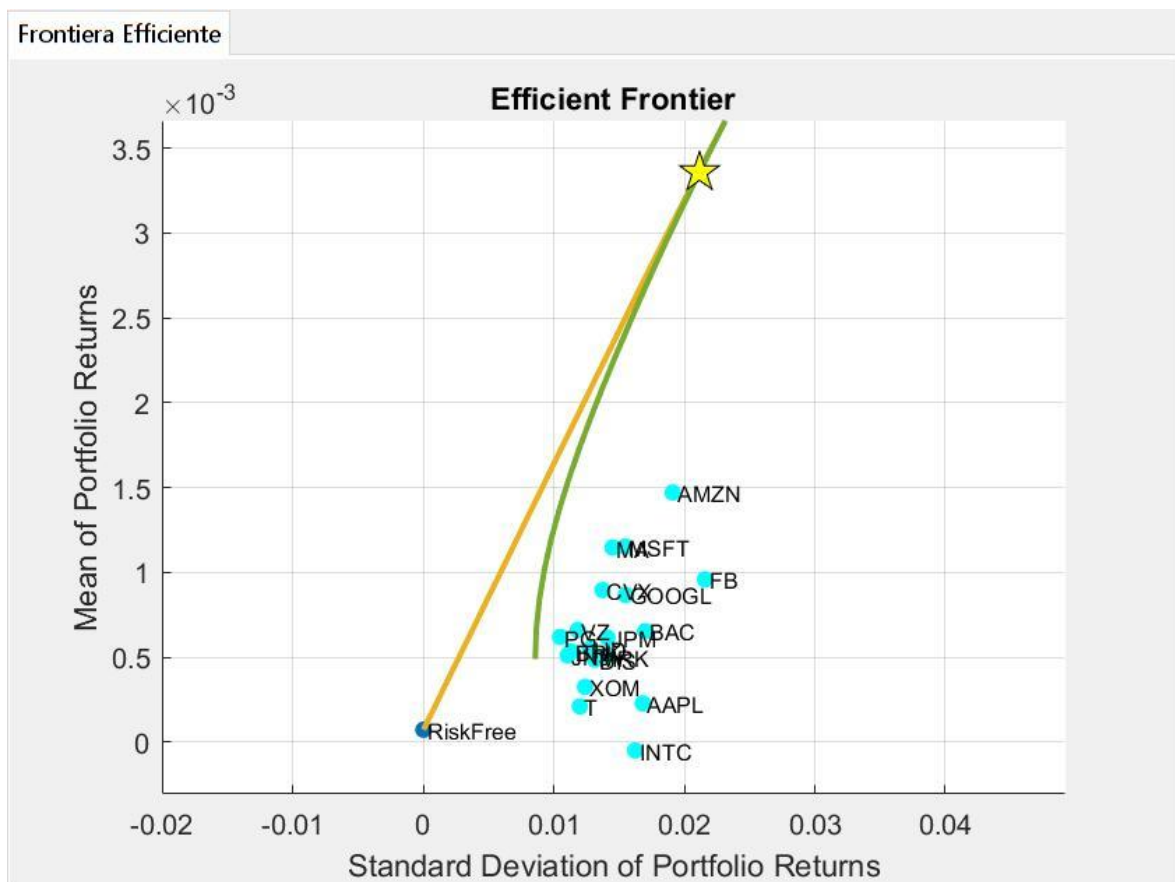


Figura 17. Frontiera efficiente in presenza di titolo privo di rischio e short selling.

Come ci si poteva aspettare, il portafoglio ottimo con vendite allo scoperto esce di molto dai limiti di rendimento del pool di titoli utilizzato per comporlo, in quanto è in grado di sfruttare al massimo il beneficio legato alla diversificazione tramite l'utilizzo di posizioni corte e lunghe insieme. Anche qui le performance generali sono migliori rispetto a quelle trovate con Markowitz: a fronte di un aumento di rendimento atteso di oltre la metà, che lo porta allo 0,336%, si ha un parallelo aumento della deviazione standard del 7%, che si assesta sul 2,12%. Inoltre, vale sempre la pena ricordare il rischio legato all'esposizione finanziaria, che in questo caso è pari a 8 volte quella nel caso senza *short selling*.

Viene di seguito riportato il riepilogo dei risultati ottenuti con i diversi modelli, in termini di rendimenti attesi e deviazioni standard dei singoli portafogli, in modo da poterli mettere a confronto e vedere con maggiore immediatezza quanto il portafoglio di Black e Litterman porti ad avere un rischio inferiore a quello di Markowitz con rendimenti fissati, mentre senza vincoli il rischio risulta maggiore nel primo modello ma in maniera meno che proporzionale rispetto alla crescita del rendimento atteso:

	Senza Short Selling		Con Short Selling	
	Rendimento Atteso	Deviazione Standard	Rendimento Atteso	Deviazione Standard
Markowitz				
Con rendimento fissato	0,0600%	0,8858%	0,0600%	0,8800%
Con risk-free	0,1031%	1,2216%	0,2133%	1,9815%
Black e Litterman				
Con rendimento fissato	0,0600%	0,8634%	0,0600%	0,8602%
Con risk-free	0,1049%	1,0885%	0,3357%	2,1160%

Tabella 38. Riepilogo dei risultati ottenuti.

Un metodo spesso utilizzato per confrontare performance di composizioni diverse è l'applicazione dell'indice di Sharpe ai diversi portafogli, prendendo come risk free il tasso già utilizzato nelle ottimizzazioni precedenti:

	Indice di Sharpe	
Portafoglio di Markowitz	Senza Short Selling	Con Short Selling
Con rendimento fissato	5,9517%	5,9911%
Con risk-free	7,8447%	10,3991%
Portafoglio di Black e Litterman		
Con rendimento fissato	6,1062%	6,1289%
Con risk-free	8,9663%	15,5225%

Tabella 39. Riepilogo delle performance di Sharpe.

Come si può notare il portafoglio di Black e Litterman performa in ogni caso meglio di quello di Markowitz: chiaramente i risultati sono più simili nei casi senza short selling e con rendimento fissato, ma eliminando i vincoli si ottiene un indice di Sharpe maggiore di 5 punti percentuali, ovvero un terzo in più rispetto al primo modello.

Conclusioni

L'analisi eseguita in questa tesi si proponeva di mettere a confronto diversi modelli di gestione di portafoglio, in modo da poter trarre conclusioni riguardanti le loro performance. La letteratura è ricca di analisi di questo genere, in quanto i mercati azionari sono simultaneamente molto redditizi e molto rischiosi, e per questo scegliere la miglior metodologia di investimento è fondamentale per evitare grosse perdite o piccoli profitti. Un primo input innovativo venne dal modello di Markowitz, che si proponeva di combinare medie e varianze di molti titoli in modo da ottenere una composizione di portafoglio che tenesse conto delle correlazioni che intercorrono tra i diversi asset: la diversificazione assunse per la prima volta un ruolo fondamentale per gli investitori, le cui attenzioni si spostarono dalle performance dei singoli titoli al più ampio insieme delle loro interazioni. Nella nostra analisi si evince come il modello porti a risultati soddisfacenti, essendo infatti in grado di ottenere portafogli che performino meglio dei singoli titoli proprio grazie alla diversificazione; tuttavia, il modello presenta anche diverse fragilità: non sfrutta l'esperienza nel settore dei gestori dei fondi, massimizza l'errore di stima, tende a produrre portafogli molto concentrati in pochi titoli e, soprattutto, non è stabile in quanto, ad una piccola variazione dei dati in input, corrisponde una più che proporzionale variazione delle quote degli asset su cui si investe. In quest'ottica nacque il modello di Black e Litterman, che si poneva come obiettivo quello di eliminare l'instabilità del modello precedente utilizzando un punto di partenza che evitasse la stima dei rendimenti attesi in input, e nello stesso tempo cercava di dare maggiore risalto alle figure decisionali dei manager dando loro la possibilità di inserire le proprie aspettative riguardo l'evoluzione dei titoli sul mercato. Le soluzioni adottate furono quindi l'approccio di equilibrio, che permetteva di ancorarsi tramite l'ottimizzazione inversa al portafoglio di mercato definito nel CAPM di Sharpe, e l'introduzione delle view come concetto probabilistico; la loro unione tramite il teorema di Bayes permise di ottenere un modello più stabile nel tempo e che allo stesso tempo desse risultati migliori rispetto al modello di Markowitz: dalla nostra analisi risulta infatti che la rischiosità si riduce a parità di rendimento atteso, e più in generale le performance di Black e Litterman mostrano indici di Sharpe sempre maggiori rispetto ai casi paralleli elaborati con Markowitz.

Chiaramente, anche il modello di Black e Litterman non è un punto di arrivo, quanto piuttosto una solida base di partenza che gli investitori possono sfruttare per il proprio processo di capital allocation; è infatti evidente come la ricerca del “miglior modello” di gestione di portafoglio sia in continua evoluzione, ed etichettare come tale quello da noi analizzato sarebbe incorretto. È indubbio però che questo modello permetta agli investitori di tenere conto sia di un benchmark di partenza, derivante dal mercato, sia delle proprie opinioni riguardanti i singoli asset coinvolto nell’analisi, ottenendo allo stesso tempo risultati soddisfacenti per quanto riguarda rendimento e controllo della rischiosità.

Ringraziamenti

L'ultima sezione della tesi è riservata ai ringraziamenti dedicati a chi ha reso questo lavoro possibile.

Innanzitutto, ringrazio il Professore Franco Varetto, che mi ha proposto questo tipo di analisi, e che durante il suo svolgimento è sempre stato estremamente disponibile nel fornire chiarimenti e suggerimenti.

Inoltre, ringrazio Fondaco per avermi permesso di poter lavorare con loro fin da subito, accogliendomi nei loro spazi e tempi lavorativi; in particolare vorrei infine ringraziare il Dottor Giulio Casuccio, capo del reparto degli investimenti multi-asset in Fondaco, che mi ha seguito in prima persona con enorme gentilezza e disponibilità, aiutandomi diverse volte a risolvere problemi sorti durante il lavoro.

Bibliografia

Best M. J., Grauer R. R., *On the Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Changes in Assets Means: Some Analytical and Computational Results* 1991, The Review of Financial Studies, Vol. 4, No. 2.

Black F., Litterman R., *Asset Allocation: Combining Investor Views with Market Equilibrium*”, 1991, The Journal of Fixed Income, September.

Black F., Litterman R., *Global portfolio optimization*, 1992, Financial Analysts Journal, Vol. 48, No. 5.

Christodoulakis G. A., Cass J., *Bayesian Optimal Portfolio Selection: the Black-Litterman Approach*, 2002, Unpublished paper, City University di Londra.

Drobetz W., *How to Avoid the Pitfalls in Portfolio Optimization? Putting the Black-Litterman Approach at Work*, 2001, Financial Markets and Portfolio Management, No. 15.

He G., Litterman R., *The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolios*, 1999, Investment Management Research, Goldman Sachs.

Idzorek T. M., *A Step-by-Step Guide to the Black and Litterman Model*, 2005, Working Paper, www.blacklitterman.org.

Markowitz H., *Portfolio Selection*, 1952, The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1.

Meucci A., *The Black-Litterman Approach: Original Model and Extensions*, 2010, Working paper.

Micocci M., Masala G.B., *Manuale di Matematica Finanziaria*, 2012, Carocci Editore

Sharpe W.F., *A Simplified Model for Portfolio Analysis*, 1963, Management Science, Vol. 9, No. 2.

Sharpe W.F., *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*, 1964, The Journal of Finance, Vol. 19, No. 3.

Sitografia

www.investopedia.com

www.bloomberg.com

www.finance.yahoo.com

www.morningstar.com

www.ift.world

www.economicdiscussion.net

www.financialmanagementpro.com

www.wikipedia.org

www.corporatefinanceinstitute.com

www.fred.stlouisfed.org

www.researchgate.net

www.simplywall.st

www.it.mathworks.com