

POLITECNICO DI TORINO

Collegio di Ingegneria Gestionale

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Gestionale

Tesi di Laurea Magistrale

**Ottimizzazione bayesiana di un
portafoglio di azioni dell'area euro**



Relatore

prof. Franco Varetto

Candidato

Francesca Licitra

Marzo 2020

Sommario

<i>Introduzione.....</i>	<i>1</i>
<i>Capitolo 1 – Il modello per la selezione di portafoglio di Markowitz.....</i>	<i>7</i>
1.1 Rendimento atteso e rischio del portafoglio.....	8
1.2 Frontiera efficiente.....	10
1.3 Portafoglio ottimo.....	15
1.4 Le fragilità del modello.....	16
<i>Capitolo 2 – Capital Asset Pricing Model.....</i>	<i>18</i>
2.1 Il modello.....	18
2.2 Metodologia di Fama-MacBeth	21
2.3 Critiche sul modello	22
<i>Capitolo 3 – Il modello di Black e Litterman.....</i>	<i>24</i>
3.1 L’approccio di equilibrio e il reverse optimization.....	24
3.2 View dell’investitore e livello di confidenza.....	27
3.3 L’approccio bayesiano al modello	27
3.4 I rendimenti attesi e i pesi ottimi finali.....	31
3.5 Critiche e difficoltà sull’implementazione del modello.....	32
<i>Capitolo 4 – Applicazione dei modelli.....</i>	<i>34</i>
4.1 Analisi dati	34
4.1.1 Nestle SA-REG	38
4.1.2 Roche Holding AG-Genusschein	40
4.1.3 Novartis AG-REG	42
4.1.4 HSBC Holdings PLC.....	44
4.1.5 SAP SE	46
4.1.6 Total SA.....	48
4.1.7 BP PLC.....	50
4.1.8 Royal Dutch Shell PLC-A SHS.....	52
4.1.9 AstraZeneca PLC.....	54
4.1.10 LVMH Moët Hennessy Louis Vuitton.....	56
4.1.11 ASML Holding NV	58
4.1.12 Linde PLC	60
4.1.13 GlaxoSmithKline PLC.....	62

4.1.14 Allianz SE-REG	64
4.1.15 Sanofi.....	66
4.1.16 Siemens AG-REG	68
4.1.17 Novo Nordisk A/S-B	70
4.1.18 Diageo PLC	72
4.1.19 Unilever NV	74
4.1.20 British American Tobacco PLC	76
4.1.21 Commenti	78
4.2 Correlazione dei dati storici	79
4.3 Il modello di Markowitz	83
4.4 Il modello di Black e Litterman	92
<i>Conclusioni</i>	112
<i>Appendice</i>.....	114
5.1 Modello di Markowitz in assenza di vendite allo scoperto fissando un rendimento target.....	114
5.2 Modello di Markowitz in assenza di vendite allo scoperto massimizzando l'indice di Sharpe.....	115
5.3 Modello di Markowitz in presenza di vendite allo scoperto fissando un rendimento target.....	116
5.4 Modello di Markowitz in presenza di vendite allo scoperto massimizzando l'indice di Sharpe.....	117
5.5 Rendimenti impliciti.....	118
5.6 Modello di Black e Litterman in assenza di vendita alla scoperto fissando un rendimento target.....	119
5.7 Modello di Black e Litterman in assenza di vendite allo scoperto massimizzando l'indice di Sharpe.....	120
5.8 Modello di Black e Litterman in presenza di vendite allo scoperto fissando un rendimento target.....	121
5.9 Modello di Black e Litterman in presenza di vendite allo scoperto massimizzando l'indice di Sharpe.....	123
<i>Bibliografia</i>	125
<i>Sitografia</i>.....	126

Introduzione

Nel momento in cui bisogna creare un portafoglio, la domanda che ci si pone è “Su quali asset bisogna investire?”. La risposta a questa domanda non è affatto semplice in quanto il processo d’investimento ha lo scopo di ottimizzare l’allocazione di capitale in relazione a diversi fattori che devono coesistere contemporaneamente quali, ad esempio, le proprie caratteristiche, aspettative e attitudini. In ambito di asset allocation il principale rischio è dato dalla probabilità che gli strumenti finanziari, presenti nel portafoglio, ottengano un rendimento diverso da quello atteso, a causa della variabilità del mercato stesso. Una volta identificati i rischi, l’asset allocation si presta a realizzare, con l’ausilio di modelli matematico-statistici, portafogli ottimi ottenendo, a parità di rischio, un maggiore rendimento, oppure, a parità di rendimento, un rischio minore. Il rischio in questione è quantificabile attraverso la deviazione standard, detta anche volatilità. Bisogna sottolineare che una volatilità più alta non significa necessariamente un portafoglio peggiore di uno con volatilità più bassa in quanto tutto dipende dalla propensione al rischio finanziario dell’investitore, ovvero la propensione a subire variazioni significative sul capitale investito. L’investitore dunque, in base al suo profilo, dovrà scegliere la propria posizione da mantenere sulla frontiera efficiente: dati dei valori di rendimento e rischio, i punti appartenenti alla curva esprimono quali sono i portafogli migliori. Sulla frontiera efficiente i portafogli non sono tutti uguali, ma, soprattutto, non sono tutti convenienti allo stesso modo, sono semplicemente efficienti. L’investitore, in base alla sua propensione al rischio, sceglierà la posizione da mantenere sulla frontiera efficiente andando a definire di conseguenza qual è il portafoglio scelto. Nel 1952 ci fu una svolta con la pubblicazione della teoria moderna del portafoglio elaborata da Harry Max Markowitz il quale propose di quantificare il rendimento e il rischio di un titolo utilizzando rendimento atteso e deviazione standard, suggerendo di considerarli insieme per determinare la ripartizione del capitale investito sulla base del trade-off tra rendimento e rischio. Inoltre, secondo Markowitz, gli investitori sono in grado di ottimizzare i propri portafogli attraverso il principio della diversificazione: aggiungendo al portafoglio una vasta gamma di titoli, i cui rendimenti non sono perfettamente correlati, si ottiene una riduzione della rischiosità del portafoglio stesso. Questo consente agli investitori di prevedere con maggiore precisione l'esito

dell'investimento, valutandone rischio e rendimento, tenendo conto anche che un buon portafoglio può essere composto da pochi prodotti finanziari ma ben selezionati. Dunque, per diversificare, bisogna anche saper scegliere quali strumenti finanziari incorporare nel proprio portafoglio. Il modello di Markowitz presenta delle fragilità che hanno portato, successivamente, all'implementazione del modello del Capital Asset Pricing Model, realizzato da Sharpe, Lintner e Mossin. Secondo il CAPM, il rischio viene misurato correttamente attraverso il beta di un titolo, che esprime come i rendimenti dei titoli stessi variano al variare dei rendimenti del mercato. I limiti che caratterizzano sia il modello di Markowitz sia il CAPM hanno successivamente favorito l'implementazione del modello di Black e Litterman realizzato nei primi anni novanta, appunto, da Fisher Black e Robert Litterman, analisti della Goldman Sachs. Il modello seleziona portafogli sia in base all'equilibrio di mercato ma anche in base alle opinioni degli investitori sul futuro andamento del mercato. Per ottenere il vettore dei rendimenti attesi, da introdurre nel processo di ottimizzazione, bisognerà combinare i rendimenti di equilibrio, ricavati dal processo di ottimizzazione inversa derivato dal CAPM, e le views dell'investitore. Il portafoglio finale sarà ottenuto dalla media pesata delle due informazioni e sarà tanto più sbilanciato verso le views quanto più queste saranno estreme e quanto maggiore sarà il grado di fiducia che l'investitore ripone nelle stesse. Dunque, lo scopo dell'analisi risulta essere proprio quello di mettere a confronto differenti modelli di selezione di portafoglio e coglierne le differenze sostanziali tra essi. L'analisi è stata effettuata in collaborazione con Fondaco SGR S.p.A., società di gestione del risparmio indipendente il cui core business è quello di accompagnare gli investitori nella progettazione ed esecuzione delle loro politiche di investimento. Fondaco SGR S.p.A. è un gruppo indipendente con 15 miliardi di masse istituite e gestite per un totale di oltre 50 investitori e più di 45 professionisti a essi dedicati. La loro offerta è al servizio esclusivo degli investitori istituzionali. La SGR italiana è stata costituita nel 2002 da un network di fondazioni: la Compagnia di San Paolo, la Fondazione Cassa di Risparmio di Padova e Rovigo e la Fondazione Cassa di Risparmio in Bologna, insieme al partner Ersel, cui si sono aggiunte nel corso degli anni anche la Fondazione CRC e la Fondazione Roma. I primi due fondi di investimento nascono nel 2005, fino ad arrivare ai dodici attualmente attivi. Gli obiettivi della società sono quelli di consentire agli investitori di aumentare i loro rendimenti, minimizzare i costi amministrativi e di gestione, assistere gli investitori nell'amministrazione del patrimonio, promuovere una cultura della gestione e aiutare nel controllo e nella valutazione delle performance. La società mette il controllo del rischio al centro del processo di investimento in quanto fondamentale, per un investitore di

lungo periodo, la protezione da perdite significative che possano compromettere il raggiungimento degli obiettivi. Fondaco SGR S.p.A. opera nel seguente modo:

- genera reddito per i propri investitori sia attraverso un'adeguata politica di distribuzione dei dividendi sia mediante una specifica attività di valorizzazione delle loro partecipazioni;
- opera partendo dall'analisi della situazione specifica di ciascun investitore studiando soluzioni personalizzate e distinguendo tra le attività di investimento in capo alla società di gestione e le linee guida strategiche di Governance a capo dell'investitore;
- dà priorità al monitoraggio e al continuo confronto con gli Organi di Vigilanza per evitare che gli investitori incorrano in eventuali rischi di danni economici e reputazionali.

Ai fini dell'analisi, l'elaborato è stato articolato nel seguente modo: i primi tre capitoli della tesi tratteranno, a livello teorico, i modelli di selezione di portafoglio ed eventuali fragilità e critiche mosse ai modelli stessi mentre, nel quarto capitolo, verrà effettuata un'applicazione dei modelli utilizzando venti titoli selezionati dall'indice di mercato STOXX Europe 600 in misura pari alla capitalizzazione di mercato, corretta per il flottante, degli stessi. Inizialmente, nell'ultimo capitolo, verrà effettuata un'analisi dei dati in modo tale da comprendere il comportamento passato dei titoli e le relazioni esistenti tra essi, successivamente verrà effettuata un'applicazione del modello di Markowitz e di Black e Litterman così da poter mettere i portafogli risultati a confronto e cogliere le differenze nell'allocazione dei titoli nei modelli.

Capitolo 1 – Il modello per la selezione di portafoglio di Markowitz

Nel 1952, Harry Markowitz pubblicò un articolo chiamato *Portfolio Selection* con lo scopo di spiegare la giusta metodologia analitica da utilizzare per la costruzione di un portafoglio finanziario che dia un alto rendimento affrontando il minor rischio possibile. Dunque, la teoria di selezione del portafoglio ha lo scopo di ottimizzare il rendimento di un portafoglio Π avendo a disposizione diversi strumenti finanziari. Per ottimizzare il rendimento del portafoglio sarà necessario massimizzare una grandezza che identifichi il profitto e minimizzare una grandezza che indentifichi la rischiosità. Le grandezze appena citate, da un punto di vista probabilistico, risultano essere rispettivamente:

- valore atteso del rendimento $E(R_{\Pi})$;
- varianza del rendimento $Var(R_{\Pi}) = \sigma_{R_{\Pi}}^2$.

In base ai parametri statistici di valore atteso e varianza, un portafoglio Π_1 domina un portafoglio Π_2 ($\Pi_1 \succ \Pi_2$) se, a parità di rischio, possiede un rendimento più elevato oppure se a parità di rendimento possiede un rischio più basso. Un portafoglio si dice efficiente se non è dominato da nessun altro portafoglio, mentre l'insieme di tutti i portafogli efficienti viene chiamato frontiera efficiente. Un portafoglio efficiente si ottiene perciò massimizzando il rendimento atteso (a parità di rischio) oppure minimizzando il rischio (a parità di rendimento atteso). Per quanto appena spiegato, sempre da un punto di vista probabilistico, nessun portafoglio efficiente è preferibile ad altri. A questo proposito, si può ad esempio osservare che, se Π_1 ha sia rendimento sia rischio più elevati rispetto a Π_2 , i due portafogli risultano non confrontabili implicando che la relazione $\Pi_1 \succ \Pi_2$ non è una relazione d'ordine totale. Inoltre, i portafogli efficienti sono degli ottimi paretiani quindi non è possibile migliorare un obiettivo senza peggiorare l'altro (se si aumenta il rischio, aumenta anche il rendimento). Il processo che porta alla scelta del portafoglio ottimo si articola in due fasi:

- processo di ottimizzazione volto a determinare la frontiera efficiente;
- scelta soggettiva tra i portafogli efficienti in base all'avversione al rischio dell'investitore attraverso la sua funzione di utilità.

1.1 Rendimento atteso e rischio del portafoglio

Nel modello di selezione del portafoglio di Markowitz si assume che i rendimenti seguono una distribuzione normale. Se i rendimenti degli asset presenti nel portafoglio sono distribuiti normalmente, indipendentemente dalla funzione di utilità, anche il portafoglio risultante avrà un rendimento che si distribuisce secondo una normale. Bisogna, però, sottolineare che, da un punto di vista empirico, la distribuzione normale non è sempre adatta per rappresentare i rendimenti a causa della frequente presenza del fenomeno di leptocurtosi (code grasse).

Il valore atteso è dato dalla somma ponderata dei rendimenti attesi dei titoli, con pesi le quote di composizione secondo la convenzione che $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$:

$$\mu_{\Pi} = E(R_{\Pi}) = E\left(\sum_{i=1}^n \omega_i \cdot R_i\right) = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot E(R_i) = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \mu_i$$

Utilizzando una notazione matriciale più compatta si ottiene che il valore atteso è:

$$\mu_{\Pi} = \Omega \cdot \theta^T$$

Dove:

- $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ è il vettore dei pesi;
- $\theta = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ è il vettore dei rendimenti;
- θ^T è il vettore dei rendimenti trasposto (vettore colonna).

Per il calcolo della varianza del portafoglio bisogna prima definire la matrice di varianze e covarianze di ordine n :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

Dove:

- $\sigma_{kj} = Cov(R_k, R_j) = E[(R_k - \mu_k) \cdot (R_j - \mu_j)]$ sono le covarianze;
- $\sigma_{kk} = Var(R_k) = \sigma_k^2$ sono le varianze presenti sulla diagonale principale.

Applicando una proprietà della varianza e tenendo conto che Σ è una matrice simmetrica, si ottiene che la varianza è:

$$Var(R_{\Pi}) = \sigma_{\Pi}^2 = Var\left(\sum_{i=1}^n \omega_i \cdot R_i\right) = \sum_{k,j=1}^n \omega_k \cdot \omega_j \cdot \sigma_{kj} = \sum_{k=1}^n \omega_k^2 \cdot \sigma_k^2 + 2 \sum_{k < j=1}^n \omega_k \cdot \omega_j \cdot \sigma_{kj}$$

Attraverso la notazione matriciale si ottiene che:

$$\sigma_{\Pi}^2 = \Omega \cdot \Sigma \cdot \Omega^T$$

Dove Ω^T è il vettore trasposto dei pesi (vettore colonna).

E' interessante analizzare come varia la varianza del portafoglio al variare del coefficiente di correlazione:

$$\rho_{kj} = \frac{\sigma_{kj}}{\sigma_k \cdot \sigma_j}$$

- *perfetta correlazione negativa* $\rho_{kj} = -1$: il portafoglio ha varianza nulla;
- *perfetta correlazione positiva* $\rho_{kj} = 1$: si distinguono due sotto casi
 - se sono ammesse vendite allo scoperto il portafoglio ha varianza nulla;
 - se non sono ammesse vendite allo scoperto la varianza del portafoglio non si annulla quindi risulterà conveniente collocare tutta la disponibilità nel titolo meno rischioso;
- *indipendenza* $\rho_{kj} = 0$: il portafoglio ha varianza positiva.

1.2 Frontiera efficiente

Per definire la frontiera efficiente è necessario risolvere uno dei due seguenti problemi di ottimizzazione vincolata:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\omega_1, \dots, \omega_n} E(R_{\Pi}) \\ \sigma_{\Pi}^2 = \tilde{\sigma} \\ \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_{\omega_1, \dots, \omega_n} \sigma_{\Pi}^2 \\ E(R_{\Pi}) = \tilde{R} \\ \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \end{array} \right.$$

Per determinare la forma analitica della frontiera efficiente si è scelto di minimizzare la varianza, dato un vincolo sul rendimento e un vincolo di bilancio, esprimendo il problema di ottimizzazione vincolata in forma vettoriale in modo tale da poter generalizzare al caso di n titoli rischiosi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{\Pi}^2 = \frac{1}{2} \Omega^T \cdot \Sigma \cdot \Omega \\ \Omega^T \cdot e = \mu \\ \Omega^T \cdot u = 1 \end{array} \right.$$

Dove:

- $\Omega^T \cdot e = \mu$ è il vincolo di rendimento;
- $\Omega^T \cdot u = 1$ è il vincolo di bilancio;
- e rappresenta il vettore colonna dei rendimenti degli n titoli;
- u rappresenta il vettore colonna unità a n componenti;
- Ω è il vettore colonna delle quote e Ω^T è il suo vettore trasposto;
- Σ è la matrice di varianza e covarianza di ordine n ;
- μ è il rendimento atteso;
- $\frac{1}{2}$ scalare utilizzato per comodità di calcolo.

La funzione lagrangiana del problema di ottimizzazione è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \Omega^T \cdot \Sigma \cdot \Omega - \lambda_1 \cdot (\Omega^T \cdot e - \mu) - \lambda_2 \cdot (\Omega^T \cdot u - 1)$$

Le condizioni necessarie del primo ordine sono:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega} = \Sigma \cdot \Omega - \lambda_1 \cdot e - \lambda_2 \cdot u = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \mu - \Omega^T \cdot e = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = 1 - \Omega^T \cdot u = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava $\Omega = \lambda_1 \cdot (\Sigma^{-1} \cdot e) + \lambda_2 \cdot (\Sigma^{-1} \cdot u)$ che verrà sostituito nelle ultime due equazioni. Si è ipotizzato che la matrice Σ , oltre ad essere definita positiva, è anche non degenere e perciò invertibile. Si ottiene, dunque, un sistema lineare con incognite λ_1 e λ_2 :

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot (\Sigma^{-1} \cdot e)^T \cdot e + \lambda_2 \cdot (\Sigma^{-1} \cdot u)^T \cdot e = \mu \\ \lambda_1 \cdot (\Sigma^{-1} \cdot e)^T \cdot u + \lambda_2 \cdot (\Sigma^{-1} \cdot u)^T \cdot u = 1 \end{cases}$$

Applicando il teorema di Cramer si ottengono i valori di λ_1 e λ_2 che verranno sostituiti per determinare Ω :

$$\lambda_1 = \frac{\mu \cdot C - A}{D} \qquad \lambda_2 = \frac{B - \mu \cdot A}{D}$$

Successivamente si sostituiscono i valori di λ_1 e λ_2 ottenendo:

$$\Omega = \frac{\mu \cdot C - A}{D} \cdot (\Sigma^{-1} \cdot e) + \frac{B - \mu \cdot A}{D} \cdot (\Sigma^{-1} \cdot u)$$

Mettendo μ in evidenza:

$$\Omega = F + \mu \cdot G$$

Dove:

- $A = u^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot e$
- $B = e^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot e$
- $C = u^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot u$
- $D = B \cdot C - A^2$
- $F = \frac{B \cdot (\Sigma^{-1} \cdot u) - A \cdot (\Sigma^{-1} \cdot e)}{D}$
- $G = \frac{C \cdot (\Sigma^{-1} \cdot e) - A \cdot (\Sigma^{-1} \cdot u)}{D}$

Sostituendo i valori appena trovati nell'espressione della varianza si ottiene l'espressione analitica della frontiera efficiente ovvero l'espressione che lega la varianza al rendimento atteso μ :

$$\sigma_{\Pi}^2 = \Omega^T \cdot \Sigma \cdot \Omega = F^T \cdot \Sigma \cdot F + \mu \cdot (F^T \cdot \Sigma \cdot G + G^T \cdot \Sigma \cdot F) + \mu^2 \cdot (G^T \cdot \Sigma \cdot G)$$

Essendo Σ una matrice definita positiva si ottiene che $(G^T \cdot \Sigma \cdot G) > 0$. Sostituendo i valori di F e G , l'equazione può essere riscritta:

$$\sigma_{\Pi}^2 = \frac{C}{D} \cdot \mu^2 - 2 \frac{A}{D} \cdot \mu + \frac{B}{D}$$

In conclusione:

- nel piano $(\sigma; \mu)$ si ottiene l'equazione di un'iperbole:
 - centro nel punto di coordinate $(0; A/C)$;
 - vertice nel punto di coordinate $(\sqrt{1/C}; A/C)$;
 - asintoti $\mu = \frac{A}{C} \pm \sqrt{\frac{D}{C}} \cdot \sigma$.

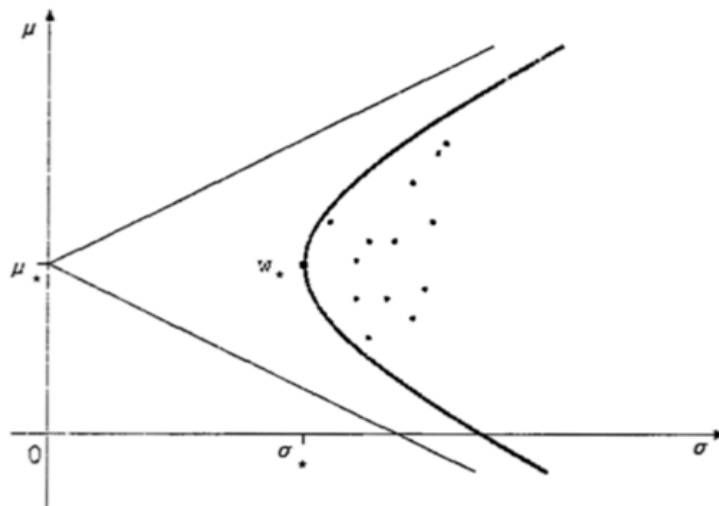


Figura 1. Esempio di frontiera efficiente nel piano $(\sigma; \mu)$

- nel piano $(\sigma^2; \mu)$ si ottiene l'equazione di una parabola con asse orizzontatale e concavità verso destra:
 - vertice nel punto di coordinate $(1/C; A/C)$

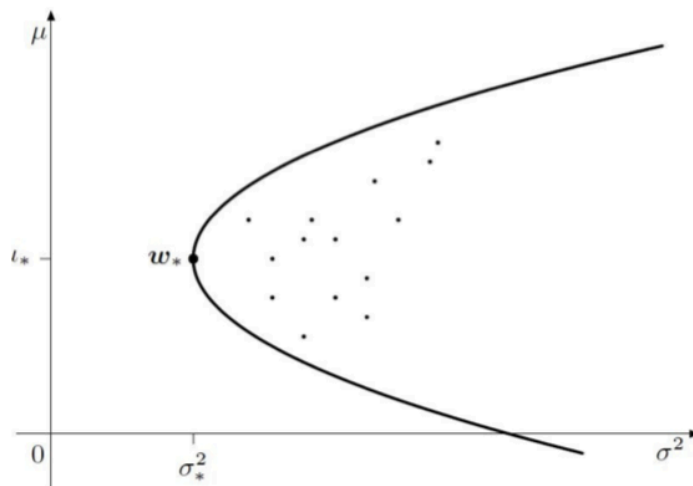


Figura 2. Esempio di frontiera efficiente nel piano $(\sigma^2; \mu)$

I risultati pervenuti fanno riferimento al caso generale, ma, in realtà, bisognerebbe tenere conto di altri due casi:

- *no vendite allo scoperto*: bisogna aggiungere il vincolo $\omega_i > 0$ ottenendo in questo modo una frontiera efficiente dominata, poiché si restringe il numero di portafogli da poter comporre con la conseguenza che, a parità di rischio, il rendimento atteso è minore;
- *presenza del titolo risk-free*: tale titolo viene rappresentato come un punto nel piano scarto-rendimento $N(0; i)$. Combinando N con il portafoglio di tangenza M si ottiene l'effetto della linearizzazione delle frontiera efficiente in quanto, i portafogli efficienti risultano essere proprio sulla semiretta che collega N al portafoglio M . Tutti i portafogli che si trovano a sinistra del portafoglio M si ottengono con una quota negativa del titolo N per investire nel portafoglio di tangenza oltre l'effettiva disponibilità ($\omega_i > 1$). Se la componente risk free diventa negativa significa che l'investitore si indebita a tasso fisso per sfruttare l'effetto della leva finanziaria. Per determinare il portafoglio di tangenza M si procede massimizzando l'indice di Sharpe tra tutti i portafogli della frontiera efficiente ottenuta con titoli rischiosi.

$$Sharpe = \frac{\mu - i}{\sigma}$$

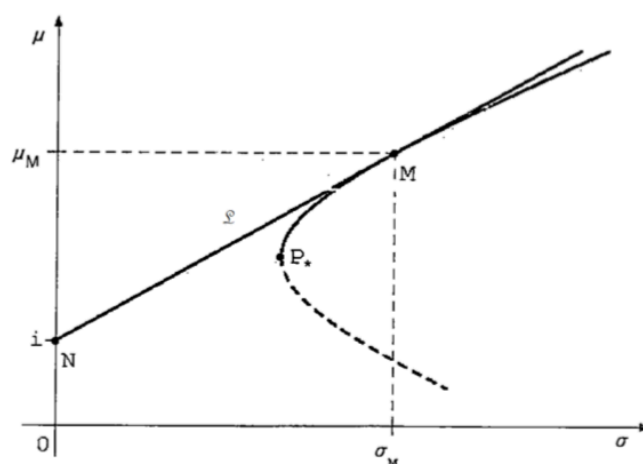


Figura 3. Esempio di frontiera efficiente nel piano $(\sigma; \mu)$ in presenza del titolo risk free

1.3 Portafoglio ottimo

Conclusa la fase “obiettiva”, attraverso la determinazione della frontiera efficiente, bisogna passare alla fase “soggettiva” in cui bisogna scegliere il portafoglio ottimale fra tutti i portafogli presenti nella frontiera efficiente. Per determinare il portafoglio ottimo, è necessario massimizzare l'utilità attesa, la quale risulta caratterizzata dall'avversione al rischio dell'investitore. I portafogli efficienti sono stati individuati, precedentemente, attraverso media e varianza, dunque anche l'utilità attesa dovrà essere espressa attraverso questi due parametri. Utilizzando una funzione di utilità quadratica, l'utilità attesa può essere espressa utilizzando i parametri di media e varianza:

$$U(\mu, \sigma) = \mu - \gamma \cdot (\mu^2 + \sigma^2)$$

Dove:

- μ è la media;
- σ^2 è la varianza;
- γ è il coefficiente di avversione al rischio scelto in maniera arbitraria in base alla propensione dell'investitore.

Si osserva che al crescere del coefficiente di avversione al rischio si ottengono portafogli che convergono al titolo risk free.

Le curve di indifferenza, fissato un livello di utilità $\bar{u}$, sono date dalla seguente equazione:

$$U(\mu, \sigma) = \bar{u}$$

Le curve di indifferenza presentano le seguenti caratteristiche:

- sono curve convesse;
- maggiore è il livello di utilità $\bar{u}$ più le curve si posizionano in alto;
- maggiore è l'avversione al rischio più aumenta la convessità delle curve;
- i portafogli che appartengono alla stessa curva di indifferenza risultano equivalenti nella scelta dell'investitore.

Per identificare il portafoglio ottimale basterà trovare il punto di tangenza della frontiera efficiente con la curva d'indifferenza avente il massimo valore di $\bar{u}$.

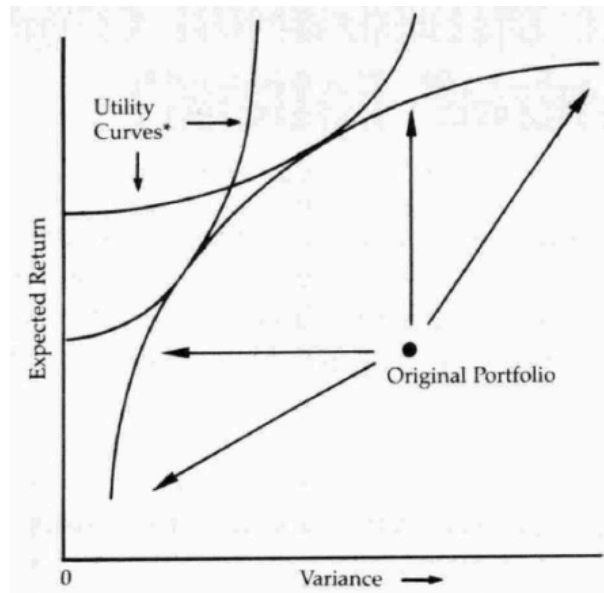


Figura 4. Tangenza tra frontiera efficiente e curve di indifferenza

1.4 Le fragilità del modello

Il modello di Markowitz presenta diversi limiti che gli precludono la possibilità di essere utilizzato nella pratica in maniera efficiente. Il limite principale del modello risiede nel fatto che il procedimento porta ad una massimizzazione dell'errore di stima causando errori, nella scelta dei portafogli, determinati da imprecisioni nella stima dei parametri in input. I valori reali di rendimento atteso, varianza e covarianza, possono essere osservati solo ex-post e per poterli inserire nel modello risulta necessario stimarli. Il modello porta a sovrastimare quei titoli che presentano un elevato rendimento atteso, bassa varianza e correlazioni negative, realizzando portafogli composti prevalentemente da titoli con queste caratteristiche che risultano maggiormente soggetti ad un elevato errore di stima. Portafogli molto concentrati rinnegano il principio di diversificazione, su cui si basa il modello, rendendolo poco credibile. Se non fossero presenti errori di stima, il modello sarebbe in grado di calcolare il portafoglio ottimo, quindi, per ovviare al problema, risulta necessario modificare i vincoli del modello, introducendo le vendite allo scoperto oppure imponendo percentuali di concentrazione minime o massime di specifici asset nel portafoglio. Inoltre, il modello,

basato sulla matrice di varianza e covarianza e dunque anche sulla matrice di correlazione, risulta instabile. Nuove informazioni provenienti dai mercati possono causare variazioni sui dati in input modificando, anche in maniera consistente, la composizione del portafoglio, poiché non cambiano soltanto i pesi dei titoli per cui sono variati gli input ma variano i pesi di tutti i titoli a causa delle forti interazioni tra tutti gli asset all'interno del mercato. Le variazioni risultano dunque molto frequenti e l'investitore si trova a dover ricalcolare ogni volta il portafoglio ottimo, provocando in questo mondo un aumento dei costi di transazione che erodono direttamente i profitti. Il modello, inoltre, non dà la possibilità all'investitore di introdurre delle opinioni personali riguardo all'andamento futuro dei titoli, ma si limita a rilevare la modalità con cui le quotazioni incorporano le informazioni e le opinioni della maggioranza degli investitori. Un'ulteriore critica mossa nei confronti del modello sta nell'impossibilità di confrontare portafogli realizzati da investitori con propensioni al rischio differenti. Precedentemente si è visto che la composizione ottima del portafoglio dipende dalla funzione di utilità dell'investitore caratterizzata dalla sua propensione al rischio, ottenendo in questo modo un portafoglio "soggettivo" e, dunque, non confrontabile con portafogli di investitori che presentano una curva di utilità diversa. Markowitz propose una soluzione innovativa per quell'epoca che, però, presentando diverse fragilità, spinse gli analisti a sviluppare modelli in grado di poter soddisfare le esigenze degli investitori andando di pari passo con l'evoluzione dei mercati finanziari.

Capitolo 2 – Capital Asset Pricing Model

Il Capital Asset Pricing Model (CAPM), proposto da William Sharpe nel 1964, stabilisce una relazione tra il rendimento di un titolo e la sua rischiosità, sotto l'ipotesi di equilibrio di mercato, per cui la domanda di attività rischiose risulta essere uguale all'offerta di attività rischiose. Nel modello, la relazione tra rendimento e rischiosità di un titolo viene misurata tramite il fattore di rischio *beta* che misura quanto il valore di un titolo si muova in sintonia con il mercato. Nei mercati finanziari, quando si investe in un titolo, si possono presentare due tipologie di rischi:

- *rischio diversificabile* eliminabile secondo il principio di diversificazione degli investimenti;
- *rischio sistemico* chiamato anche rischio di mercato il quale non può essere eliminato.

Il modello CAPM mostra che soltanto la parte di rischio non eliminabile viene remunerata dal mercato attraverso un maggior rendimento.

2.1 Il modello

Le ipotesi del modello sono le seguenti:

- gli investitori sono avversi al rischio e massimizzano l'utilità attesa;
- gli investitori selezionano portafogli in base al criterio media-varianza;
- l'orizzonte temporale è uniperiodale.
- non ci sono restrizioni nel prendere o dare a prestito al tasso risk free;
- non ci sono imposte o altre imperfezioni di mercato;
- gli investitori hanno aspettative omogenee sui valori attesi, le varianze e le covarianze dei rendimenti dei titoli.

Le ipotesi che riguardano le aspettative omogenee e la selezione di portafogli in base al criterio media-varianza implicano la presenza di un'unica frontiera efficiente data dal fatto che gli investitori inseriscono tutti gli stessi input nel processo di ottimizzazione. Nel modello CAPM viene utilizzata la frontiera efficiente lineare con l'aggiunta del titolo risk

free, in questo modo il portafoglio di tangenza $M(\sigma_M; \mu_M)$ risulta essere l'unico portafoglio rischioso detenibile dagli operatori. Il portafoglio di tangenza viene chiamato portafoglio di mercato perché è composto da tutti i titoli rischiosi presenti sul mercato in misura pari alla loro capitalizzazione.

La frontiera efficiente lineare prende il nome di Capital Market Line (CML):

$$\mu_{\Pi} = i + \frac{\mu_M - i}{\sigma_M} \cdot \sigma_{\Pi}$$

Dove:

- μ_{Π} e σ_{Π} sono rispettivamente valore atteso e deviazione standard del portafoglio;
- μ_M e σ_M sono rispettivamente valore atteso e deviazione standard del portafoglio di mercato;
- i è il rendimento del titolo risk free;
- $\frac{\mu_M - i}{\sigma_M}$ è il coefficiente angolare chiamato prezzo per il rischio, noto anche come indice di Sharpe e misura quanto l'investitore è premiato in termini di rendimento per il rischio assunto (maggiore rendimento per ogni punto in più di rischio);
- $\mu_M - i$ è chiamato premio per il rischio.

I portafogli della CML si ottengono combinando una quota di titoli risk free con una quota del portafoglio di mercato M . Il modello CAPM differisce dal modello di selezione di portafoglio di Markowitz proprio per la presenza del titolo risk, poiché viene eliminata la componente soggettiva definita dalle curve di utilità in relazione all'avversione al rischio dell'investitore. In questo modo tutti gli investitori acquisiranno il portafoglio M e ciò che, in linea di massima, può cambiare è rappresentato dai pesi all'interno del portafoglio stesso. I teoremi fondamentali del modello CAPM sono:

- **Teorema 1.** *Ogni portafoglio giacente sulla CML è perfettamente correlato con il portafoglio di mercato:*

$$\rho_{\Pi M} = \frac{Cov(R_{\Pi}, R_M)}{\sigma_{\Pi} \sigma_M} = 1$$

- **Teorema 2.** *Preso un portafoglio qualsiasi con rendimento atteso μ_Π e rischio σ_Π , vale la seguente relazione:*

$$\mu_\Pi = i + \frac{\mu_M - i}{\sigma_M^2} \cdot \text{Cov}(R_\Pi, R_M)$$

Il teorema 2 applicato come caso particolare al k -esimo titolo generico diventa:

$$\mu_k = i + \frac{\mu_M - i}{\sigma_M^2} \cdot \text{Cov}(R_k, R_M)$$

Ricordando inoltre l'espressione del beta di un titolo:

$$\beta_k = \frac{\text{Cov}(R_k, R_M)}{\sigma_M^2}$$

La relazione precedente può essere riscritta:

$$\mu_k = i + (\mu_M - i) \cdot \beta_k$$

Per il portafoglio generico:

$$\mu_\Pi = i + (\mu_M - i) \cdot \beta_\Pi$$

Quest'ultima equazione prende il nome di Security Market Line (SML) e sottolinea che il rendimento atteso di un titolo o portafoglio è proporzionale al premio per il rischio, dove la costante di proporzionalità è data dal beta del titolo o portafoglio. La SML viene rappresentata graficamente come una retta ponendo in ascissa il beta e in ordinata i rendimenti.

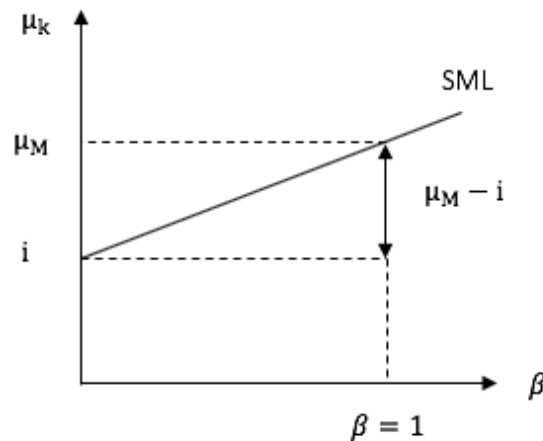


Figura 5. Esempio di Security Market Line

La SML ha un ruolo fondamentale in quanto può dare indicazioni sui titoli che sono sopravvalutati o sottovalutati dato che il coefficiente beta misura la reattività del rendimento di un titolo ai movimenti del mercato. Tanto maggiore è il coefficiente beta, tanto maggiore sarà l'inclinazione della retta e tanto maggiore sarà il rendimento atteso del titolo in quanto possiede un maggior grado di rischio non diversificabile:

- $0 < \beta_k < 1$: titoli difensivi in quanto realizzano rendimenti inferiori in valore assoluto rispetto a quelli del mercato;
- $\beta_k > 1$: titoli aggressivi in quanto realizzano rendimenti superiori in valore assoluto rispetto a quelli del mercato;
- $\beta_k = 1$: titoli che seguono il mercato.

2.2 Metodologia di Fama-MacBeth

Nel modello del CAPM il coefficiente β_{im} non può essere direttamente osservato, ma deve essere oggetto di stima. Nel 1973 Fama e MacBeth svilupparono una metodologia chiamata two-step methodology:

- nel primo passo vengono stimati dei coefficienti β_{im} effettuando la stima di modelli lineari:

$$R_{it} = \alpha + \beta_{im}R_{mt} + \eta_{it}$$

- nel secondo passo si utilizzano delle stime $\widehat{\beta}_{im}$ come osservazioni dei regressori nei modelli di regressione lineare nella dimensione cross-section:

$$R_i = a + b\widehat{\beta}_{im} + \varepsilon_i$$

Il CAPM non viene rifiutato se il coefficiente a è pari al tasso risk free e se il coefficiente b è pari al premio per il rischio del portafoglio di mercato.

2.3 Critiche sul modello

Il modello del Capital Asset Pricing Model è stato oggetto di diverse critiche:

- non spiega la variabilità dei rendimenti nella dimensione cross-section dato che è stato rilevato che i titoli caratterizzati da beta minori offrono rendimenti maggiori di quelli previsti dal modello;
- tutti gli investitori hanno un'opinione comune sulla rischiosità e sul rendimento atteso degli asset presenti sul mercato;
- non ci sono restrizioni nel prendere o dare a prestito al tasso risk free;
- non ci sono imposte o altre imperfezioni di mercato;
- assenza di una preferenza tra mercati e attività da parte degli investitori individuali dato che il portafoglio di mercato consiste di tutte le attività finanziarie scambiate su tutti i mercati, pesate per la propria capitalizzazione di mercato;
- non può essere soggetto di una verifica empirica (critica di Roll);
- modella i prezzi come variabili casuali lognormali con la conseguenza di poter ottenere rendimenti inferiori a -100% e di non riflettere l'evidenza empirica in base alla quale i mercati sarebbero sistemi caotici che prevedono la possibilità di ampie fluttuazioni con una frequenza più elevata di quanto predetto da una variabile casuale normale.

Nonostante le critiche mosse, il modello CAPM risulta vincente per la sua semplicità e capacità di ricondurre il valore di un titolo a un singolo fattore di rischio, rappresentato dal rischio legato al portafoglio di mercato.

Capitolo 3 – Il modello di Black e Litterman

Nei primi anni Novanta Fischer Black e Robert Litterman svilupparono, all'interno della Goldman Sachs, un modello per il calcolo dei pesi ottimali di portafoglio in grado di eliminare diversi punti critici del modello di Markowitz con la conseguenza diretta di ottenere maggiore stabilità nel portafoglio ottimo finale. Il modello permette agli investitori di formulare delle aspettative solo su quegli asset su cui sono in grado di esprimersi mentre, per tutti gli altri, lascia fare al cosiddetto “equilibrio di mercato”. Black e Litterman, con equilibrio di mercato, intendono che *<<quando i rendimenti attesi si spostano dal loro valore di equilibrio, lo sbilanciamento che si viene a creare sui mercati tenda a farli tornare indietro>>* (Black e Litterman 1992). In base a questa assunzione, i rendimenti attesi risulteranno molto simili ai valori di equilibrio e l'investitore, attraverso informazioni pervenute dal mercato, potrà trarre profitto combinando le sue view sui rendimenti.

Il modello è sviluppato su due fasi:

- scegliere un portafoglio di riferimento associato, tipicamente, al benchmark di mercato in modo tale da garantire la stabilità dei portafogli;
- ponderare le view in base alla fiducia riposta in esse.

Il modello considera l'equilibrio di mercato come punto di partenza e richiede all'investitore di inserire le view in termini di rendimenti attesi associandone un livello di confidenza. Combinando le view con i rendimenti di equilibrio si ottengono i cosiddetti rendimenti di Black e Litterman che verranno poi utilizzati come input nel processo di ottimizzazione. In questo modo si ottiene un portafoglio in cui i pesi degli asset si discostano dai valori di equilibrio e tali scostamenti dipendono sia dal livello di confidenza associato alle singole view sia dal weight-on-views (τ) che specifica il peso delle view riguardo all'equilibrio di mercato.

3.1 L'approccio di equilibrio e il reverse optimization

Black e Litterman si sono proposti di superare il principale problema dell'ottimizzazione di portafoglio proposta da Markowitz: l'eccessiva instabilità del modello in relazione agli input. Secondo Black e Litterman, per rendere il processo di ottimizzazione stabile, bisogna

identificare gli input nei rendimenti attesi di equilibrio che sono in grado di spiegare la composizione del mercato. I rendimenti attesi di equilibrio derivano dall'uguaglianza tra domanda e offerta di assets nel mercato, nel caso in cui tutti gli investitori hanno a disposizione le stesse informazioni. Questo significa che se le uniche informazioni in possesso degli investitori fossero informazioni pubbliche, risulta più sensato affidarsi ad approcci per il calcolo dell'equilibrio di mercato piuttosto che affidarsi alle proprie informazioni ottenendo, in questo modo, rendimenti attesi con medie più affidabili e varianze minori. Il concetto di equilibrio è chiaramente una situazione ideale, ma, si è osservato che, anche di fronte ad imperfezioni del mercato, gli scostamenti tendono ad annullarsi ottenendo un riallineamento tra domanda e offerta. Questa è la ragione per cui Black e Litterman non presuppongono che i mercati siano in equilibrio, ma sfruttano tale convinzione come punto di partenza per strutturare il modello. Dunque, bisogna scegliere ex-ante un'allocazione ottimale, basandosi sull'equilibrio di mercato, da cui estrapolare i rendimenti attesi da inserire come input nel processo di ottimizzazione. Tale tecnica viene chiamata *reverse optimization* perché sfrutta il processo di ottimizzazione non per ottenere la composizione ottimale di portafoglio, ma, al contrario, parte da essa e mira a ottenere i rendimenti attesi. Black e Litterman sostituiscono i rendimenti storici con i rendimenti in eccesso attesi (premi per il rischio dei vari asset) in grado di restituire esattamente il portafoglio ottenuto scegliendo, come allocazione, la composizione di benchmark di settore in modo tale da sfruttare i meccanismi di equilibrio dei mercati finanziari. Quindi, per implementare la tecnica dell'ottimizzazione inversa e trovare il rendimento atteso del portafoglio ottimo, è necessario assumere che il portafoglio ottimo sia quello di mercato. Quest'approccio è strettamente connesso al CAPM, secondo il quale i meccanismi di mercato comportano un continuo aggiustamento dei prezzi degli asset, in modo che i rendimenti attesi degli asset stessi tendano a eguagliare perfettamente la domanda con l'offerta disponibile, fino a raggiungere l'equilibrio di mercato (cfr. Drobetz, 2001). Dal CAPM è possibile esprimere gli extrarendimenti di equilibrio, usando il metodo dell'ottimizzazione inversa, andando a massimizzare l'utilità attesa dell'investitore ponendo come incognita i rendimenti attesi anziché i pesi di portafoglio. La massimizzazione dell'utilità quadratica è la seguente:

$$\max_{\Omega} \left[\Omega^T \Theta - \frac{\lambda \cdot \Omega^T \Sigma \Omega}{2} \right]$$

Dove:

- Ω rappresenta il vettore delle quote di portafoglio;
- Θ è il vettore dei rendimenti attesi;
- λ è il coefficiente di avversione al rischio;
- Σ è la matrice di varianza – covarianza.

In questo modo, a differenza del modello di Markowitz in cui si minimizza la varianza avendo come vincoli l'unità delle quote e un determinato rendimento atteso, si massimizza direttamente il trade-off tra rendimento e varianza senza cambiare i vincoli.

Il coefficiente di avversione al rischio, che sintetizza tale trade-off, è stato definito da Idzorek come il rapporto tra il premio al rischio di mercato e il rischio stesso:

$$\lambda = \frac{E(R_P) - i}{\sigma^2}$$

Dal processo di ottimizzazione si ottiene che:

$$\Omega = (\lambda \cdot \Sigma)^{-1} \Theta$$

Applicando la reverse optimization:

$$\Theta = \lambda \cdot \Sigma \cdot \Omega_B$$

Dove Ω_B rappresenta il vettore delle quote pari alla capitalizzazione degli asset che compongono il portafoglio. In questo modo si sono ottenuti i rendimenti impliciti che rappresentano il punto di partenza da cui incorporare le view soggettive riguardo al futuro andamento dei rendimenti. Nel caso in cui l'investitore non disponga di view otterrà un portafoglio le cui quote sono pari alla capitalizzazione di mercato dei titoli, dato che il portafoglio di equilibrio viene calcolato attraverso il Capital Asset Pricing Model e la tecnica dell'ottimizzazione inversa, altrimenti dovrà combinare le view in maniera coerente con l'equilibrio di mercato, ottenendo un portafoglio le cui quote si discostano in relazione al grado di fiducia delle view stesse.

3.2 View dell'investitore e livello di confidenza

Il modello di Black e Litterman combina il portafoglio di mercato con le view dell'investitore a cui è possibile assegnare un livello di confidenza che può oscillare tra lo 0% e il 100%. Un basso livello di confidenza delle view determinerà una maggiore tendenza del portafoglio verso i pesi del portafoglio di mercato invece, un alto livello di confidenza determinerà uno elevato scostamento dai valori di equilibrio.

Le view espresse possono essere:

- *absolute* per cui ci si aspetta che il rendimento di un determinato titolo aumenti o diminuisca;
- *relative* per cui si aspetta che il rendimento di un determinato titolo aumenti o diminuisca in relazione al rendimento di un altro titolo.

Gli scostamenti dal portafoglio di mercato dipendono dal livello di confidenza ma anche dal parametro τ che specifica il peso delle view riguardo all'equilibrio di mercato. Black e Litterman non propongono una formula per il calcolo di τ , ma si limitano a considerarlo come una costante il cui valore è prossimo allo zero, giustificato dal fatto che l'incertezza della media è più bassa rispetto all'incertezza dei rendimenti attesi. Ponendo τ prossimo allo zero, si tende a far prevalere i rendimenti del portafoglio di mercato rispetto a quelli suggeriti dalle view.

3.3 L'approccio bayesiano al modello

Per combinare il portafoglio di mercato con le view dell'investitore viene utilizzato un approccio di tipo bayesiano. Il teorema di Bayes consente il calcolo di probabilità condizionali per cui si ha la possibilità di calcolare la probabilità che un determinato evento accada data la probabilità che un altro evento, collegato al primo, avvenga. Il teorema di Bayes consente di combinare due diverse fonti di informazione secondo la seguente formula:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Da cui si ricava che:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Dove:

- A è l'evento che interpreta i rendimenti attesi dell'investitore;
- B è l'evento che interpreta i rendimenti di equilibrio;
- $P(A)$ è la funzione di densità di probabilità dell'evento A ;
- $P(B)$ è la funzione di densità di probabilità dell'evento B ;
- $P(A|B)$ è la funzione di densità di probabilità dei rendimenti attesi condizionata ai rendimenti di equilibrio;
- $P(B|A)$ è la funzione di densità di probabilità dei rendimenti di equilibrio condizionata ai rendimenti attesi.

Indicando con $E(R)$ il vettore dei rendimenti attesi dell'investitore e con Θ il vettore dei rendimenti impliciti, ottenuti dalla reverse optimization, il teorema di Bayes può essere riscritto:

$$P(E(R)|\Theta) = \frac{P(\Theta|E(R)) \cdot P(E(R))}{P(\Theta)}$$

La probabilità dei rendimenti attesi $P(E(R)|\Theta)$ assume la forma di k vincoli lineari sul vettore di n rendimenti attesi $E(R)$, che possono essere espressi con una matrice P di dimensione $k \times n$:

$$P \cdot E(R) = q + \varepsilon$$

Dove:

- P è una matrice che avrà righe k pari al numero di view espresse e colonne n pari al numero di asset presenti in portafoglio:

$$P = \begin{pmatrix} P_{1,1} & \cdots & P_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{k,1} & \cdots & P_{k,n} \end{pmatrix}$$

- q è un vettore $k \times 1$ i cui elementi rappresentano le view espresse dall'investitore:

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_k \end{pmatrix}$$

- ε è un vettore i cui elementi rappresentano l'incertezza delle view. La distribuzione di ε , essendo un termine di errore, ha media zero e varianza pari a Ψ . Supponendo che le view siano indipendenti, la matrice Ψ è una matrice diagonale che contiene le varianze dei singoli termini di errore:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_k \end{pmatrix}$$

Dal momento che $\varepsilon \sim N(0, \Psi)$, si può affermare che $P \cdot E(R) \sim N(q, \Psi)$. Dunque, essendo che $E(R)$ è influenzato da Ψ , man mano che la varianza dei termini di errore diminuisce, le aspettative vengono formulate con maggiore precisione.

Black e Litterman affermano che i rendimenti teorici di equilibrio si distribuiscano secondo una normale multivariata con valore atteso pari al vettore dei rendimenti impliciti e matrice delle covarianze teoriche proporzionale alla matrice delle covarianze storiche secondo lo *shrinkage factor* τ :

$$E(R) \sim N(\Theta, \tau \cdot \Sigma)$$

Da questa assunzione, si può affermare che la funzione di densità di probabilità dei rendimenti d'equilibrio si distribuisce secondo una normale multivariata con valore atteso pari al vettore dei rendimenti teorici di equilibrio e matrice delle covarianze teoriche sempre proporzionale alla matrice delle covarianze storiche secondo lo *shrinkage factor* τ :

$$\Theta | E(R) \sim N(E(R), \tau \cdot \Sigma)$$

Le condizioni di normalità di $P \cdot E(R) \sim N(q, \Psi)$ e di $\Theta|E(R) \sim N(E(R), \tau \cdot \Sigma)$ implicano che:

$$P(P \cdot E(R)) = \frac{k}{\sqrt{2\pi \cdot |\Psi|}} \exp \left(-\frac{1}{2} (P \cdot E(R) - q)^T \Psi^{-1} (P \cdot E(R) - q) \right)$$

$$P(\Theta|E(R)) = \frac{k}{\sqrt{2\pi|\tau \cdot \Sigma|}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\Theta - E(R))^T (\tau \cdot \Sigma^{-1}) (\Theta - E(R)) \right)$$

Sostituendo queste due funzioni nell'espressione del teorema di Bayes, si ottiene che la funzione di densità di probabilità dei rendimenti attesi condizionati ai valori d'equilibrio è proporzionale a:

$$\exp \left(-\frac{1}{2} (\Theta - E(R))^T (\tau \cdot \Sigma)^{-1} - \frac{1}{2} (P \cdot E(R) - q)^T \Psi^{-1} (P \cdot E(R) - q) \right)$$

Quest'ultima formula può essere riscritta:

$$\exp \left(-\frac{1}{2} [E(R)^T H E(R) - 2C^T E(R) + A] \right)$$

Dove:

- $H = (\tau \cdot \Sigma)^{-1} + P^T \Psi^{-1} P$;
- $C = (\tau \cdot \Sigma)^{-1} \Theta + P^T \Psi^{-1} q$;
- $A = \Theta^T (\tau \cdot \Sigma)^{-1} \Theta + q^T \Psi^{-1} q$.

La funzione di densità $P(E(R)|\Theta)$ è una normale multivariata:

- media: $[(\tau \cdot \Sigma)^{-1} + P^T \Psi^{-1} P]^{-1} [(\tau \cdot \Sigma)^{-1} \Theta + P^T \Psi^{-1} q]$;
- varianza: $[(\tau \cdot \Sigma)^{-1} + P^T \Psi^{-1} P]^{-1}$.

In questo modo si è pervenuti al calcolo dei rendimenti di Black e Litterman che coincidono con la media della funzione di densità $P(E(R)|\Theta)$. A questo punto, per ottenere la nuova composizione del portafoglio ottimale, basterà inserire il vettore dei rendimenti attesi di Black e Litterman nel tradizionale processo di ottimizzazione di Markowitz. Quando risulterà necessario aggiornare i dati, la distribuzione calcolata precedentemente, a cui si aggiungeranno le views, diventerà il nuovo punto di partenza del modello di Black e Litterman. In questo modo, con il passare del tempo e l'aumentare degli aggiornamenti, si otterranno dei rendimenti sempre più stabili per l'elevato numero di dati immessi nel procedimento.

3.4 I rendimenti attesi e i pesi ottimi finali

Dopo aver calcolato i rendimenti di Black e Litterman si nota che, oltre al cambiamento dei rendimenti dei titoli su cui l'investitore ha espresso delle view, sono cambiati anche i rendimenti di quei titoli per cui non sono state espresse delle opinioni. Questo succede perché i titoli sono correlati tra loro, dunque l'investitore che esprime una view, lo fa implicitamente anche per tutti gli altri titoli. Questo effetto è causato dall'espressione delle views come combinazione lineare dei suoi rendimenti attesi, della matrice di varianza covarianza dei rendimenti di equilibrio e della matrice di varianza covarianza delle views. In questo modo gli errori dell'investitore, riferiti alle views, sono "spalmati" tra tutti gli assets, prevenendo la formazione di allocazioni concentrate su alcuni di essi. Il vettore dei rendimenti attesi e la matrice di varianza covarianza, ottenuti attraverso il modello di Black e Litterman, diventeranno gli input da inserire nel processo di ottimizzazione standard media-varianza di Markowitz per calcolare la frontiera efficiente, definire la media e la varianza del portafoglio ottimo e la sua allocazione. Al termine del processo di ottimizzazione, si ottiene un portafoglio ottimo le cui quote si discostano dal portafoglio di mercato in misura pari alle view espresse tale per cui varieranno in misura maggiore i pesi dei titoli sui quali l'investitore ha formulato delle views rispetto agli altri. Il modello ha il vantaggio di far scegliere all'investitore stesso il livello di confidenza da riporre nelle view e quindi l'effettivo scostamento dal portafoglio di equilibrio determinando così, in maniera implicita, il grado di rischio che è disposto a sopportare.

3.5 Critiche e difficoltà sull'implementazione del modello

Il modello di Black e Litterman è stato criticato in quanto ritenuto non abbastanza oggettivo per via dell'introduzione delle views. Nella pratica, testare tutte le combinazioni di variabili comporta un'elevata difficoltà computazionale per cui, qualsiasi approccio si sceglierà di utilizzare, risulterà inevitabilmente soggettivo in quanto si andranno a testare solo quelle variabili che risultano essere più significative per l'investitore. Inoltre, il modello riesce a superare la critica della soggettività perché prende come riferimento il modello di equilibrio del CAPM. Un'ulteriore critica può essere mossa riguardo alla costruzione della matrice P in presenza di view relative. Nel modello viene utilizzato uno schema di pesi ottenuto dividendo l'unità per il numero degli asset coinvolti. Il procedimento risulta semplicistico, ma in questo modo non si tiene conto della capitalizzazione e della dimensione degli titoli presenti in portafoglio. A tal proposito, Idzorek suggerisce di adottare uno schema di pesi proporzionale alla capitalizzazione di mercato, cioè di considerare il peso del singolo titolo uguale al rapporto fra capitalizzazione dello stesso e capitalizzazione di tutti gli asset coinvolti nella view con medesimo segno.

Le difficoltà principali del modello riguardano la specificazione del parametro τ e della matrice di confidenza Ψ . Black e Litterman non stabiliscono una metodologia di calcolo per fissare τ , ma si limitano a dargli un valore prossimo allo zero. Secondo Blamont e Firoozye $(\tau \cdot \Sigma)$ rappresenta lo standard error della stima dei rendimenti attesi d'equilibrio dunque τ può essere approssimato pari a 1 diviso per il numero delle osservazioni. He e Litterman invece calibrano il livello di confidenza delle aspettative in modo tale che il rapporto Ψ/τ sia esattamente pari alla varianza della view $P\Sigma P^T$. In questo modo il valore di τ è irrilevante dal momento che soltanto il rapporto Ψ/τ entrerà nel modello. Il modo più semplice, comunque, per calibrare il modello, è quello di effettuare delle assunzioni su τ tenendo conto della sua proporzionalità inversa con il peso relativo dei rendimenti impliciti Θ . Per quanto riguarda il calcolo della matrice di confidenza, può essere usata una formula che mantiene la varianza delle views proporzionale alla varianza dei rendimenti di equilibrio dato dall'inclusione di $\tau\Sigma$ al suo interno:

$$\Psi = \text{diag}(P \cdot \tau\Sigma \cdot P^T)$$

Idzorek, invece, propone un metodo di calcolo degli elementi diagonali della matrice Ψ eliminando il problema della specificazione di τ . Egli propone, per ciascuna view, di calcolare il vettore dei rendimenti attesi, utilizzando l'equazione di Black e Litterman nel caso in cui l'investitore abbia l'assoluta certezza del verificarsi della view e di trattare ciascuna view come se fosse l'unica espressa. Un'altra possibile soluzione per il calcolo di Ψ può consistere nel definire un intervallo di confidenza attorno alla media delle views, per poi individuare il valore della varianza sfruttando l'ipotesi di normalità delle views stesse.

Capitolo 4 – Applicazione dei modelli

4.1 Analisi dati

Per l'implementazione dei modelli è importante scegliere il set di asset che comporranno il portafoglio. A tal scopo, si è preso come punto di riferimento l'indice azionario STOXX Europe 600 progettato da STOXX Limited. L'indice è composto da 600 delle principali aziende che coprono circa il 90% della capitalizzazione di mercato del mercato azionario europeo. I paesi che compongono l'indice sono Austria, Belgio, Cechia, Danimarca, Finlandia, Francia, Germania, Irlanda, Italia, Lussemburgo, Paesi Bassi, Norvegia, Portogallo, Spagna, Svizzera, Svezia e Regno Unito. Tra le 600 aziende che compongono l'indice sono state scelte le prime 20 con la maggiore capitalizzazione di mercato aggiustata per il flottante:

N°	Nome	Codice	Settore
1	NESTLE SA-REG	NESN SW Equity	Alimentare
2	ROCHE HOLDING AG-GENUSSCHEIN	ROG SW Equity	Farmaceutico
3	NOVARTIS AG-REG	NOVN SW Equity	Farmaceutico
4	HSBC HOLDINGS PLC	HSBA LN Equity	Bancario
5	SAP SE	SAP GR Equity	Tecnologico
6	TOTAL SA	FP FP Equity	Petroliero
7	BP PLC	BP/ LN Equity	Energetico
8	ROYAL DUTCH SHELL PLC-A SHS	RDSA LN Equity	Petroliero
9	ASTRAZENECA PLC	AZN LN Equity	Farmaceutico
10	LVMH MOËT HENNESSY LOUIS VUITTON	MC FP Equity	Moda
11	ASML HOLDING NV	ASML NA Equity	Tecnologico
12	LINDE PLC	LIN US Equity	Chimico
13	GLAXOSMITHKLINE PLC	GSK LN Equity	Farmaceutico
14	ALLIANZ SE-REG	ALV GR Equity	Assicurativo
15	SANOFI	SAN FP Equity	Sanitario
16	SIEMENS AG-REG	SIE GR Equity	Tecnologico
17	NOVO NORDISK A/S-B	NOVOB DC Equity	Farmaceutico
18	DIAGEO PLC	DGE LN Equity	Alcolici
19	UNILEVER NV	UNA NA Equity	Alimentare
20	BRITISH AMERICAN TOBACCO PLC	BATS LN Equity	Tabacco

Tabella 1. Ordine, nome, codice e settore dei 20 titoli presenti nell'indice azionario STOXX Europe 600

Dal database di Bloomberg, presso la società Fondaco SGR S.p.A., sono stati scaricati i prezzi di chiusura giornalieri dei titoli al lordo dei dividendi. La scelta di trascurare lo stacco dei dividendi potrebbe sembrare erronea, ma, in realtà, si è osservato che le serie storiche, essendo appunto prezzi di chiusura giornalieri, risultano poco impattate dal dividendo stesso. Inoltre, l'obiettivo della analisi è quello di confrontare portafogli costruiti con approcci differenti e non quello di andare a valutarne la performance. Dunque, ai fini del lavoro, trascurando i dividendi non si rischia di ottenere risultati falsati. Analizzando le serie storiche, si è notato che alcuni titoli contengono una quantità di dati superiore rispetto ad altri; dunque per definire la lunghezza temporale, si è scelta la sorgente contenente il numero minore di valori tra tutte quelle disponibili. I dati raccolti coprono una lunghezza temporale pari a 14 anni, in particolare sono stati raccolti i prezzi di chiusura giornalieri dal 08/11/05 al 08/11/19 per un totale di 3654 osservazioni per titolo. Dai prezzi di chiusura giornalieri sono stati ricavati i rendimenti logaritmici calcolati con la seguente formula:

$$r_t = \ln\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right)$$

Dove:

- r_t è il rendimento logaritmico al tempo t ;
- p_t è il prezzo di chiusura registrato al tempo t ;
- p_{t-1} è il prezzo di chiusura registrato al tempo $t - 1$.

Sono stati scelti i rendimenti logaritmici in quanto, assumendo che i prezzi siano distribuiti su una log-normale, seguono una distribuzione normale; ciò rende possibile l'utilizzo di tutti i modelli matematici che hanno come ipotesi di base la distribuzione normale dei dati. Nei rendimenti logaritmici viene identificata la variabile aleatoria da cui è possibile estrapolare le seguenti informazioni:

- la media come parametro di centratura della distribuzione;
- la deviazione standard e la varianza come misura di dispersione;
- la skewness (asimmetria) per indicazioni sulla scenteratura;
- la curtosi come indicatore di pesatezza delle code (fat tails).

Una volta calcolati i rendimenti logaritmici, bisognerebbe calcolare l'extrarendimento, ovvero la differenza tra il rendimento del titolo r_t e il rendimento dell'asset risk free al tempo t . L'asset risk free preso in considerazione è l'Euribor con scadenza a tre mesi che presenta attualmente sul mercato un rendimento negativo. Il modello di Markowitz, implementato nel 1952, non teneva conto della possibilità di un tasso risk free negativo, dato che non si era ancora presentata una situazione del genere sul mercato. Dunque, sia per coerenza con le caratteristiche del modello sia considerando realisticamente che per un investitore privato i tassi di interesse non sono negativi, si è scelto di porre il rendimento dell'asset risk free a zero. Dai rendimenti logaritmici è stata calcolata la media, la deviazione standard e la performance di Sharpe:

Codice	Media	Deviazione standard	Indice di Sharpe
NESN SW Equity	0,00011800202	0,004654218	0,0253537782
ROG SW Equity	0,00004922920	0,005606714	0,0087804010
OVN SW Equity	0,00003887594	0,005261041	0,0073894003
HSBA LN Equity	-0,00003391863	0,007120047	-0,0047638207
SAP GR Equity	0,00014603938	0,006601726	0,0221213940
FP FP Equity	-0,00000855580	0,006782589	-0,0012614352
BP/ LN Equity	-0,00002736776	0,007017376	-0,0038999989
RDSA LN Equity	0,00003439605	0,006496198	0,0052947975
AZN LN Equity	0,00012249022	0,006399229	0,0191414015
MC FP Equity	0,00022285925	0,007590045	0,0293620469
ASML NA Equity	0,00032715313	0,008306146	0,0393868728
LIN US Equity	0,00017088302	0,006690039	0,0255429047
GSK LN Equity	0,00001747748	0,005390352	0,0032423642
ALV GR Equity	0,00007263347	0,008037863	0,0090364152
SAN FP Equity	0,00002177614	0,006547723	0,0033257574
SIE GR Equity	0,00007614770	0,007590563	0,0100318907
NOVOB DC Equity	0,00029001941	0,007092883	0,0408887904
DGE LN Equity	0,00015370168	0,005183876	0,0296499519
UNA NA Equity	0,00012747953	0,006409922	0,0198878439
BATS LN Equity	0,00009687516	0,006089038	0,0159097646

Tabella 2. Media, deviazione standard e performance di Sharpe dei 20 titoli

Il titolo che presenta l'indice di Sharpe maggiore è NOVOB DC Equity, ciò significa che, nel periodo dell'analisi, ha riportato un maggiore rendimento per ogni punto in più di rischio. Al contrario, il titolo con l'indice di Sharpe minore risulta essere HSBA LN Equity.

$$Sharpe = \frac{\mu_n - i}{\sigma_n}$$

- μ_n è la media del titolo n ;
- i è il rendimento dell'asset risk free;
- σ_n è la deviazione standard del titolo n .

Attraverso il software di simulazione Arena è stato possibile fittare le distribuzioni dei 20 titoli che comporranno il portafoglio. Oltre alla forma della distribuzione ed i suoi parametri, sono state raccolte informazioni che riguardano:

- *Square Error*: indica la discrepanza quadratica media fra i valori dei dati osservati ed i valori dei dati stimati;
- *Curtosi*: indica un allontanamento dalla normalità distributiva rispetto alla quale si verifica un maggiore appiattimento o un maggiore allungamento;
- *Asimmetria*: indica la scentratura della distribuzione;
- *Test del Chi Quadro e di Kolmogorov-Smirnov*: verificano la forma della distribuzione campionaria effettuando un test sul p-value per cui, se risulta essere minore di un determinato valore α , la probabilità di commettere un errore di prima specie risulta essere limitata.

4.1.1 Nestle SA-REG

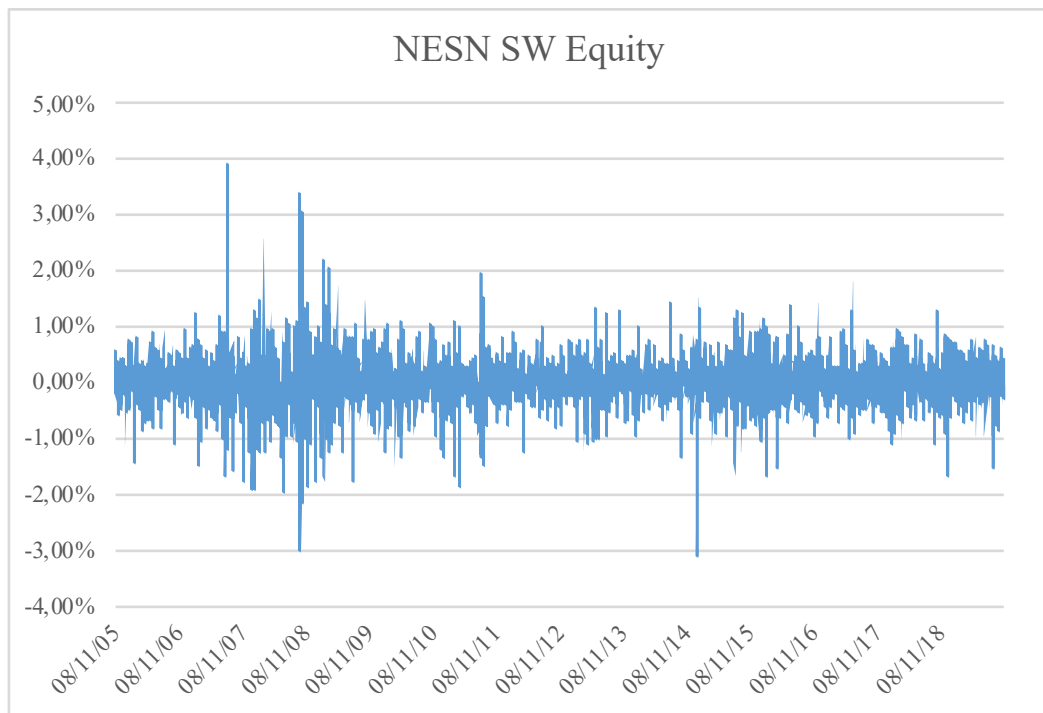


Figura 6. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo Nestle SA-REG dal 08/11/05 al 08/11/19

Il grafico mostra l'andamento del titolo negli ultimi 14 anni. I rendimenti iniziano a variare drasticamente da settembre 2007 fino a settembre 2009, dopodiché l'andamento si stabilizza fino a marzo 2015 in cui subisce un'ulteriore variazione. Da marzo 2015 fino a novembre 2019 i rendimenti risultano stabili. Il fitting dei dati ha restituito i seguenti risultati:

Distribuzione: normale

Espressione: NORM(0.000118 ; 0.994650)

Square Error: 0.012150

Curtosi: 6.290680

Asimmetria: -0.055091

Chi Quadro Test:

- numero di intervalli: 12
- gradi di libertà: 9
- test statistico: 355
- p-value < 0.005

Kolmogorov-Smirnov Test:

- test statistico: 0.0683
- p-value < 0.01

Sommario sull'istogramma:

- range: da -0.04 a 0.05
- numero di intervalli: 40

I logrendimenti del titolo Nestle SA-REG seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono stati accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso destra e presenti delle code grasse.

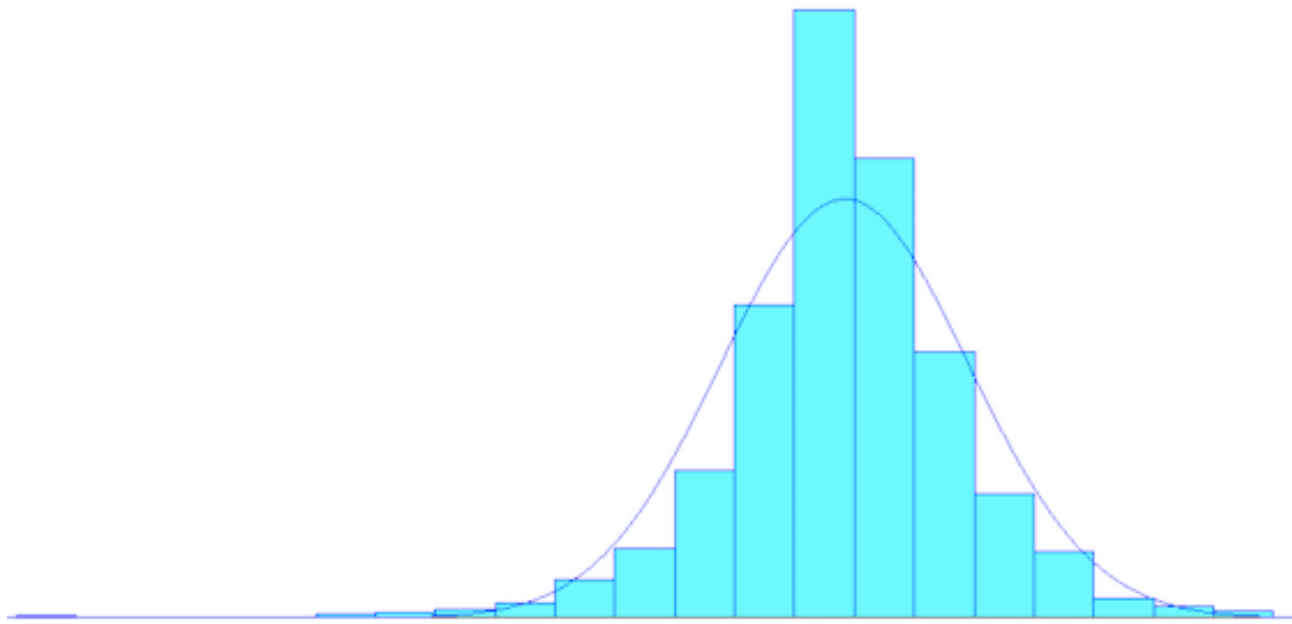


Figura 7. Distribuzione normale dei rendimenti logaritmici del titolo Nestle SA-REG

4.1.2 Roche Holding AG-Genusschein

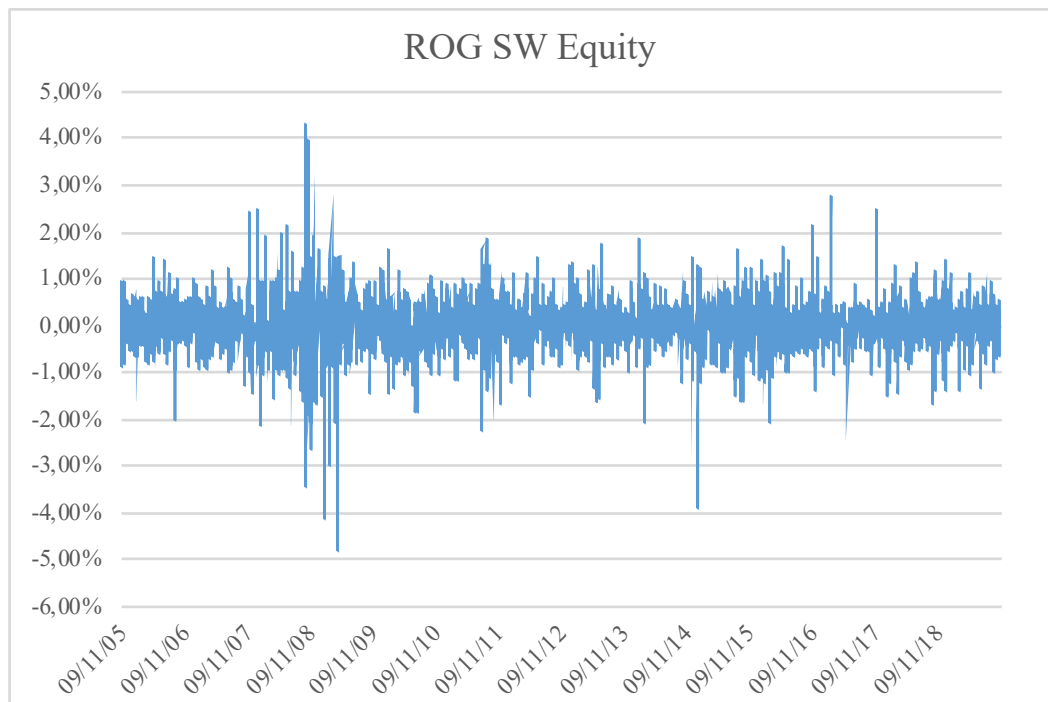


Figura 8. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo Roche Holding AG-Genusschein dal 08/11/05 al 08/11/19

I rendimenti del titolo iniziano a variare da novembre 2007 raggiungendo un picco tra novembre 2008 e marzo 2009. Da novembre 2009 fino a novembre 2019 i rendimenti si stabilizzano ad eccezione di gennaio, marzo, luglio e novembre del 2017 per i quali si sono registrate delle variazioni. Il fitting dei dati ha restituito i seguenti risultati:

Distribuzione: normale

Espressione: $\text{NORM}(4.92e^{-5}; 0.00561)$

Square Error: 0.015048

Curtosi: 7.856684

Asimmetria: -0.254709

Chi Quadro Test:

- numero di intervalli: 12
- gradi di libertà: 9
- test statistico: 468
- p-value < 0.005

Kolmogorov-Smirnov Test:

- test statistico: 0.0771
- p-value < 0.01

Sommario sull'istogramma:

- range: da -0.06 a 0.06

- numero di intervalli: 40

I logrendimenti del titolo Roche Holding AG-Genusschein seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono stati accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso destra e presenti delle code grasse.

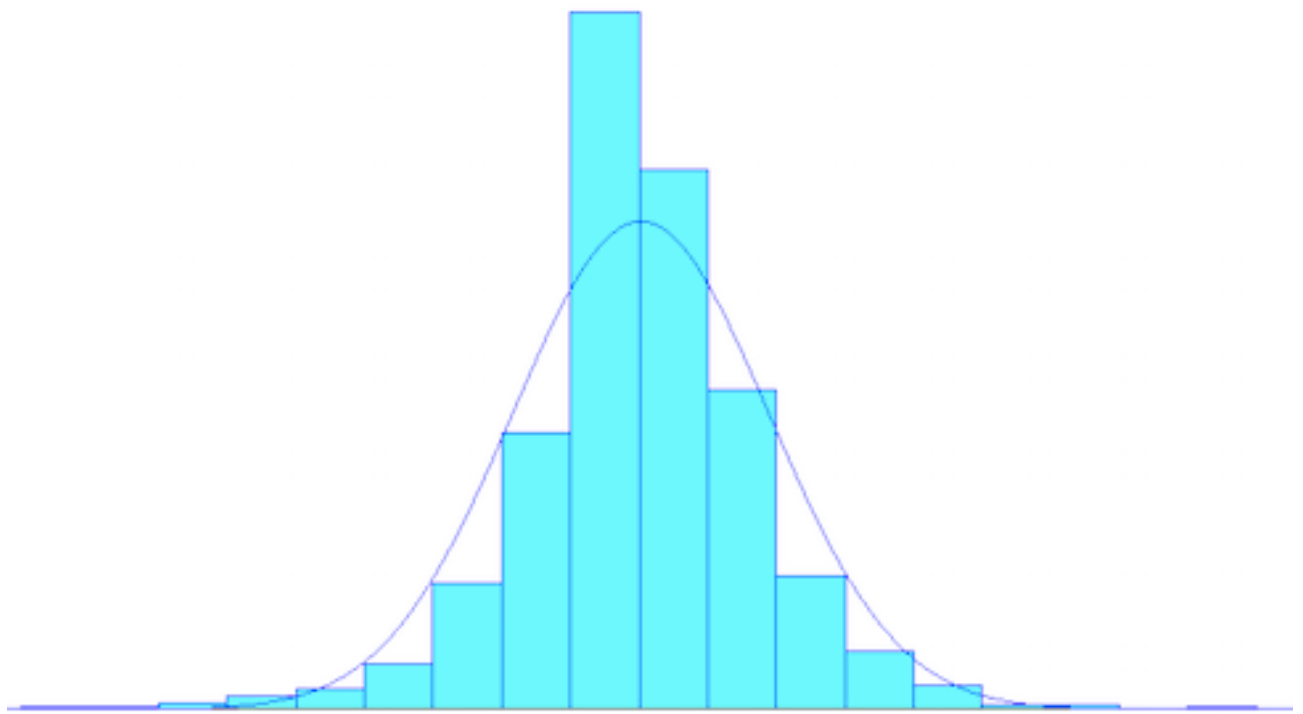


Figura 9. Distribuzione normale dei rendimenti logaritmici del titolo Roche Holding AG-Genusschein

4.1.3 Novartis AG-REG

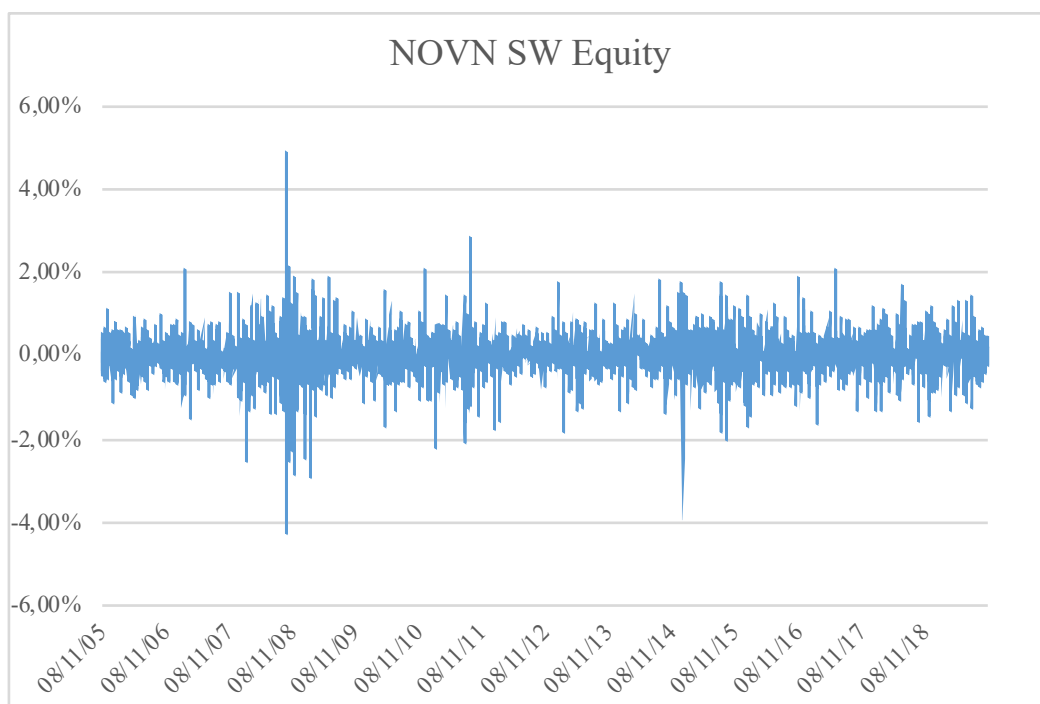


Figura 10. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo Novartis AG-REG dal 08/11/05 al 08/11/19

Da marzo 2007 si iniziano a registrare delle variazioni sui rendimenti raggiungendo il picco tra marzo e luglio 2009. I rendimenti risultano variabili fino a gennaio 2015 per poi stabilizzarsi fino a novembre 2019. Il fitting dei dati ha restituito i seguenti risultati:

Distribuzione: normale

Espressione: $\text{NORM}(3.89e^{-5}; 0.00526)$

Square Error: 0.012909

Curtosi: 8.554393

Asimmetria: -0.086393

Chi Quadro Test:

- numero di intervalli: 10
- gradi di libertà: 7
- test statistico: 347
- p-value < 0.005

Kolmogorov-Smirnov Test:

- test statistico: 0.0693
- p-value < 0.01

Sommario sull'istogramma:

- range: da -0.06 a 0.06
- numero di intervalli: 40

I logrendimenti del titolo Novartis AG-REG seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono stati accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso destra e presenti delle code grasse.

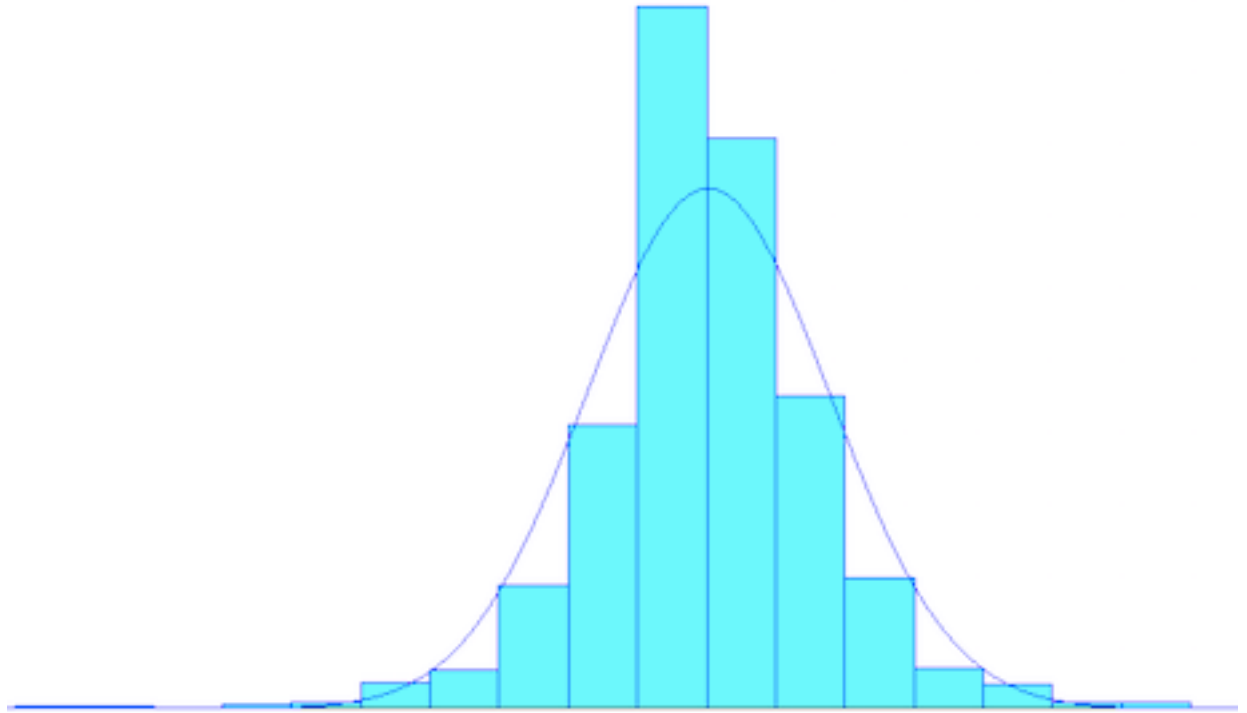


Figura 11. Distribuzione normale dei rendimenti logaritmici del titolo Novartis AG-REG

4.1.4 HSBC Holdings PLC

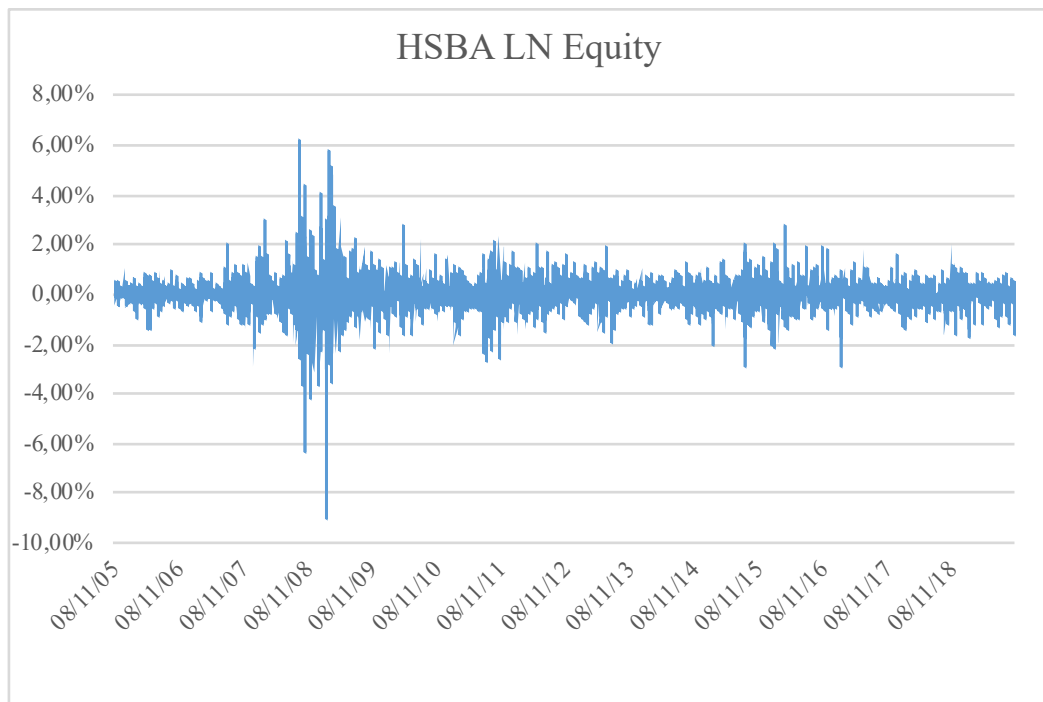


Figura 12. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo HSBC Holding PLC dal 08/11/05 al 08/11/19

I rendimenti iniziano a subire delle variazioni da gennaio 2008 per poi raggiungere il picco da luglio 2008 fino a settembre 2009. Dopo queste variazioni, il titolo si è stabilizzato fino a novembre 2019. Il fitting dei dati ha restituito i seguenti risultati:

Distribuzione: normale

Espressione: $\text{NORM}(-3.39e^{-5}; 0.00712)$

Square Error: 0.024514

Curtosi: 16.181998

Asimmetria: -0.320748

Chi Quadro Test:

- numero di intervalli: 10
- gradi di libertà: 7
- test statistico: 636
- p-value < 0.005

Kolmogorov-Smirnov Test:

- test statistico: 0.0919
- p-value < 0.01

Sommario sull'istogramma:

- range: da -0.11 a 0.08
- numero di intervalli: 40

I logrendimenti del titolo HSBC Holding PLC seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono stati accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso destra e presenti delle code grasse.

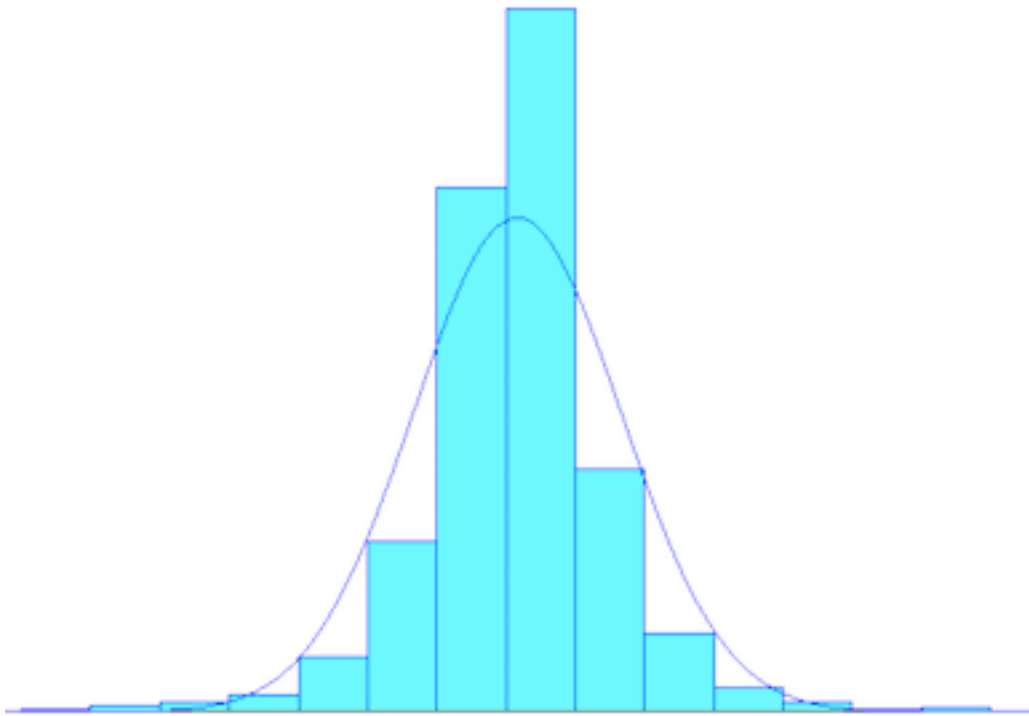


Figura 13. Distribuzione normale dei rendimenti logaritmici del titolo HSBC Holding PLC

4.1.5 SAP SE

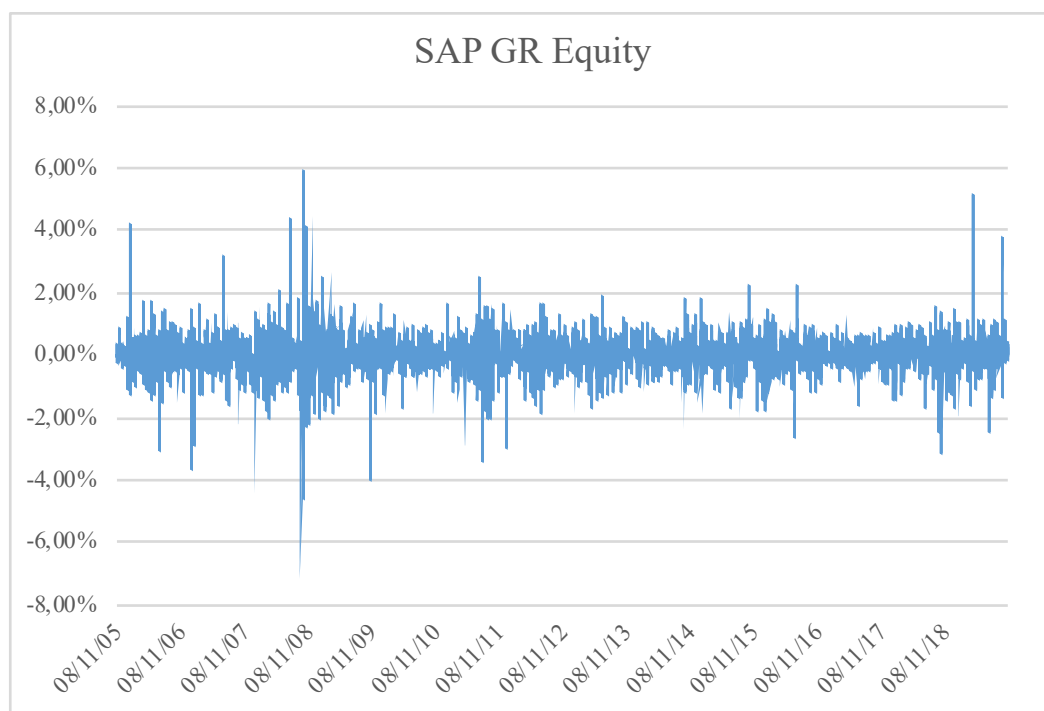


Figura 14. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo SAP SE dal 08/11/05 al 08/11/19

I rendimenti del titolo risultano variabili già da novembre 2005 registrando diversi picchi tra cui, il più consistente, a novembre 2008. Il titolo, appartenente ad un settore turbolento, risulta instabile registrando sempre delle variazioni repentine. Altri picchi rilevanti si sono registrati ad aprile e novembre 2019. Il fitting dei dati ha restituito i seguenti risultati:

Distribuzione: normale

Espressione: NORM(0.000146; 0.0066)

Square Error: 0.013271

Curtosi: 11.901854

Asimmetria: -0.333411

Chi Quadro Test:

- numero di intervalli: 10
- gradi di libertà: 7
- test statistico: 638
- p-value < 0.005

Kolmogorov-Smirnov Test:

- test statistico: 0.0736
- p-value < 0.01

Sommario sull'istogramma:

- range: da -0.09 a 0.08
- numero di intervalli: 40

I logrendimenti del titolo SAP SE seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono stati accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso destra e presenti delle code grasse.

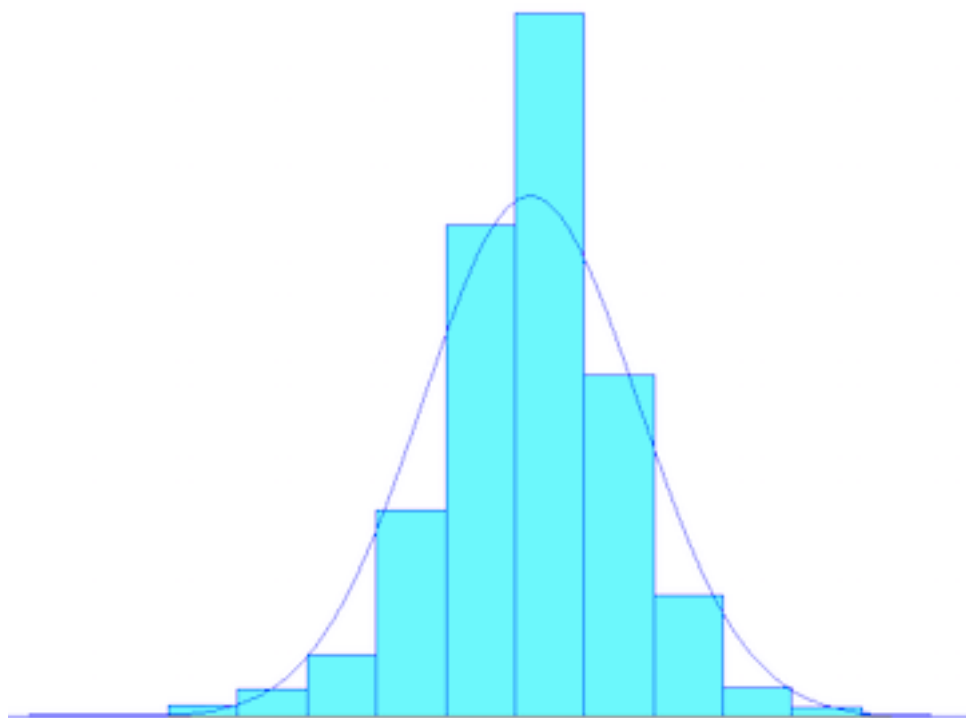


Figura 15. Distribuzione normale dei rendimenti logaritmici del titolo SAP SE

4.1.6 Total SA

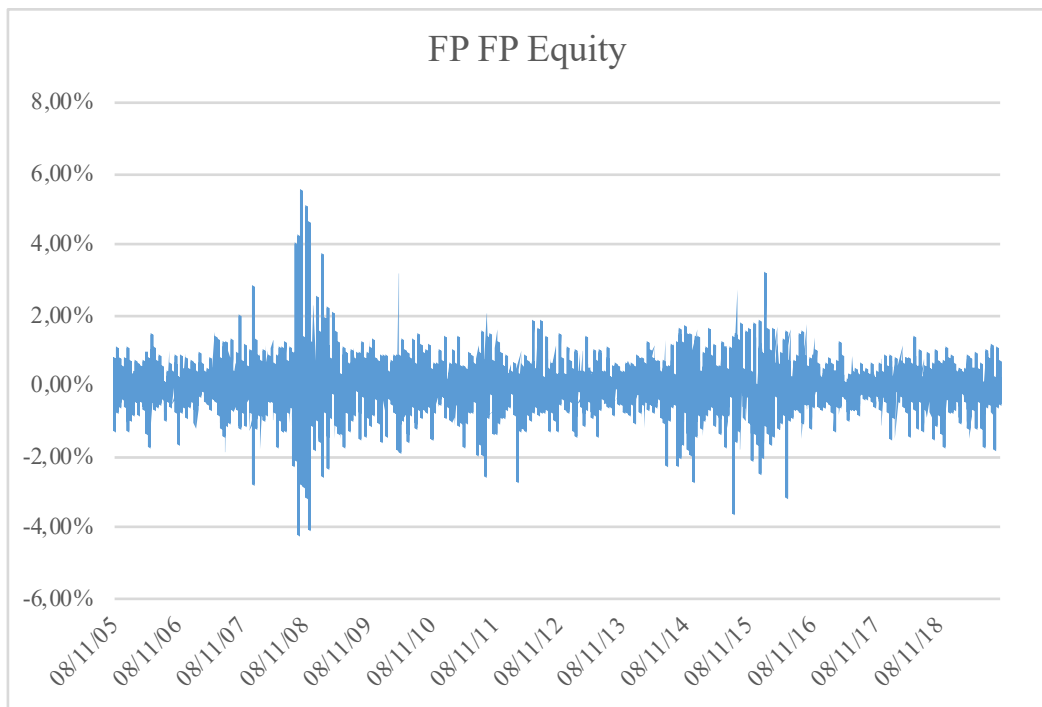


Figura 16. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo Total SA dal 08/11/05 al 08/11/19

Total SA è un'azienda che opera nel settore petrolifero in cui il prezzo della commodity può variare anche giornalmente. Si nota, infatti, che i rendimenti sono pressoché sempre molto variabili registrando dei picchi rilevanti a gennaio e novembre 2008, maggio 2005, settembre 2011, maggio 2012, novembre 2014, settembre 2015, febbraio e luglio 2016. Il fitting dei dati ha restituito i seguenti risultati:

Distribuzione: normale

Espressione: $\text{NORM}(-8.56e^{-6}; 0.00678)$

Square Error: 0.010145

Curtosi: 6.807948

Asimmetria: 0.109233

Chi Quadro Test:

- numero di intervalli: 13
- gradi di libertà: 10
- test statistico: 319
- p-value < 0.005

Kolmogorov-Smirnov Test:

- test statistico: 0.0609
- p-value < 0.01

Sommario sull'istogramma:

- range: da -0.06 a 0.07
- numero di intervalli: 40

I logrendimenti del titolo Total SA seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono stati accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso sinistra e presenti delle code grasse.

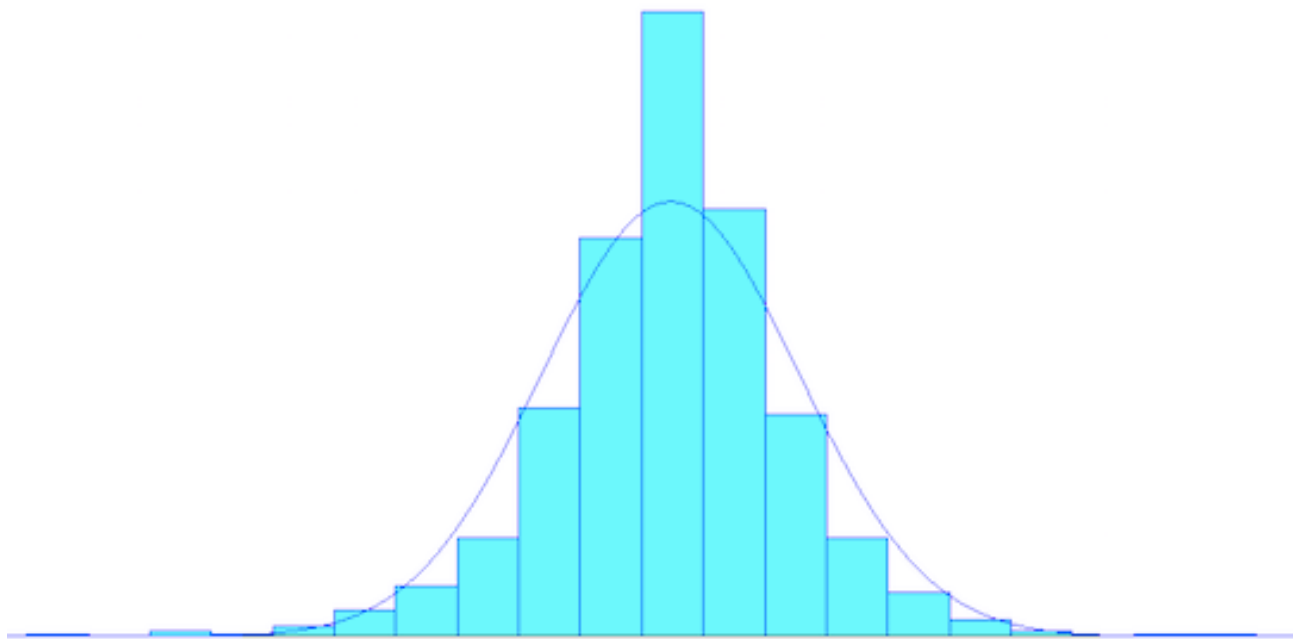


Figura 17. Distribuzione normale dei rendimenti logaritmici del titolo Total SA

4.1.7 BP PLC

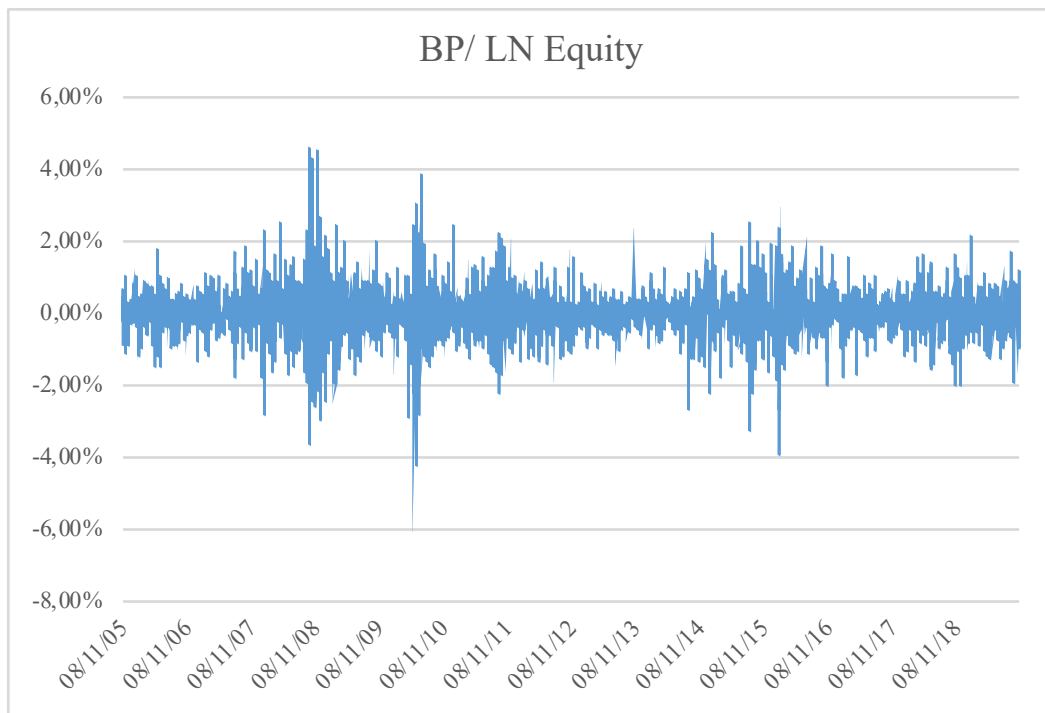


Figura 18. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo BP PLC dal 08/11/05 al 08/11/19

I rendimenti iniziano a subire delle variazioni da gennaio 2008 raggiungendo un picco a novembre 2008, successivamente si stabilizzano per poi subire un'ulteriore variazione a giugno 2016. Dal 2016 fino al 2019, i rendimenti rimangono pressoché stabili registrando alcuni picchi tra settembre 2014 e luglio 2016. Il fitting dei dati ha restituito i seguenti risultati:

Distribuzione: normale

Espressione: $\text{NORM}(-2.74e^{-5}; 0.00702)$

Square Error: 0.013421

Curtosi: 6.143815

Asimmetria: -0.095820

Chi Quadro Test:

- numero di intervalli: 12
- gradi di libertà: 9
- test statistico: 409
- p-value < 0.005

Kolmogorov-Smirnov Test:

- test statistico: 0.0674
- p-value < 0.01

Sommario sull'istogramma:

- range: da -0.08 a 0.06
- numero di intervalli: 40

I logrendimenti del titolo BP PLC seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono stati accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso destra e presenti delle code grasse.

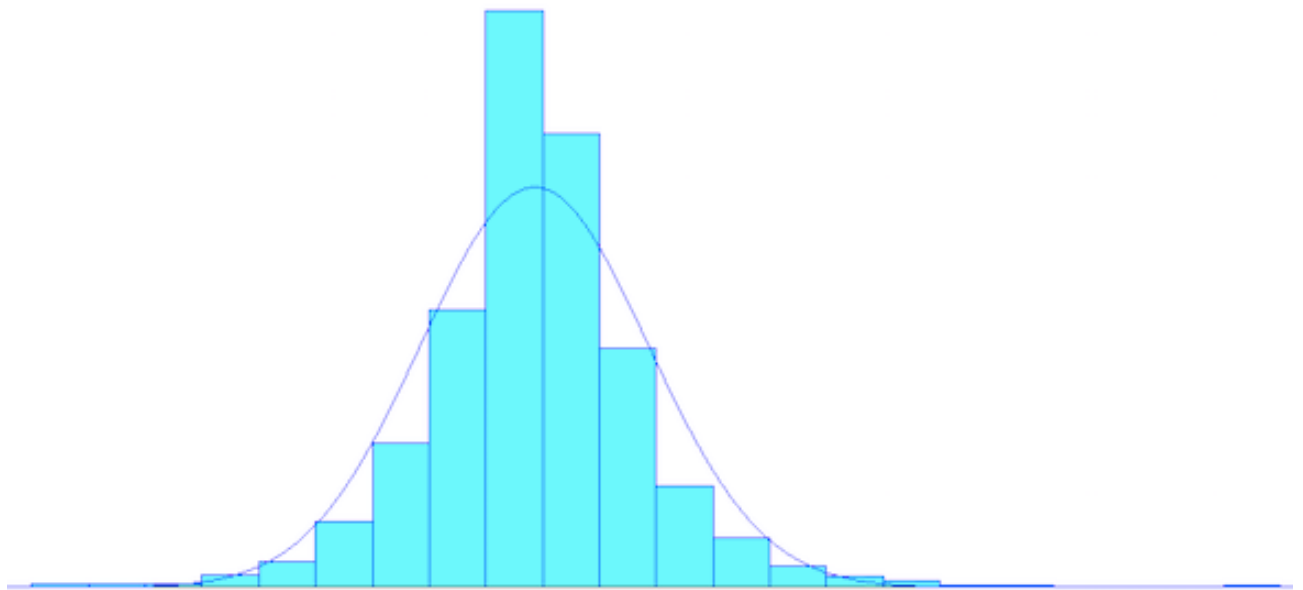


Figura 19. Distribuzione normale dei rendimenti logaritmici del titolo BP PLC

4.1.8 Royal Dutch Shell PLC-A SHS

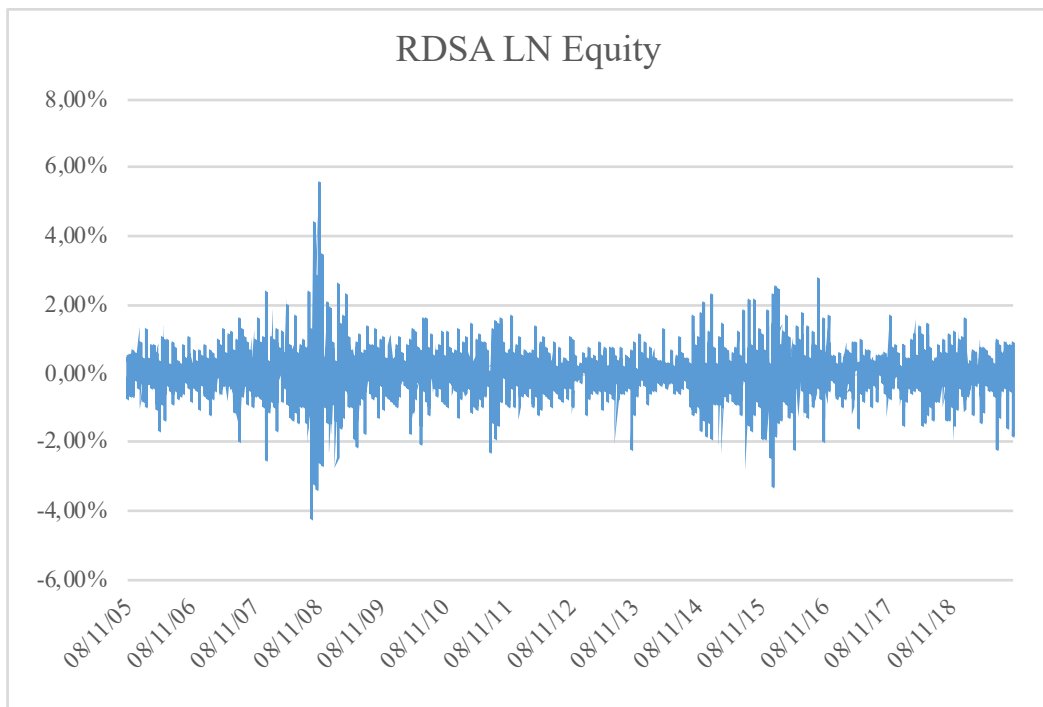


Figura 20. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo Royal Dutch Shell PLC-A SHS dal 08/11/05 al 08/11/19

I rendimenti risultano pressoché stabili dal 2005 fino al 2019 registrando un picco rilevante a novembre 2008 e altri più contenuti a luglio 2010, settembre 2011, luglio e novembre 2013 e da novembre 2014 fino a settembre 2016. Il fitting dei dati ha restituito i seguenti risultati:

Distribuzione: normale

Espressione: $\text{NORM}(3.44e^{-5}; 0.0065)$

Square Error: 0.014163

Curtosi: 6.153729

Asimmetria: 0.114930

Chi Quadro Test:

- numero di intervalli: 13
- gradi di libertà: 10
- test statistico: 526
- p-value < 0.005

Kolmogorov-Smirnov Test:

- test statistico: 0.0652
- p-value < 0.01

Sommario sull'istogramma:

- range: da -0.06 a 0.07
- numero di intervalli: 40

I logrendimenti del titolo Royal Dutch Shell PLC-A SHS seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono stati accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso sinistra e presenti delle code grasse.

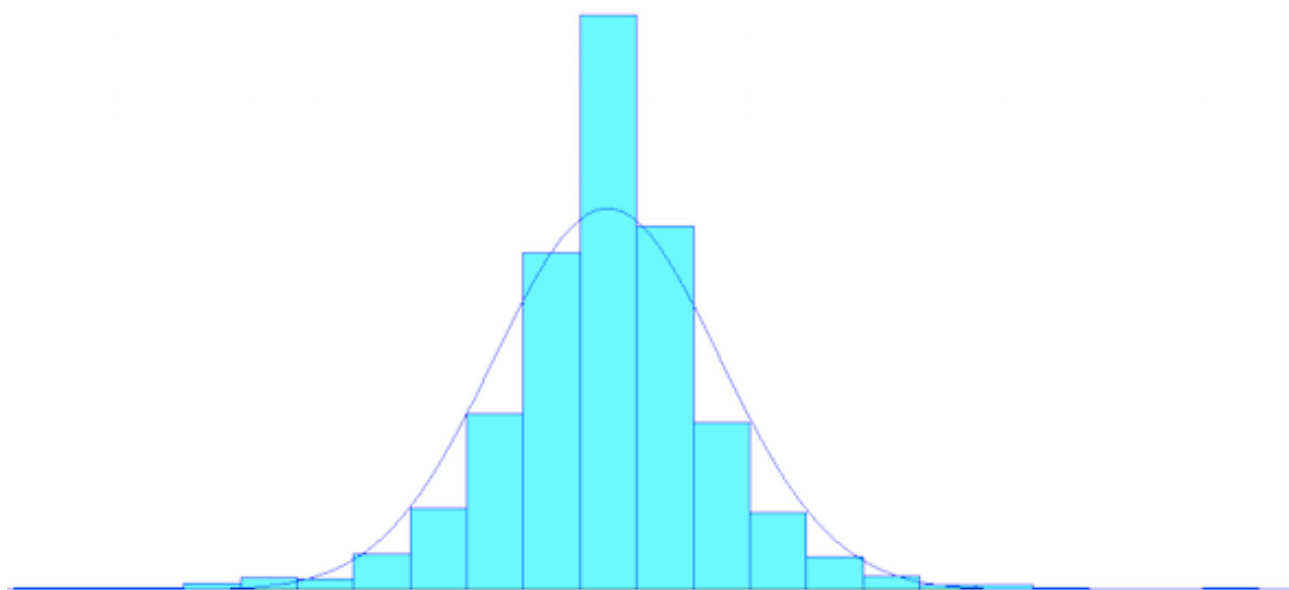


Figura 21. Distribuzione normale dei rendimenti logaritmici del titolo Royal Dutch Shell PLC-A SHS

4.1.9 AstraZeneca PLC

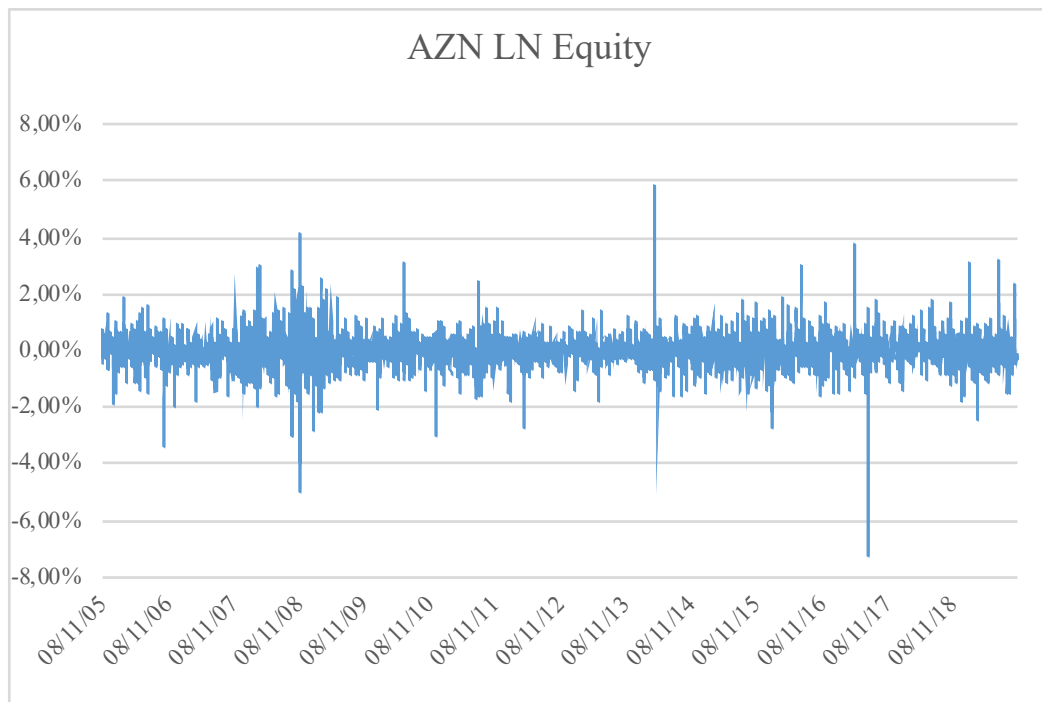


Figura 22. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo AstraZeneca PLC dal 08/11/05 al 08/11/19

I rendimenti iniziano a variare da luglio 2007 raggiungendo il picco tra novembre 2008 e febbraio 2009. Le variazioni sui rendimenti rimangono pressoché contenute registrando dei picchi in agosto 2010, febbraio e novembre 2011, agosto 2012, luglio 2014, giugno 2016, agosto e novembre 2017. Il fitting dei dati ha restituito i seguenti risultati:

Distribuzione: normale

Espressione: NORM(0.000122; 0.0064)

Square Error: 0.014521

Curtosi: 11.821147

Asimmetria: -0.391204

Chi Quadro Test:

- numero di intervalli: 9
- gradi di libertà: 6
- test statistico: 336
- p-value < 0.005

Kolmogorov-Smirnov Test:

- test statistico: 0.0723
- p-value < 0.01

Sommario sull'istogramma:

- range: da -0.09 a 0.08
- numero di intervalli: 40

I logrendimenti del titolo AstraZeneca PLC seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono stati accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso destra e presenti delle code grasse.

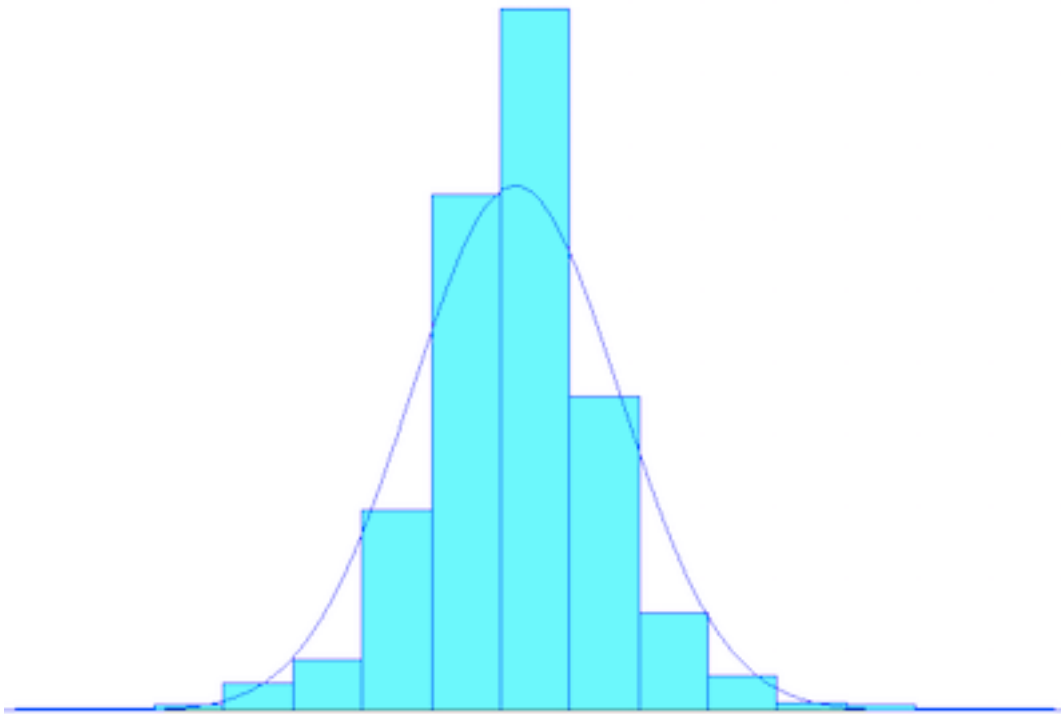


Figura 23. Distribuzione normale dei rendimenti logaritmici del titolo AstraZeneca PLC

4.1.10 LVMH Moët Hennessy Louis Vuitton

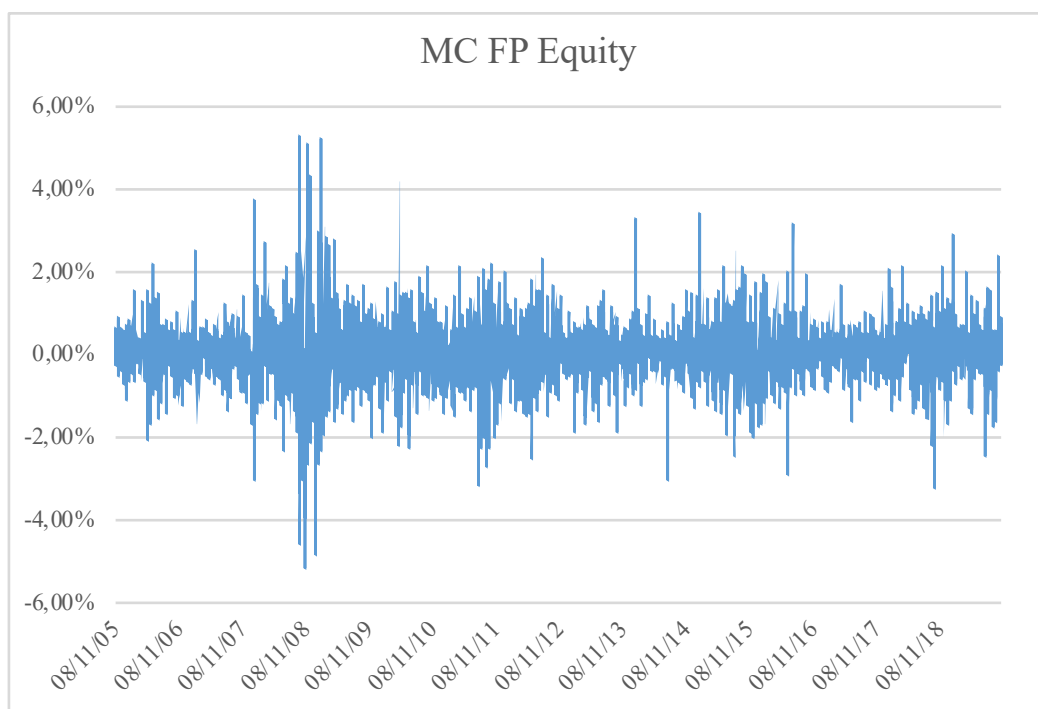


Figura 24. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo LVMH Moët Hennessy Louis Vuitton dal 08/11/05 al 08/11/19

Da novembre 2005 a novembre 2019 i rendimenti risultano pressoché sempre variabili registrando delle variazioni rilevanti tra gennaio 2008 e luglio 2009, maggio 2010, settembre 2011, gennaio 2014, tra gennaio 2015 e giugno 2016 e tra luglio 2017 e novembre 2019. Il fitting dei dati ha restituito i seguenti risultati:

Distribuzione: normale

Espressione: NORM(0.000223; 0.00759)

Square Error: 0.008424

Curtosi: 5.191554

Asimmetria: 0.100955

Chi Quadro Test:

- numero di intervalli: 13
- gradi di libertà: 10
- test statistico: 298
- p-value < 0.005

Kolmogorov-Smirnov Test:

- test statistico: 0.059
- p-value < 0.01

Sommario sull'istogramma:

- range: da -0.07 a 0.07

- numero di intervalli: 40

I logrendimenti del titolo LVMH Moët Hennessy Louis Vuitton seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono stati accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso sinistra e presenti delle code grasse.

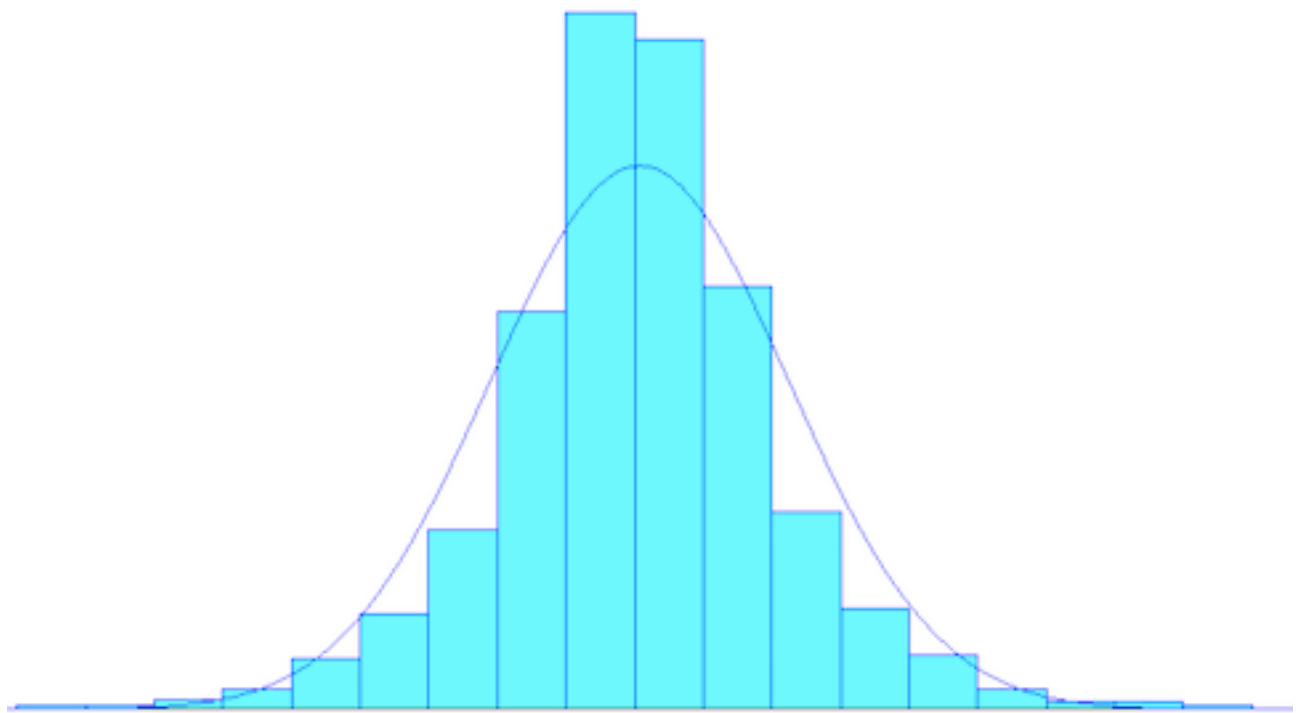


Figura 25. Distribuzione normale dei rendimenti logaritmici del titolo LVMH Moët Hennessy Louis Vuitton

4.1.11 ASML Holding NV

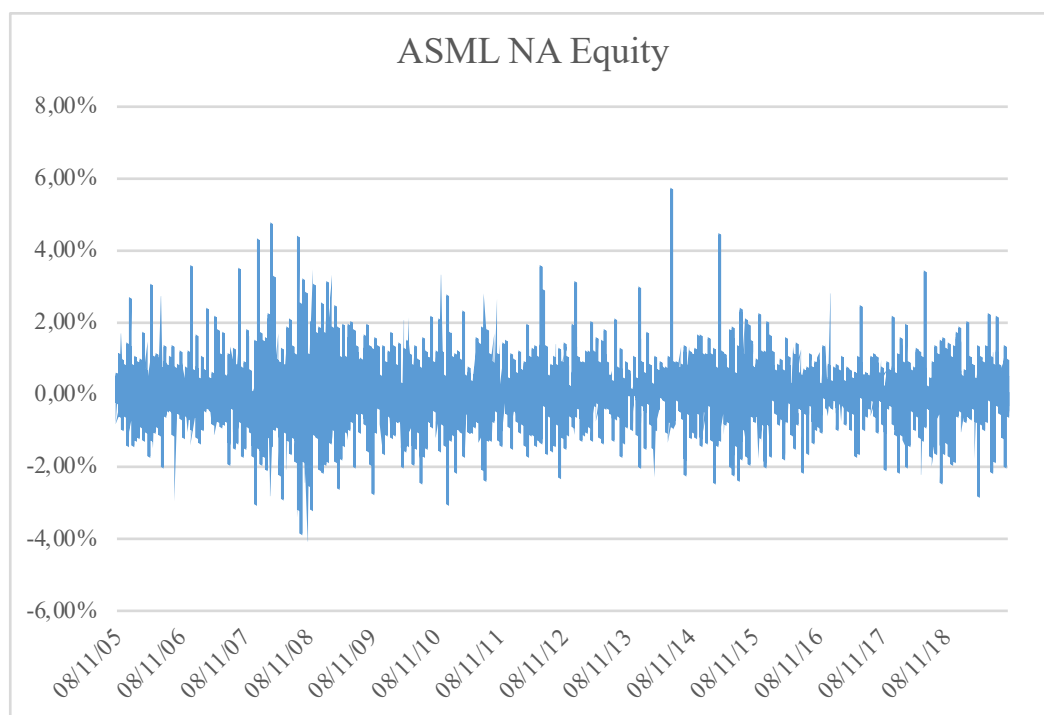


Figura 26. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo ASML Holding NV dal 08/11/05 al 08/11/19

I rendimenti risultano variabili già da novembre del 2009 registrando diversi picchi tra novembre 2007 e marzo 2009, luglio 2014 e maggio 2015. Il fitting dei dati ha restituito i seguenti risultati:

Distribuzione: normale

Espressione: NORM(0.000327; 0.00831)

Square Error: 0.005573

Curtosi: 2.986111

Asimmetria: 0.209464

Chi Quadro Test:

- numero di intervalli: 15
- gradi di libertà: 12
- test statistico: 226
- p-value < 0.005

Kolmogorov-Smirnov Test:

- test statistico: 0.0482
- p-value < 0.01

Sommario sull'istogramma:

- range: da -0.06 a 0.07
- numero di intervalli: 40

I logrendimenti del titolo ASML Holding NV seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono stati accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso sinistra e presenti delle code grasse.

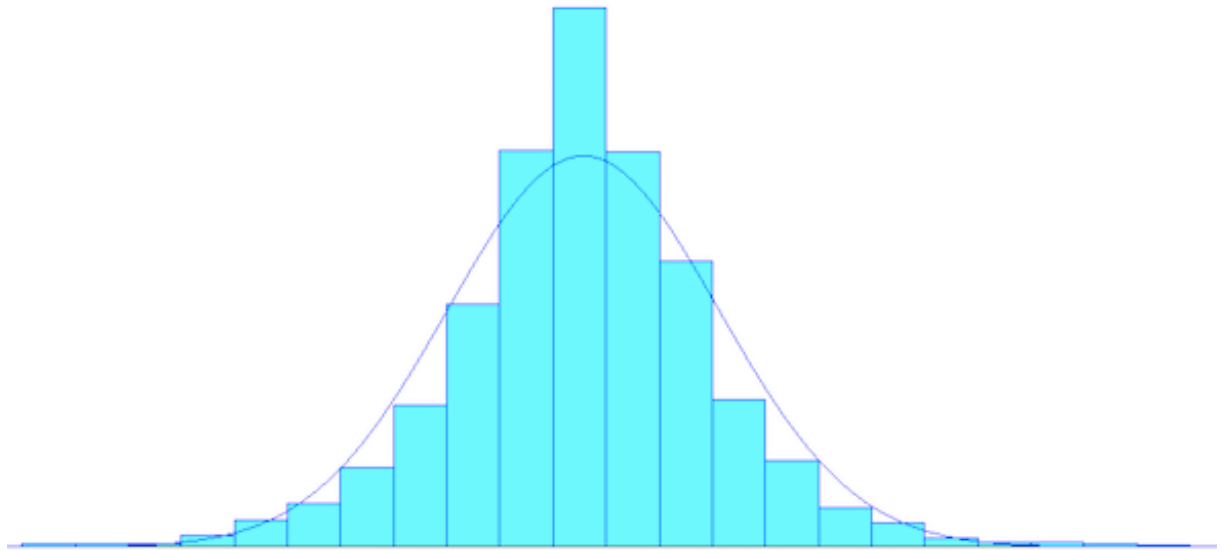


Figura 27. Distribuzione normale dei rendimenti logaritmici del titolo ASML Holding NV

4.1.12 Linde PLC

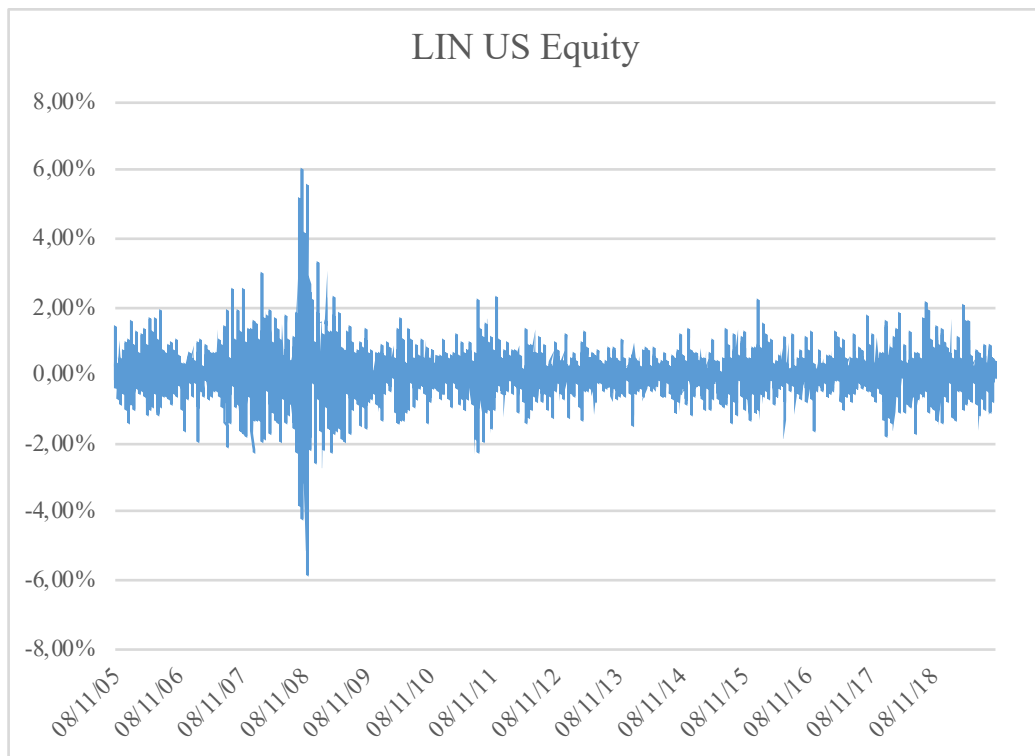


Figura 28. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo Linde PLC dal 08/11/05 al 08/11/19

I rendimenti del titolo risultano pressoché stabili da novembre 2005 fino a novembre 2019 registrando dei picchi soltanto nel periodo compreso tra luglio 2007 e luglio 2009. Il fitting dei dati ha restituito i seguenti risultati:

Distribuzione: normale

Espressione: NORM(0.000171; 0.00669)

Square Error: 0.015821

Curtosi: 10.197052

Asimmetria: 0.127356

Chi Quadro Test:

- numero di intervalli: 10
- gradi di libertà: 7
- test statistico: 426
- p-value < 0.005

Kolmogorov-Smirnov Test:

- test statistico: 0.0825
- p-value < 0.01

Sommario sull'istogramma:

- range: da -0.08 a 0.08
- numero di intervalli: 40

I logrendimenti del titolo Linde PLC seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono stati accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso sinistra e presenti delle code grasse.

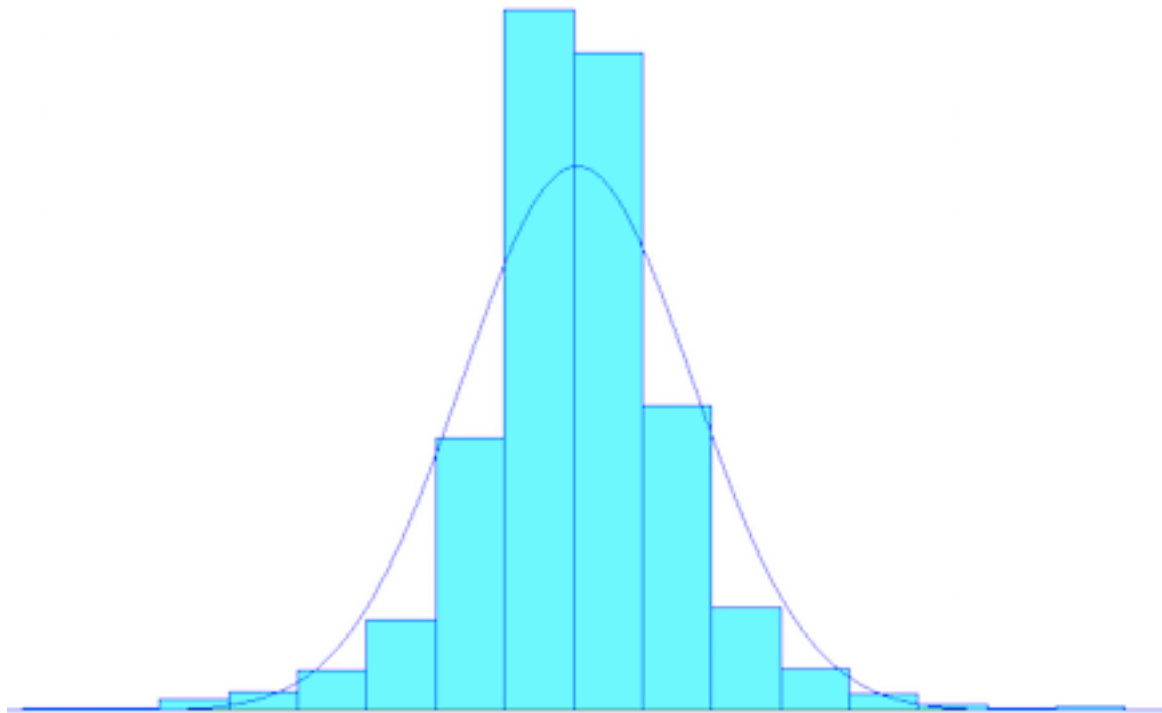


Figura 29. Distribuzione normale dei rendimenti logaritmici del titolo Linde PLC

4.1.13 GlaxoSmithKline PLC

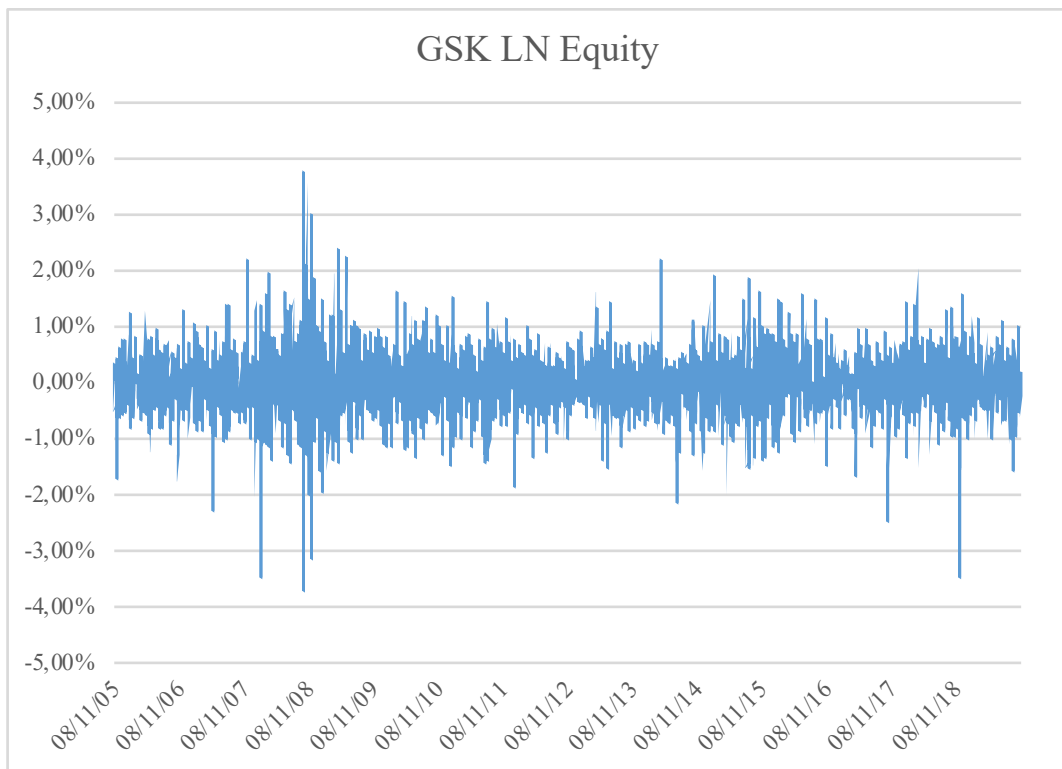


Figura 30. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo GlaxoSmithKline PLC dal 08/11/05 al 08/11/19

Il titolo registra delle variazioni rilevanti nel periodo compreso tra maggio 2007 e marzo 2009. Fino a novembre del 2019 il titolo risulta pressoché stabile registrando dei picchi a maggio 2014, novembre 2017 e novembre 2018. Il fitting dei dati ha restituito i seguenti risultati:

Distribuzione: normale

Espressione: $\text{NORM}(1.75e^{-5}; 0.00539)$

Square Error: 0.006303

Curtosi: 4.487525

Asimmetria: -0.060722

Chi Quadro Test:

- numero di intervalli: 12
- gradi di libertà: 9
- test statistico: 219
- p-value < 0.005

Kolmogorov-Smirnov Test:

- test statistico: 0.0495
- p-value < 0.01

Sommario sull'istogramma:

- range: da -0.05 a 0.05
- numero di intervalli: 40

I logrendimenti del titolo GlaxoSmithKline PLC seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono stati accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso destra e presenti delle code grasse.

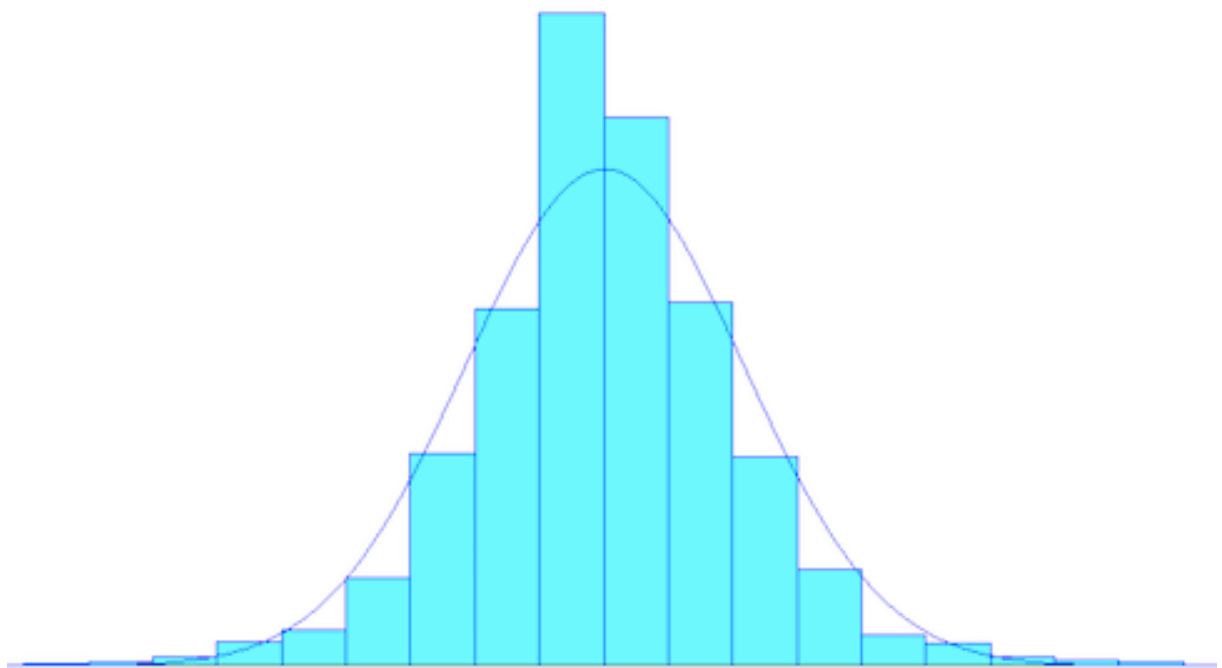


Figura 31. Distribuzione normale dei rendimenti logaritmici del titolo GlaxoSmithKline PLC

4.1.14 Allianz SE-REG

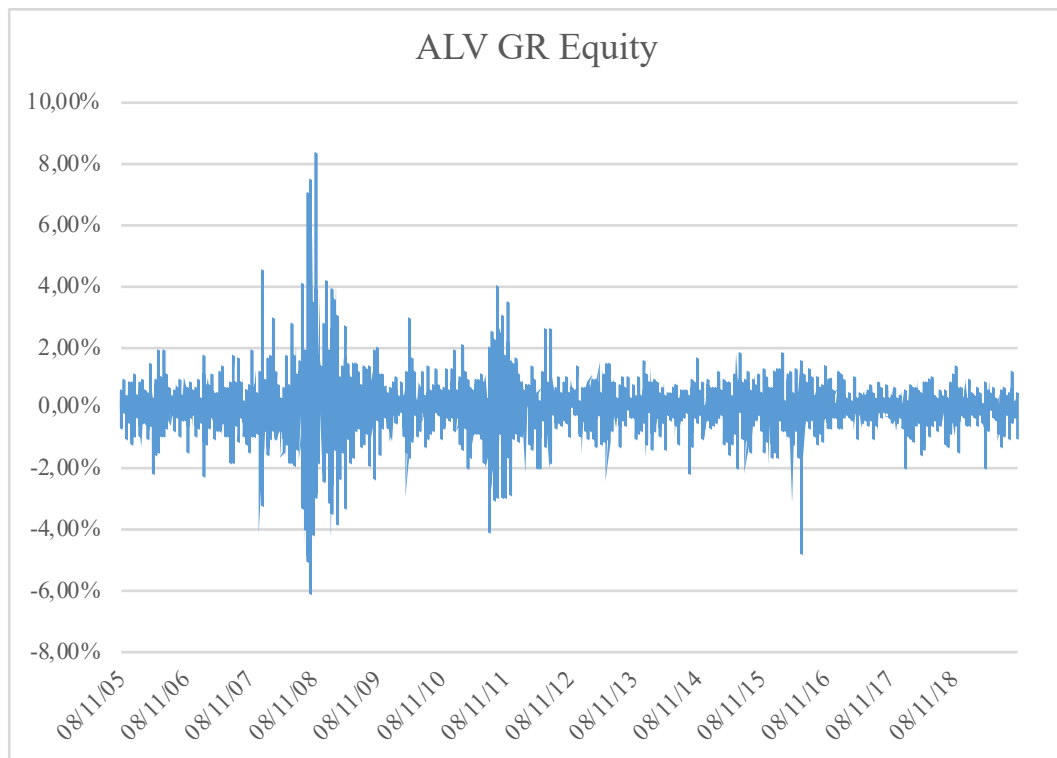


Figura 32. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo Allianz SE-REG dal 08/11/05 al 08/11/19

I rendimenti del titolo subiscono delle variazioni rilevanti nel periodo compreso tra gennaio 2008 e maggio 2010. Le fluttuazioni diminuiscono per poi variare nel periodo compreso tra luglio 2011 e luglio 2012. Il titolo si stabilizza fino a novembre 2019 registrando solo un picco a luglio 2016. Il fitting dei dati ha restituito i seguenti risultati:

Distribuzione: normale

Espressione: $\text{NORM}(7.26e^{-5}; 0.00804)$

Square Error: 0.027966

Curtosi: 12.953953

Asimmetria: 0.345245

Chi Quadro Test:

- numero di intervalli: 11
- gradi di libertà: 8
- test statistico: 731
- p-value < 0.005

Kolmogorov-Smirnov Test:

- test statistico: 0.102
- p-value < 0.01

Sommario sull'istogramma:

- range: da -0.08 a 0.1
- numero di intervalli: 40

I logrendimenti del titolo Allianz SE-REG seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono stati accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso sinistra e presenti delle code grasse.

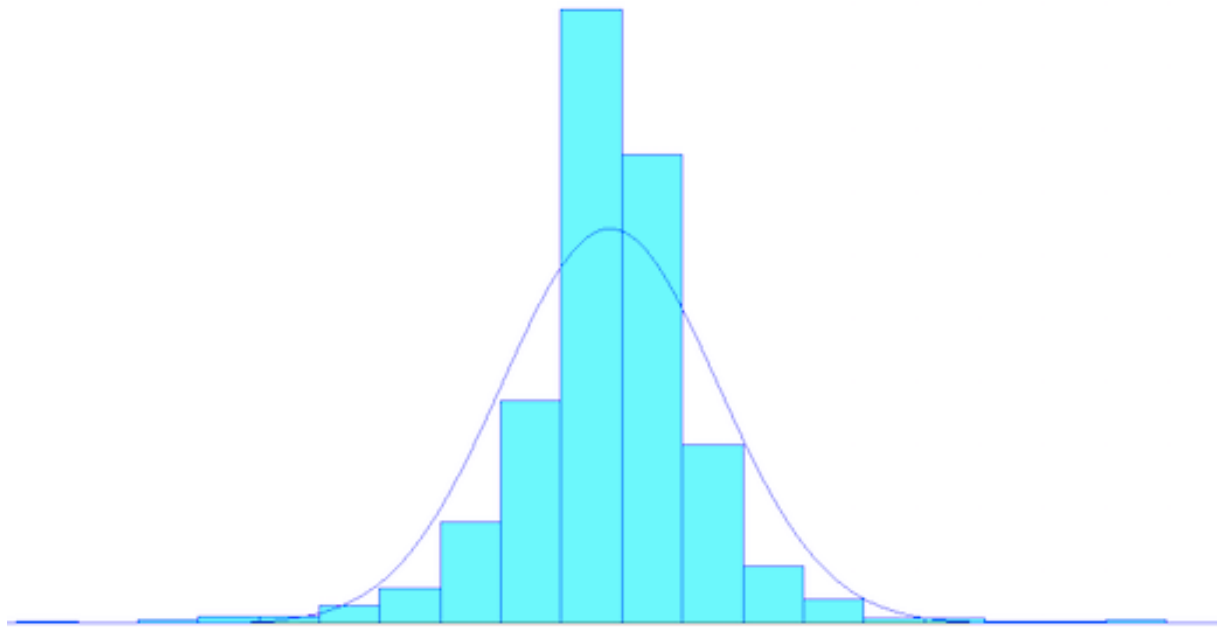


Figura 33. Distribuzione normale dei rendimenti logaritmici del titolo Allianz SE-REG

4.1.15 Sanofi

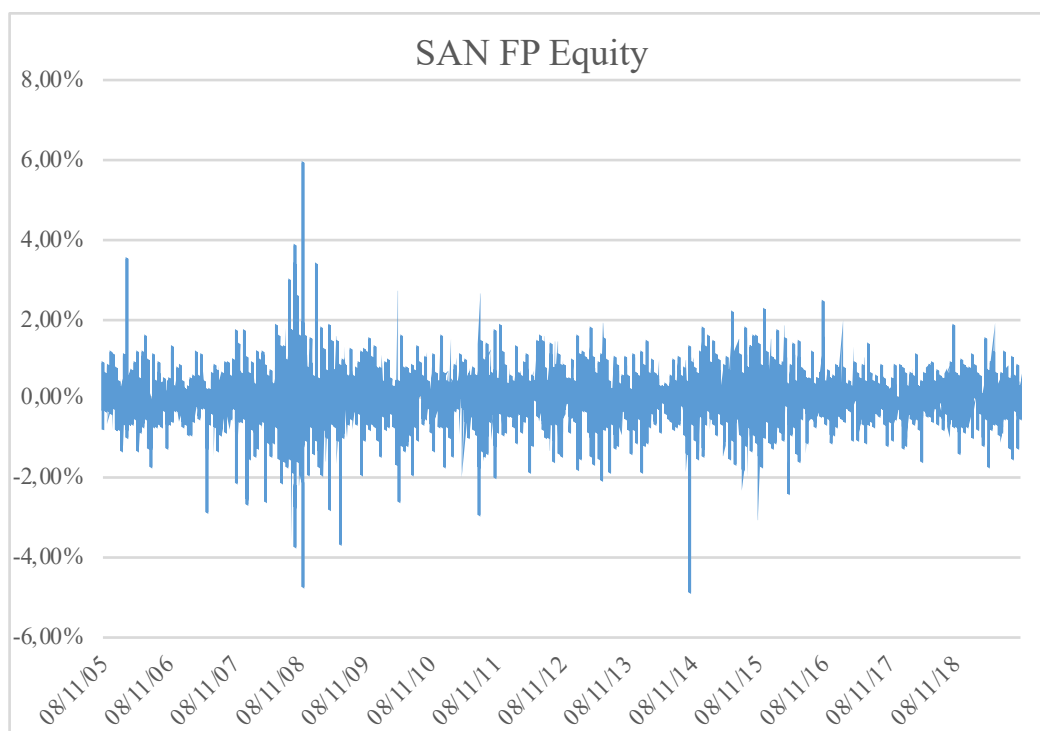


Figura 34. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo Sanofi dal 08/11/05 al 08/11/19

Il titolo registra una prima variazione a febbraio 2006, poi si stabilizza e successivamente subisce una variazione rilevante nel periodo compreso tra maggio 2007 e marzo 2009. Fino a novembre 2019 il titolo risulta pressoché stabile registrando delle variazioni a maggio 2010, settembre 2011, novembre 2014 e novembre 2016. Il fitting dei dati ha restituito i seguenti risultati:

Distribuzione: normale

Espressione: $\text{NORM}(2.18e^{-5}; 0.00655)$

Square Error: 0.007846

Curtosi: 6.265591

Asimmetria: -0.155646

Chi Quadro Test:

- numero di intervalli: 12
- gradi di libertà: 9
- test statistico: 309
- p-value < 0.005

Kolmogorov-Smirnov Test:

- test statistico: 0.0578
- p-value < 0.01

Sommario sull'istogramma:

- range: da -0.06 a 0.8
- numero di intervalli: 40

I logrendimenti del titolo Sanofi seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono stati accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso destra e presenti delle code grasse.

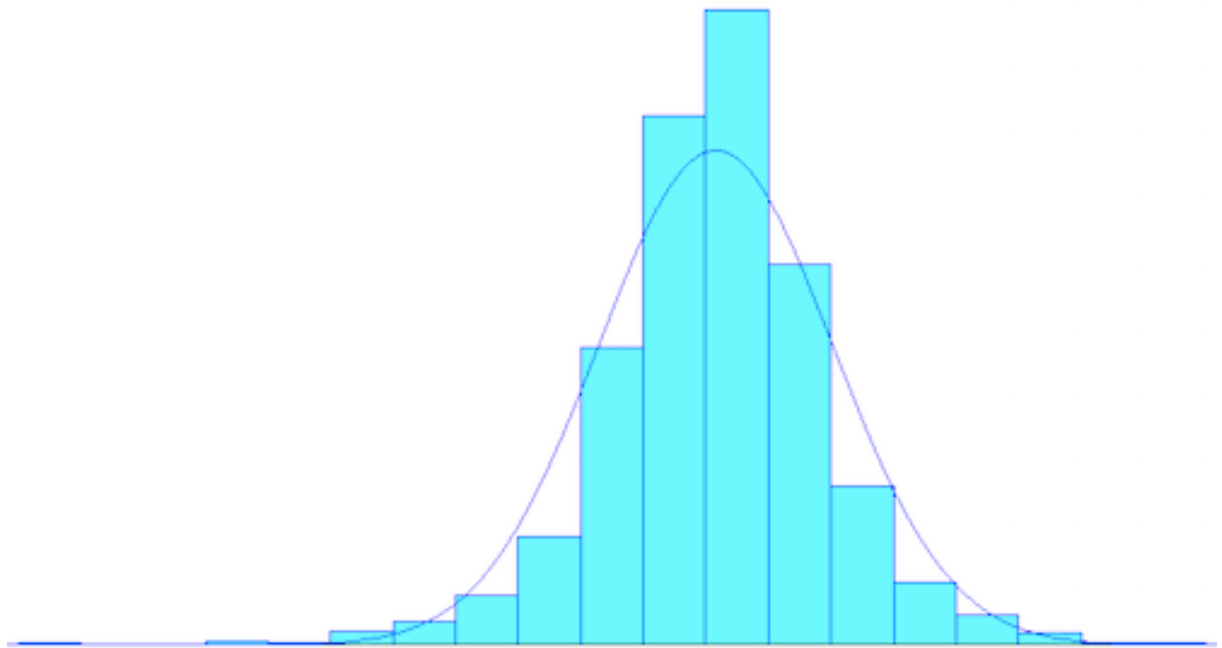


Figura 35. Distribuzione normale dei rendimenti logaritmici del titolo Sanofi

4.1.16 Siemens AG-REG

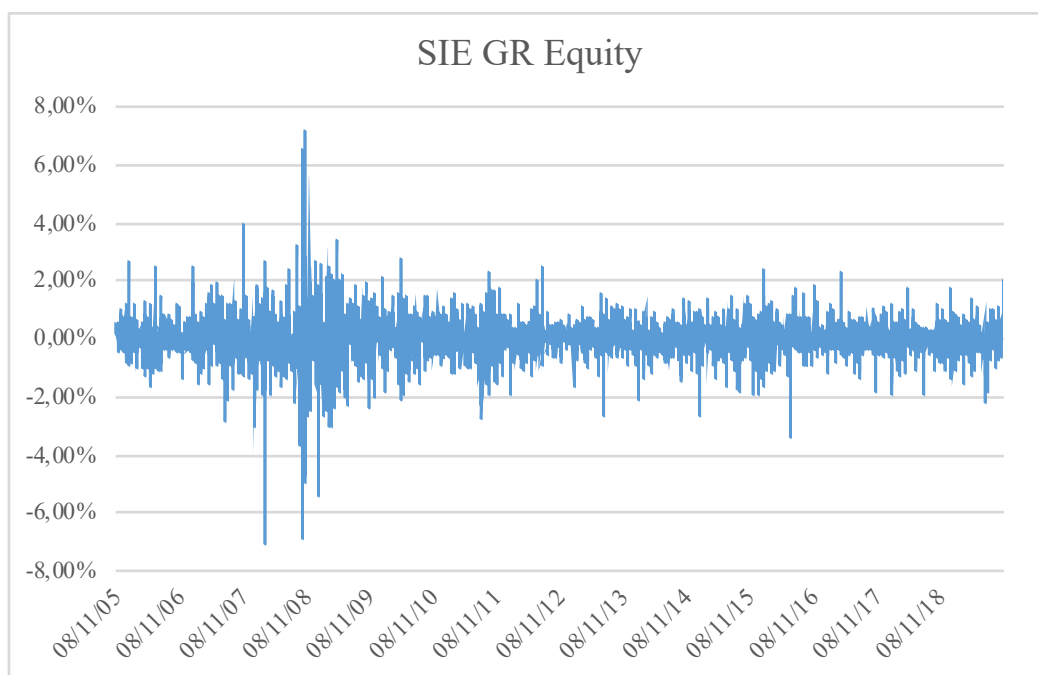


Figura 36. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo Siemens AG-REG dal 08/11/05 al 08/11/19

I rendimenti del titolo risultano stabili da novembre 2005 fino a novembre 2019 registrando un picco rilevante nel periodo compreso tra luglio 2007 e maggio 2009 e dei picchi più contenuti a settembre 2011, settembre 2012, maggio 2013, gennaio 2014, febbraio 2015, marzo e luglio 2016 e luglio 2017. Il fitting dei dati ha restituito i seguenti risultati:

Distribuzione: normale

Espressione: $\text{NORM}(7.61e^{-5}; 0.00759)$

Square Error: 0.013948

Curtosi: 11.992291

Asimmetria: -0.315795

Chi Quadro Test:

- numero di intervalli: 10
- gradi di libertà: 7
- test statistico: 360
- p-value < 0.005

Kolmogorov-Smirnov Test:

- test statistico: 0.0783
- p-value < 0.01

Sommario sull'istogramma:

- range: da -0.09 a 0.09
- numero di intervalli: 40

I logrendimenti del titolo Siemens AG-REG seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono stati accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso destra e presenti delle code grasse.

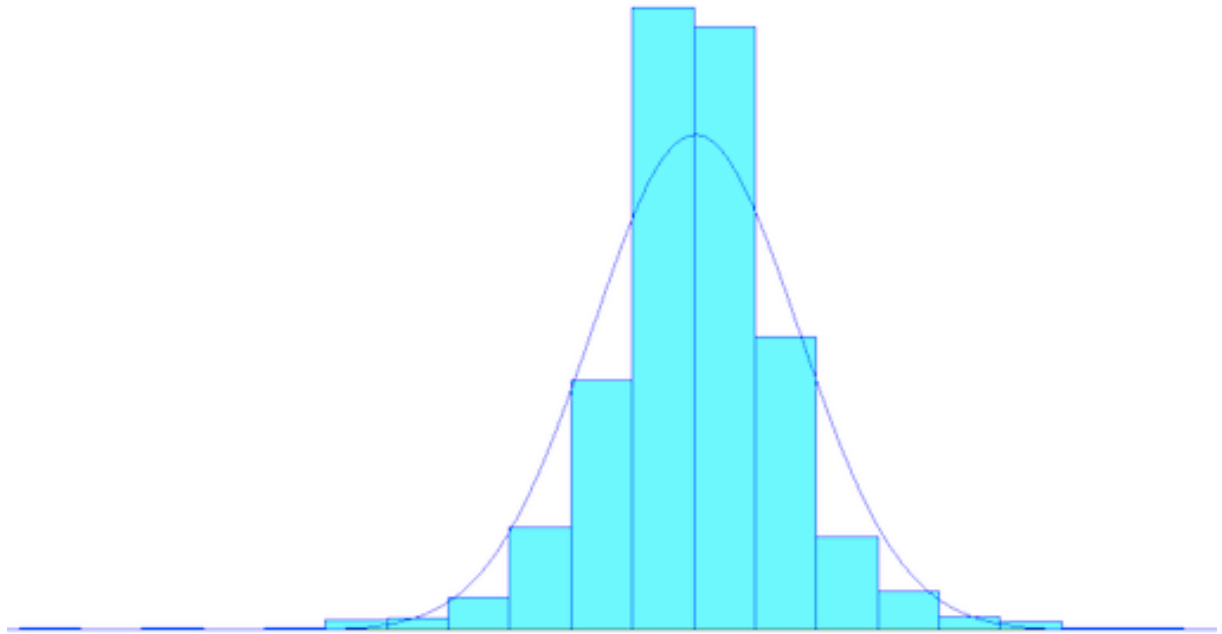


Figura 37. Distribuzione normale dei rendimenti logaritmici del titolo Siemens AG-REG

4.1.17 Novo Nordisk A/S-B

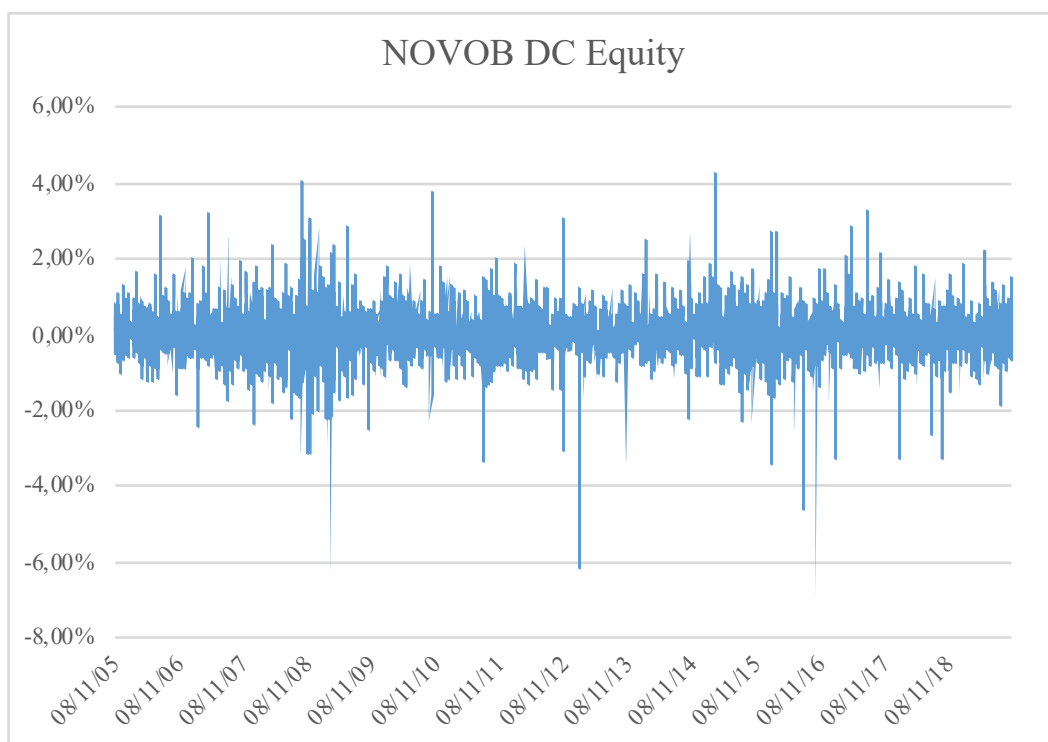


Figura 38. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo Novo Nordisk A/S-B dal 08/11/05 al 08/11/19

I rendimenti del titolo presentano da novembre 2005 a novembre 2019 diverse variazioni in cui, le più rilevanti, si sono registrate a gennaio 2007, settembre 2008, aprile e settembre 2009, ottobre 2010, settembre 2011, novembre 2012, gennaio 2013, gennaio 2014, aprile 2015, marzo, luglio e novembre 2016, settembre 2017 e marzo 2018. Il fitting dei dati ha restituito i seguenti risultati:

Distribuzione: normale

Espressione: NORM(0.00029; 0.00709)

Square Error: 0.012796

Curtosi: 9.447224

Asimmetria: -0.605794

Chi Quadro Test:

- numero di intervalli: 12
- gradi di libertà: 9
- test statistico: 363
- p-value < 0.005

Kolmogorov-Smirnov Test:

- test statistico: 0.068
- p-value < 0.01

Sommario sull'istogramma:

- range: da -0.09 a 0.06
- numero di intervalli: 40

I logrendimenti del titolo Novo Nordisk A/S-B seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono stati accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso destra e presenti delle code grasse.

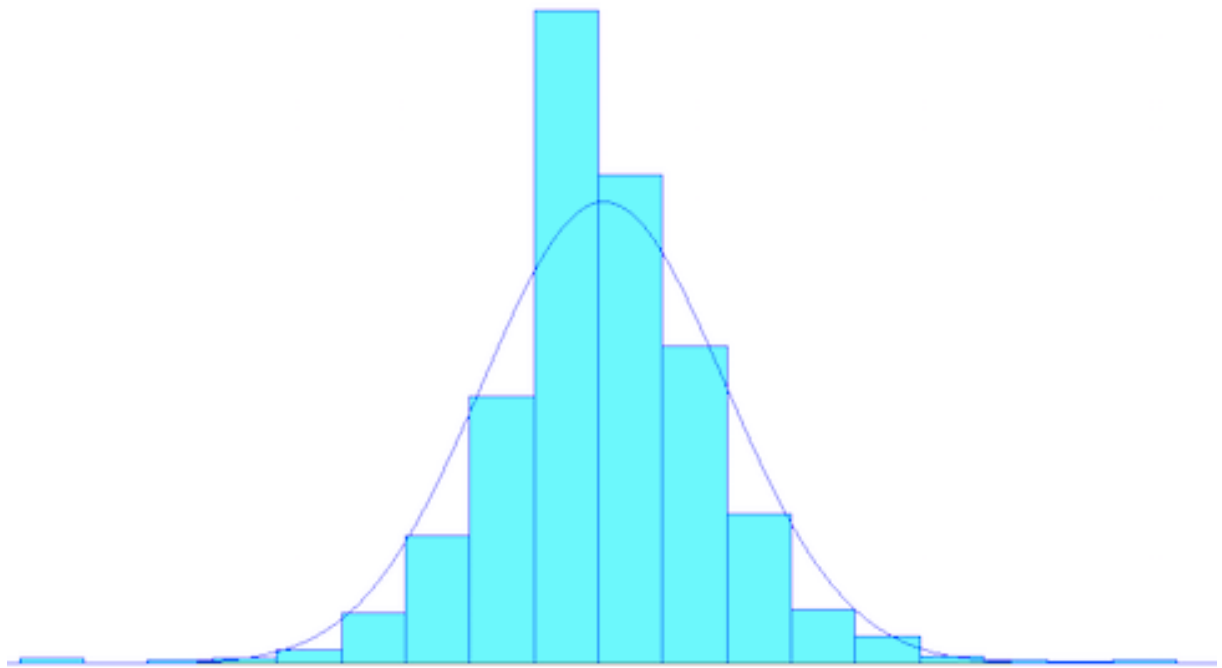


Figura 39. Distribuzione normale dei rendimenti logaritmici del titolo Novo Nordisk A/S-B

4.1.18 Diageo PLC

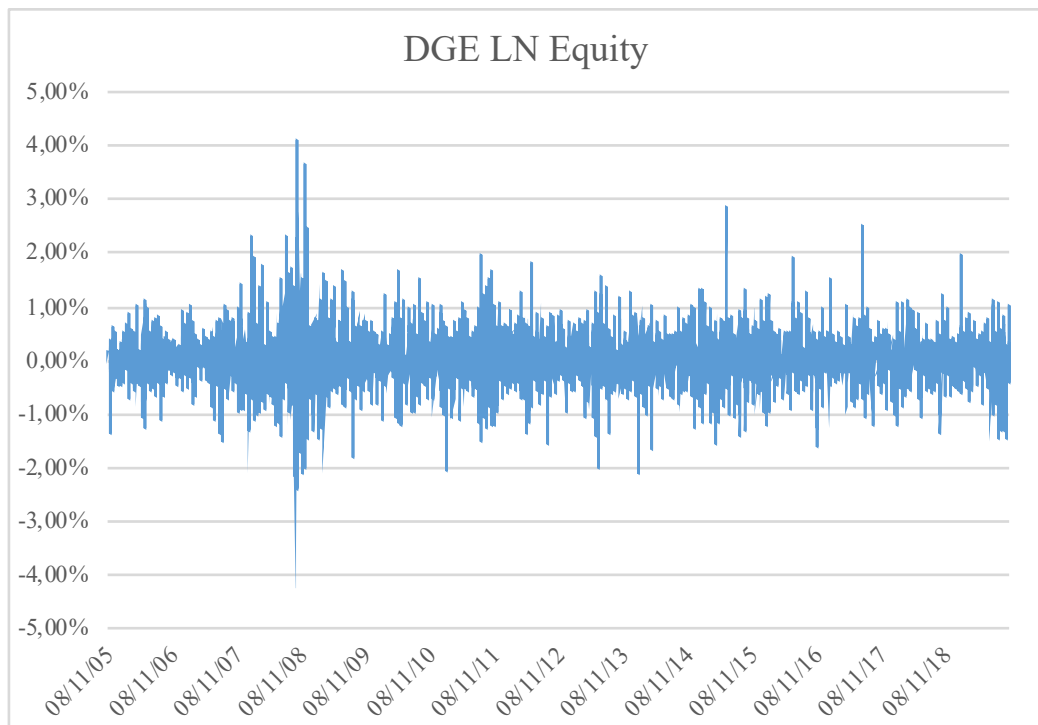


Figura 40. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo Diageo PLC dal 08/11/05 al 08/11/19

I rendimenti del titolo si sono mantenuti pressoché stabili nel tempo registrando solo alcune variazioni tra cui, le più rilevanti, nel periodo compreso tra novembre 2007 e maggio 2009, maggio 2015 e marzo 2017. Il fitting dei dati ha restituito i seguenti risultati:

Distribuzione: normale

Espressione: NORM(0.000154; 0.00518)

Square Error: 0.006753

Curtosi: 5.033069

Asimmetria: 0.141844

Chi Quadro Test:

- numero di intervalli: 12
- gradi di libertà: 9
- test statistico: 264
- p-value < 0.005

Kolmogorov-Smirnov Test:

- test statistico: 0.0491
- p-value < 0.01

Sommario sull'istogramma:

- range: da -0.06 a 0.05
- numero di intervalli: 40

I logrendimenti del titolo Diageo PLC seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono stati accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso sinistra e presenti delle code grasse.

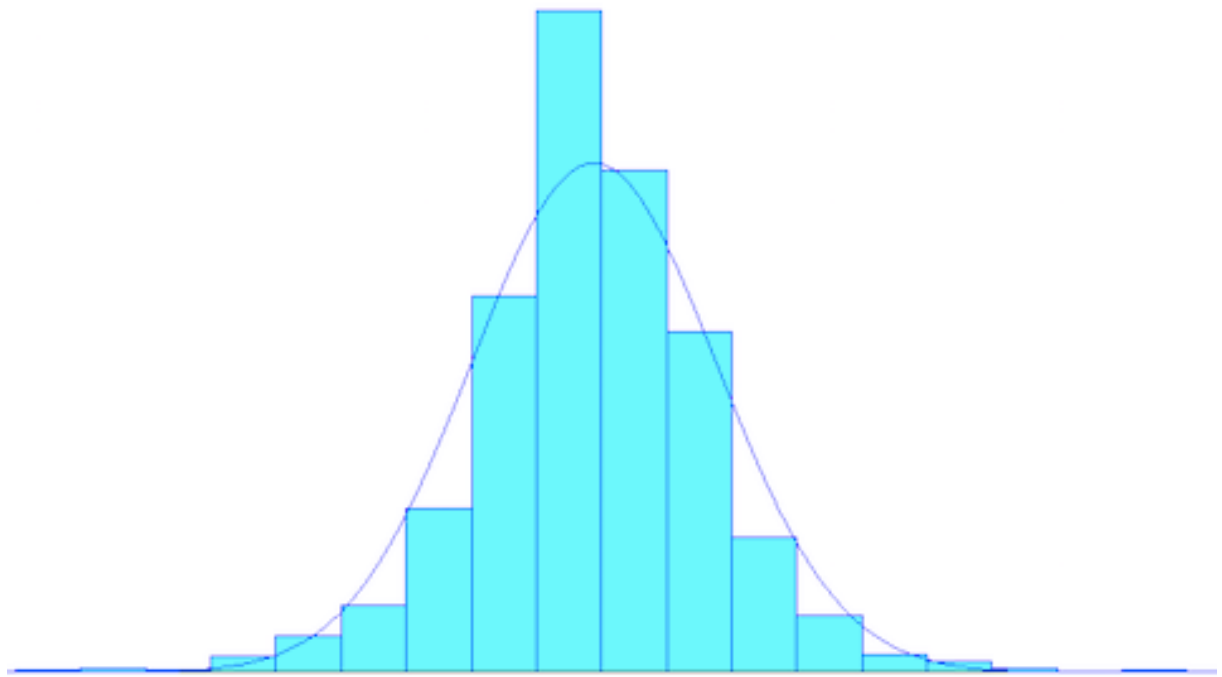


Figura 41. Distribuzione normale dei rendimenti logaritmici del titolo Diageo PLC

4.1.19 Unilever NV

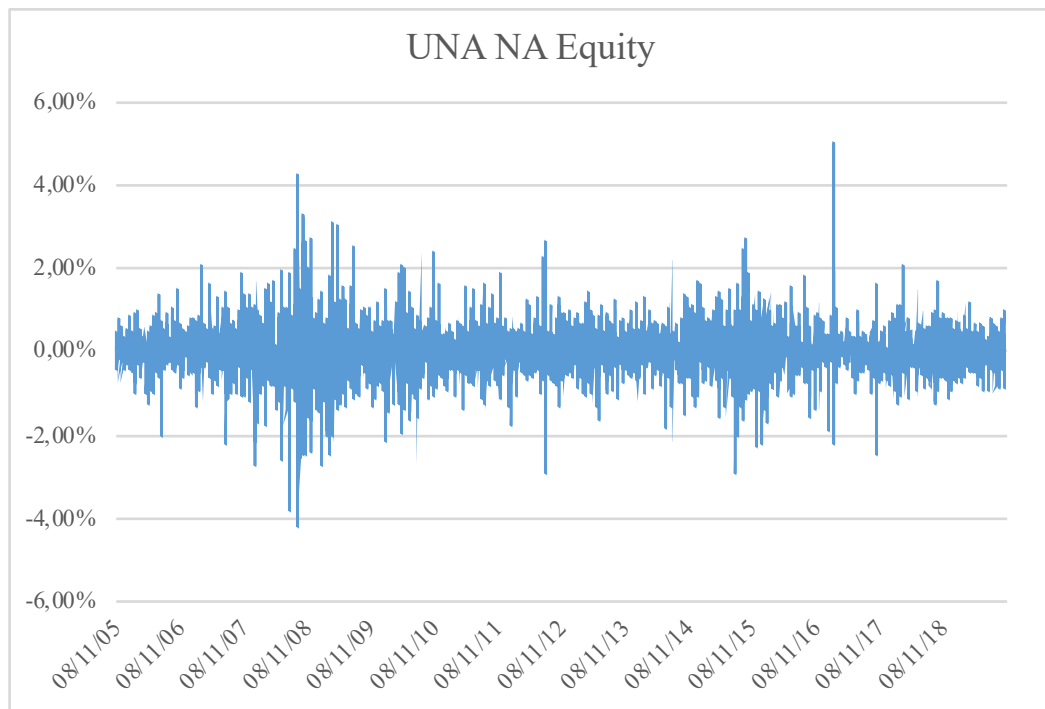


Figura 42. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo Unilever NV dal 08/11/05 al 08/11/19

I rendimenti del titolo presentano delle variazioni rilevanti nel periodo compreso tra luglio 2007 e agosto 2009. Per un breve periodo si stabilizzano per poi ritornare a variare tra gennaio e settembre 2010. Successivamente i rendimenti risultano stabili con delle variazioni a luglio 2012, settembre 2014, novembre 2015, marzo 2017 e gennaio 2018. Il fitting dei dati ha restituito i seguenti risultati:

Distribuzione: normale

Espressione: NORM(0.000127; 0.00641)

Square Error: 0.007836

Curtosi: 4.957368

Asimmetria: 0.052249

Chi Quadro Test:

- numero di intervalli: 12
- gradi di libertà: 9
- test statistico: 260
- p-value < 0.005

Kolmogorov-Smirnov Test:

- test statistico: 0.0584
- p-value < 0.01

Sommario sull'istogramma:

- range: da -0.06 a 0.06
- numero di intervalli: 40

I logrendimenti del titolo Unilever NV seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono stati accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso sinistra e presenti delle code grasse.

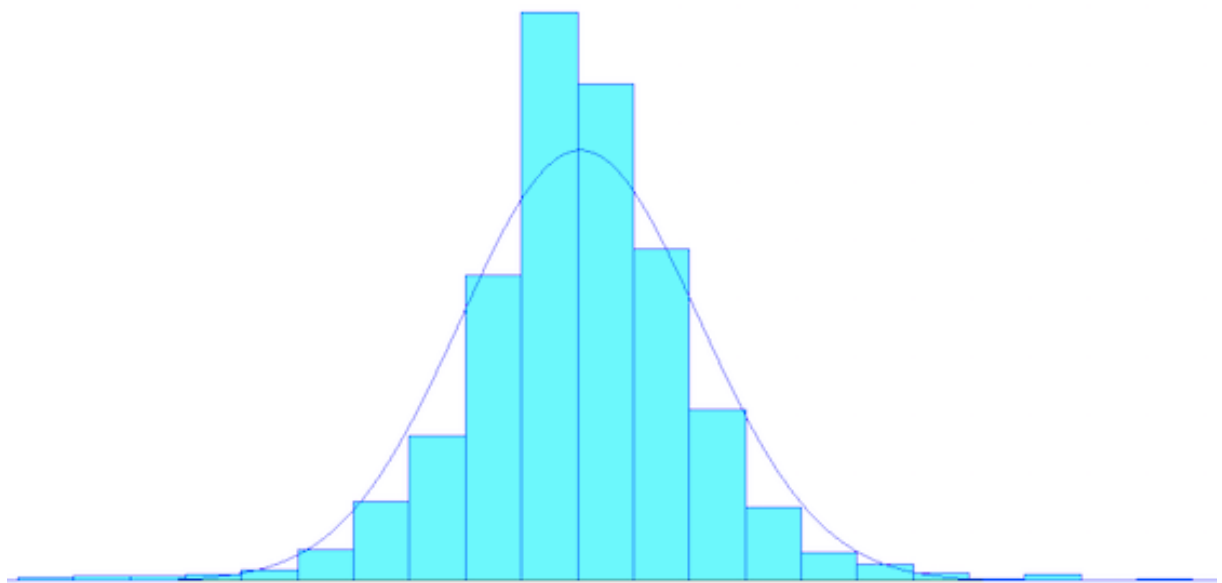


Figura 43. Distribuzione normale dei rendimenti logaritmici del titolo Unilever NV

4.1.20 British American Tobacco PLC

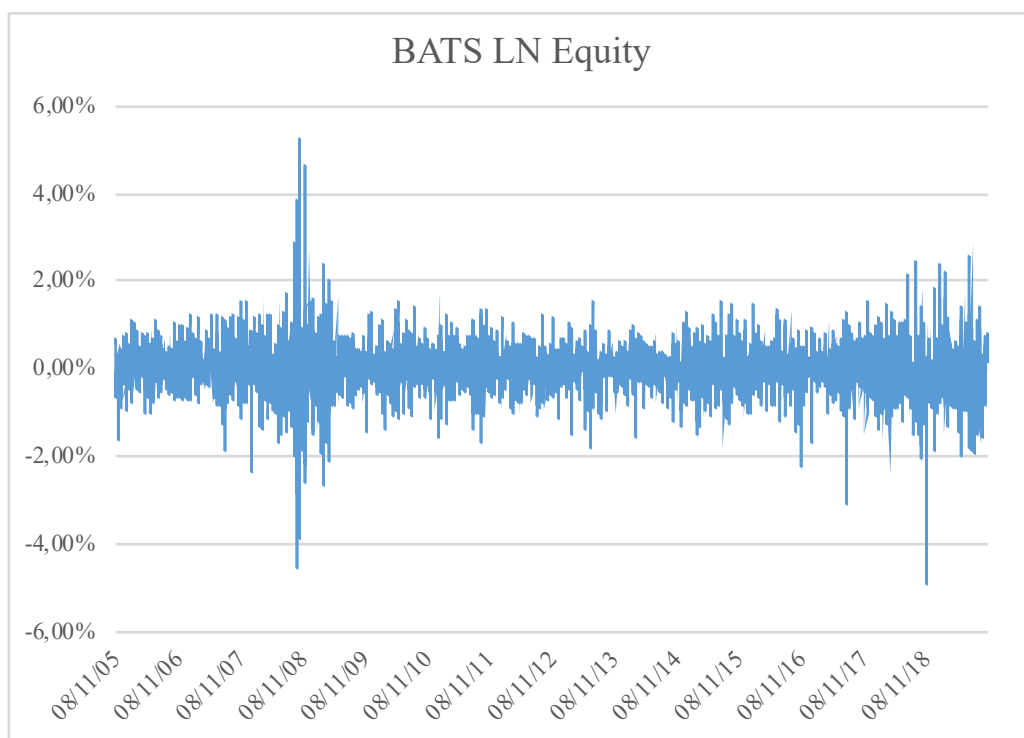


Figura 44. Andamento dei rendimenti logaritmici del titolo British American Tobacco PLC dal 08/11/05 al 08/11/19

I rendimenti del titolo risultano pressoché stabili da novembre 2005 fino a novembre 2019 registrando un picco rilevante nel periodo tra marzo 2008 e luglio 2009. Successivamente il titolo rimane stabile registrando dei picchi solamente a settembre 2017, maggio 2018 e gennaio 2019. Il fitting dei dati ha restituito i seguenti risultati:

Distribuzione: normale

Espressione: $\text{NORM}(9.69e^{-5}; 0.00609)$

Square Error: 0.009216

Curtosi: 7.230117

Asimmetria: -0.071520

Chi Quadro Test:

- numero di intervalli: 11
- gradi di libertà: 8
- test statistico: 262
- p-value < 0.005

Kolmogorov-Smirnov Test:

- test statistico: 0.0619
- p-value < 0.01

Sommario sull'istogramma:

- range: da -0.06 a 0.07

- numero di intervalli: 40

I logrendimenti del titolo British American Tobacco PLC seguono una distribuzione normale in cui l'errore quadratico medio risulta contenuto. Entrambi i test sulla distribuzione campionaria sono stati accettati, nonostante la curva risulti decentrata verso destra e presenti delle code grasse.

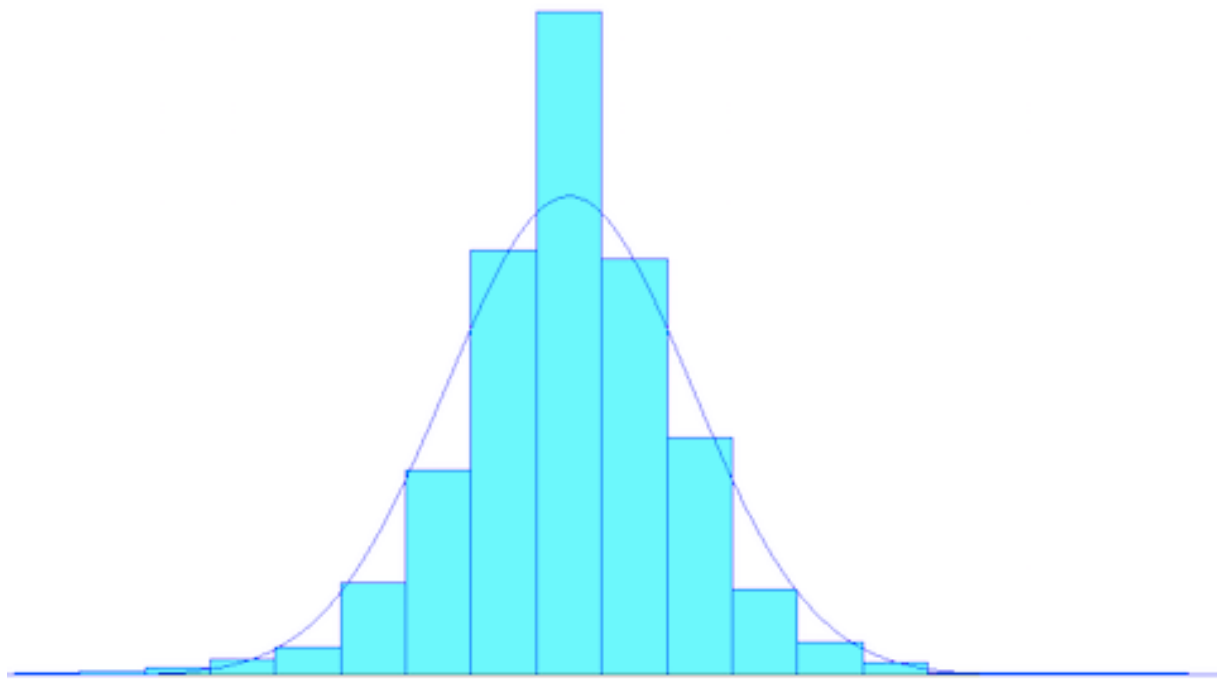


Figura 45. Distribuzione normale dei rendimenti logaritmici del titolo British American Tobacco PLC

4.1.21 Commenti

Attraverso l'analisi dei rendimenti logaritmici è possibile definire il grado di rischio di un titolo. Il rischio in questione è stato identificato nella deviazione standard del titolo stesso che prende anche il nome di volatilità. Per definizione, la volatilità misura l'intensità delle variazioni subite da un titolo in un determinato periodo di tempo, indicando, dunque, la variazione percentuale del suo valore. Se la volatilità risulta abbastanza elevata si può assumere che il titolo preso in esame sia rischioso perché appunto i rendimenti variano più frequentemente nel tempo, aumentando la probabilità che si verifichi sul mercato un rendimento diverso da quello che ci si poteva attendere. La volatilità di un titolo dipende principalmente dal settore di appartenenza, dall'incrocio tra domanda e offerta giornaliera e dall'area geografica in cui l'impresa opera. È interessante notare che in tutti i 20 titoli presi in esame si siano verificate delle oscillazioni consistenti iniziate alla fine del 2007 circa e durate per tutto il 2008/2009, periodo di tempo coincidente con la crisi finanziaria. In Europa, alla crisi finanziaria scoppiata nell'agosto del 2007 sono seguite una recessione, iniziata nel secondo trimestre 2008 e una grave crisi industriale scoppiata nell'autunno dello stesso anno. Nel 2009 si è verificata la crisi economica seguita da pesanti recessioni e dal crollo del PIL. Terminata la recessione nel terzo trimestre 2009, tra la fine dello stesso anno e il 2010, si è verificata una parziale ripresa economica. Analizzando i rendimenti logaritmici si può vedere proprio questo: un aumento della volatilità tra il 2007 e il 2009 per poi osservare, dal 2010 circa fino al 2019, andamenti sulle volatilità più stabili. Questo comportamento è spiegato da una significativa correlazione tra i titoli e dall'assenza di fattori idiosincratici su singolo titolo. Ovviamente, dal 2010 in poi, i titoli non hanno avuto tutti esattamente lo stesso comportamento e queste differenze sono spiegate dal fatto che il prezzo di un titolo può dipendere da diversi fattori. Comunque, in linea di massima, si può dichiarare che la volatilità dei titoli presi in esame si sia stabilizzata.

4.2 Correlazione dei dati storici

Parte fondamentale dell'analisi dati è rappresentata dall'analisi delle correlazioni tra le serie storiche. Il coefficiente di correlazione tra due variabili statistiche è un indice che esprime un'eventuale relazione di linearità tra esse. L'indice può assumere valori compresi tra +1 e -1, tale per cui:

- +1 corrisponde ad una perfetta correlazione lineare positiva;
- 0 corrisponde ad un'assenza di correlazione;
- -1 corrisponde ad una perfetta correlazione lineare negativa.

L'indice di correlazione viene calcolato con la seguente formula:

$$\rho_{xy} = \frac{\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x - \bar{x})^2 \sum(y - \bar{y})^2}}$$

Dall'analisi delle correlazioni si ottiene una matrice 20×20 in cui sono presenti tutti i valori dei coefficienti ρ calcolati per coppie di valori. La matrice delle correlazioni è simmetrica e tutti i valori nella diagonale principale sono pari a 1 dato che un titolo risulta perfettamente correlato positivamente con se stesso. Per motivi di impaginazione la matrice è stata divisa in due parti:

	NESN SW Equity	ROG SW Equity	NOVN SW Equity	HSBA LN Equity	SAP GR Equity	FP FP Equity	BP/ LN Equity	RDSA LN Equity	AZN LN Equity	MC FP Equity
NESN SW Equity	1									
ROG SW Equity	0,490862348	1								
NOVN SW Equity	0,536016357	0,611328828	1							
HSBA LN Equity	0,36325892	0,33230285	0,342527875	1						
SAP GR Equity	0,340230867	0,317024324	0,331313848	0,375439782	1					
FP FP Equity	0,461574663	0,411109927	0,419913486	0,51862945	0,44383991	1				
BP/ LN Equity	0,362529445	0,307302434	0,323558703	0,448934264	0,32566782	0,7073663	1			
RDSA LN Equity	0,416268956	0,362326466	0,359776289	0,490760411	0,33769169	0,7657905	0,75826048	1		
AZN LN Equity	0,359261664	0,440143314	0,47549048	0,339071893	0,29307722	0,3345259	0,32074679	0,362173527	1	
MC FP Equity	0,445511753	0,384346312	0,403157809	0,512212395	0,4788478	0,6007527	0,44242596	0,467077792	0,35046453	1
ASML NA Equity	0,313639981	0,322979948	0,328035949	0,378765949	0,41691339	0,4438192	0,32672988	0,353935208	0,26390949	0,504605
LIN US Equity	0,256280666	0,238603339	0,218551183	0,353727708	0,36730263	0,4104773	0,31375622	0,337313683	0,16858634	0,3989192
GSK LN Equity	0,392345739	0,456672148	0,51849843	0,350268642	0,29444418	0,3815673	0,35785702	0,415311802	0,59279952	0,3440987
ALV GR Equity	0,372990673	0,359386708	0,36449113	0,578475228	0,53965338	0,5794903	0,4261708	0,45189842	0,33481102	0,5839564
SAN FP Equity	0,436003774	0,527675729	0,548510938	0,383799504	0,41291201	0,5261386	0,37407414	0,438696138	0,49492836	0,4885896
SIE GR Equity	0,374708505	0,344385209	0,362148692	0,498543528	0,55915098	0,5989207	0,4383352	0,47607992	0,30655205	0,6041047
NOVOB DC Equity	0,295516144	0,341404895	0,358041739	0,214161348	0,23604569	0,2638475	0,21980162	0,227385333	0,28358575	0,2879615
DGE LN Equity	0,501884811	0,374166705	0,412212866	0,417485883	0,34853215	0,4315057	0,39146748	0,438622525	0,40878061	0,4931173
UNA NA Equity	0,513384496	0,37352554	0,400901	0,319977465	0,31981836	0,4446897	0,3162385	0,3535575	0,31083411	0,4576818
BATS LN Equity	0,393698548	0,33789002	0,351431412	0,315992992	0,29122509	0,3699719	0,3226303	0,377331257	0,37429482	0,3663831

	ASML NA Equity	LIN US Equity	GSK LN Equity	ALV GR Equity	SAN FP Equity	SIE GR Equity	NOVOB DC Equity	DGE LN Equity	UNA NA Equity	BATS LN Equity
NESN SW Equity										
ROG SW Equity										
NOVN SW Equity										
HSBA LN Equity										
SAP GR Equity										
FP FP Equity										
BP/ LN Equity										
RDSA LN Equity										
AZN LN Equity										
MC FP Equity										
ASML NA Equity	1									
LIN US Equity	0,318963029	1								
GSK LN Equity	0,276307034	0,161144484	1							
ALV GR Equity	0,415314551	0,464463314	0,331997474	1						
SAN FP Equity	0,370505283	0,279335847	0,528441541	0,47840714	1					
SIE GR Equity	0,448589427	0,503560066	0,304683445	0,673874385	0,459455345	1				
NOVOB DC Equity	0,234270207	0,140380464	0,27633072	0,241672455	0,324343454	0,240505563	1			
DGE LN Equity	0,344200247	0,241285725	0,471348209	0,396468684	0,449213816	0,391094491	0,276691342	1		
UNA NA Equity	0,315650861	0,230136578	0,370078716	0,360355504	0,459319223	0,373122085	0,265164162	0,483194582	1	
BATS LN Equity	0,279235825	0,218046694	0,427757773	0,30846204	0,398763671	0,315430709	0,225418235	0,495884111	0,393981572	1

Tabella 3. Matrice delle correlazioni giornaliere

Utilizzando la formattazione condizionale è stato possibile valutare l'intensità delle correlazioni presenti tra i vari titoli, a partire dalla perfetta lineare positiva (verde) fino all'assenza di legame statistico (rosso). Si nota che le correlazioni sono tutte positive e che l'intensità della correlazione aumenta per quei titoli appartenenti allo stesso settore. Andando a calcolare le correlazioni per finestre temporali di ampiezza minori, si nota che l'intensità delle correlazioni aumenta fino ad arrivare ad ottenere anche correlazioni negative. L'effetto del rafforzamento delle correlazioni è dovuto dal fatto che i dati conteggiati per ciascun valore atteso aumentano.

	NESN SW Equity	ROG SW Equity	NOVN SW Equity	HSBA LN Equity	SAP GR Equity	FP FP Equity	BP/ LN Equity	RDSA LN Equity	AZN LN Equity	MC FP Equity
NESN SW Equity	1									
ROG SW Equity	0,455816481	1								
NOVN SW Equity	0,507522724	0,602161524	1							
HSBA LN Equity	0,314260447	0,281084998	0,369342597	1						
SAP GR Equity	0,317529225	0,25835392	0,289582619	0,412625698	1					
FP FP Equity	0,321331036	0,26241507	0,355351927	0,382671043	0,47577767	1				
BP/ LN Equity	0,272334357	0,175529212	0,262520626	0,384501676	0,324433501	0,673811488	1			
RDSA LN Equity	0,305360237	0,203189398	0,320076142	0,387662063	0,32997563	0,750424212	0,756774492	1		
AZN LN Equity	0,387362804	0,383074451	0,488616605	0,240862421	0,24115927	0,278114932	0,271577656	0,296582535	1	
MC FP Equity	0,384666773	0,177646909	0,271303249	0,46965348	0,531364285	0,56482436	0,383602234	0,414059655	0,234625421	1
ASML NA Equity	0,330822587	0,25655731	0,306581333	0,340652438	0,428610934	0,459877536	0,360239811	0,38633795	0,216082713	0,503382008
LIN US Equity	0,31434582	0,24010445	0,28767773	0,407643626	0,482959737	0,524133635	0,428835807	0,516134342	0,221649496	0,548275883
GSK LN Equity	0,373724645	0,385145181	0,531755359	0,261729325	0,258922348	0,304653902	0,347365153	0,386445019	0,617830179	0,288383562
ALV GR Equity	0,292619526	0,308801542	0,311260547	0,595773017	0,571836901	0,53493417	0,357549729	0,397799792	0,259678978	0,595280802
SAN FP Equity	0,346719345	0,430455029	0,538175199	0,304890016	0,364400928	0,440524909	0,328379747	0,401263734	0,408744537	0,357263753
SIE GR Equity	0,297821906	0,257963323	0,336703699	0,460682425	0,593264526	0,593590436	0,393079352	0,46744933	0,237882238	0,622428374
NOVOB DC Equity	0,365520634	0,323127489	0,404281226	0,149176	0,26696536	0,321043745	0,22480562	0,239225281	0,259572832	0,233317664
DGE LN Equity	0,541728185	0,358624689	0,398500723	0,450565457	0,40126649	0,39570784	0,442727294	0,456950504	0,396842068	0,429224646
UNA NA Equity	0,578543198	0,339458586	0,437020183	0,368695228	0,389344537	0,431592858	0,348319354	0,384515658	0,308735932	0,429368837
BATS LN Equity	0,463892218	0,254927998	0,354117223	0,265991102	0,295913791	0,373053521	0,324372472	0,402769477	0,347500751	0,370351257

	ASML NA Equity	LIN US Equity	GSK LN Equity	ALV GR Equity	SAN FP Equity	SIE GR Equity	NOVOB DC Equity	DGE LN Equity	UNA NA Equity	BATS LN Equity
NESN SW Equity										
ROG SW Equity										
NOVN SW Equity										
HSBA LN Equity										
SAP GR Equity										
FP FP Equity										
BP/ LN Equity										
RDSA LN Equity										
AZN LN Equity										
MC FP Equity										
ASML NA Equity	1									
LIN US Equity	0,445095768	1								
GSK LN Equity	0,248300599	0,258920953	1							
ALV GR Equity	0,439113318	0,554655711	0,271260495	1						
SAN FP Equity	0,316113564	0,272970524	0,524341385	0,383993981	1					
SIE GR Equity	0,45804246	0,597691969	0,265082037	0,696208007	0,381317235	1				
NOVOB DC Equity	0,260538158	0,219825047	0,256334501	0,201251738	0,320987161	0,26072426	1			
DGE LN Equity	0,408127964	0,362721028	0,470138724	0,372406814	0,358588357	0,357510855	0,331871189	1		
UNA NA Equity	0,361874175	0,297985097	0,445543084	0,351640589	0,523301166	0,399171767	0,316207515	0,551246183	1	
BATS LN Equity	0,294169973	0,340033714	0,447568264	0,252481429	0,363052337	0,317220453	0,317046417	0,504336162	0,468165768	1

Tabella 4. Matrice delle correlazioni mensili

	NESN SW Equity	ROG SW Equity	NOVN SW Equity	HSBA LN Equity	SAP GR Equity	FP FP Equity	BP/ LN Equity	RDSA LN Equity	AZN LN Equity	MC FP Equity
NESN SW Equity	1									
ROG SW Equity	0,556960305	1								
NOVN SW Equity	0,570815795	0,724980938	1							
HSBA LN Equity	0,481808966	0,362169409	0,445754411	1						
SAP GR Equity	0,413537829	0,316708495	0,346383925	0,543379223	1					
FP FP Equity	0,411519926	0,399358995	0,380909988	0,480564938	0,378476285	1				
BP/ LN Equity	0,11982993	0,239916317	0,123224301	0,506811056	0,300187624	0,639052263	1			
RDSA LN Equity	0,247804097	-0,014091411	0,062961834	0,478011122	0,284339976	0,648532137	0,659942126	1		
AZN LN Equity	0,065442478	0,306862584	0,556628332	0,186304898	0,112135942	0,220969392	0,202999367	0,101967223	1	
MC FP Equity	0,562114341	0,196378619	0,455648753	0,596557636	0,650686417	0,467495902	0,242082183	0,397363168	0,169940049	1
ASML NA Equity	0,535478304	0,496665492	0,534624053	0,649856838	0,614596258	0,541565638	0,394964515	0,402838702	0,124573774	0,711134128
LIN US Equity	0,535768717	0,154726952	0,116649507	0,400210894	0,228077605	0,582553025	0,430115997	0,679294324	-0,184568974	0,46515333
GSK LN Equity	0,143678092	0,411585628	0,238993781	0,242339769	0,400204556	0,191290636	0,384767388	0,233062426	0,401497574	0,177765527
ALV GR Equity	0,686023295	0,555625029	0,616204263	0,657155338	0,604056293	0,659767604	0,252183603	0,311158536	0,137643992	0,7540445
SAN FP Equity	0,43907165	0,685694016	0,701082872	0,478432045	0,605943148	0,298967934	0,226553961	0,06250518	0,332074699	0,505926745
SIE GR Equity	0,595536781	0,264843512	0,296091144	0,61207997	0,49716353	0,680096181	0,315480128	0,529005943	0,025149216	0,682296065
NOVOB DC Equity	0,502215428	0,177252589	0,357988147	-0,008039212	0,170822181	0,141810306	-0,353487774	-0,041905727	-0,127468687	0,336842229
DGE LN Equity	0,660409632	0,49978737	0,379682095	0,604379967	0,652556122	0,368492405	0,345547481	0,429006323	0,00864115	0,582179575
UNA NA Equity	0,770427004	0,49509399	0,515153795	0,51184346	0,577555259	0,378633501	0,151859137	0,163669191	-0,034657194	0,654973452
BATS LN Equity	0,225237983	-0,024423492	-0,127597865	0,270503839	0,269449414	0,09324734	0,024741203	0,274869642	-0,269527245	0,130703163

	ASML NA Equity	LIN US Equity	GSK LN Equity	ALV GR Equity	SAN FP Equity	SIE GR Equity	NOVOB DC Equity	DGE LN Equity	UNA NA Equity	BATS LN Equity
NESN SW Equity										
ROG SW Equity										
NOVN SW Equity										
HSBA LN Equity										
SAP GR Equity										
FP FP Equity										
BP/ LN Equity										
RDSA LN Equity										
AZN LN Equity										
MC FP Equity										
ASML NA Equity	1									
LIN US Equity	0,43116972	1								
GSK LN Equity	0,254002343	0,011277507	1							
ALV GR Equity	0,746393467	0,499208786	0,131413229	1						
SAN FP Equity	0,631401684	0,021378571	0,45205594	0,574504022	1					
SIE GR Equity	0,630471342	0,599042144	0,17601711	0,788971624	0,352599545	1				
NOVOB DC Equity	0,320712128	0,230883803	-0,291581468	0,396626702	0,218315663	0,32424332	1			
DGE LN Equity	0,660932352	0,465926327	0,466428483	0,59331109	0,523754252	0,474677195	0,223699505	1		
UNA NA Equity	0,673384747	0,312774212	0,144925067	0,718598381	0,609399229	0,587700325	0,462252748	0,648898558	1	
BATS LN Equity	0,231514644	0,187623506	0,102947693	0,151593743	0,108553952	0,431661165	0,224309238	0,245583946	0,367052413	1

Tabella 5. Matrice delle correlazioni annuali

La correlazione può essere anche spiegata posizionando i titoli su un piano rendimento – rischio in cui in ascissa sono state inserite le deviazioni standard e sulle ordinate le medie dei rendimenti logaritmici:

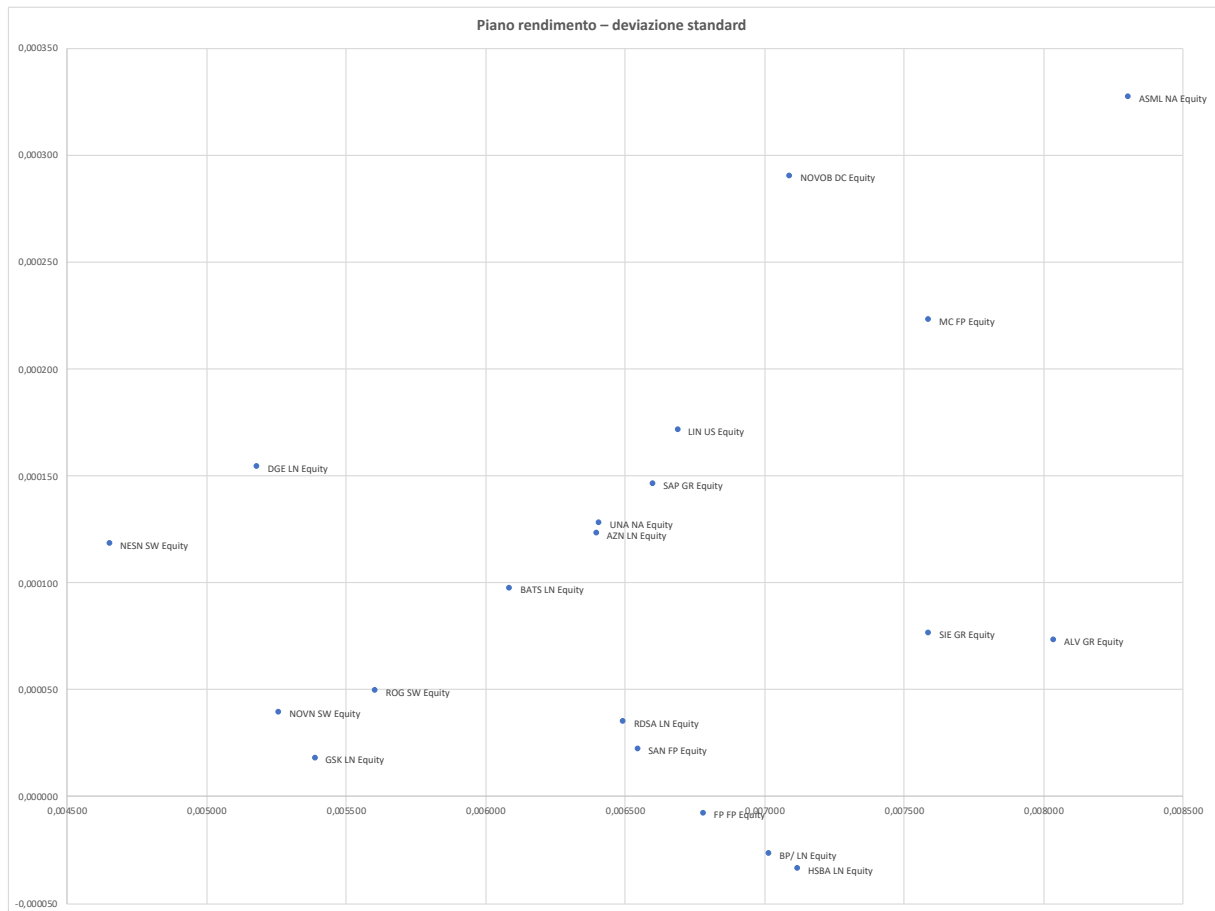


Figura 46. Posizionamento dei 20 titoli nel piano rendimento – deviazione standard

I titoli con andamento simile sul piano rendimento – rischio sono caratterizzati da una forte correlazione lineare.

Dai rendimenti logaritmici è stato possibile derivare anche la matrice di varianza – covarianza Σ di ordine n :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

Dove:

- $\sigma_{kj} = Cov(R_k, R_j) = E[(R_k - \mu_k) \cdot (R_j - \mu_j)]$ sono le covarianze;
- $\sigma_{kk} = Var(R_k) = \sigma_k^2$ sono le varianze presenti sulla diagonale principale.

	NESN SW Equity	ROG SW Equity	NOVN SW Equity	HSBA LN Equity	SAP GR Equity	FP FP Equity	BP/ LN Equity	RDSA LN Equity	AZN LN Equity	MC FP Equity
NESN SW Equity	0,0000217									
ROG SW Equity	0,0000128	0,0000314								
NOVN SW Equity	0,0000131	0,0000180	0,0000277							
HSBA LN Equity	0,0000120	0,0000133	0,0000128	0,0000507						
SAP GR Equity	0,0000105	0,0000117	0,0000115	0,0000176	0,0000436					
FP FP Equity	0,0000146	0,0000156	0,0000150	0,0000250	0,0000199	0,0000460				
BP/ LN Equity	0,0000118	0,0000121	0,0000119	0,0000224	0,0000151	0,0000337	0,0000492			
RDSA LN Equity	0,0000126	0,0000132	0,0000123	0,0000227	0,0000145	0,0000337	0,0000346	0,0000422		
AZN LN Equity	0,0000107	0,0000158	0,0000160	0,0000154	0,0000124	0,0000145	0,0000144	0,0000151	0,0000409	
MC FP Equity	0,0000157	0,0000164	0,0000161	0,0000277	0,0000240	0,0000309	0,0000236	0,0000230	0,0000170	0,0000576
ASML NA Equity	0,0000121	0,0000150	0,0000143	0,0000224	0,0000229	0,0000250	0,0000190	0,0000191	0,0000140	0,0000318
LIN US Equity	0,0000080	0,0000089	0,0000077	0,0000168	0,0000162	0,0000186	0,0000147	0,0000147	0,0000072	0,0000203
GSK LN Equity	0,0000098	0,0000138	0,0000147	0,0000134	0,0000105	0,0000139	0,0000135	0,0000145	0,0000204	0,0000141
ALV GR Equity	0,0000139	0,0000162	0,0000154	0,0000331	0,0000286	0,0000316	0,0000240	0,0000236	0,0000172	0,0000356
SAN FP Equity	0,0000133	0,0000194	0,0000189	0,0000179	0,0000178	0,0000234	0,0000172	0,0000187	0,0000207	0,0000243
SIE GR Equity	0,0000132	0,0000147	0,0000145	0,0000269	0,0000280	0,0000308	0,0000233	0,0000235	0,0000149	0,0000348
NOVOB DC Equity	0,0000098	0,0000136	0,0000134	0,0000108	0,0000110	0,0000127	0,0000109	0,0000105	0,0000129	0,0000155
DGE LN Equity	0,0000121	0,0000109	0,0000112	0,0000154	0,0000119	0,0000152	0,0000142	0,0000148	0,0000136	0,0000194
UNA NA Equity	0,0000153	0,0000134	0,0000135	0,0000146	0,0000135	0,0000193	0,0000142	0,0000147	0,0000127	0,0000223
BATS LN Equity	0,0000112	0,0000115	0,0000113	0,0000137	0,0000117	0,0000153	0,0000138	0,0000149	0,0000146	0,0000169

	ASML NA Equity	LIN US Equity	GSK LN Equity	ALV GR Equity	SAN FP Equity	SIE GR Equity	NOVOB DC Equity	DGE LN Equity	UNA NA Equity	BATS LN Equity
NESN SW Equity										
ROG SW Equity										
NOVN SW Equity										
HSBA LN Equity										
SAP GR Equity										
FP FP Equity										
BP/ LN Equity										
RDSA LN Equity										
AZN LN Equity										
MC FP Equity										
ASML NA Equity	0,0000690									
LIN US Equity	0,0000177	0,0000447								
GSK LN Equity	0,0000124	0,0000058	0,0000290							
ALV GR Equity	0,0000277	0,0000250	0,0000144	0,0000646						
SAN FP Equity	0,0000201	0,0000122	0,0000186	0,0000252	0,0000429					
SIE GR Equity	0,0000283	0,0000256	0,0000125	0,0000411	0,0000228	0,0000576				
NOVOB DC Equity	0,0000138	0,0000067	0,0000106	0,0000138	0,0000151	0,0000129	0,0000503			
DGE LN Equity	0,0000148	0,0000084	0,0000132	0,0000165	0,0000152	0,0000154	0,0000102	0,0000269		
UNA NA Equity	0,0000168	0,0000099	0,0000128	0,0000186	0,0000193	0,0000181	0,0000121	0,0000161	0,0000411	
BATS LN Equity	0,0000141	0,0000089	0,0000140	0,0000151	0,0000159	0,0000146	0,0000097	0,0000156	0,0000154	0,0000371

Tabella 6. Matrice di varianza - covarianza

4.3 Il modello di Markowitz

Per disegnare la frontiera efficiente e calcolare la composizione ottima del portafoglio è stato utilizzato il software Matlab inserendo, come dati in input, il vettore dei rendimenti attesi e la matrice di varianza – covarianza. Implementando la funzione *Portfolio* è stato dunque possibile definire il problema di ottimizzazione, inserendo gli input del modello e definendo

il vincolo di bilancio per cui la sommatoria dei pesi deve essere pari a 1. Per calcolare l'allocazione ottima sono state utilizzate due funzioni alternative:

- *estimateFrontierByReturn*: permette di minimizzare la varianza del portafoglio ottimo fissando il rendimento atteso. In questo modo il software calcola tutte le combinazioni di portafoglio presenti sulla frontiera efficiente e restituisce il portafoglio dalle prestazioni migliori fissato un rendimento target;
- *estimateMaxSharpeRatio*: permette di massimizzare l'indice di Sharpe tra i portafogli presenti sulla frontiera efficiente. In questo modo il software calcola tutte le combinazioni di portafoglio presenti sulla frontiera efficiente e restituisce il portafoglio con il più alto indice di Sharpe.

Per sviluppare la prima alternativa è necessario fissare il rendimento atteso ad un determinato valore. Il modello di Markowitz afferma che il rendimento target può essere scelto in maniera arbitraria e quindi non definisce una metodologia di calcolo. In accordo con la società Fondaco SGR S.p.A., è stato scelto di fissare il rendimento target in modo tale che sia possibile raggiungerlo, dati i singoli rendimenti dei titoli che compongono il portafoglio. In particolare non si è scelto di fissare il rendimento ad un valore arbitrario che soddisfi le alte aspettative dell'investitore, ma di fissarlo, in media, pari ai rendimenti dei singoli titoli ottenendo così un portafoglio ottimo la cui performance è in linea con le performance dei singoli titoli che lo compongono. Per definire il rendimento target sono stati raccolti, per ogni titolo, i rendimenti logaritmici corrispondenti agli ultimi due anni della stringa temporale: dal 08/11/17 al 08/11/19. Si è scelto di operare con la più recente stringa di dati per spiegare al meglio l'andamento attuale del mercato e non inserire dati che avrebbero diluito il risultato finale. Successivamente, per ogni titolo, sono stati calcolati i rendimenti attesi in modo tale da poter porre il rendimento target esattamente pari alla mediana di quest'ultimi. E' stata scelta la mediana perché, dividendo il campione a metà, da un'idea verosimile a differenza della media la quale risulta meno sensibile a distorsioni del campione stesso. Si è ottenuto così un rendimento target pari a 0,015451%. Per entrambe le alternative sono state plottate le frontiere efficienti in presenza e assenza di vendite allo scoperto e le relative allocazioni ottimali di portafoglio. Per vendita allo scoperto si intende un'operazione finanziaria che consiste nella vendita di titoli non direttamente posseduti dal venditore e, nel portafoglio ottimo, tali titoli risultano essere identificati da una quota negativa.

Nella Figura 47 è possibile vedere la frontiera efficiente ottenuta applicando la teoria di Markowitz con vincoli di non negatività e fissando un rendimento target. In giallo è stato evidenziato il portafoglio ottimo, cioè il portafoglio che, tra tutti, offre il rapporto rendimento/rischio maggiore, con un rendimento pari a 0,015451% a fronte di una deviazione standard del 0,37%. Nella figura 48 è possibile vedere la relativa composizione del portafoglio ottimo.

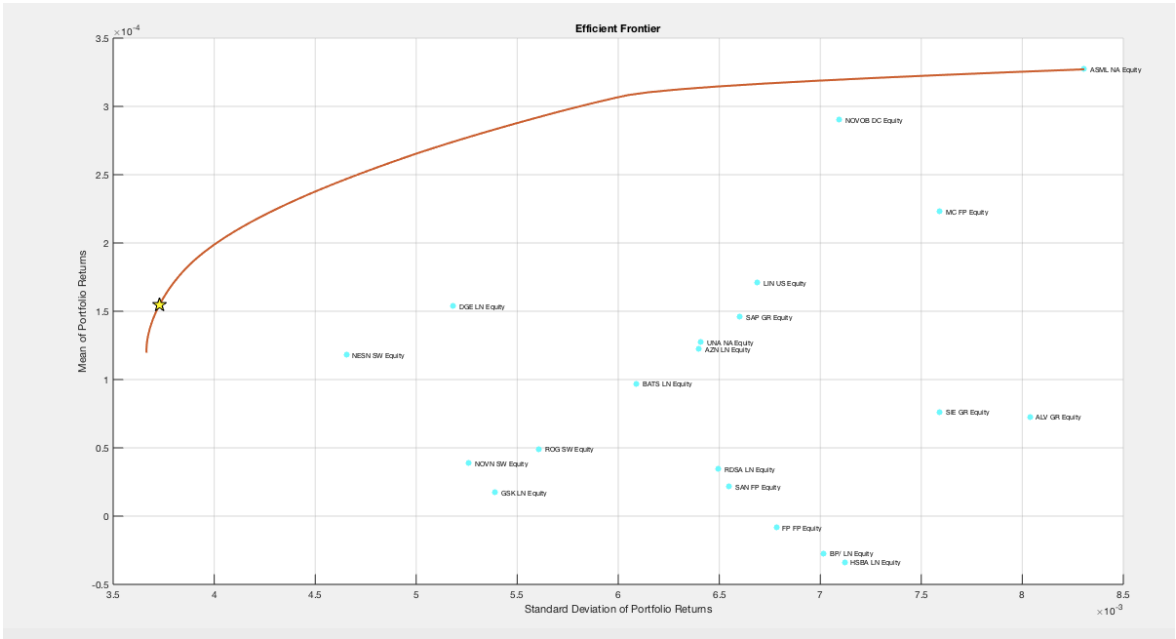


Figura 47. Frontiera efficiente di Markowitz in assenza di vendite allo scoperto fissando un rendimento target

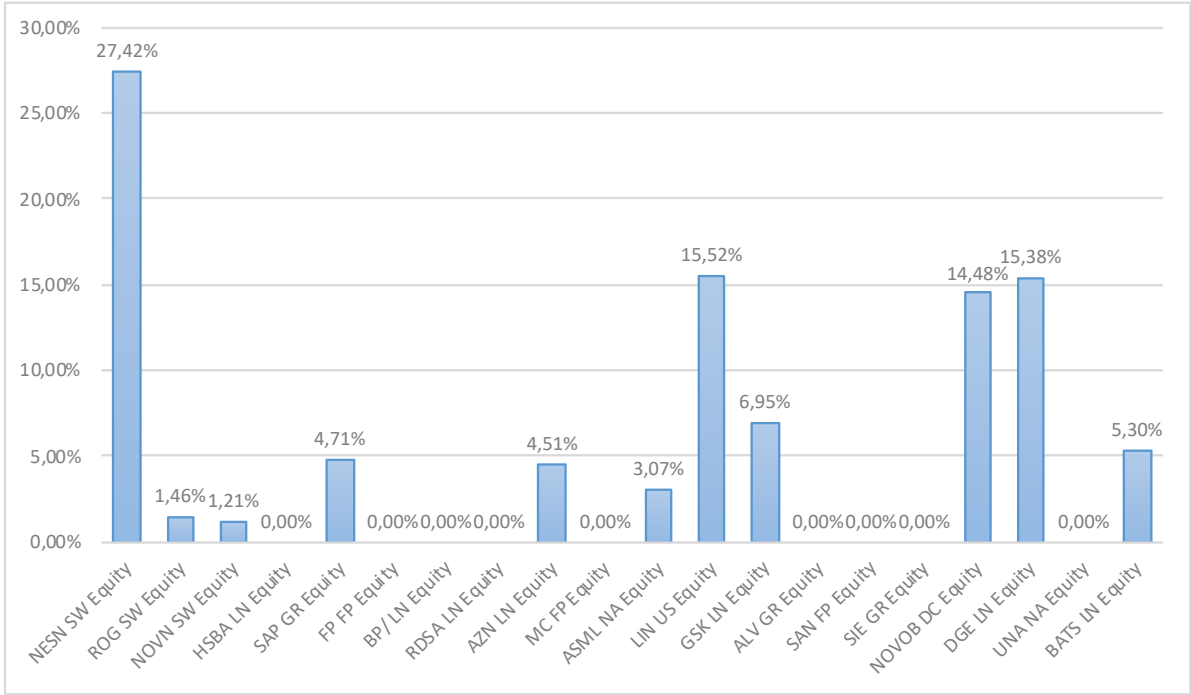


Figura 48. Composizione ottima del portafoglio in assenza di vendite allo scoperto fissando un rendimento target

Nella Figura 49 è possibile vedere la frontiera efficiente ottenuta applicando la teoria di Markowitz con vincoli di non negatività e massimizzando l'indice di Sharpe. In giallo è stato evidenziato il portafoglio ottimo che restituisce un rendimento pari a 0,025727% a fronte di una deviazione standard del 0,48%. Nella figura 50 è possibile vedere la relativa composizione del portafoglio ottimo.

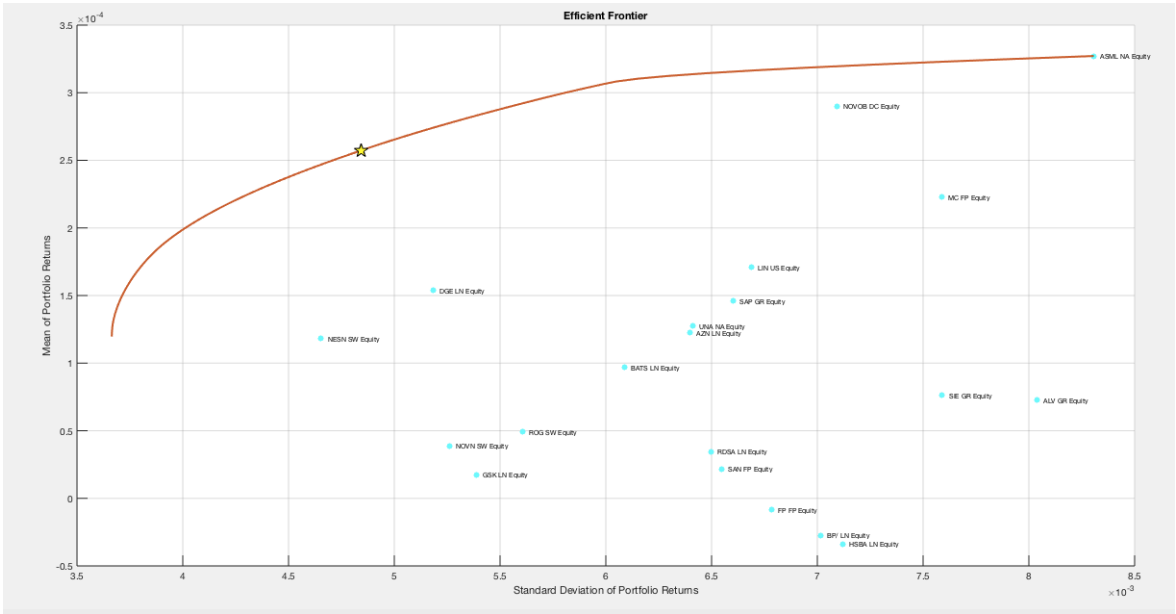


Figura 49. Frontiera efficiente di Markowitz in assenza di vendite allo scoperto massimizzando l'indice di Sharpe

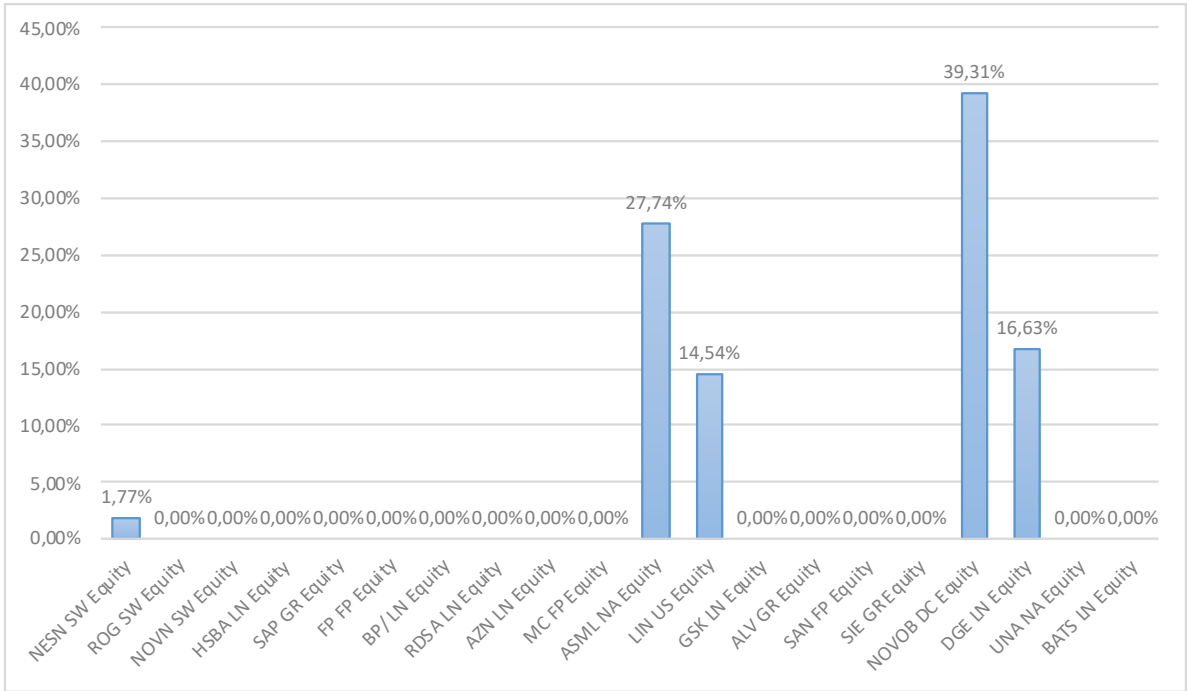


Figura 50. Composizione del portafoglio ottimo in assenza di vendite allo scoperto massimizzando l'indice di Sharpe

Nella Figura 51 è possibile vedere la frontiera efficiente ottenuta applicando la teoria di Markowitz senza vincoli di non negatività e fissando un rendimento target. In giallo è stato evidenziato il portafoglio ottimo che restituisce un rendimento pari a 0,015451% a fronte di una deviazione standard del 0,36%. Nella figura 52 è possibile vedere la relativa composizione del portafoglio ottimo.

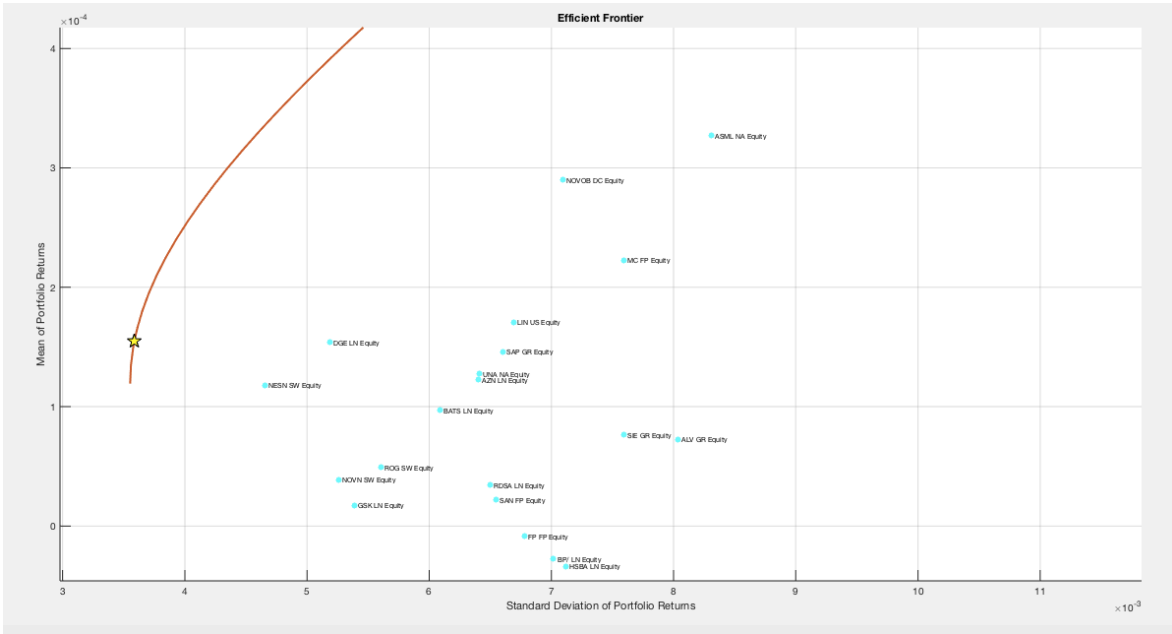


Figura 61. Frontiera efficiente di Markowitz in presenza di vendite allo scoperto fissando un rendimento target

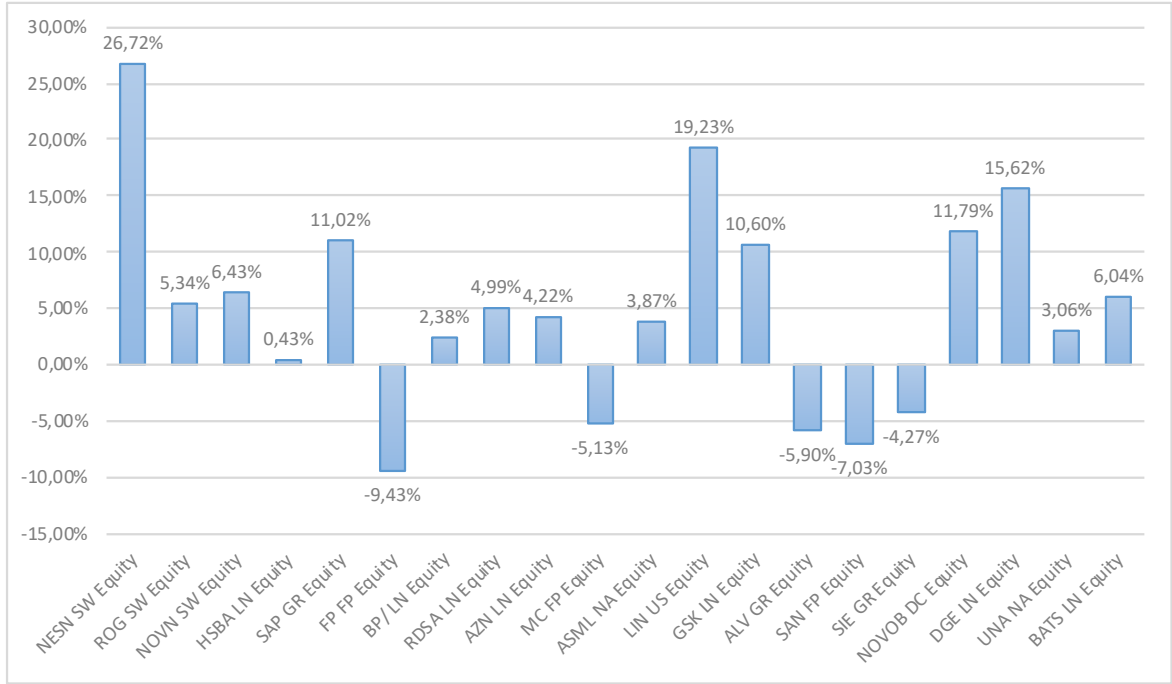


Figura 52. Composizione del portafoglio ottimo in presenza di vendite allo scoperto fissando un rendimento target

Nella Figura 53 è possibile vedere la frontiera efficiente ottenuta applicando la teoria di Markowitz senza vincoli di non negatività e massimizzando l'indice di Sharpe. In giallo è stato evidenziato il portafoglio ottimo che restituisce un rendimento pari a 0,066669% a fronte di una deviazione standard del 0,84%. Nella figura 54 è possibile vedere la relativa composizione del portafoglio ottimo.

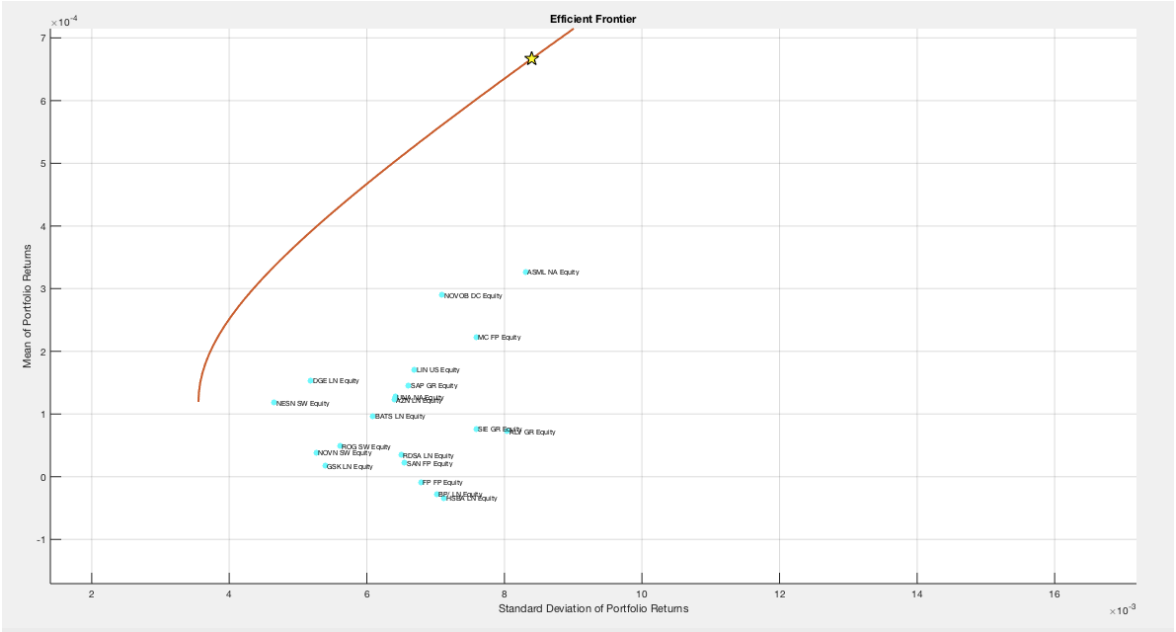


Figura 53. Frontiera efficiente di Markowitz in presenza di vendite allo scoperto massimizzando l'indice di Sharpe

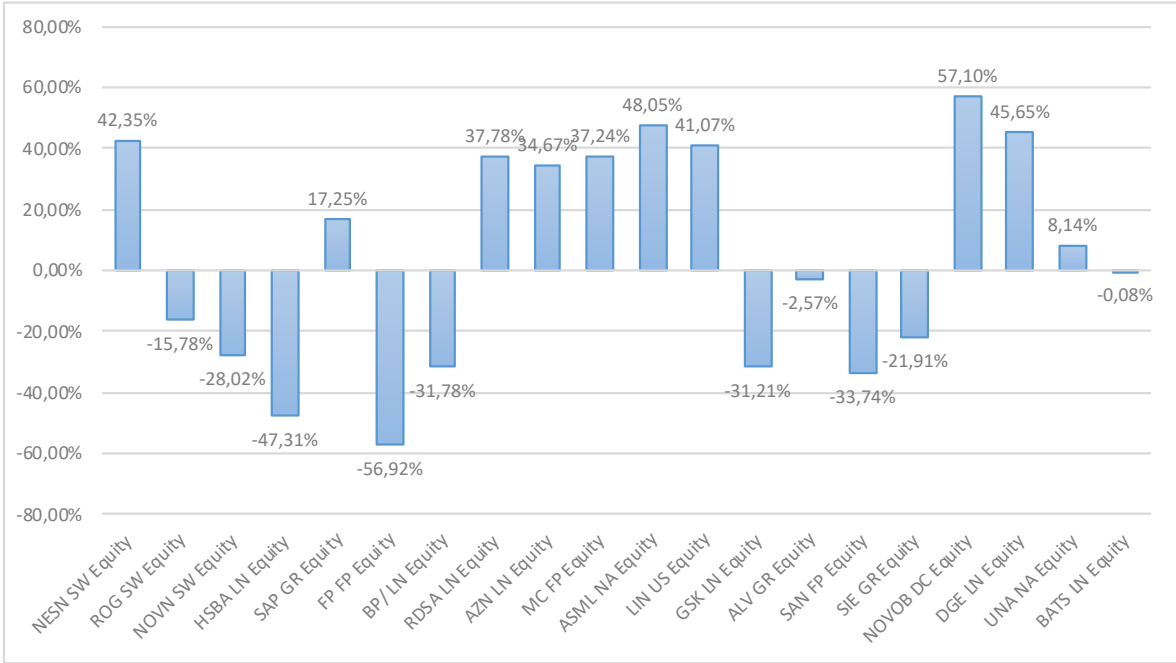


Figura 54. Composizione del portafoglio ottimo in presenza di vendite allo scoperto massimizzando l'indice di Sharpe

Calcolando l'indice di Sharpe dei portafogli ottenuti è possibile valutare quale di queste alternative è in grado di garantire performance migliori:

	Performance di Sharpe
Assenza di vendite allo scoperto fissando un rendimento target	0,041759459
Assenza di vendita allo scoperto massimizzando l'indice di Sharpe	0,053597917
Presenza di vendite allo scoperto fissando un rendimento target	0,042919444
Presenza di vendite allo scoperto massimizzando l'indice di Sharpe	0,079367857

Tabella 7. Performance di Sharpe dei portafogli ottimi

Per ottenere un portafoglio dalle migliori prestazioni bisognerebbe massimizzare l'indice di Sharpe tra i portafogli presenti sulla frontiera efficiente in presenza di vendite allo scoperto. Di contro, il portafoglio dalle prestazioni peggiori risulta essere quello in cui si fissa un rendimento target in assenza di vendite allo scoperto. Dai risultati così ottenuti si è pervenuti a due importanti considerazioni:

- la frontiera efficiente in assenza di vendite allo scoperto risulta dominata dalla frontiera efficiente in presenza di vendite allo scoperto a causa di una restrizione del numero di portafogli che si possono comporre con la conseguenza che, a parità di rischio, il portafoglio efficiente avrà rendimento atteso più basso rispetto a quello ottenuto con vendite allo scoperto;
- a prescindere dalla presenza o meno di vendite allo scoperto, massimizzando l'indice di Sharpe tra i portafogli presenti sulla frontiera efficiente si ottiene sicuramente un portafoglio dalle prestazioni migliori rispetto a quello che si otterrebbe fissando un rendimento target.

Dai grafici sulle composizioni dei portafogli ottimi risultano evidenti le critiche mosse sul modello riguardo alla massimizzazione degli errori di stima. Analizzando le composizioni dei portafogli si nota come il modello porta a sovrastimare il peso di quei titoli che

presentano un elevato rendimento atteso, bassa varianza e correlazioni negative, realizzando portafogli composti prevalentemente da titoli con queste caratteristiche i quali risultano maggiormente soggetti ad un elevato errore di stima. Inoltre, questa tendenza risulta ancora più accentuata nei portafogli in cui non è ammessa la vendita allo scoperto, per cui è possibile vedere chiaramente come il modello sovrastima il peso dei titoli con più alto rendimento soprattutto nell'alternativa in cui viene massimizzato l'indice di Sharpe dove l'allocazione ricade solo su cinque titoli. Il modello di Markowitz è stato criticato anche per la sua instabilità e a tal proposito, attraverso la funzione di Matlab chiamata *estimateFrontierByRisk*, in assenza di vendite allo scoperto, si è andati ad analizzare la composizione del portafoglio ottimo massimizzando il rendimento atteso e fissando il rischio ad un determinato valore. In particolare si è voluto analizzare come cambia l'allocazione aumentando di volta in volta il rischio che si vuole associare al portafoglio ottimo. Come dai grafici precedenti sulle allocazioni ottimali, anche in questo caso è evidente il limite derivante dal prendere i rendimenti storici come input per calcolare il peso ottimo degli asset che andranno a comporre il portafoglio dell'investitore. Analizzando la figura 55 è possibile osservare che all'aumentare del rischio, il portafoglio tende ad essere composto dai soli titoli che presentano l'indice di Sharpe maggiore. Infatti si può notare come il portafoglio sia completamente sbilanciato verso i due titoli ASML NA Equity e NOVOB DC Equity andando, dunque, contro il principio di diversificazione su cui si basa il modello.

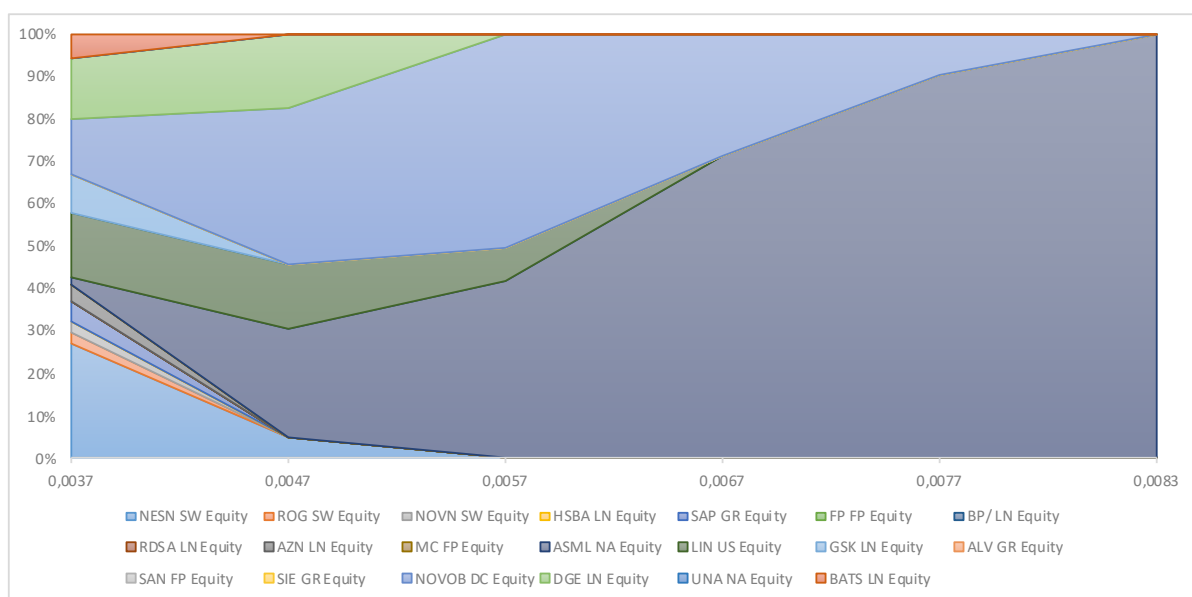


Figura 55. Variazione nella composizione di portafoglio all'aumentare del rischio utilizzando i rendimenti storici in assenza di vendite allo scoperto

Per cogliere meglio le fragilità del modello è stata effettuata un'ulteriore analisi che prevede di analizzare le allocazioni ottimali di portafoglio cambiando di volta in volta gli input del modello. In particolare è stata utilizzata la funzione *estimateMaxSharpeRatio* in assenza di vendite allo scoperto calcolando sette diverse allocazioni di portafoglio utilizzando come dati in input i rendimenti logaritmici degli anni 2007, 2009, 2011, 2013, 2015, 2017 e 2019. Dalla figura 56 è chiaro come il modello, basato sui rendimenti attesi e sulla matrice di varianza - covarianza, risulta instabile. Utilizzando rendimenti logaritmici riferiti ad anni diversi si sono ottenuti dei portafogli le cui variazioni sono molto consistenti. In un caso reale l'investitore avrebbe dovuto ricalcolare ogni volta il portafoglio ottimo, provocando in questo mondo un aumento dei costi di transazione che avrebbero eroso direttamente i profitti.

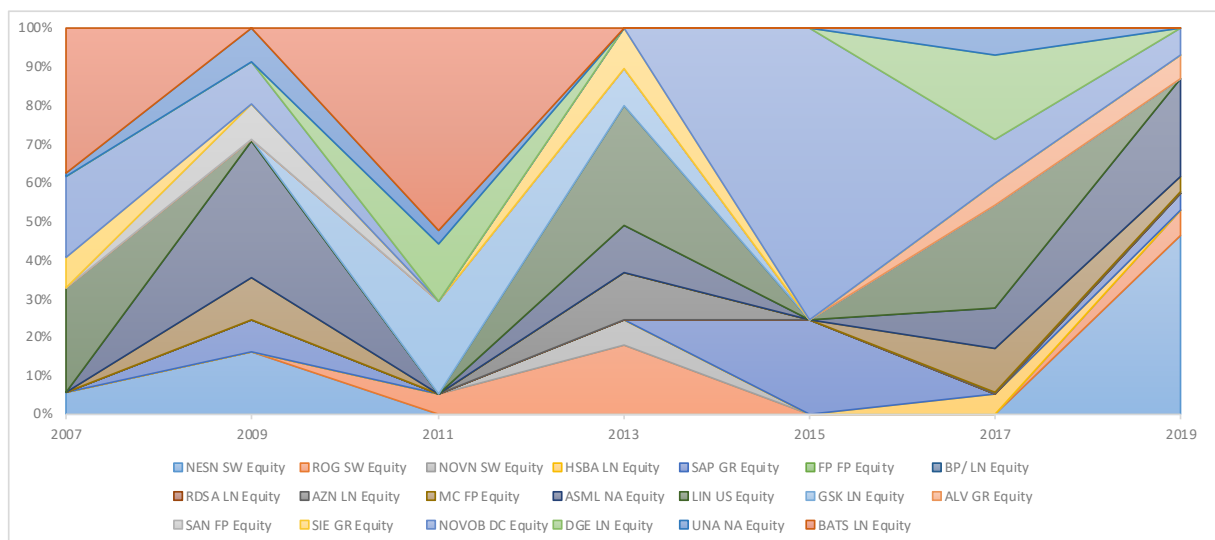


Figura 56. Variazione dinamica della composizione di portafoglio in assenza di vendite allo scoperto

Quest'ultima analisi è stata anche effettuata applicando una finestra rolling di due anni sui dati, costruendo in questo modo sette portafogli utilizzando come dati in input i rendimenti logaritmici degli anni 2005-2007, 2005-2009, 2005-2011, 2005-2013, 2005-2015, 2005-2017, 2005-2019. Nella figura 57 è evidente, anche se in maniera meno marcata rispetto al caso precedente, che il modello risulta instabile cambiando di volta in volta l'allocazione ottimale tendendo a sovrastimare il peso di quei titoli che presentano un elevato rendimento atteso. Inoltre, analizzando la tabella 8, in cui sono presenti rischio e rendimento atteso associati a questi portafogli, si nota come alcuni di essi risultino praticamente uguali. Da ciò si deduce che l'investitore avrebbe dovuto ricalcolare una nuova allocazione, diversa dalla

precedente, che lo avrebbe portato ad ottenere le stesse performance, ma sostenendo in più i costi di transazione. Quest'ultima analisi condotta sul rischio e sui rendimenti attesi dei portafogli ha sottolineato ancora di più l'inaffidabilità del modello di Markowitz.

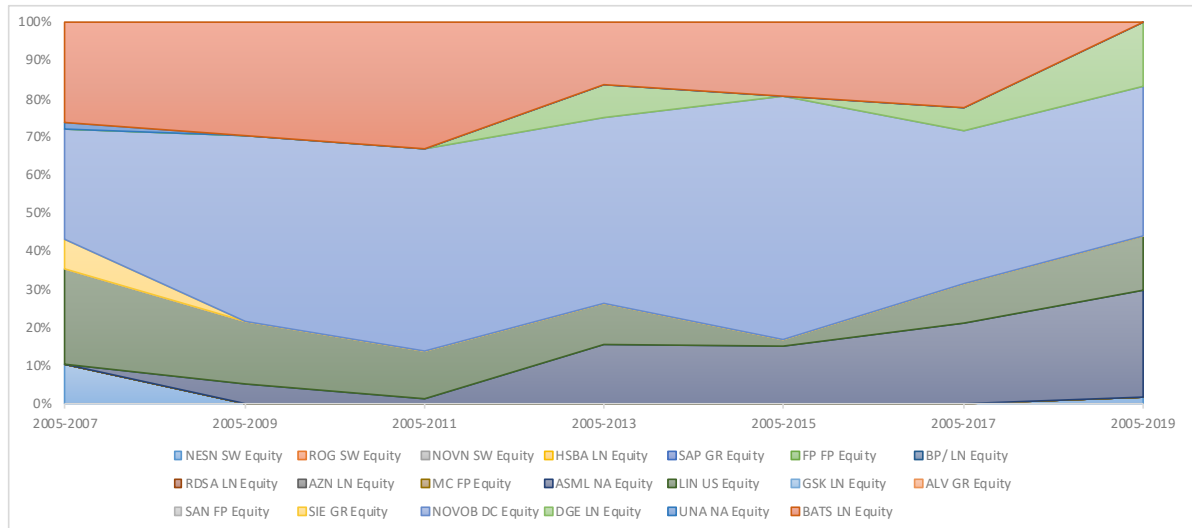


Figura 57. Variazione dinamica della composizione di portafoglio applicando una finestra rolling di due anni in assenza di vendite allo scoperto

	2005-2007	2005-2009	2005-2011	2005-2013	2005-2015	2005-2017	2005-2019
Rischio	0,0035	0,0055	0,0054	0,0055	0,0055	0,0048	0,0048
Rendimento atteso	0,000422	0,000229	0,000303	0,000292	0,000337	0,000259	0,000257

Tabella 8. Rischio e rendimento atteso dei portafogli calcolati su una finestra rolling di due anni

4.4 Il modello di Black e Litterman

Per eliminare i limiti che caratterizzano il modello di Markowitz, Black e Litterman hanno ideato un nuovo modello in cui non vengono utilizzati i rendimenti storici come input ma i rendimenti impliciti collegati alle views personali dell'investitore. Calcolando i rendimenti impliciti è dunque possibile evitare di ottenere dei portafogli troppo concentrati in pochi asset e con posizioni troppo estreme. Attraverso la tecnica dell'ottimizzazione inversa, i rendimenti impliciti vengono calcolati secondo la seguente formula:

$$\Theta = \lambda \cdot \Sigma \cdot \Omega_B$$

Dove:

- Σ è la matrice di varianza – covarianza storica;
- λ rappresenta il coefficiente di avversione al rischio. Per il calcolo del coefficiente è stato preso come benchmark l'indice azionario STOXX Europe 600 da cui sono stati raccolti i prezzi di chiusura giornalieri al lordo dei dividendi per la stringa temporale presa in considerazione. Dai prezzi di chiusura giornalieri sono stati calcolati i rendimenti logaritmici che, inseriti nel software Matlab, hanno rappresentato le basi per il calcolo dei parametri della distribuzione e del relativo coefficiente:

	Benchmark
Media	0,003836%
Deviazione Standard	0,514866%
Coefficiente di avversione al rischio	1,7784

Tabella 9. Media, deviazione standard e coefficiente di avversione al rischio estrapolati dai rendimenti logaritmici del benchmark

Il coefficiente di avversione al rischio è stato calcolato attraverso il software Matlab come il rapporto tra il premio al rischio di mercato e il rischio stesso:

$$\lambda = \frac{E(R_P) - i}{\sigma^2}$$

L'asset risk free preso in considerazione è l'Euribor con scadenza a tre mesi il cui rendimento i è stato posto pari a zero;

- Ω_B è il vettore delle quote pari alla capitalizzazione degli asset che compongono il portafoglio. Per calcolare il peso dei titoli rispetto la capitalizzazione complessiva di mercato, è stata preso il valore del free float al giorno 08/11/2019. Quest'ultimo valore è stato poi diviso per la somma della capitalizzazione dei venti titoli ottenendo quindi il peso dei singoli titoli all'interno del mercato:

Codice del titolo	Capitalizzazione di Mercato (miliardi di euro)	Peso della capitalizzazione
NESN SW Equity	305159,04	0,097170458
ROG SW Equity	213930,3422	0,068120903
NOVN SW Equity	228575,7787	0,072784385
HSBA LN Equity	112186,2876	0,035722989
SAP GR Equity	149164,9887	0,047497955
FP FP Equity	125695,2627	0,040024593
BP/ LN Equity	94273,36036	0,030019054
RDSA LN Equity	89449,12829	0,028482895
AZN LN Equity	94838,21014	0,030198916
MC FP Equity	200251,8751	0,063765329
ASML NA Equity	104009,9367	0,033119429
LIN US Equity	109562,4123	0,03488748
GSK LN Equity	85157,73943	0,027116406
ALV GR Equity	89441,86097	0,02848058
SAN FP Equity	104162,3579	0,033167964
SIE GR Equity	98923	0,031499618
NOVOB DC Equity	718018,422	0,228635465
DGE LN Equity	71692,80351	0,022828826
UNA NA Equity	78162,84916	0,024889054
BATS LN Equity	67795,11562	0,021587702
	3140450,771	

Tabella 10. Capitalizzazione di mercato e i relativi pesi dei venti titoli

Per definire la frontiera efficiente, oltre ai rendimenti impliciti, è necessario calcolare la matrice di varianza – covarianza teorica. Tale matrice risulta essere proporzionale alla matrice di varianza – covarianza storica secondo il parametro τ . Il modello dichiara che il parametro deve essere scelto in maniera arbitraria tenendo conto che se lo si lascia tendere a zero, implicitamente si tende a far preferire i rendimenti impliciti piuttosto che quelli definiti dalle views. In accordo con Fondaco SGR S.p.A., il parametro è stato posto pari a 0,05. In questo modo, la matrice di varianza – covarianza teorica presenta dei valori che sono più piccoli ma in linea con il pensiero di Black e Litterman per cui, nel futuro, i rendimenti subiscano poche oscillazioni dato che, nel lungo periodo, torneranno ai loro valori di equilibrio. Nella tabella 11 è possibile osservare i rendimenti impliciti dei venti titoli e le rispettive deviazioni standard. Osservando le deviazioni standard dei singoli titoli si nota come esse risultano essere inferiori rispetto a quelle calcolate per i rendimenti storici dato

dal fatto di aver posto τ molto vicino a zero ottenendo, in questo modo, un rischio molto più basso:

Codice del titolo	Rendimenti impliciti	Deviazioni Standard
NESN SW Equity	0,0000228	0,001040715
ROG SW Equity	0,0000272	0,001253699
NOVN SW Equity	0,0000265	0,001176405
HSBA LN Equity	0,0000316	0,001592091
SAP GR Equity	0,0000288	0,001476191
FP FP Equity	0,0000359	0,001516633
BP/ LN Equity	0,0000304	0,001569133
RDSA LN Equity	0,0000303	0,001452594
AZN LN Equity	0,0000267	0,001430911
MC FP Equity	0,0000404	0,001697186
ASML NA Equity	0,0000347	0,001857311
LIN US Equity	0,0000228	0,001495938
GSK LN Equity	0,0000231	0,001205319
ALV GR Equity	0,0000392	0,001797321
SAN FP Equity	0,0000333	0,001464115
SIE GR Equity	0,0000372	0,001697301
NOVOB DC Equity	0,0000370	0,001586017
DGE LN Equity	0,0000235	0,00115915
UNA NA Equity	0,0000275	0,001433302
BATS LN Equity	0,0000232	0,00136155

Tabella 11. Rendimenti impliciti e deviazioni standard dei venti titoli

Attraverso il vettore dei rendimenti impliciti e la matrice di varianza – covarianza teorica è stato possibile plottare la frontiera efficiente implementando, anche in questo caso, la funzione *Portfolio* di Matlab. In giallo è stato evidenziato il portafoglio ottimo che restituisce un rendimento pari a 0,003122% a fronte di una deviazione standard del 0,093688%.

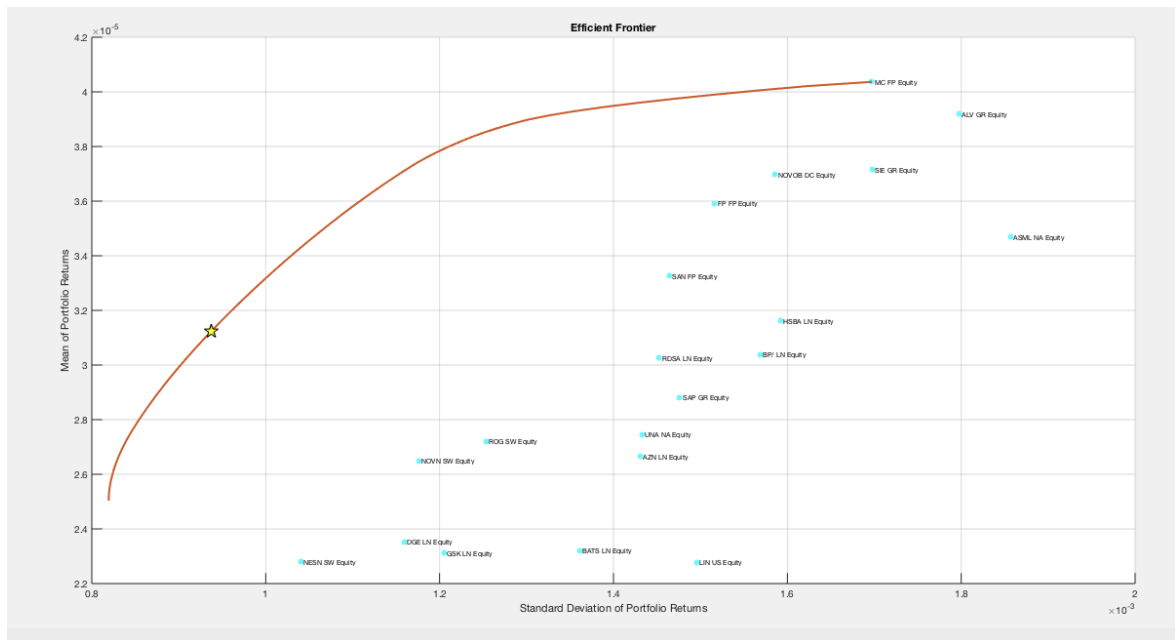


Figura 58. Frontiera efficiente calcolata attraverso i rendimenti impliciti

Utilizzando i rendimenti impliciti, il portafoglio ottimo, che rappresenta il portafoglio di mercato, ha una composizione che è uguale alla capitalizzazione pesata di mercato dei venti titoli:

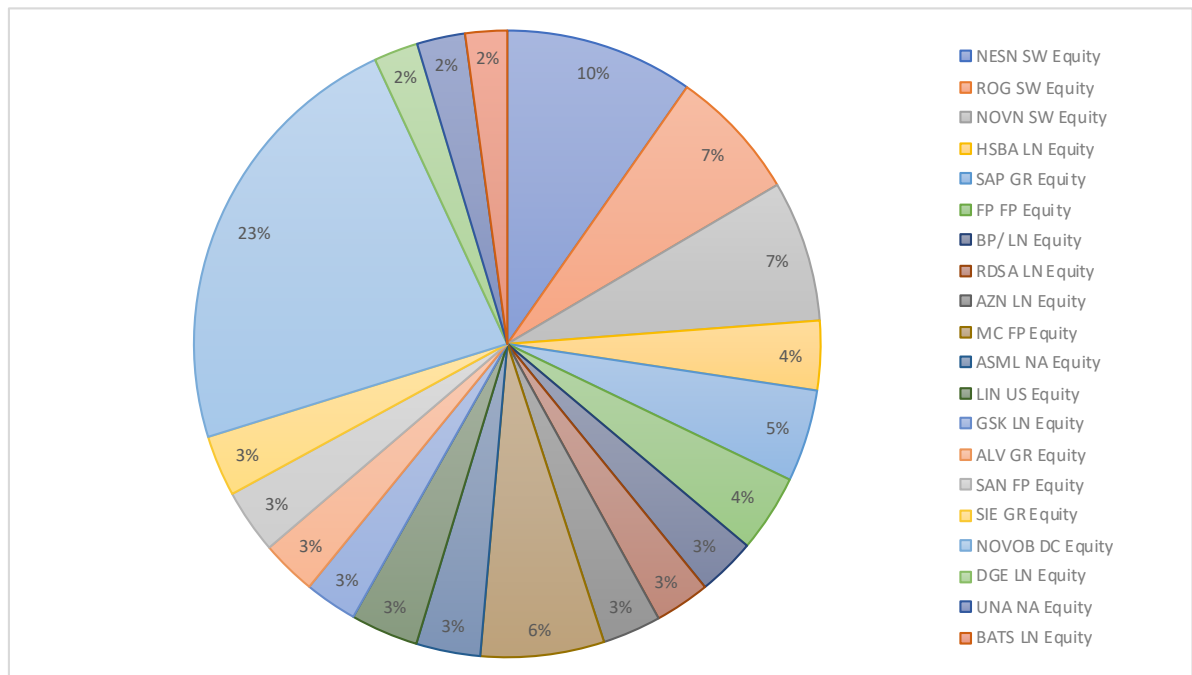


Figura 59. Composizione del portafoglio di mercato

Attraverso la funzione di Matlab *EstimateFrontierByRisk* è stato possibile, anche in questo caso, analizzare come varia la composizione di portafoglio all'aumentare del rischio in assenza di vendite allo scoperto. Nella figura 60 si può vedere come il peso dei titoli risulti molto più bilanciato andando a rimarcare il motivo per cui non si ripone fiducia nei rendimenti storici.

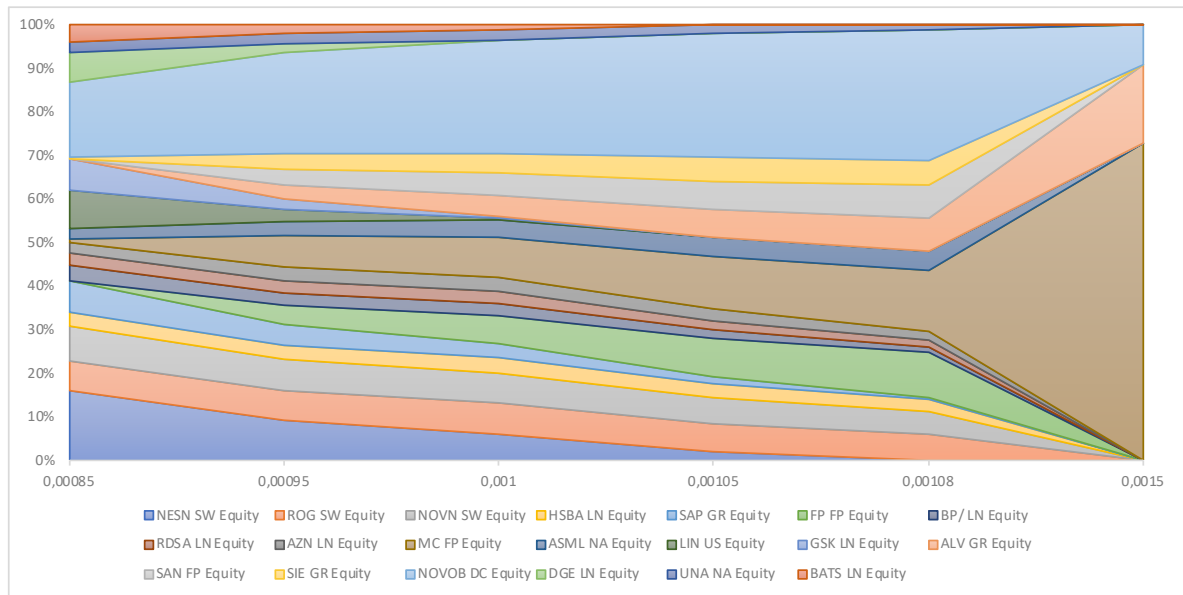


Figura 60. Variazione della composizione di portafoglio all'aumentare del rischio utilizzando i rendimenti impliciti in assenza di vendite allo scoperto

Per calcolare il portafoglio ottimo utilizzando i rendimenti di Black e Litterman sono state formulate sei views sull'andamento futuro dei titoli derivate dall'osservazione del mercato negli ultimi mesi, dalle personali opinioni di gestori di fondi presso Fondaco SGR S.p.A. e dalle caratteristiche del settore di appartenenza:

- *View assolute*

- LVMH Moët Hennessy Louis Vuitton: il titolo registrerà un trend positivo nei prossimi mesi con un rendimento che aumenterà del 0,0488149%. Per il settore moda ci si aspetta un aumento dei profitti annuali pari al 10,4% e un aumento dei ricavi annuali pari al 7%. Per la società LVMH i profitti annuali crescono lentamente registrando un aumento pari al 8,6% mentre l'aumento delle ricavi annuali è in linea con quelli del settore registrando un aumento pari al 6,8%. Tali

risultati sono imputabili al fatto che LVMH acquisirà definitivamente, nella prima metà del 2020, la società Tiffany&Co. ampliando, in questo modo, la divisione orologi e gioielli;

- HSBC Holdings PLC: il titolo registrerà un trend positivo nei prossimi mesi con un rendimento che aumenterà del 0,030754%. Per il settore bancario ci si aspetta un aumento dei profitti annuali pari al 0,3% e un aumento dei ricavi annuali pari al 2,3%. La banca HSBC si posiziona bene registrando un aumento dei profitti annuali pari al 6,2%, decisamente superiori a quelli del settore, e un aumento dei ricavi annuali pari al 2,1%. Tali risultati sono imputabili al fatto che HSBC ha emesso obbligazioni senior non garantite a tasso fisso e a tasso variabile con scadenza nel 2025;
 - Allianz SE-REG: il titolo registrerà un trend positivo nei prossimi mesi con un rendimento che aumenterà del 0,0344638%. Per il settore assicurativo ci si aspetta un aumento dei profitti annuali pari al 3,7% e un aumento dei ricavi annuali pari al 4,5%. La società assicurativa Allianz si posiziona al di sopra del settore registrando un aumento dei profitti annuali pari al 5,1% e un aumento dei ricavi annuali pari al 6,1%. Tali risultati sono imputabili al fatto che MoneyFarm SIM S.p.A. ha annunciato di aver sottoscritto un accordo di sottoscrizione e di azionisti per un ricavo lordo di 40 milioni di euro in un round azionario di finanziamento guidato dal nuovo investitore Poste Italiane S.p.A. e tale transazione include la partecipazione dell'investitore di ritorno Allianz. Dopo la chiusura della transazione, Poste Italiane S.p.A. deterrà una partecipazione di minoranza nella società. La società prevede di chiudere la transazione alla fine del 2019.
- *View relative*
 - Novo Nordisk A/S-B registrerà un aumento del rendimento rispetto a Roche Holding AG-Genusschein pari a 0,014159%. Per il settore farmaceutico ci si aspetta un aumento dei profitti annuali pari al 8% e un aumento dei ricavi annuali pari al 3,3%. Novo Nordisk si posiziona al di sopra del settore registrando un aumento dei profitti annuali pari a 9,3% e un aumento dei ricavi annuali pari a

7,8%. Roche Holding, invece, si posiziona al di sotto del settore, registrando un aumento dei profitti annuali pari a 6,9% e un aumento dei ricavi annuali pari a 2%. Tali risultati sono imputabili al fatto che Novo Nordisk, effettuando molti più investimenti, ha registrato delle aspettative future sugli earnings per share superiori rispetto a Roche Holding;

- Nestlé SA-REG registrerà un aumento del rendimento rispetto a Linde PLC pari a 0,00721739%. Per il settore alimentare ci si aspetta un aumento dei profitti annuali pari a 4,7% e un aumento dei ricavi annuali pari a 2,9% mentre per il settore chimico ci si aspetta un aumento dei profitti annuali pari a 16,3% e un aumento dei ricavi annuali pari a 3,7%. Nestlé si posiziona al di sotto del settore registrando un aumento dei profitti annuali pari a 3,9% e un aumento dei ricavi annuali pari a 2,6%. Per la società Linde PLC i profitti annuali crescono molto lentamente rispetto al settore registrando un aumento pari a 5,3% mentre l'aumento dei ricavi annuali risulta essere superiore al settore registrando un aumento pari 4,9%. Le aspettative future degli earnings per share di Nestlé sono elevate, avendo la società effettuato diversi investimenti, mentre Linde PLC, nonostante abbia stretto delle partnership, registra delle aspettative future sugli earnings per share decrescenti. Per tali ragioni ci si può aspettare che i rendimenti di Nestlé siano superiori a quelli di Linde PLC;
- Total SA registrerà un aumento del rendimento rispetto a Royal Dutch Shell PLC-A SHS pari a 0,00572685%. Per il settore petrolifero ci si aspetta un aumento dei profitti annuali pari a 6,5% e un aumento dei ricavi annuali pari a 2,8%. Total SA si posiziona al di sopra del settore registrando un aumento dei profitti annuali pari a 8,1% e un aumento dei ricavi annuali pari a 2,9%. Royal Dutch Shell, invece, si posiziona al di sotto del settore registrando un aumento dei profitti annuali pari a 4,2% e un aumento dei ricavi annuali pari a 1,4%. Tali risultati sono imputabili al fatto che Total SA, effettuando molti più investimenti, ha registrato delle aspettative future sugli earnings per share superiori rispetto a Royal Dutch Shell.

Dalle views è possibile definire due matrici:

- La matrice P avrà righe k pari al numero di view espresse e colonne n pari al numero di asset presenti in portafoglio. Le righe coinvolte in views assolute possiederanno un peso pari all'unità in corrispondenza dell'asset interessato mentre assumeranno valore nullo per tutti gli altri asset. Le righe coinvolte in views relative assegneranno peso pari a 1 all'asset che si ipotizza produrrà un over-rendimento mentre assegneranno peso pari a -1 all'asset che si ipotizza produrrà un under-rendimento. Per problemi di impaginazione la matrice è stata suddivisa a metà:

	NESN SW Equity	ROG SW Equity	NOVN SW Equity	HSBA LN Equity	SAP GR Equity	FP FP Equity	BP/ LN Equity	RDSA LN Equity	AZN LN Equity	MC FP Equity
View 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
View 2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
View 3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
View 4	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
View 5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
View 6	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0

	ASML NA Equity	LIN US Equity	GSK LN Equity	ALV GR Equity	SAN FP Equity	SIE GR Equity	NOVOB DC Equity	DGE LN Equity	UNA NA Equity	BATS LN Equity
View 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
View 2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
View 3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
View 4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
View 5	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
View 6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabella 12. Matrice P

- La matrice q i cui elementi rappresentano le view espresse dall'investitore:

View 1	0,000488149
View 2	0,00030754
View 3	0,000344638
View 4	0,000141599
View 5	7,21739E-05
View 6	5,72685E-05

Tabella 13. Matrice q

Per definire gli elementi nella matrice q il modello non definisce una metodologia di calcolo. In accordo con Fondaco SGR S.p.A., per ogni asset coinvolto nelle views sono stati raccolti i rendimenti logaritmici in ordine di grandezza dal più piccolo al più grande in modo tale da scindere le variazioni positive da quelle negative. Analizzando i campioni si è osservato che essi risultano molto dispersi e per tale ragione si è scelto di operare con i quantili in modo tale da ottenere un sotto gruppo di dati omogenei. In particolare, per comprendere in media il comportamento dei

rendimenti di un titolo, si è scelto di calcolare quantili al 5%. Per le views assolute sono stati calcolati i quantili delle variazioni positive mentre per le views relative sono stati calcolati i quantili delle variazioni positive per quell'asset di cui ci si aspetta un over-rendimento e i quantili delle variazioni negative per quell'asset di cui ci si aspetta un under- rendimento. Infine, per collegare le due informazioni, alle variazioni positive sono state sommate le variazioni negative in valore assoluto.

Per quanto riguarda il calcolo della matrice di confidenza, è stata usata la formula che mantiene la varianza delle views proporzionale alla varianza dei rendimenti di equilibrio dato dall'inclusione di $\tau\Sigma$ al suo interno. I dati ottenuti sono molto vicini allo zero e ciò significa che il modello darà molto peso alle views formulate dall'investitore.

$$\Psi = \text{diag}(P \cdot \tau\Sigma \cdot P^T)$$

2,88E-06	0	0	0	0	0
0	2,53E-06	0	0	0	0
0	0	3,23E-06	0	0	0
0	0	0	2,73E-06	0	0
0	0	0	0	2,52E-06	0
0	0	0	0	0	1,04E-06

Tabella 14. Matrice di confidenza

Una volta calcolati i rendimenti impliciti e definite le matrici relative alle views, è stato possibile calcolare i rendimenti e le varianze di Black e Litterman:

Codice del titolo	Rendimenti BL	Varianze BL
NESN SW Equity	0,000119392	$7,995396e^{-7}$
ROG SW Equity	0,000100645	$1,221529e^{-6}$
NOVN SW Equity	0,000116465	$1,165020e^{-6}$
HSBA LN Equity	0,000229416	$1,100112e^{-6}$

SAP GR Equity	0,000161124	$1,693869e^{-6}$
FP FP Equity	0,00020668	$1,478558e^{-6}$
BP/ LN Equity	0,000163336	$1,991227e^{-6}$
RDSA LN Equity	0,000157346	$1,516868e^{-6}$
AZN LN Equity	0,000124685	$1,795187e^{-6}$
MC FP Equity	0,000305238	$1,235966e^{-6}$
ASML NA Equity	0,00019772	$2,792679e^{-6}$
LIN US Equity	0,000101598	$1,282293e^{-6}$
GSK LN Equity	0,0001055	$1,265413e^{-6}$
ALV GR Equity	0,000268	$1,339624e^{-6}$
SAN FP Equity	0,000165126	$1,697365e^{-6}$
SIE GR Equity	0,000225255	$1,831519e^{-6}$
NOVOB DC Equity	0,000171195	$1,717636e^{-6}$
DGE LN Equity	0,000131751	$1,075230e^{-6}$
UNA NA Equity	0,000148543	$1,718920e^{-6}$
BATS LN Equity	0,00011623	$1,646170e^{-6}$

Tabella 15. Rendimenti e deviazioni standard di Black e Litterman

Attraverso il software Matlab, i rendimenti di Black e Litterman e la matrice di varianza - covarianza sono stati calcolati con le seguenti formule:

- Rendimenti di BL: $[(\tau \cdot \Sigma)^{-1} + P^T \Psi^{-1} P]^{-1}[(\tau \cdot \Sigma)^{-1} \Theta + P^T \Psi^{-1} q]$;
- Matrice di varianza – covarianza di BL: $[(\tau \cdot \Sigma)^{-1} + P^T \Psi^{-1} P]^{-1}$.

Mettendo a confronto i rendimenti impliciti con i rendimenti di Black e Litterman è possibile notare, come mostra la figura 61, che non variano soltanto i rendimenti dei titoli per i quali è stata formulata una view, ma variano leggermente anche i rendimenti degli altri titoli. Questo è spiegato dal fatto che tutti i titoli sono correlati tra loro perciò, quando si formula una view su un asset, indirettamente questa avrà conseguenze anche sugli altri. I rendimenti che subiscono la maggior variazione sono proprio quelli oggetto delle views assolute, infatti i titoli HSBA LN Equity, MC FP Equity e ALV GR Equity mostrano un rendimento maggiore rispetto ai corrispondenti rendimento impliciti. Allo stesso modo si comportano i titoli su cui sono state formulate le views relative, ad esempio, i titoli NOVOB DC Equity e ROG SW Equity mostrano entrambi un aumento del rendimento rispetto ai rendimenti

impliciti ma il primo titolo aumenta maggiormente rispetto al secondo, in relazione alla formulazione della view stessa.

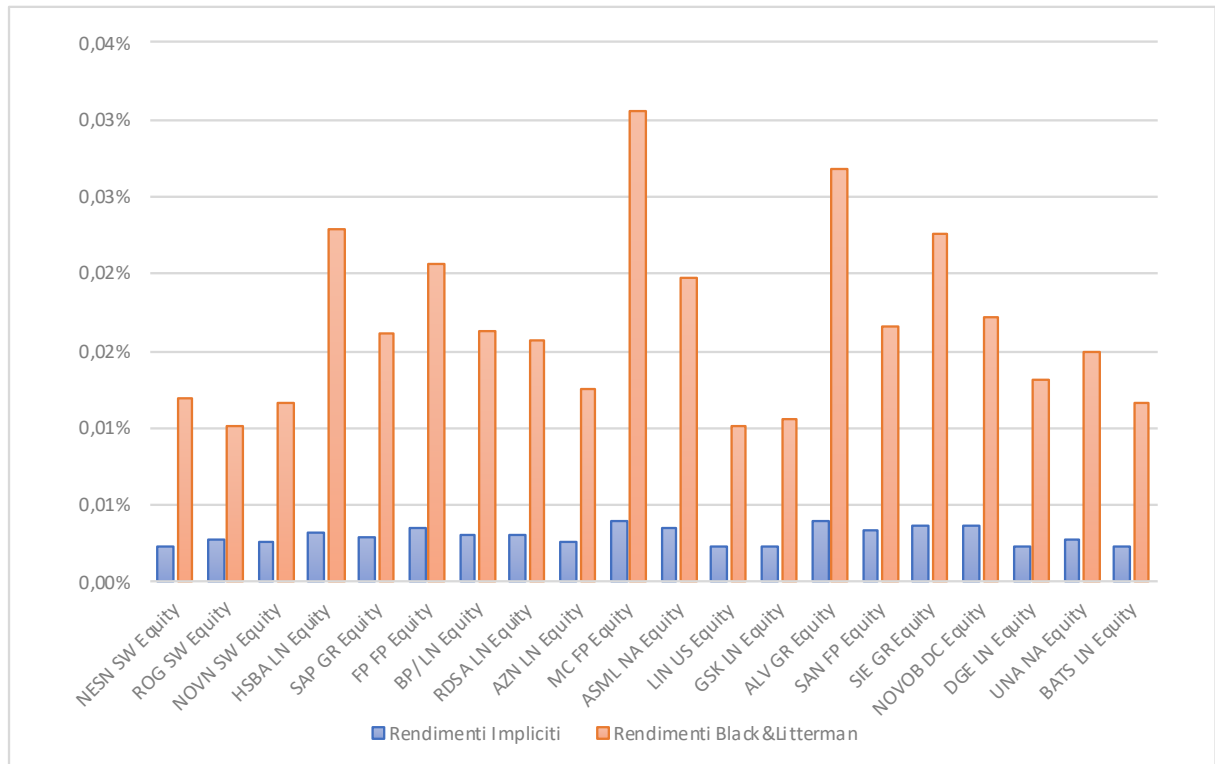


Figura 61. Confronto tra rendimenti impliciti e rendimenti di Black e Litterman

Per quanto riguarda la matrice di varianza – covarianza di Black e Litterman bisogna sottolineare che essa non si riferisce al valore atteso dei rendimenti ma alla sua stima e, di conseguenza, non può essere utilizzata nel processo di ottimizzazione. A tal proposito occorre rimodellare la matrice di varianza – covarianza aggiungendovi la matrice di varianza – covarianza storica:

$$V^* = V_{BL} + \Sigma$$

Codice del titolo	Deviazione Standard BL
NESN SW Equity	0,0047393
ROG SW Equity	0,0057146
NOVN SW Equity	0,0053706
HSBA LN Equity	0,0071969
SAP GR Equity	0,0067288
FP FP Equity	0,0068907
BP/ LN Equity	0,0071578
RDSA LN Equity	0,0066119
AZN LN Equity	0,0065380
MC FP Equity	0,0076710
ASML NA Equity	0,0084726
LIN US Equity	0,0067852
GSK LN Equity	0,0055065
ALV GR Equity	0,0081208
SAN FP Equity	0,0066761
SIE GR Equity	0,0077103
NOVOB DC Equity	0,0072129
DGE LN Equity	0,0052866
UNA NA Equity	0,0065426
BATS LN Equity	0,0062227

Tabella 16. Deviazioni standard rimodellate di Black e Litterman

Adesso si hanno tutti gli strumenti per plottare le frontiere efficienti e calcolare i portafogli ottimi in assenza e in presenza di vendite allo scoperto. Anche in questo caso, per definire il processo di ottimizzazione, è stata implementata la funzione *Portfolio* e per il calcolo delle allocazioni ottime sono state utilizzate le funzioni *estimateFrontierByReturn* ed *estimateMaxSharpeRatio*. Come nel modello di Markowitz, il rendimento atteso di portafoglio è stato fissato pari a 0,015451%.

Efficient Frontier

Mean of Portfolio Returns $\times 10^{-4}$

Standard Deviation of Portfolio Returns $\times 10^{-3}$

Key points on the Efficient Frontier:

- Minimum Variance Portfolio (Yellow Star): Standard Deviation $\approx 3.9 \times 10^{-3}$, Mean Return $\approx 1.55 \times 10^{-4}$.
- MC FP Equity (Red Dot): Standard Deviation $\approx 7.7 \times 10^{-3}$, Mean Return $\approx 3.05 \times 10^{-4}$.

Other Equity Portfolios (Cyan Dots):

- NESH SW Equity: Standard Deviation $\approx 4.7 \times 10^{-3}$, Mean Return $\approx 1.2 \times 10^{-4}$.
- DGE LN Equity: Standard Deviation $\approx 5.3 \times 10^{-3}$, Mean Return $\approx 1.35 \times 10^{-4}$.
- NOVN BW Equity: Standard Deviation $\approx 5.5 \times 10^{-3}$, Mean Return $\approx 1.15 \times 10^{-4}$.
- GSK LN Equity: Standard Deviation $\approx 5.5 \times 10^{-3}$, Mean Return $\approx 1.05 \times 10^{-4}$.
- ROG SW Equity: Standard Deviation $\approx 5.7 \times 10^{-3}$, Mean Return $\approx 1.0 \times 10^{-4}$.
- BATS LN Equity: Standard Deviation $\approx 6.2 \times 10^{-3}$, Mean Return $\approx 1.15 \times 10^{-4}$.
- UNA NA Equity: Standard Deviation $\approx 6.5 \times 10^{-3}$, Mean Return $\approx 1.5 \times 10^{-4}$.
- AZN LN Equity: Standard Deviation $\approx 6.5 \times 10^{-3}$, Mean Return $\approx 1.25 \times 10^{-4}$.
- LN US Equity: Standard Deviation $\approx 6.9 \times 10^{-3}$, Mean Return $\approx 1.0 \times 10^{-4}$.
- PP FP Equity: Standard Deviation $\approx 7.0 \times 10^{-3}$, Mean Return $\approx 2.05 \times 10^{-4}$.
- NOV OB DC Equity: Standard Deviation $\approx 7.2 \times 10^{-3}$, Mean Return $\approx 1.7 \times 10^{-4}$.
- BPY LN Equity: Standard Deviation $\approx 7.2 \times 10^{-3}$, Mean Return $\approx 1.65 \times 10^{-4}$.
- HBA LN Equity: Standard Deviation $\approx 7.3 \times 10^{-3}$, Mean Return $\approx 2.3 \times 10^{-4}$.
- SE GR Equity: Standard Deviation $\approx 7.7 \times 10^{-3}$, Mean Return $\approx 2.25 \times 10^{-4}$.
- ALV GR Equity: Standard Deviation $\approx 8.0 \times 10^{-3}$, Mean Return $\approx 2.65 \times 10^{-4}$.
- ASBL NA Equity: Standard Deviation $\approx 8.5 \times 10^{-3}$, Mean Return $\approx 1.95 \times 10^{-4}$.

Company	Percentage
NESTL SW Equity	22,38%
ROG SW Equity	0,00%
NOVON SW Equity	5,27%
HSBA LN Equity	9,57%
SAP GR Equity	6,84%
FP FP Equity	0,00%
BP/LN Equity	2,43%
RDSA LN Equity	0,00%
AZN LN Equity	1,31%
MC FP Equity	7,78%
ASML NA Equity	0,53%
LIN US Equity	7,18%
GSK LN Equity	8,64%
ALV GR Equity	0,19%
SAN FP Equity	0,00%
SIE GR Equity	0,00%
NOV OB DC Equity	12,84%
DGE LN Equity	9,41%
UVA NA Equity	1,32%
BATS LN Equity	4,32%

105

Nella Figura 64 è possibile vedere la frontiera efficiente ottenuta applicando la teoria di Black e Litterman con vincoli di non negatività e massimizzando l'indice di Sharpe. In giallo è stato evidenziato il portafoglio ottimo che restituisce un rendimento pari a 0,024047% a fronte di una deviazione standard del 0,542371%. Nella figura 65 è possibile vedere la relativa composizione del portafoglio ottimo.

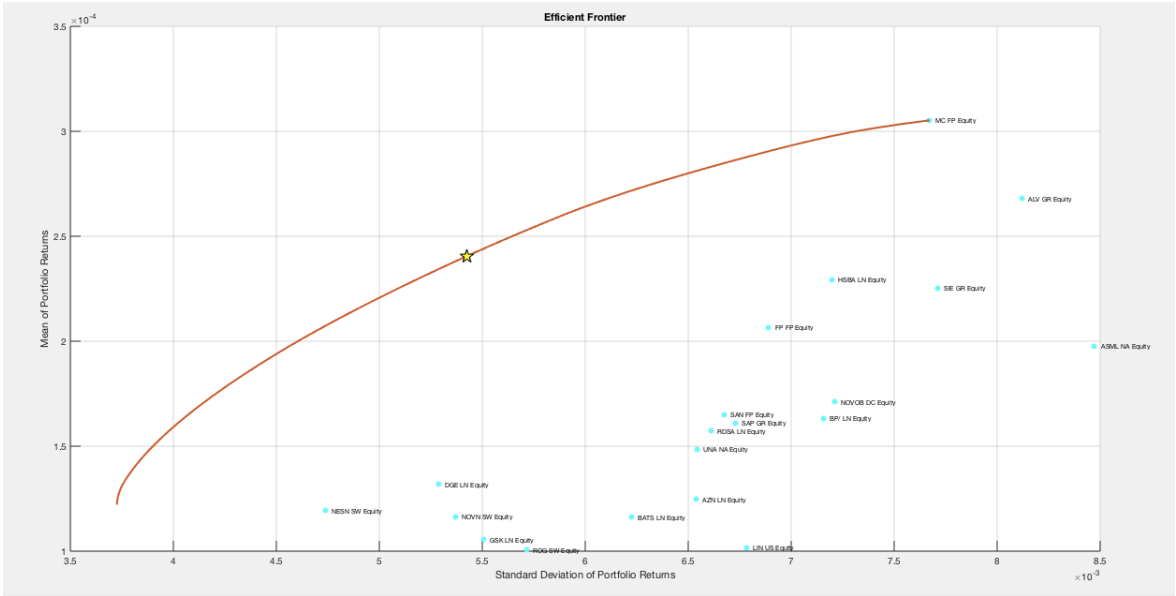


Figura 64. Frontiera efficiente di Black e Litterman in assenza di vendite allo scoperto massimizzando l'indice di Sharpe

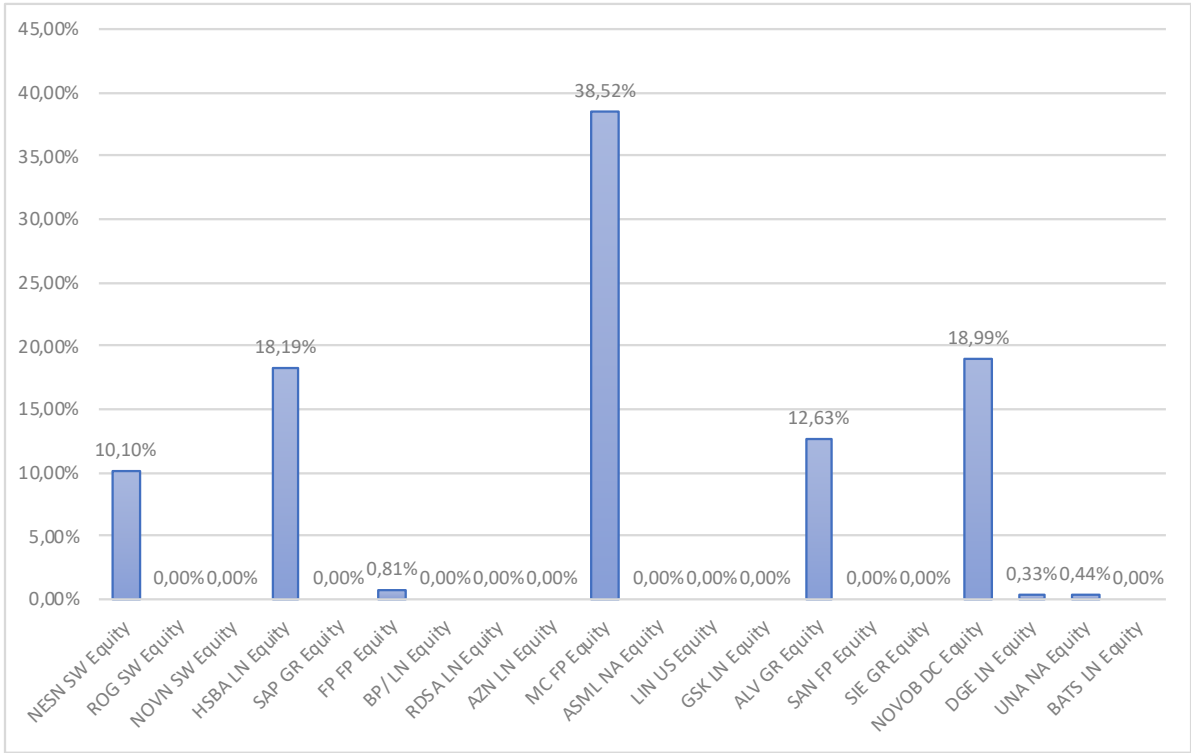


Figura 65. Composizione ottima del portafoglio in assenza di vendite allo scoperto massimizzando l'indice di Sharpe

Nella Figura 66 è possibile vedere la frontiera efficiente ottenuta applicando la teoria di Black e Litterman senza vincoli di non negatività e fissando un rendimento target. In giallo è stato evidenziato il portafoglio ottimo che restituisce un rendimento pari a 0,015451% a fronte di una deviazione standard del 0,394165%. Nella figura 67 è possibile vedere la relativa composizione del portafoglio ottimo.

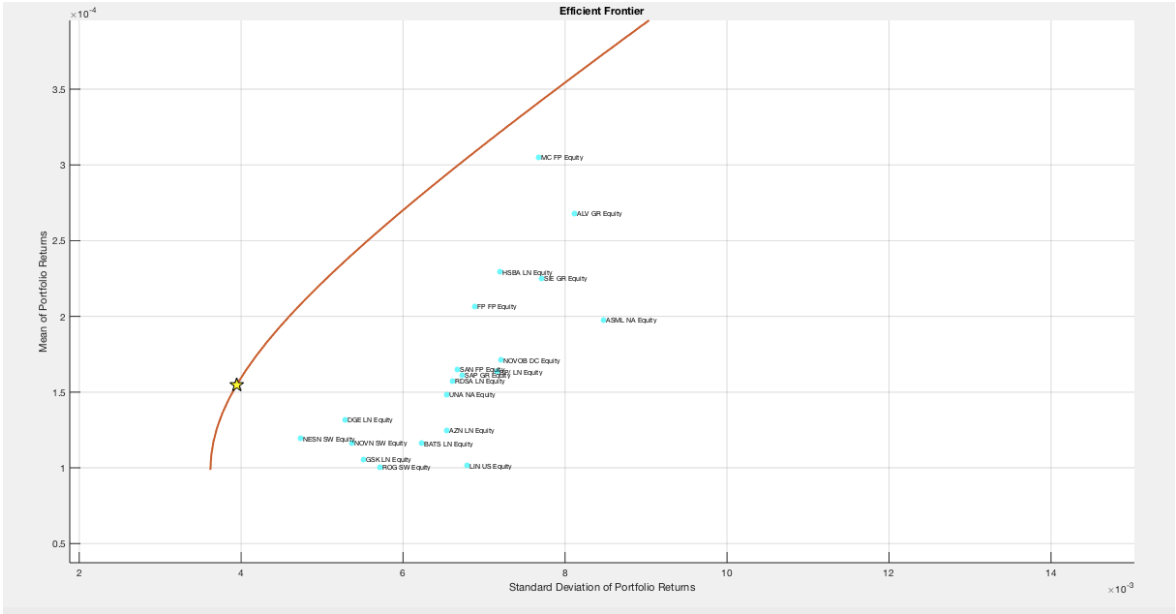


Figura 66. Frontiera efficiente di Black e Litterman in presenza di vendite allo scoperto fissando un rendimento target

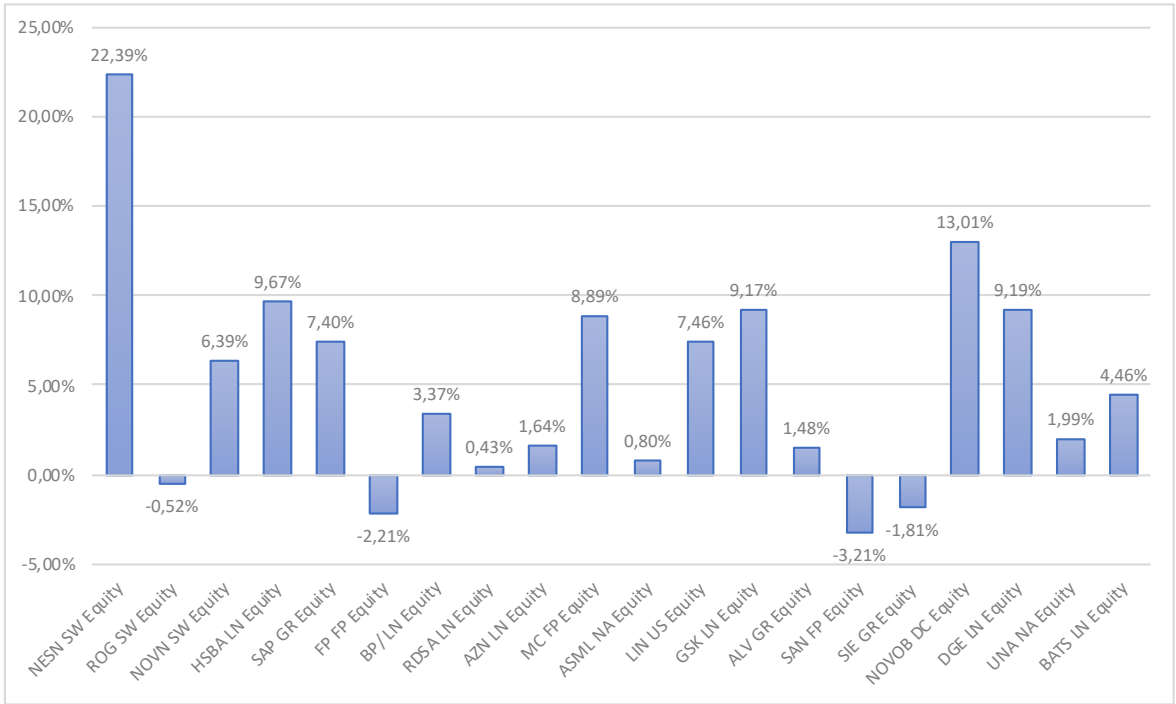


Figura 67. Composizione ottima del portafoglio in presenza di vendite allo scoperto fissando un rendimento target

Nella Figura 68 è possibile vedere la frontiera efficiente ottenuta applicando la teoria di Black e Litterman senza vincoli di non negatività e massimizzando l'indice di Sharpe. In giallo è stato evidenziato il portafoglio ottimo che restituisce un rendimento pari a 0,026939% a fronte di una deviazione standard del 0,598267%. Nella figura 69 è possibile vedere la relativa composizione del portafoglio ottimo.

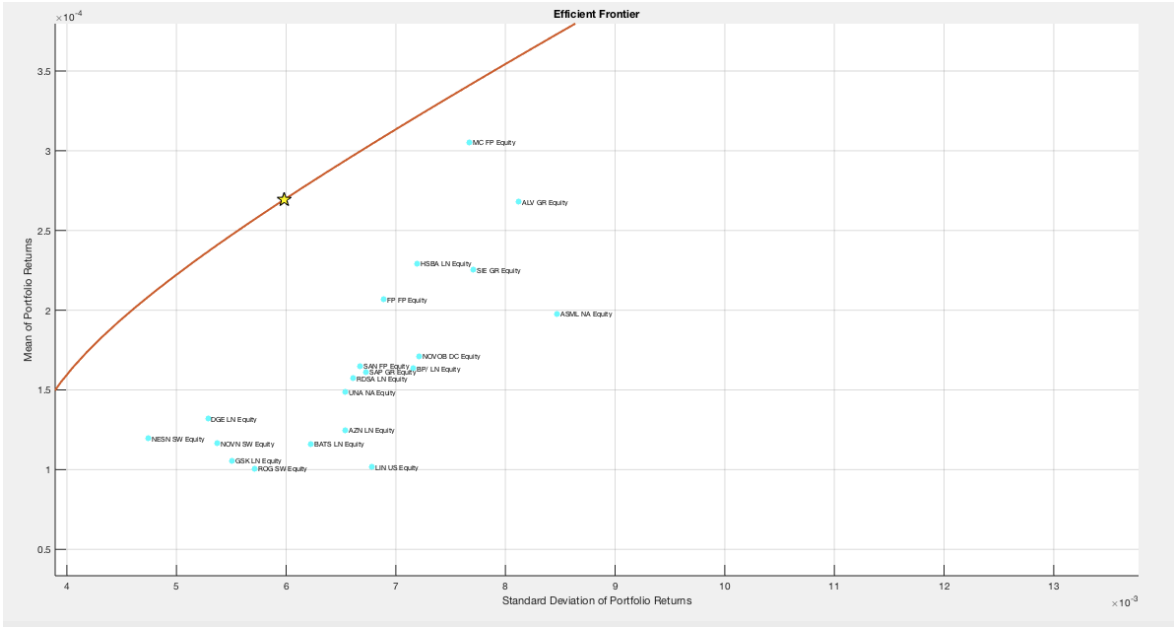


Figura 68. Frontiera efficiente di Black e Litterman in presenza di vendite allo scoperto massimizzando l'indice di Sharpe

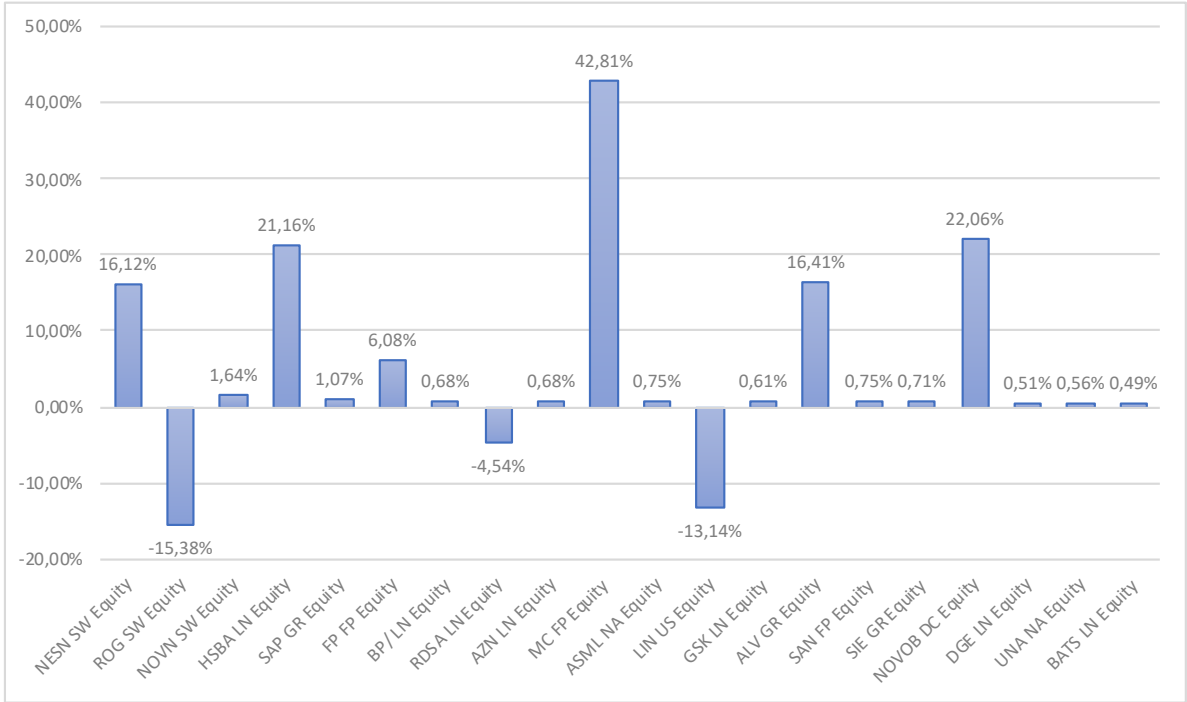


Figura 69. Composizione ottima del portafoglio in presenza di vendite allo scoperto massimizzando l'indice di Sharpe

Analizzando le composizioni dei portafogli si può notare che non si modificano soltanto le quote degli asset interessati dalle view, ma anche le quote di tutti gli altri. Calcolando gli indici di Sharpe dei portafogli ottenuti può essere confermato ciò che è stato detto per il modello di Markowitz:

- il portafoglio che restituisce performance migliori è quello in cui viene massimizzato l'indice di Sharpe in presenza di vendite allo scoperto;
- il portafoglio che restituisce performance peggiori è quello in cui viene fissato un rendimento target in assenza di vendite allo scoperto;
- la frontiera efficiente in assenza di vendite allo scoperto è dominata dalla frontiera efficiente in presenza di vendite allo scoperto;
- a prescindere dalla presenza o meno di vendite allo scoperto, massimizzando l'indice di Sharpe tra i portafogli presenti sulla frontiera efficiente si ottiene sicuramente un portafoglio dalle prestazioni migliori rispetto a quello che si otterrebbe fissando un rendimento target.

	Performance di Sharpe
Assenza di vendite allo scoperto fissando un rendimento target	0,03913749
Assenza di vendita allo scoperto massimizzando l'indice di Sharpe	0,04433707
Presenza di vendite allo scoperto fissando un rendimento target	0,03919839
Presenza di vendite allo scoperto massimizzando l'indice di Sharpe	0,04502762

Tabella 17. Performance di Sharpe dei portafogli ottimi

Anche per il modello di Black e Litterman è stata studiata la composizione del portafoglio ottimo all'aumentare del rischio attraverso la funzione di Matlab *estimateFrontierByRisk* in assenza di vendite allo scoperto. Nella figura 70 si può vedere, come nel caso dei rendimenti impliciti, che il peso dei titoli risulta molto più bilanciato contrariamente a ciò che accadeva nel modello di Markowitz.

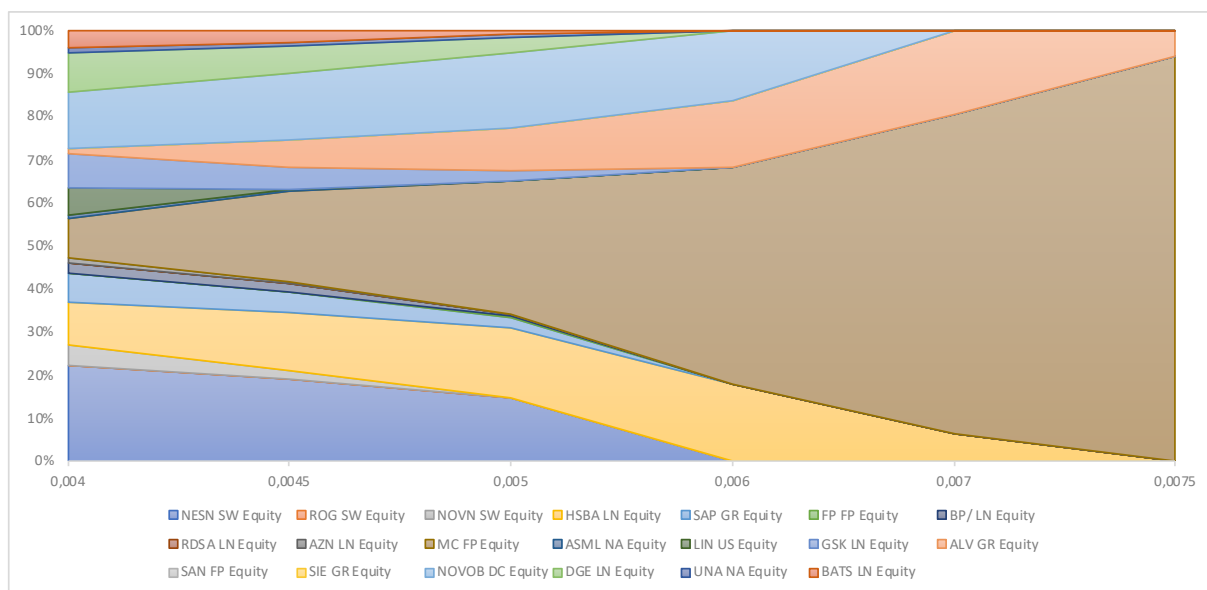


Figura 70. Variazione della composizione di portafoglio all'aumentare del rischio utilizzando i rendimenti di Black e Litterman in assenza di vendite allo scoperto

Per comprendere meglio i risultati sono state calcolate le performance di Sharpe, in presenza di vendite allo scoperto, dei modelli finanziari implementando la funzione *estimateMaxSharpeRatio* di Matlab. Ricordando che l'indice di Sharpe indica la quantità di rendimento in più per ogni punto di rischio assunto, il portafoglio dalle performance migliori risulta essere quello calcolato utilizzando i rendimenti storici:

Modello finanziario	Rendimento atteso	Deviazione Standard	Indice di Sharpe
Ottimizzazione con i rendimenti storici	0,00066669	0,0084	0,079367
Ottimizzazione con i rendimenti impliciti	0,00003122	0,000936	0,033323
Ottimizzazione con i rendimenti di Black e Litterman	0,00026939	0,005982	0,045027

Tabella 18. Performance di Sharpe dei modelli finanziari

Dai risultati si direbbe, dunque, che il modello di Markowitz sia da preferire, ma questo non significa che il modello di Black e Litterman perda di validità dato che, comunque, l'indice non tiene conto di molti aspetti tra cui la capitalizzazione dei vari titoli all'interno del mercato, le previsioni dell'investitore e la fiducia che ripone in esse. Inoltre, analizzando la tabella 18, si può osservare che il rischio del portafoglio calcolato con il modello di Black e Litterman è inferiore rispetto a quello del portafoglio calcolato prendendo i rendimenti

storici, a significare che con il modello di Black e Litterman si ottengono dei rendimenti attesi più stabili, concentrati intorno al proprio valore medio.

Conclusioni

L'analisi così conclusa aveva lo scopo di analizzare differenti modelli di allocazione di portafoglio, applicati al medesimo caso reale, con il fine di metterli a confronto cogliendone punti di forza e di debolezza. Inizialmente è stata analizzata l'allocazione ottimale di portafoglio derivata dal modello di Markowitz considerato il punto di partenza della finanza moderna. Nel modello l'investitore ha il compito di effettuare eventuali aggiornamenti delle serie storiche, derivate da cambiamenti delle quotazioni, ottenendo, in questo modo, una configurazione del portafoglio ottimo diversa dalla precedente. Il modello, strettamente legato ai dati in input, è risultato instabile registrando delle composizioni troppo sbilanciate nei soli titoli con elevato rendimento atteso, bassa volatilità e correlazioni negative; inoltre, si è osservato che, al variare dei dati in input, la composizione ottimale varia in maniera consistente, inducendo l'investitore a dover monitorare costantemente il portafoglio per effettuare delle riallocazioni, ottenendo pressoché lo stesso rendimento atteso ma aumentando i costi di transazione. Con l'ispessimento dei mercati nacque la necessità, da parte degli investitori, di utilizzare dei modelli che consentissero di allocare in maniera efficiente il capitale introducendo delle opinioni personali. Per tali ragioni, Black e Litterman implementarono un modello di allocazione di portafoglio in grado di unire l'equilibrio di mercato, derivato dal Capital Asset Pricing Model, con le personali opinioni dell'investitore sul futuro andamento dell'economia. Il modello terrà conto di entrambe le fonti di informazione generando portafogli che si avvicinano all'equilibrio di mercato o alle views in relazione alla fiducia che l'investitore ha riposto in esse. In un secondo momento è stato quindi applicato questo secondo modello, ed i risultati ottenuti dall'applicazione del caso reale portano ad affermare la supremazia del modello di Markowitz a causa del fatto che l'indice di Sharpe, estrapolato dalla sua allocazione ottimale, risulta superiore a quello di Black e Litterman. Nonostante l'indice di Sharpe risulti essere un ottimo indicatore per valutare la performance di un portafoglio, risulta essere comunque sbagliato affermare che per questo motivo il portafoglio ottenuto con il modello di Black e Litterman sia meno efficiente in quanto non si tiene conto di molti aspetti; inoltre, utilizzando il portafoglio ottenuto dal modello di Markowitz, significa anche accettare tutti i limiti che lo caratterizzano rendendo di fatto il portafoglio poco affidabile. La principale difficoltà del modello di Black e Litterman risiede nella determinazione del parametro τ e della matrice di confidenza a causa della loro soggettività e dall'assenza di una metodologia di calcolo universale. Nonostante le difficoltà nell'implementazione, la forza del modello risiede

nell'inserire come input le views personali dell'investitore sugli asset che comporranno il portafoglio ottimo, views che non sono necessariamente riferite a tutti gli asset ma anche soltanto ad una parte di essi ottenendo così portafogli solidi in termini di rendimento atteso e rischio.

Appendice

5.1 Modello di Markowitz in assenza di vendite allo scoperto fissando un rendimento target

```
clear all
clc
close all

p = Portfolio('AssetList',symbol,'RiskFreeRate', 0);
p = estimateAssetMoments(p, LogR);
A = [];
b = [];
AEq = ones(1,20);
BEq = 1;
ub = ones(1,20);
lb = zeros(1,20);
p = Portfolio('AssetMean', m, 'AssetCovar', cov,
'AInequality', A, 'bInequality', b, 'AEquality', AEq,
'bEquality', BEq, 'LowerBound', lb, 'UpperBound', ub);
muP = 1.545063884980350e-04;
w1 = estimateFrontierByReturn(p, muP);
[risk1, ret1] = estimatePortMoments(p, w1);
f = figure;
tabgp = uitabgroup(f);
tab1 = uitab(tabgp,'Title','Efficient Frontier Plot');
ax = axes('Parent', tab1);
[m, cov] = getAssetMoments(p);
scatter(ax,sqrt(diag(cov)), m,'oc','filled');
xlabel('Risk')
ylabel('Expected Return')
text(sqrt(diag(cov))+0.00003,m,symbol,'FontSize',7);
hold on;
[Risk, Ret] = plotFrontier(p,100);
plot(risk1,ret1,'p','markers',15,'MarkerEdgeColor','k',
'MarkerFaceColor','y');
```

```
hold off
```

5.2 Modello di Markowitz in assenza di vendite allo scoperto massimizzando l'indice di Sharpe

```
clear all
```

```
clc
```

```
close all
```

```
p = Portfolio('AssetList',symbol,'RiskFreeRate', 0);
```

```
p = estimateAssetMoments(p, LogR);
```

```
A = [];
```

```
b = [];
```

```
AEq = ones(1,20);
```

```
BEq = 1;
```

```
ub = ones(1,20);
```

```
lb = zeros(1,20);
```

```
p = Portfolio('AssetMean', m, 'AssetCovar', cov,  
'AInequality', A, 'bInequality', b, 'AEquality', AEq,  
'bEquality', BEq, 'LowerBound', lb, 'UpperBound', ub);
```

```
w2 = estimateMaxSharpeRatio(p);
```

```
[risk2, ret2] = estimatePortMoments(p, w2);
```

```
f = figure;
```

```
tabgp = uitabgroup(f);
```

```
tab1 = uitab(tabgp, 'Title', 'Efficient Frontier Plot');
```

```
ax = axes('Parent', tab1);
```

```
[m, cov] = getAssetMoments(p);
```

```
scatter(ax, sqrt(diag(cov)), m, 'oc', 'filled');
```

```
xlabel('Risk')
```

```
ylabel('Expected Return')
```

```
text(sqrt(diag(cov))+0.00003, m, symbol, 'FontSize', 7);
```

```
hold on;
```

```
[Risk, Ret] = plotFrontier(p, 100);
```

```

plot(risk2,ret2,'p','markers',15,'MarkerEdgeColor','k',
'MarkerFaceColor','y');
hold off

```

5.3 Modello di Markowitz in presenza di vendite allo scoperto fissando un rendimento target

```

clear all
clc
close all

p = Portfolio('AssetList',symbol,'RiskFreeRate', 0);
p = estimateAssetMoments(p, LogR);
A = [];
b = [];
AEq = ones(1,20);
BEq = 1;
ub = ones(1,20);
lb = -1*ones(1,20);
p = Portfolio('AssetMean', m, 'AssetCovar', cov,
'AInequality', A, 'bInequality', b, 'AEquality', AEq,
'bEquality', BEq, 'LowerBound', lb, 'UpperBound', ub);
muP = 1.545063884980350e-04;
w3 = estimateFrontierByReturn(p, muP);
[risk3, ret3] = estimatePortMoments(p, w3);
f = figure;
tabgp = uitabgroup(f);
tab1 = uitab(tabgp,'Title','Efficient Frontier Plot');
ax = axes('Parent', tab1);
[m, cov] = getAssetMoments(p);
scatter(ax,sqrt(diag(cov)), m,'oc','filled');
xlabel('Risk')
ylabel('Expected Return')
text(sqrt(diag(cov))+0.00003,m,symbol,'FontSize',7);
hold on;

```

```
[Risk, Ret] = plotFrontier(p,100);
plot(risk3,ret3,'p','markers',15,'MarkerEdgeColor','k',
'MarkerFaceColor','y');
hold off
```

5.4 Modello di Markowitz in presenza di vendite allo scoperto massimizzando l'indice di Sharpe

```
clear all
clc
close all

p = Portfolio('AssetList',symbol,'RiskFreeRate', 0);
p = estimateAssetMoments(p, LogR);
A = [];
b = [];
AEq = ones(1,20);
BEq = 1;
ub = ones(1,20);
lb = -1*ones(1,20);
p = Portfolio('AssetMean', m, 'AssetCovar', cov,
'AInequality', A, 'bInequality', b, 'AEquality', AEq,
'bEquality', BEq, 'LowerBound', lb, 'UpperBound', ub);
w4 = estimateMaxSharpeRatio(p);
[risk4, ret4] = estimatePortMoments(p, w4);
f = figure;
tabgp = uitabgroup(f);
tab1 = uitab(tabgp,'Title','Efficient Frontier Plot');
ax = axes('Parent', tab1);
[m, cov] = getAssetMoments(p);
scatter(ax,sqrt(diag(cov)), m,'oc','filled');
xlabel('Risk')
ylabel('Expected Return')
text(sqrt(diag(cov))+0.00003,m,symbol,'FontSize',7);
hold on;
```

```
[Risk, Ret] = plotFrontier(p,100);
plot(risk4,ret4,'p','markers',15,'MarkerEdgeColor','k',
'MarkerFaceColor','y');
hold off
```

5.5 Rendimenti impliciti

```
clear all
clc
close all

p = Portfolio('AssetList',symbol,'RiskFreeRate', 0);
shpr = mean(Benchmark)/std(Benchmark);
LogRCov = cov(LogR);
delta = shpr/sqrt(Wm'*LogRCov*Wm);
Wm=Wm';
ri = delta*LogRCov*Wm;
tau = 0.05;
LogRCovTau = LogRCov*tau;
A = [];
b = [];
AEq = ones(1,20);
BEq = 1;
ub = ones(1,20);
lb = zeros(1,20);
p = Portfolio('AssetMean', ri, 'AssetCovar', LogRCovTau,
'AInequality', A, 'bInequality', b, 'AEquality', AEq,
'bEquality', BEq, 'LowerBound', lb, 'UpperBound', ub);
[risk, ret] = estimatePortMoments(p, Wm);
f = figure;
tabgp = uitabgroup(f);
tab1 = uitab(tabgp,'Title','Efficient Frontier Plot');
ax = axes('Parent', tab1);
[ri, LogRCovTau] = getAssetMoments(p);
scatter(ax,sqrt(diag(LogRCovTau)), ri,'oc','filled');
```

```

xlabel('Risk')
ylabel('Expected Return')
text(sqrt(diag(LogRCovTau))+0.00003,ri,symbol,'FontSize',7);
hold on;
[Risk, Ret] = plotFrontier(p,100);
plot(risk,ret,'p','markers',15,'MarkerEdgeColor','k',
'MarkerFaceColor','y');
hold off

```

5.6 Modello di Black e Litterman in assenza di vendita alla scoperto fissando un rendimento target

```

clear all
clc
close all

shpr = mean(Benchmark)/std(Benchmark);
LogRCov = cov(LogR);
delta = shpr/sqrt(Wm'*LogRCov*Wm);
ri = delta*LogRCov*Wm;
tau = 0.05;
LogRCovTau = LogRCov*tau;
omega = diag(P*LogRCovTau*P');
mu_bl = (P'*(omega\P) + inv(LogRCovTau)) \ ( LogRCovTau\ri +
P'*(omega\Q));
cov_mu = inv(P'*(omega\P) + inv(LogRCovTau));
varcov = LogRCov + cov_mu;
p = Portfolio('AssetList',symbol,'RiskFreeRate', 0);
A = [];
b = [];
AEq = ones(1,20);
BEq = 1;
ub = ones(1,20);
lb = zeros(1,20);

```

```

p = Portfolio('AssetMean', mu_bl, 'AssetCovar', varcov,
'AInequality', A, 'bInequality', b, 'AEquality', AEq,
'bEquality', BEq, 'LowerBound', lb, 'UpperBound', ub);
muP = 1.545063884980350e-04;
w1 = estimateFrontierByReturn(p, muP);
[risk1, ret1] = estimatePortMoments(p, w1);
f = figure;
tabgp = uitabgroup(f);
tab1 = uitab(tabgp, 'Title', 'Efficient Frontier Plot');
ax = axes('Parent', tab1);
[mu_bl, varcov] = getAssetMoments(p);
scatter(ax, sqrt(diag(varcov)), mu_bl, 'oc', 'filled');
xlabel('Risk')
ylabel('Expected Return')
text(sqrt(diag(varcov))+0.00003, mu_bl, symbol, 'FontSize', 7);
hold on;
[Risk, Ret] = plotFrontier(p, 100);
plot(risk1, ret1, 'p', 'markers', 15, 'MarkerEdgeColor', 'k',
'MarkerFaceColor', 'y');
hold off

```

5.7 Modello di Black e Litterman in assenza di vendite allo scoperto massimizzando l'indice di Sharpe

```

clear all
clc
close all

shpr = mean(Benchmark)/std(Benchmark);
LogRCov = cov(LogR);
delta = shpr/sqrt(Wm'*LogRCov*Wm);
ri = delta*LogRCov*Wm;
tau = 0.05;
LogRCovTau = LogRCov*tau;
omega = diag(P*LogRCovTau*P');

```



```

mu_bl = (P'*(omega\P) + inv(LogRCovTau)) \ ( LogRCovTau\ri +
P'*(omega\Q));
cov_mu = inv(P'*(omega\P) + inv(LogRCovTau));
varcov = LogRCov + cov_mu;
p = Portfolio('AssetList',symbol,'RiskFreeRate', 0);
A = [];
b = [];
AEq = ones(1,20);
BEq = 1;
ub = ones(1,20);
lb = zeros(1,20);
p = Portfolio('AssetMean', mu_bl, 'AssetCovar', varcov,
'AInequality', A, 'bInequality', b, 'AEquality', AEq,
'bEquality', BEq, 'LowerBound', lb, 'UpperBound', ub);
w2 = estimateMaxSharpeRatio(p);
[risk2, ret2] = estimatePortMoments(p, w2);
f = figure;
tabgp = uitabgroup(f);
tab1 = uitab(tabgp,'Title','Efficient Frontier Plot');
ax = axes('Parent', tab1);
[mu_bl, varcov] = getAssetMoments(p);
scatter(ax,sqrt(diag(varcov)), mu_bl,'oc','filled');
xlabel('Risk')
ylabel('Expected Return')
text(sqrt(diag(varcov))+0.00003,mu_bl,symbol,'FontSize',7);
hold on;
[Risk, Ret] = plotFrontier(p,100);
plot(risk2,ret2,'p','markers',15,'MarkerEdgeColor','k',
'MarkerFaceColor','y');
hold off

```

5.8 Modello di Black e Litterman in presenza di vendite allo scoperto fissando un rendimento target

clear all

```

clc
close all

shpr = mean(Benchmark)/std(Benchmark);
LogRCov = cov(LogR);
delta = shpr/sqrt(Wm'*LogRCov*Wm);
ri = delta*LogRCov*Wm;
tau = 0.05;
LogRCovTau = LogRCov*tau;
omega = diag(P*LogRCovTau*P');
mu_bl = (P'*(omega\P) + inv(LogRCovTau)) \ ( LogRCovTau\ri +
P'*(omega\Q));
cov_mu = inv(P'*(omega\P) + inv(LogRCovTau));
varcov = LogRCov + cov_mu;
p = Portfolio('AssetList',symbol,'RiskFreeRate', 0);
A = [];
b = [];
AEq = ones(1,20);
BEq = 1;
ub = ones(1,20);
lb = -1*ones(1,20);
p = Portfolio('AssetMean', mu_bl, 'AssetCovar', varcov,
'AInequality', A, 'bInequality', b, 'AEquality', AEq,
'bEquality', BEq, 'LowerBound', lb, 'UpperBound', ub);
muP = 1.545063884980350e-04;
w3 = estimateFrontierByReturn(p, muP);
[risk3, ret3] = estimatePortMoments(p, w3);
f = figure;
tabgp = uitabgroup(f);
tab1 = uitab(tabgp,'Title','Efficient Frontier Plot');
ax = axes('Parent', tab1);
[mu_bl, varcov] = getAssetMoments(p);
scatter(ax,sqrt(diag(varcov)), mu_bl,'oc','filled');
xlabel('Risk')
ylabel('Expected Return')

```

```

text(sqrt(diag(varcov))+0.00003,mu_bl,symbol,'FontSize',7);
hold on;
[Risk, Ret] = plotFrontier(p,100);
plot(risk3,ret3,'p','markers',15,'MarkerEdgeColor','k',
'MarkerFaceColor','y');
hold off

```

5.9 Modello di Black e Litterman in presenza di vendite allo scoperto massimizzando l'indice di Sharpe

```

clear all
clc
close all

shpr = mean(Benchmark)/std(Benchmark);
LogRCov = cov(LogR);
delta = shpr/sqrt(Wm'*LogRCov*Wm);
ri = delta*LogRCov*Wm;
tau = 0.05;
LogRCovTau = LogRCov*tau;
omega = diag(P*LogRCovTau*P');
mu_bl = (P'*(omega\P) + inv(LogRCovTau)) \ ( LogRCovTau\ri +
P'*(omega\Q));
cov_mu = inv(P'*(omega\P) + inv(LogRCovTau));
varcov = LogRCov + cov_mu;
p = Portfolio('AssetList',symbol,'RiskFreeRate', 0);
A = [];
b = [];
AEq = ones(1,20);
BEq = 1;
ub = ones(1,20);
lb = -1*ones(1,20);
p = Portfolio('AssetMean', mu_bl, 'AssetCovar', varcov,
'AInequality', A, 'bInequality', b, 'AEquality', AEq,
'bEquality', BEq, 'LowerBound', lb, 'UpperBound', ub);

```

```

w4=estimateMaxSharpeRatio(p);
[risk4, ret4]=estimatePortMoments(p, w4);
f = figure;
tabgp = uitabgroup(f);
tab1 = uitab(tabgp, 'Title', 'Efficient Frontier Plot');
ax = axes('Parent', tab1);
[mu_bl, varcov] = getAssetMoments(p);
scatter(ax,sqrt(diag(varcov)), mu_bl,'oc','filled');
xlabel('Risk')
ylabel('Expected Return')
text(sqrt(diag(varcov))+0.00003,mu_bl,symbol,'FontSize',7);
hold on;
[Risk, Ret] = plotFrontier(p,100);
plot(risk4,ret4,'p','markers',15,'MarkerEdgeColor','k',
'MarkerFaceColor','y');
hold off

```

Bibliografia

Black F., Litterman R. (1991), “Asset Allocation: combining investor views with market equilibrium”, *The Journal of Fixed Income*, September, pp. 7-18

Black F., Litterman R. (1992), “Global Portfolio Optimization”, *Financial Analysts Journal*, Vol. 48, No. 5, pp. 28-43.

Drobetz W. (2001), “How to avoid the pitfalls in portfolio optimization? Putting the Black-Litterman approach at work”, *Financial Markets and Portfolio Management*, Vol. 15, No. 1, pp. 59-75.

He G., Litterman R. (1999), “The intuition behind Black-Litterman model portfolios”, Working Paper, www.blacklitterman.org.

Idzorek T. M. (2005), “A step-by-step guide to the Black and Litterman model”, Working Paper, www.blacklitterman.org.

Marco Micocci, Giovanni Batista Masala (2012), “Manuale di matematica finanziaria. Metodi e strumenti quantitativi per il risk management”, Carocci Editore.

Markowitz H. (1952), “Portfolio selection”, *The Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1.

Meucci A. (2010), “The Black-Litterman approach: original model and extensions”.

Sharpe W.F. (1963), “A simplified model for portfolio analysis”. *Management Science*, Vol.9, No. 2.

Sharpe W.F. (1964), “Capital asset price: a theory of market equilibrium under conditions of risk”. *The Journal of Finance*, Vol.9, No. 3.

Sitografia

www.wikipedia.org

www.ilsole24ore.com

www.performancetrading.it

www.investing.com

www.morningstar.it

www.borsaitaliana.it

www.stoxx.com

www.blacklitterman.org

it.mathwork.com

www.finance.yahoo.com