

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

Gli Oggetti Frattali: dalla Geometria alla Musica



Relatori

prof. Valeria Chiadò Piat
prof. Luisella Caire

Candidato

Maria Antonia Cupi

Anno Accademico 2019-2020

A mio padre.

Ringraziamenti

Prima di procedere con la trattazione, vorrei dedicare alcune righe a coloro che mi hanno aiutato e sostenuto in questo percorso formativo sia dal punto di vista personale che professionale.

Ringrazio le mie relatrici, le professoresse Valeria Chiadò Piat e Luisella Caire, che mi hanno seguito nello studio, nella realizzazione degli algoritmi e nella stesura dell'elaborato. Le ringrazio nuovamente per avermi dato la possibilità di poter presentare il mio lavoro durante la conferenza "Chi sa cantare, sa contare... Musica, Creatività e Canto" svoltasi lo scorso 13 Gennaio.

Ringrazio i miei genitori che mi hanno sostenuto in ogni mia scelta e che mi hanno dato la possibilità di coltivare ogni mia passione. Senza di loro e senza i loro insegnamenti non sarei qui.

Ringrazio il mio fidanzato Francesco che in questi anni mi è stato sempre accanto soprattutto nei momenti più difficili portando tanta pazienza.

Infine vorrei dedicare questo traguardo anche a me stessa, perché nonostante le difficoltà e il poco tempo a disposizione sono comunque riuscita a raggiungerlo.

Introduzione

Prima del 1975, anno in cui Benoit Mandelbrot introdusse per la prima volta il termine *fractal*, i matematici fino ad allora avevano ignorato tutti quegli oggetti che non erano sufficientemente regolari e che non riuscivano a spiegare con le tecniche della geometria classica. Questi oggetti, definiti *formless*, cioè privi di forma, furono il punto di partenza di una nuova branca della geometria, detta geometria frattale.

Il termine *fractal*, che deriva dal latino *fractum*, (participio perfetto del verbo *frango* che in italiano si può tradurre con i verbi rompere, infrangere, spezzare, ...) è usato per indicare degli oggetti irregolari e frammentari, la cui dimensione può non essere intera. Sono inoltre caratterizzati dall'essere *auto-simili*¹, cioè a qualunque risoluzione si osserva l'insieme, le sue caratteristiche rimangono immutate.

Mandelbrot definì nel suo libro "*The Fractal Geometry of Nature*" gli oggetti frattali come gli insiemi con dimensione di Hausdorff strettamente maggiore della dimensione topologica (costruita sulla misura di Lebesgue). Tuttavia non è stata concordata tra i matematici una definizione formale di "Frattale", ma sono state condivise le proprietà che determinano l'appartenenza a questa famiglia: essere autosimile e possedere una dimensione di Hausdorff anche non intera.

In questa tesi verranno approfondite diverse definizioni di dimensione (Cap. 1), tra cui la dimensione di Hausdorff, partendo dai concetti di teoria della misura. Inoltre il calcolo di queste dimensioni verrà applicato ad alcuni frattali noti in letteratura.

L'esempio di insieme frattale più conosciuto è la Polvere di Cantor. Questo insieme si costruisce partendo dall'intervallo unitario $I = [0, 1]$ ed effettuando delle cancellazioni iterative. In particolare, al passo iniziale si ha

$$E_0 = I = [0, 1]$$

¹A questa tipologia di insiemi è stato dedicato il capitolo 2, in cui vengono spiegate nel dettaglio le proprietà di questi insiemi e la relazione con le dimensioni

L'intervallo E_0 viene suddiviso in tre segmenti di uguale lunghezza, per cui $E_0 = [0, \frac{1}{3}] \cup (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Si costruisce l'insieme E_1 eliminando il segmento centrale, che in questo caso è $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. In questo modo E_1 è l'unione di due intervalli, $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$

$$E_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

Analogamente a quanto fatto per E_1 , per costruire E_2 bisogna suddividere ogni intervallo di E_1 in tre parti uguali e rimuovere il segmento centrale, in modo da ottenere

$$E_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

Questi passaggi possono essere iterati, quindi si costruisce l'insieme E_k suddividendo ogni intervallo di E_{k-1} in tre segmenti uguali ed eliminando quello centrale. In tal modo E_k sarà costituito da 2^k intervalli ognuno di lunghezza 3^{-k} .

La polvere di Cantor F è l'insieme che contiene tutti i punti presenti in E_k per ogni $k \in \mathbb{N}$. In formule,

$$F = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k \quad (1)$$

Riprendendo la definizione di oggetti frattali come insiemi irregolari, autosimili e la cui dimensione non è un intero, non si può non constatare che la Polvere di Cantor appartenga a questa famiglia. Esso è un insieme autosimile, infatti basti guardare E_k con $k = 1$. In questo caso si hanno due intervalli $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$, che sono geometricamente simili a F , ma scalati di un fattore $\frac{1}{3}$. Analogamente gli intervalli di E_2 , ma questa volta sono scalati di un fattore $\frac{1}{9}$ e così fino a E_k che sarà simile a F , ma scalato di un fattore $\frac{1}{3^k}$. Inoltre, la dimensione topologica di F è 0 perché è l'unione di punti isolati, mentre la dimensione di Hausdorff² è $\frac{\log 2}{\log 3} = 0.631$. Quindi anche riprendendo la definizione data da Mandelbrot, la Polvere di Cantor risulta un insieme frattale. In generale, esistono due diversi tipi di frattali che si distinguono per il loro processo di costruzione. Si hanno

- **frattali deterministici**, per i quali la costruzione avviene attraverso trasformazioni deterministiche, come nel caso della Polvere di Cantor
- **frattali stocastici**, per i quali nel processo di costruzione è coinvolto anche qualche parametro casuale

I metodi per costruire dei frattali sono molteplici, ma in questa tesi sono stati utilizzati i seguenti:

²La dimensione di Hausdorff della Polvere di Cantor verrà calcolata nella sezione 1.6

- **Sostituzione**

Si parte da una figura di base e si sostituisce parte di essa con un'altra figura, questo procedimento viene poi iterato. Un esempio di costruzione per sostituzione è la Polvere di Cantor.

- **Successioni ricorsive**

Con il termine *successione ricorsiva*, in matematica si intende una collezione di elementi $\{a_n\}$ (che possono essere numeri, insiemi, funzioni, ...), dove l'elemento n -esimo è costruito a partire da uno o più elementi che lo precedono. Un esempio di successione ricorsiva è la sequenza di Fibonacci

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \forall n > 1 \end{cases} \quad (2)$$

Per la costruzione di frattali tramite successioni iterative, si parte da un punto z_0 e si calcolano le coordinate del punto successivo, utilizzando una funzione ricorsiva. Questo metodo viene utilizzato per la generazione degli insiemi di Julia e di Mandelbrot.

I modelli frattali trovano applicazione, oltre che in ambito matematico, in altre scienze come la biologia, la zoologia, la meteorologia e anche in ambito artistico.

Dopo aver presentato gli oggetti frattali teoricamente, in questa tesi sono stati applicati i modelli frattali alla composizione musicale. Da qui la creazione di un algoritmo che partendo dalla generazione di insiemi frattali, con i metodi appena descritti, crea una melodia musicale per ognuno di essi. Questo algoritmo, diviso in due parti, una per la costruzione degli insiemi frattali e l'altra per la generazione della melodia, verrà descritto dettagliatamente nel capitolo 4.

Struttura della tesi

La tesi è strutturata come segue:

- Nel capitolo 1 vengono introdotti i concetti base di teoria della misura, propedeutici per la definizione della misura di Hausdorff. Inoltre vengono definite la dimensione di Hausdorff, box-counting e packing. Per lo studio di queste nozioni sono stati utilizzati i libri [1], [2], [3], [4].
- Nel capitolo 2 vengono definiti e descritti gli insiemi autosimili e vengono approfondite le proprietà connesse al calcolo delle dimensioni. Per questo capitolo sono stati utilizzati i libri [5], [3], [2].

- Nel capitolo 3 vengono descritti l'insieme di Julia e l'insieme di Mandelbrot. Lo studio di questi insiemi è stato effettuato prendendo come riferimento il libro [2].
- Nel capitolo 4 viene presentata l'applicazione musicale sviluppata.

Indice

Ringraziamenti	iii
Introduzione	v
1 Dimensione per oggetti frattali	1
1.1 Cenni di teoria della misura	1
1.2 Misura di Hausdorff	8
1.3 Dimensione di Hausdorff	11
1.4 Dimensione box-counting(o Minkowski)	14
1.4.1 Proprietà della dimensione box-counting	17
1.4.2 Relazione con la dimensione di Hausdorff	19
1.4.3 Dimensione box-counting modificata	20
1.5 Misura e dimensione packing	21
1.5.1 Relazione con le altre dimensioni	22
1.6 Dimensioni della Polvere di Cantor	24
2 Insiemi auto-simili	27
2.1 Autosimilarità	27
2.1.1 La metrica di Hausdorff	29
2.2 Funzioni di similarità e connessione con le dimensioni	33
3 Insiemi di Julia	37
3.1 Costruzione insieme di Julia	37
3.2 Definizione originale	40
3.3 Equivalenza tra le definizioni di $J(f)$ e $J_0(f)$	41
3.4 Insieme di Mandelbrot	45
3.5 Dimensione dell'insieme di Julia e di Mandelbrot	47
4 Applicazione musicale	49
4.1 Generazione di oggetti frattali	49
4.1.1 Merletto di von Koch	49

4.1.2	Insieme di Mandelbrot	52
4.1.3	Insieme di Julia	54
4.1.4	Fibonacci word	55
4.1.5	Alberi Frattali	57
4.2	Algoritmo per la generazione di una melodia	58
4.2.1	Riproduzione della melodia - Libreria JFugue	60
Conclusioni		63

Elenco delle figure

1.1	Grafico di $\mathcal{H}^s(F)$ al variare di s . La figura è tratta dal libro [2].	12
2.1	Rappresentazione grafica della generazione del fiocco di neve di von Koch. La figura è disponibile in rete	28
3.1	Esempio di insieme di Julia	38
3.2	Esempio di insieme di Mandelbrot	46
4.1	Rappresentazione grafica dell'algoritmo	50
4.2	Grafico dell'insieme di Mandelbrot generato con l'algoritmo impostando come numero massimo di iterazioni 100 e partendo da $z = 0$	53
4.3	Grafico dell'insieme di Julia generato dall'algoritmo ponendo come costante c il numero complesso $-0.7 + 0.27015i$	54
4.4	Visualizzazione dell'algoritmo di costruzione del frattale di Fibonacci. La figura è tratta dall'articolo [6].	57
4.5	Albero frattale generato dall'algoritmo	58
4.6	Rappresentazione dei punti nella lista P dell'esempio 4.1	59

Capitolo 1

Dimensione per oggetti frattali

I metodi della geometria classica non si adattano all'uso degli oggetti frattali, pertanto è necessario introdurre e utilizzare dei metodi alternativi. Lo strumento principale della geometria frattale è la dimensione, in tutte le sue forme. Prima di spiegare le nozioni di dimensioni per gli oggetti frattali è necessario introdurre alcuni concetti di teoria della misura.

1.1 Cenni di teoria della misura

La teoria della misura è fondata sul concetto di misura, che può essere pensata come un metodo per assegnare una grandezza numerica agli insiemi, in modo che se un insieme è partizionato in un numero finito o numerabile di parti, la grandezza di questo corrisponda alla somma delle grandezze dei singoli oggetti che lo compongono.

Dato un insieme E si denota con $\mathcal{P}(E)$ l'insieme delle parti di E , cioè tutti i suoi sottoinsiemi.

Una famiglia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$ è detta σ -algebra se $E \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{F}$ è chiusa rispetto al complementare e all'unione finita o numerabile.

Se E è uno spazio topologico, si denota con $\mathcal{B}$ la σ -algebra di Borel di E , che è la più piccola σ -algebra che contiene tutti gli aperti di E . Nel caso in cui $E = \mathbb{R}^n$ si possono considerare diverse topologie in modo da creare famiglie diverse di Boreliani. In generale quando si parla di σ -algebra di Borel su $\mathbb{R}^n$, senza ulteriori indicazioni, si considera come topologia quella euclidea; di conseguenza i Boreliani $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ sono tutti gli aperti generati dal prodotto di intervalli aperti.

Definizione 1.1. Una funzione $\mu: \mathcal{P}(E) \rightarrow [0, +\infty]$ è detta **misura esterna** se

$$\mu(\emptyset) = 0 \quad (1.1)$$

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \quad \forall A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i \quad (\mu \text{ è sub-additiva}) \quad \forall A, A_i \in \mathcal{P}(E) \quad (1.2)$$

La misura si dice finita se $\mu(E) < +\infty$.

Da questa definizione è possibile ricavare diverse proprietà molto utili in seguito:

1. se $A \subseteq B$ allora $\mu(A) \leq \mu(B)$
2. se $B \subset A$ allora A può essere scritto come unione disgiunta, cioè

$$A = B \cup (A \setminus B)$$

quindi se A e B sono entrambi insiemi di Borel si ha

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$$

3. Data una successione crescente di insiemi di Borel $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ allora

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

Dimostrazione.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \dots$$

E' unione di insiemi disgiunti, pertanto

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \mu(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} (\mu(A_{i+1}) - \mu(A_i)) \\ &= \mu(A_1) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k (\mu(A_{i+1}) - \mu(A_i)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) \end{aligned}$$

□

4. Se $\{\mu_j\}_{j \in J}$ è una famiglia arbitraria di misure esterne, allora $\sup_{j \in J} \mu_j = \mu$ è una misura esterna.

Dimostrazione. Per verificare che μ sia una misura esterna, bisogna dimostrare che le condizioni (1.1) e (1.2) siano entrambe soddisfatte. Prima verifichiamo che la misura esterna di un insieme vuoto sia nulla. Dato che μ_j è una misura esterna si ha che $\mu_j(\emptyset) = 0 \forall j$, di conseguenza anche l'estremo superiore di tutte le misure della famiglia sarà uguale a zero.

Inoltre per definizione di estremo superiore $\mu_j \leq \mu$, allora

$$\mu_j(A) \leq \sum_j \mu_j(A_i) \leq \sum \mu(A_i) \quad \forall i$$

, allora applicando l'estremo inferiore si ottiene che

$$\mu(A) = \sup_j \mu_j(A) \leq \sum_i \mu(A_i)$$

□

Più in generale, dato $\delta > 0$, gli A_δ sono dei boreliani che crescono al decrescere di δ ,

$$A_{\delta'} \subset A_\delta \text{ per } 0 < \delta < \delta'$$

allora

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mu(A_\delta) = \mu\left(\bigcup_{\delta > 0} A_\delta\right)$$

Definizione 1.2. Insieme misurabile secondo Carathéodory

Se μ è una misura esterna, allora un insieme $A \subseteq E$ è detto μ -misurabile se

$$\mu(F) = \mu(F \cap A) + \mu(F \setminus A) \quad \forall F \subseteq E \quad (1.3)$$

Da ciò segue il seguente teorema.

Teorema 1.3. *Se μ è una misura esterna, allora la collezione degli insiemi μ -misurabili è una σ -algebra.*

Esempio 1 Sia X un insieme non vuoto. Sia $x_0 \in X$ un punto dell'insieme. Si può definire la seguente funzione $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ tale che

$$\mu(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{se } x_0 \notin E \end{cases} \quad E \in \mathcal{P}(X)$$

. Si può dimostrare che tale funzione è una misura esterna.

Dimostrazione. Per dimostrare che μ è una misura esterna bisogna far vedere che le condizioni (1.1) e (1.2) siano soddisfatte.

1. Sia $A = \emptyset$, allora sicuramente $x_0 \notin A$ perché A non contiene elementi, allora dalla definizione della funzione μ , si ha che $\mu(\emptyset) = 0$.
2. Sia $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$. Se $x_0 \in A$, allora x_0 è contenuto in almeno un A_i , quindi

$$\mu(A) \leq \mu(A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

Se $x_0 \notin A$, allora $\mu(A) = 0$ e quindi dal momento che μ è non negativa allora sicuramente vale $0 = \mu(A) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$. $\square$

Esempio 2 - Misura che conta i punti Sia $X \neq \emptyset$. Si definisce per ogni $E \subseteq X$, la seguente funzione:

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } E = \emptyset \\ n & \text{se } \text{card}(E) = n \\ +\infty & \text{se } E \text{ è infinito} \end{cases}$$

Si dimostra che μ così definita è una misura esterna.

Dimostrazione. Perché μ sia una misura esterna è necessario che vengano soddisfatte le condizioni (1.1) e (1.2). 1. Se $E = \emptyset$ allora per definizione $\mu(E) = 0$.

2. Se $E \subseteq \bigcup_{i=1}^n E_i$, allora $|E|$ è minore o al più uguale alla cardinalità dell'unione. Inoltre

$$|\bigcup_{i=1}^n E_i| \leq \sum_{i=1}^n |E_i|$$

per via delle eventuali intersezioni.

Pertanto si ha che $|E| \leq |\bigcup_{i=1}^n E_i| \leq \sum_{i=1}^n |E_i|$, quindi

$$\mu(E) \leq \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$$

$\square$

Esempio 3 Sia $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$

$$\varphi(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } E \text{ limitato} \\ +\infty & \text{se } E \text{ illimitato} \end{cases}$$

Si può dimostrare che φ è una misura esterna.

Dimostrazione. Verifica delle condizioni per cui φ potrebbe essere una misura esterna. E' bene ricordare che un insieme E si definisce limitato se $\text{diam}(E) < +\infty$, altrimenti è illimitato.

- (1.1) : Se $E = \emptyset$ allora $\text{diam}(E) = 0$, quindi $\varphi(\emptyset) = 0$
- (1.2) : Se $E \subseteq \bigcup_{i=1}^n E_i$, per la disuguaglianza triangolare si ha che

$$\text{diam}(E) \leq \sum_{i=1}^n \text{diam}(E_i)$$

$$\text{per cui } \varphi(E) \leq \sum_{i=1}^n \varphi(E_i)$$

□

Esempio 4 Sia E un insieme non numerabile.

Si definisce $\varphi : \mathcal{P}(E) \rightarrow [0, +\infty]$. Dato $A \in \mathcal{P}(E)$,

$$\varphi(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } \text{card}(A) \leq \text{card}(\mathbb{N}) \\ 1 & \text{se } \text{card}(A) > \text{card}(\mathbb{N}) \end{cases}$$

Si dimostra che φ definita come sopra è una misura esterna.

Dimostrazione. φ è una misura esterna se le condizioni (1.1) e (1.2) sono soddisfatte.

Sia $A = \emptyset$, allora la sua cardinalità è 0, quindi $\text{card}(A) \leq \text{card}(\mathbb{N})$, allora $\varphi(A) = 0$.

Sia $A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$.

$$\text{card}(A) \leq \text{card}(\cup_i A_i) \leq \sum_i \text{card}(A_i)$$

Se $\text{card}(A) \leq \text{card}(\mathbb{N})$, allora la condizione (1.2) è vera per qualunque cardinalità degli A_i .

Se $\text{card}(A) > \text{card}(\mathbb{N})$, sicuramente almeno un A_i ha cardinalità superiore alla cardinalità dei naturali, e quindi anche in questo caso la condizione (1.2) è verificata. □

Si può far vedere anche che gli insiemi misurabili di φ sono tutti gli insiemi finiti o numerabili.

Dimostrazione. Dato A insieme finito o numerabile, si dimostra che esso è un insieme misurabile secondo la definizione (1.3).

Se F è un insieme finito o numerabile:

$$F \cap A \text{ è finito o numerabile}$$

$$F \setminus A \text{ è finito o numerabile}$$

$$\text{Allora } \varphi(F) = 0 + 0 = 0.$$

Se F non è numerabile:

$$F \cap A \text{ è finito o numerabile}$$

$$F \setminus A \text{ è non numerabile}$$

$$\text{Allora } \varphi(F) = 0 + 1 = 1$$

□

Esempio 5 Sia (E, d) uno spazio metrico completo.

Si definisce $\varphi: \mathcal{P}(E) \rightarrow [0, +\infty]$. Dato $A \in \mathcal{P}(E)$,

$$\varphi(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } A \text{ di prima categoria} \\ 1 & \text{se } A \text{ di seconda categoria} \end{cases}$$

La funzione φ così definita è una misura esterna.

Dimostrazione. Un insieme $A \subset E$ è di prima categoria se è unione numerabile di insiemi A_j "nowhere dense", cioè $\text{int}(\overline{A_j}) = \emptyset$ (la parte interna della chiusura di ogni A_j è vuota). Se un insieme non è di prima categoria, allora è di seconda categoria. Per dimostrare che φ sia una misura esterna, devono essere soddisfatte le condizioni (1.1) e (1.2). Sia $A = \emptyset$, allora A è di prima categoria, per ciò la condizione (1.1) è verificata. Sia $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$.

Se A è di prima categoria:

$$0 = \varphi(A) \leq \sum_{i=1}^n \varphi(A_i)$$

Se A è di seconda categoria, almeno un A_i , che indichiamo con A_j , non è nowhere dense. Allora A_j ha parte interna non nulla, di conseguenza non può essere definito dall'unione numerabile di insiemi nowhere dense, pertanto A_j è di seconda categoria. Da qui deriva che anche la condizione (1.2) è soddisfatta. □

Esempio 6 - Costruzione di una misura esterna Sia E un insieme non vuoto, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$ tale che $\emptyset \in \mathcal{F}$.

Sia $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ una funzione che soddisfi il vincolo $\varphi(\emptyset) = 0$.

Per ogni $A \subset E$ si definisce

$$\mu_\varphi(A) = \begin{cases} \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \varphi(F_i) : F_i \in \mathcal{F}, \cup F_i \supset A \right\} & \text{se } \exists \text{ un ricoprimento per } A \\ +\infty & \text{se } \nexists \text{ un ricoprimento per } A \end{cases}$$

Si dimostra che μ_φ è una misura esterna.

Dimostrazione. Sappiamo che $\emptyset \subseteq F_i \forall F_i \in \mathcal{F}$. Pertanto quando si prende l'estremo inferiore si ottiene che $\mu_\varphi(\emptyset) = 0$. Ciò dimostra che la condizione (1.1) è soddisfatta.

Sia $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$. Si supponga che ogni A_i abbia un ricoprimento, cioè $A_i \subseteq \bigcup_j F_j^i$, allora

$$\mu_\varphi(A_i) = \inf \left\{ \sum_j \varphi(F_j^i) : F_j^i \in \mathcal{F} \right\}$$

Quindi A è ricoperto dall'unione dei ricoprimenti degli A_i .

$$\mu(A) = \inf \left\{ \sum_i \sum_j \varphi(F_j^i) \right\} \leq \sum_i \inf \left\{ \sum_j \varphi(F_j^i) \right\} = \sum_i \mu_\varphi(A_i)$$

Pertanto anche la condizione (1.2) è soddisfatta. $\square$

Si può dimostrare anche che $\mu_\varphi \leq \varphi$, cioè $\mu_\varphi(A) \leq \varphi(A) \forall A \in \mathcal{F}$.

Dimostrazione. $\{F_i\}$ è un ricoprimento di A , dal momento che φ è una funzione non negativa si ha che

$$\mu_\varphi(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \varphi(F_i) : F_i \in \mathcal{F}, \cup F_i \supset A \right\} \leq \varphi(A)$$

$\square$

Proposizione 1.4. In più, se φ è sub-additiva su $\mathcal{F}$, allora μ_φ è un'estensione di φ , cioè $\mu_\varphi(A) = \varphi(A) \forall A \in \mathcal{F}$. E se ν è estensione di φ allora $\nu \leq \mu_\varphi$.

Dimostrazione. Per dimostrare che μ_φ è un'estensione rimane solo da far vedere che $\mu_\varphi \geq \varphi$ su $\mathcal{F}$.

Sia $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$ con $A, A_i \in \mathcal{F}$, per la sub-additività di φ :

$$\varphi(A) \leq \sum_{i=1}^n \varphi(A_i) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \varphi(F_j^i)$$

Poiché $(A_i)_i$ è un arbitrario ricoprimento di A si ottiene che

$$\varphi(A) \leq \inf \left\{ \sum \varphi(A_i) : A \subset \bigcup_i A_i \right\} = \mu_\varphi(A)$$

Rimane da dimostrare che se ν è estensione di φ allora $\nu \leq \mu_\varphi$. E' supposto che ν sia una misura esterna, estensione di φ , pertanto $\nu(A) = \varphi(A) \forall A \in \mathcal{F}$. Quindi mettendo insieme queste ipotesi per ogni ricoprimento $(F_i)_i$ di A si ottiene:

$$\nu(A) \leq \sum_{i=1}^n \nu(F_i) = \sum_{i=1}^n \varphi(F_i)$$

Applicando l'estremo inferiore ad ambo i membri si dimostra la tesi.

$$\nu(A) = \inf(\nu(A)) \leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \varphi(F_i) \right\} = \mu(A)$$

□

Questo esempio è fondamentale, come si vedrà in seguito, per la costruzione di misure esterne; in particolare nel caso di questa tesi verrà costruita nella prossima sezione la misura di Hausdorff sui sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$. Essa si ottiene scegliendo come funzione φ il diametro.

1.2 Misura di Hausdorff

Per comprendere al meglio gli aspetti matematici degli oggetti frattali è necessario avere familiarità con la misura e la dimensione di Hausdorff. Questa sezione ha quindi lo scopo di fornire la definizione di misura di Hausdorff e spiegarne le proprietà fondamentali, in particolare per gli insiemi di $\mathbb{R}^n$, oggetti su cui ci concentreremo da qui in avanti.

Si riprende il concetto di diametro e di δ -ricoprimento di un insieme, nozioni fondamentali per la spiegazione della misura di Hausdorff.

Definizione 1.5. Sia (X, d) uno spazio metrico e U un sottoinsieme di X non vuoto, il **diametro** di U è definito come

$$|U| = \sup \{ d(x, y) : x, y \in U \} \quad (1.4)$$

la più grande distanza tra due elementi di U .

Definizione 1.6. Se $\{U_i\}$ è una collezione numerabile (o finita) di insiemi il cui diametro è non superiore a δ , e tale collezione ricopre $F \subset \mathbb{R}^n$, cioè

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \quad \text{con } 0 \leq |U_i| \leq \delta \quad \forall i$$

allora $\{U_i\}$ è detto δ -ricoprimento di F .

Dopo aver richiamato i concetti fondamentali, possiamo definire la misura di Hausdorff.

Un metodo classico per il calcolo dell'area di una figura piana consiste nell'approssimarla con una collezione di piccoli quadrati e calcolarne l'area sommando quella di tutti i quadratini.

Un'idea analoga è stata proposta da Hausdorff nel 1919. Egli considerò un sottoinsieme F di $\mathbb{R}^n$, un δ -ricoprimento di F (analogo della collezione dei quadratini) e al posto di calcolare l'area di ogni elemento del ricoprimento pensò di calcolarne il diametro elevato a un numero non negativo s . In tal modo ottenne una stima della misura di F . Perché fosse indipendente dal ricoprimento, prese l'estremo inferiore delle stime su tutti i possibili ricoprimenti di diametro δ . Così arrivò alla seguente definizione formale.

Definizione 1.7. Sia F un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ ed s un numero non negativo. $\forall \delta > 0$ si definisce la seguente quantità

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ è un } \delta\text{-ricoprimento di } F \right\} \quad (1.5)$$

Si può dimostrare che $\mathcal{H}_\delta^s$ è una misura esterna.

Dimostrazione. Facendo riferimento all'esempio 6 del paragrafo precedente, prendiamo come φ la seguente funzione

$$\varphi(A) = \begin{cases} |A|^s & \text{se } |A| < \delta \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In questo modo è facile vedere che $\mu_\varphi = \mathcal{H}_\delta^s$. □

Al decrescere di δ , la classe dei possibili δ -ricoprimenti si riduce, allora l'estremo inferiore cresce e tende al suo valore limite quando $\delta \rightarrow 0$.

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(F) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(F) \quad (1.6)$$

Questo limite esiste $\forall F$ di $\mathbb{R}^n$ e viene chiamato **misura di Hausdorff s-dimensionale** di F . Anche $\mathcal{H}^s$ è una misura esterna perché è l'estremo superiore di misure esterne ($\mathcal{H}_\delta^s$).

La misura di Hausdorff generalizza l'idea classica di lunghezza, area e volume della geometria classica, come si può vedere dai prossimi esempi.

Esempio 1.8. Se $s = 0$ $\mathcal{H}^s$ coincide con la misura che conta.

Dimostrazione. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, per definizione

$$\mathcal{H}_\delta^0(E) = \inf \left\{ \sum_i |U_i|^0 : E \subseteq \bigcup_i U_i \right\}$$

dove

$$|A|^0 = \begin{cases} 0 & \text{se } A = \emptyset \\ 1 & \text{se } A \neq \emptyset \text{ e } \text{diam}(A) < \delta \\ +\infty & \text{se } \text{diam}(A) \geq \delta \end{cases}$$

Se E è un insieme finito $\mathcal{H}_\delta^0(E) = \text{card}(E)$ per δ piccolo. Se E è un insieme infinito possiamo scegliere E_n formato da n elementi di E e δ abbastanza piccolo in modo che $\mathcal{H}_\delta^0(E_n) = |E_n| = n$. Ma per definizione $\mathcal{H}^0(E) \geq \mathcal{H}_\delta^0(E) \quad \forall \delta > 0$. Quindi $\forall n \exists \delta$ tale che

$$\mathcal{H}^0(E) \geq \mathcal{H}_\delta^0(E) \geq n \quad \forall n \exists \delta$$

Allora $\mathcal{H}^0(E) = +\infty$ se E è infinito. □

Esempio 1.9. Sia $A = [a, b]$ un intervallo in $\mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{H}^1(A) = b - a$$

Dimostrazione.

$$\mathcal{H}_\delta^1(A) = \inf \left\{ \sum_i |U_i| : \bigcup_i U_i \supset A \text{ e } \{U_i\} \text{ è un } \delta\text{-ricoprimento di } A \right\}$$

Si può maggiorare nel seguente modo il diametro dell'intervallo A

$$b - a = |A| \leq \inf \left\{ \sum |U_i| \right\} \leq b - a + 2\delta$$

La prima disuguaglianza si ottiene richiamando la misura esterna di Lebesgue su $\mathbb{R}$, che quantifica la lunghezza di un intervallo e applicando la seconda parte della proposizione 1.4, cioè che la misura esterna $\mathcal{H}^1 \geq \nu$ per ogni ν misura esterna su $\mathbb{R}$. Passando al limite per $\delta \rightarrow 0^+$ si ottiene applicando il teorema del confronto

$$\mathcal{H}^1(A) = b - a$$

□

Questi esempi possono essere generalizzati a tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$. Infatti preso F , Boreliano di $\mathbb{R}^n$, si ha

$$\mathcal{H}^n(F) = \frac{1}{c_n} \mathcal{L}^n(F)$$

dove c_n è il volume n -esimo della palla unitaria, cioè

$$c_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n} \left(\frac{n}{2} \right)! \quad \text{se } n \text{ è pari} \quad c_n = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n!} \left(\frac{n-1}{2} \right)! \quad \text{se } n \text{ è dispari}$$

In particolare per $n = 2, 3, \dots, m$ si ottengono i seguenti risultati

$$\mathcal{H}^2(F) = 4\pi \cdot \text{area}(F)$$

$$\mathcal{H}^3(F) = 6\pi \cdot \text{vol}(F)$$

...

$$\mathcal{H}^m(F) = \frac{1}{c_m} \mathcal{L}^m(F)$$

1.3 Dimensione di Hausdorff

Riprendendo la definizione di misura di Hausdorff (1.5) di un insieme $F \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ sia un } \delta\text{-ricoprimento di } F \right\}$$

E' facile osservare che preso qualunque $F \subset \mathbb{R}^n$ e $\delta < 1$, $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ sia una funzione non crescente all'aumentare di s .

Infatti siano t ed s due numeri strettamente positivi tali che $t > s$, sia $\{U_i\}$ un δ -ricoprimento di F con $\delta < 1$ si ha che

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t = \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \quad (1.7)$$

Dal momento che $\delta < 1$ anche $\delta^{t-s} < 1$ pertanto si sta effettuando una contrazione. Applicando l'estremo inferiore a entrambi i membri, la disuguaglianza rimane comunque valida.

$$\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F) \quad (1.8)$$

Passando al limite per $\delta \rightarrow 0^+$ e supponendo che $\mathcal{H}_\delta^s(F) < \infty$ sia finito, si ha che

$$\mathcal{H}^t = 0 \quad \text{per } t > s \quad (1.9)$$

Disegnando il grafico di $\mathcal{H}^s(F)$ al variare di s , come riportato in figura (1.3), ci si accorge dell'esistenza di un punto critico nel quale la funzione $\mathcal{H}^s(F)$ effettua un salto da ∞ a 0. Questo punto è detto **dimensione di Hausdorff** di F e si denota con $\dim_H F$. Può essere definita formalmente nel seguente modo:

Definizione 1.10. Sia $F \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce dimensione di Hausdorff la seguente quantità:

$$\dim_H F = \inf \left\{ s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0 \right\} = \sup \left\{ s : \mathcal{H}^s(F) = \infty \right\}^1 \quad (1.10)$$

¹Si suppone che l'estremo superiore dell'insieme vuoto sia 0.

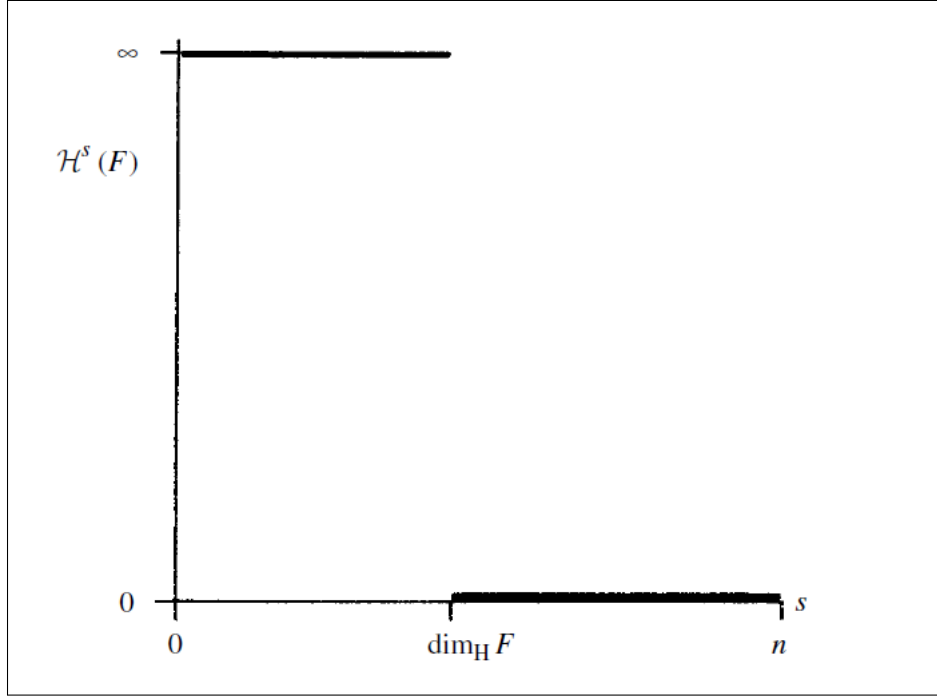


Figura 1.1: Grafico di $\mathcal{H}^s(F)$ al variare di s . La figura è tratta dal libro [2].

Da qui segue che

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{se } 0 \leq s < \dim_H F \\ 0 & \text{se } s > \dim_H F \end{cases} \quad (1.11)$$

Mentre se $s = \dim_H F$, $\mathcal{H}^s(F)$ può assumere un valore nel seguente intervallo $0 \leq \mathcal{H}^s(F) \leq \infty$. Per chiarire la definizione è utile introdurre un esempio semplice la cui dimensione è nota e calcolarne la dimensione di Hausdorff.

Esempio 1.11. Sia F un disco di raggio unitario in $\mathbb{R}^3$.

Riprendendo gli esempi della sezione precedente si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(F) &= \infty \\ \mathcal{H}^2(F) &= \frac{4}{\pi} \text{area}(F) = 4 \\ \mathcal{H}^3 &= \frac{6}{\pi} \text{vol}(F) = 0 \end{aligned}$$

Allora la $\dim_H F = 2$ perché

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{se } s < 2 \\ 0 & \text{se } s > 2 \end{cases}$$

Vengono elencate di seguito alcune proprietà di cui gode la dimensione di Hausdorff.

1. *Monotonia.*

Se $E \subseteq F$ allora $\dim_H E \leq \dim_H F$.

Dimostrazione. Sia $s = \dim_H F$ e $t = \dim_H E$. Dalla definizione (1.10)

$$t = \dim_H E = \inf\{r : \mathcal{H}^r(E) = 0\}$$

Se $E \subset F$ allora

$$\mathcal{H}^s(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \leq t \\ +\infty & \text{se } s > t \end{cases}$$

Supponiamo per assurdo che $s < t$. Si supponga che $\mathcal{H}^s(E) = +\infty$ per $s < t$ allora

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf \left\{ \sum [U_i]^s \right\}$$

dove $\{U_i\}$ è un δ -ricoprimento di E , ma allo stesso tempo essendo $E \subseteq F$ è parte di un δ -ricoprimento di F . Allora se $\mathcal{H}^s(E) = \infty$ anche $\mathcal{H}^s(F) = \infty$, ma questo è assurdo perché $\dim_H F = s$. $\square$

2. *Stabilità numerabile.*

Se $F_1, F_2, \dots$ è una successione numerabile di insiemi allora

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i \leq \infty} \left\{ \dim_H F_i \right\} \quad (1.12)$$

Dimostrazione. Dalla monotonia segue che $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \geq \dim_H F_j \forall j$.

D'altra parte se fosse $s = \sup \{\dim_H F_i\} > \dim_H F_i \forall i$ allora sicuramente $\mathcal{H}^s(F_i) = 0 \forall i$. Pertanto

$$\mathcal{H}^s(\cup F_i) = \inf \left\{ \sum_i \sum_j |U_j^i|^s : \bigcup_j U_j^i \supset \cup F_i \right\} \leq \sum_i \inf \left\{ \sum_j |U_j|^s : \bigcup_j U_j \supset \cup F_i \right\} = 0$$

Il che implica $\mathcal{H}^s(\cup F_i) = 0$ ottenendo così l'altra disuguaglianza che prova la tesi. $\square$

3. *Insiemi numerabili.*

Se F è un insieme numerabile allora $\dim_H F = 0$.

Dimostrazione. Si supponga che F_i sia un singolo punto, allora $\mathcal{H}^0(F_i) = 1$ e la $\dim_H F_i = 0$. Dal momento che F è un insieme numerabile, può essere visto come l'unione di infiniti punti, quindi $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, applicando la proprietà di stabilità numerabile si ha che $\dim_H F = 0$. $\square$

4. *Insiemi aperti.*

Se $F \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto, allora $\dim_H F = n$.

Dimostrazione. F è un aperto, pertanto contiene una palla con un volume n -dimensionale e applicando la monotonia si ottiene che $\dim_H F \geq n$, ma allo stesso tempo F è contenuto in una collezione numerabile di palle n -dimensionali, allora $\dim_H F \leq n$. Dunque $\dim_H F = n$. $\square$

1.4 Dimensione box-counting(o Minkowski)

Fuori dal contesto degli spazi vettoriali non c'è accordo su quali siano le proprietà che "caratterizzano" la nozione di dimensione, ma generalmente si richiede che soddisfi la proprietà di scalabilità, abbia una definizione naturale in particolari contesti e soddisfi alcune delle proprietà elencate per la dimensione di Hausdorff.

La dimensione box-counting è una delle dimensioni più utilizzate, dal momento che il suo calcolo è relativamente semplice. La sua definizione risale agli anni '30 ed è la seguente

Definizione 1.12. Sia $F \subset \mathbb{R}^n$ un insieme non vuoto e limitato. Sia $\mathcal{N}_\delta(F)$ il più piccolo numero di insiemi di diametro al massimo δ che ricoprono F . La **dimensione box-counting inferiore** e la **dimensione box-counting superiore** di F sono rispettivamente:

$$\underline{\dim}_B = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{N}_\delta(F)}{-\log \delta} \quad (1.13)$$

$$\overline{\dim}_B = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{N}_\delta(F)}{-\log \delta} \quad (1.14)$$

Se questi limiti coincidono, allora esiste la dimensione box-counting di F

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{N}_\delta(F)}{-\log \delta} \quad (1.15)$$

Si suppone che $\delta > 0$ sia sufficientemente piccolo da garantire che $-\log \delta$ sia strettamente positivo.

La definizione appena enunciata é una delle tante per la dimensione box-counting; la maggior parte di essa si differenziano per la scelta del ricoprimento, per esempio si potrebbe pensare di ricoprire l'insieme con dei cubi formando così una griglia, oppure con dei cubi di lato δ arbitrari, o ancora palle chiuse di raggio δ . Tuttavia esiste un'altra definizione che si discosta parecchio dalle precedenti che si basa sul concetto di δ -intorno di un insieme.

Definizione 1.13. Sia F un insieme e sia δ un numero non negativo, si definisce δ -intorno, F_δ , un insieme i cui punti distano da qualsiasi punto in F al più δ , quindi

$$F_\delta = \{x: \text{dist}(x, F) < \delta\}$$

Definizione equivalente Per valutare la dimensione dell'insieme F si considera il tasso con cui il volume n -dimensionale del δ -intorno di F , che denotiamo con V_δ , decade per $\delta \rightarrow 0$.

Per rendere l'idea conviene ambientarsi in uno spazio noto, si supponga quindi di essere in $\mathbb{R}^3$, se F è un punto la sua dimensione (nel senso classico del termine) sarà 0 ($s = 0$) e il volume di F_δ è pari a $\frac{4}{3}\pi\delta^3$. Se F è un segmento ($s = 1$) di lunghezza l , si ha che $\text{vol}(F_\delta) \simeq \pi l \delta^2$ per $\delta \rightarrow 0$; infine se F è una figura piana di area a , si avrà che il volume di $F_\delta \sim 2a\delta$.

Analizzando complessivamente i tre esempi in $\mathbb{R}^3$ con lo scopo di trovare un'espressione generale per il volume di F_δ , si nota che

$$\mathcal{L}^n(F_\delta) \sim \delta^{3-s}$$

dove s è la dimensione di F . In particolare,

$$\mathcal{L}^n(F_\delta) = c\delta^{3-s}$$

in cui c è definito come il *contenuto di Minkowski* di F e rappresenta una "misura" dell'insieme F .

Questa idea in $\mathbb{R}^3$ può essere estesa agli *oggetti frattali*.

Se $F \subset \mathbb{R}^n$ e per qualche $s > 0$ si ha

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(F_\delta)}{\delta^{n-s}} = \alpha \quad \text{con } 0 < \alpha < \infty$$

allora ha senso dire che F è un insieme s -dimensionale, mentre α è detto *contenuto s -dimensionale* di F . Da ciò segue una definizione equivalente di dimensione box-counting.

Definizione 1.14. Se $F \subset \mathbb{R}^n$, allora definiamo

$$\underline{\dim}_B F = n - \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{\log \delta} \quad (1.16)$$

$$\overline{\dim}_B F = n - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{\log \delta} \quad (1.17)$$

Si dimostra che questa definizione è equivalente alla prima.

Dimostrazione. - Se F può essere ricoperto da $\mathcal{N}_\delta(F)$ palle di raggio $\delta < 1$, allo stesso tempo F_δ può essere ricoperto da palle concentriche di raggio 2δ . Quindi

$$\mathcal{L}^n(F_\delta) \leq \mathcal{N}_\delta(F) c_n (2\delta)^n \quad (1.18)$$

dove c_n è il volume n -dimensionale della palla unitaria in $\mathbb{R}^n$. Prendendo i logaritmi e dividendo tutto per $-\log \delta$ si ottiene

$$\frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 2^n c_n + n \log \delta + \log \mathcal{N}_\delta(F)}{-\log \delta} = \frac{\log 2^n c_n}{-\log \delta} - n + \frac{\log \mathcal{N}_\delta(F)}{-\log \delta} \quad (1.19)$$

Allora calcolando il $\liminf$ di entrambi i membri, si nota che il termine $\frac{\log 2^n c_n}{-\log \delta}$ tende a 0, mentre $\frac{\log \mathcal{N}_\delta(F)}{-\log \delta}$ è la definizione di $\underline{\dim}_B F$. Si arriva pertanto alla seguente disuguaglianza

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{-\log \delta} \leq -n + \underline{\dim}_B F \quad (1.20)$$

- D'altra parte se ci sono $\mathcal{N}_\delta(F)$ palle disgiunte di raggio δ con centri in F , allora sommando i loro volumi, si ha

$$\mathcal{N}_\delta(F) c_n \delta^n \leq \mathcal{L}^n(F_\delta)$$

Applicando il logaritmo e dividendo per $-\log \delta$ si ottiene la disuguaglianza opposta

$$\frac{\log \mathcal{N}_\delta(F) c_n + n \log \delta}{-\log \delta} \leq \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{-\log \delta}$$

Quindi passando al $\liminf$

$$\underline{\dim}_B - n \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{-\log \delta} \quad (1.21)$$

Mettendo insieme (1.18) e (1.21) si ottiene l'uguaglianza (1.16). Allo stesso modo si dimostra (1.17). $\square$

La dimensione così definita prende il nome di **dimensione di Minkowski** o dimensione di Minkowski-Bouligand.

1.4.1 Proprietà della dimensione box-counting

In questa sottosezione si elencano le proprietà che la dimensione box-counting soddisfa.

- Ogni sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ m -dimensionale regolare ha $\dim_B F = m$.
- $\underline{\dim}_B$ e $\overline{\dim}_B$ sono monotone rispetto all'inclusione degli insiemi

Viene enunciata ora un'importante proprietà valida per la dimensione box-counting e non per quella di Hausdorff.

Sia $\overline{F}$ la chiusura² di F , allora

$$\underline{\dim}_B \overline{F} = \underline{\dim}_B F \quad (1.22)$$

$$\overline{\dim}_B \overline{F} = \overline{\dim}_B F \quad (1.23)$$

Dimostrazione. Sia $B_1, \dots, B_k$ un ricoprimento finito di F composto da palle chiuse di raggi δ . Per costruzione l'insieme $\bigcup_{i=1}^k B_i$ è un chiuso che contiene F , pertanto contiene anche $\overline{F}$. Dunque F e $\overline{F}$ sono ricoperti dallo stesso numero di palle chiuse. Per concludere la dimostrazione è necessario precisare che esistono diverse definizioni di dimensione box-counting, costruite tutte in modo analogo, ciò che le distingue è il ricoprimento. In particolare si può enunciare una definizione equivalente alla 1.12 dove il ricoprimento viene effettuato utilizzando delle palle chiuse. $\square$

Applicando questa proprietà su F , sottoinsieme denso di una regione aperta di $\mathbb{R}^n$, $F \subset X \subset \mathbb{R}^n$, si ottiene che

$$\overline{\dim}_B F = \underline{\dim}_B F = n \quad (1.24)$$

Dimostrazione. Essendo F un sottoinsieme denso di X , si ha $\overline{F} = X$, quindi

$$\underline{\dim}_B \overline{F} = \underline{\dim}_B X = n$$

Applicando la proprietà si giunge a

$$\underline{\dim}_B F = n$$

Allo stesso modo si dimostra che $\overline{\dim}_B F = n$ $\square$

²La chiusura $\overline{A}$ di un insieme A è il più piccolo chiuso che contiene A . Se A è un insieme chiuso, allora $\overline{A} = A$.

Sempre da questa proprietà segue che, a differenza della dimensione di Hausdorff, gli insiemi numerabili potrebbero non avere dimensione nulla e inoltre non viene nemmeno soddisfatta la proprietà di stabilità numerabile. Per esempio se F è un insieme contenente tutti i numeri razionali tra 0 e 1, si avrà che $\overline{F} = [0, 1]$ e quindi $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = 1$. Infatti se si considera ogni numero razionale come insieme composto da un singolo punto, la sua dimensione è 0, mentre l'unione numerabile di essi ha dimensione 1. Per ovviare al problema è stata proposta una nuova definizione della dimensione box-counting, detta **dimensione box-counting modificata** che verrà introdotta dopo l'esempio.

Esempio 1.15. Sia $F = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ è un insieme compatto e $\dim_B F = \frac{1}{2}$

Dimostrazione. Sia $0 < \delta < \frac{1}{2}$ e sia k un intero tale che

$$\frac{1}{k(k-1)} > \delta \geq \frac{1}{k(k+1)}$$

Se $|U| \leq \delta$ allora l'insieme U può coprire solo un punto tra i seguenti $\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}\}$, perché

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{(k-1)} - \frac{1}{k} > \delta$$

Quindi per ricoprire F servono almeno k insiemi di diametro δ , di conseguenza $\mathcal{N}_\delta(F) \geq k$. Allora

$$\frac{\log \mathcal{N}_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \frac{\log k}{\log k(k+1)}$$

Considerando il limite per $\delta \rightarrow 0$ e quindi per $k \rightarrow \infty$

$$\underline{\dim}_B F \geq \frac{1}{2}$$

D'altro canto, se $\frac{1}{2} > \delta > 0$ e considerando che $\frac{1}{k(k-1)} > \delta \geq \frac{1}{k(k+1)}$ l'intervallo $[0, \frac{1}{k}]$ può essere ricoperto da $k+1$ intervalli di lunghezza δ . Rimangono però da ricoprire ancora $k-1$ punti dell'insieme F , che vengono quindi ricoperti da altri $k-1$ intervalli di lunghezza δ . Allora $\mathcal{N}_\delta(F) \leq 2k$. Di conseguenza

$$\frac{\log \mathcal{N}_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \frac{\log 2k}{\log k(k-1)}$$

Considerando il limite per $\delta \rightarrow 0$ e quindi per $k \rightarrow \infty$

$$\overline{\dim}_B F \leq \frac{1}{2}$$

Dunque abbiamo ottenuto la seguente disuguaglianza

$$\frac{1}{2} \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F \leq \frac{1}{2}$$

Da qui si ottiene la tesi. $\square$

1.4.2 Relazione con la dimensione di Hausdorff

Abbiamo osservato che la dimensione di Hausdorff e quella box-counting soddisfano proprietà analoghe e altre totalmente differenti (come la proprietà (1.22)). In questa sottosezione viene analizzata nel dettaglio la relazione tra le due dimensioni.

Se $F \subset \mathbb{R}^n$ può essere ricoperto da $\mathcal{N}_\delta(F)$ insiemi di diametro al più δ allora dalla definizione di misura di Hausdorff (1.5) si ha:

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \mathcal{N}_\delta(F) \delta^s \quad (1.25)$$

Se si suppone inoltre che $\mathcal{H}_\delta^s(F) > 1$

$$\log \mathcal{N}_\delta(F) + s \log \delta > 0 \quad \text{per } \delta \text{ sufficientemente piccola} \quad (1.26)$$

Riorganizzando la disequazione si ottiene

$$s = \dim_H F \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{N}_\delta(F)}{-\log \delta} = \underline{\dim}_B F$$

Quindi

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F \quad \forall F \subset \mathbb{R}^n \quad (1.27)$$

In altre parole, dalla definizione 1.12 si ricava che $\mathcal{N}_\delta(F) \simeq \delta^{-s}$ per δ molto piccolo e $s = \dim_B F$.

Dimostrazione. Infatti,

$$s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{N}_\delta(F)}{-\log \delta}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists U_\varepsilon(0) : \forall \delta \in (U_\varepsilon \cap \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}) \implies \frac{\log \mathcal{N}_\delta(F)}{-\log \delta} > s - \varepsilon$$

Quindi

$$\log \mathcal{N}_\delta(F) > -\log \delta s \implies \log \mathcal{N}_\delta(F) > \log \delta^{-s}$$

$\square$

Inoltre in generale si ha che

$$\begin{cases} \mathcal{N}_\delta(F)\delta^s \rightarrow \infty & \text{se } s < \dim_B F \\ \mathcal{N}_\delta(F)\delta^s \rightarrow 0 & \text{se } s > \dim_B F \end{cases}$$

Tuttavia si può vedere $\mathcal{N}_\delta(F)\delta^s$ come

$$\inf \left\{ \sum_i \delta^s : \{U_i\} \text{ è un } \delta\text{-ricoprimento finito di } F \right\}$$

dal momento che $\mathcal{N}_\delta(F)$ è il più piccolo numero di insiemi di diametro al più δ che ricoprono F . Da questa osservazione è facile intravedere la definizione (1.5) di misura di Hausdorff, dove al posto del diametro degli insiemi è inserito il massimo di questi, cioè δ . Quindi si nota, inoltre, che nel calcolo della dimensione box-counting ad ogni insieme viene associato un peso costante pari a δ^s , mentre per la dimensione di Hausdorff il peso varia con gli insiemi.

1.4.3 Dimensione box-counting modificata

Sia F un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Si può decomporre F in un insieme numerabile di pezzi $F_1, F_2, \dots$ in modo che il più grande, in termini di $\dim_B$, degli F_i abbia la dimensione più piccola possibile. Questa idea porta alla definizione della dimensione box-counting modificata:

$$\underline{\dim}_{\text{MB}} F = \inf \left\{ \sup_i \underline{\dim}_B F_i : F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right\} \quad (1.28)$$

$$\overline{\dim}_{\text{MB}} F = \inf \left\{ \sup_i \overline{\dim}_B F_i : F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right\} \quad (1.29)$$

Lo scopo di questa modifica è quello di risolvere il problema della stabilità numerabile della dimensione box-counting; infatti se F è numerabile allora

$$\underline{\dim}_{\text{MB}} F = \overline{\dim}_{\text{MB}} F = 0$$

, per verificarlo è sufficiente prendere come F_i un insieme contenente un singolo punto e come F l'unione numerabile degli F_i . Inoltre, per ogni insieme $F \subset \mathbb{R}^n$ è soddisfatta la seguente relazione

$$0 \leq \dim_H F \leq \underline{\dim}_{\text{MB}} F \leq \overline{\dim}_{\text{MB}} F \leq \overline{\dim}_B F \leq n \quad (1.30)$$

Tuttavia quest'ultima definizione della dimensione box-counting non è del tutto diversa dalla precedente, almeno per gli insiemi compatti.

Proposizione 1.16. Se $F \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme compatto, allora

$$\underline{\dim}_B F = \underline{\dim}_{\text{MB}} F \quad \overline{\dim}_B F = \overline{\dim}_{\text{MB}} F \quad (1.31)$$

In tal caso l'insieme F viene anche definito *dimensionalmente omogeneo*.

1.5 Misura e dimensione packing

Le dimensioni definite finora sono tutte accomunate dal fatto che nella loro definizione sono presenti i ricoprimenti che possono essere di diametro fisso come per la dimensione box-counting inferiore, oppure un ricoprimento di insiemi con un diametro limitato, che è il caso della dimensione di Hausdorff. Tuttavia esiste una operazione "speculare" al ricoprimento che è definita *packing*.

In matematica, con il termine packing, dall'inglese imballaggio, di una qualsiasi famiglia di insiemi M_i in un altro insieme A si intende nel senso più stretto che ogni insieme M_i sia contenuto in A senza sovrapposizioni. Per rendere l'idea conviene immaginare l'insieme A come una valigia e gli insiemi M_i sono gli oggetti da portare nel viaggio, quindi il packing consiste nell'inserire all'interno della valigia gli oggetti M_i .

Dal momento che questa operazione gioca un ruolo inverso rispetto al ricoprimento è stata identificata una definizione di misura, e poi dimensione, che utilizzasse il packing di insiemi. In particolare nella definizione della misura packing si usa il packing di palle disgiunte di raggi piccoli e differenti.

A differenza di quanto detto nella prima sezione per il ricoprimento, si definisce δ -packing di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$, una collezione di palle disgiunte contenute in A il cui diametro è inferiore a δ .

Definizione 1.17. Siano $s \geq 0$ e $\delta > 0$, si definisce

$$\mathcal{P}_\delta^s(F) = \sup \left\{ \sum_i |B_i|^s : \{B_i\} \text{ è un } \delta\text{-packing di } F \right\} \quad (1.32)$$

Dal momento che $\mathcal{P}_\delta^s$ decresce con δ , il seguente limite esiste

$$\mathcal{P}_0^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{P}_\delta^s(F).$$

Nonostante $\mathcal{P}_0^s(F)$ sia monotona, finitamente sub-additiva non è comunque una misura, perché non ha la stabilità numerabile. Allora è necessario introdurre

$$\mathcal{P}^s(F) = \inf \left\{ \sum_i \mathcal{P}_0^s(F_i) : F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right\} \quad (1.33)$$

Si può dimostrare che $\mathcal{P}^s(F)$ è una misura su $\mathbb{R}^n$ e viene chiamata **misura packing s -dimensionale**. Di conseguenza viene definita anche la dimensione packing:

$$\dim_{\mathcal{P}}(F) = \sup \left\{ s : \mathcal{P}^s(F) = \infty \right\} = \inf \left\{ s : \mathcal{P}^s(F) = 0 \right\} \quad (1.34)$$

Dimostrazione. Per dimostrare che $\mathcal{P}^s$ è una misura esterna, devono essere soddisfatte le condizioni (1.1) e (1.2).

Sia $A = \emptyset$, in A si può inserire solo se stesso, il cui diametro è 0, allora $\mathcal{P}_\delta^s(A) = 0$ quindi anche $\mathcal{P}^s(A) = 0$. Sia invece $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$, bisogna far vedere che $\mathcal{P}^s(A) \leq \sum_i \mathcal{P}^s(A_i)$. Se $\sum_i \mathcal{P}^s(A_i)$ diverge non rimane nulla da dimostrare, pertanto si supponga che tale serie converga. Sia inoltre $\varepsilon > 0$, per ogni i esiste un ricoprimento $\{E_{ni}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $A_i \subset \bigcup_n E_{ni}$ e

$$\sum_n \mathcal{P}_0^s(E_{ni}) \leq \mathcal{P}^s(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Essendo per ipotesi $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$, allora $A \subseteq \bigcup_i \bigcup_n E_{ni}$ è un ricoprimento numerabile di A .

$$\mathcal{P}^s(A) \leq \sum_i \sum_n \mathcal{P}_0^s(E_{ni}) < \sum_i \mathcal{P}^s(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} = \sum_i \mathcal{P}^s(A_i) + \varepsilon$$

Questa disuguaglianza è valida per ogni $\varepsilon > 0$ allora

$$\mathcal{P}^s(A) \leq \sum_i \mathcal{P}^s(A_i)$$

□

1.5.1 Relazione con le altre dimensioni

In questa sezione verrà analizzata la relazione che intercorre tra la dimensione packing e le altre dimensioni, in particolare si arriverà ad avere un arricchimento della disuguaglianza (1.30).

Proposizione 1.18. Sia $F \subset \mathbb{R}^n$ allora

$$\dim_{\mathcal{P}} F = \overline{\dim}_{\text{MB}} F \quad (1.35)$$

Dimostrazione.

Lemma 1.19. Sia $F \subset \mathbb{R}^n$ allora

$$\dim_{\mathcal{P}} F \leq \overline{\dim}_{\text{B}} F \quad (1.36)$$

Dimostrazione. Se $\dim_{\mathcal{P}} F = 0$ allora il risultato è ovvio.

Scelti t e s tali che $0 < t < s < \dim_{\mathcal{P}} F$ allora

$$\mathcal{P}^s(F) = \infty \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_0^s(F) = \infty.$$

Sia $0 < \delta < 1$, esistono delle palle disgiunte B_i di raggio al massimo δ con centro in F tali che $\sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^s > 1$.

Si supponga inoltre che, $\forall k$, esistano esattamente n_k di queste palle che soddisfano la $2^{-k-1} < |B_i| \leq 2^{-k}$ allora

$$1 < \sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^{-ks}$$

Deve esistere un k con $n_k > 2^{kt}(1 - 2^{t-s})$, altrimenti la sommatoria è al massimo pari 1. Le palle così descritte contengono tutte delle palle di raggi $\delta \geq 2^{-k-2}$ e centri in F . Allora

$$\mathcal{N}_{2^{-k-2}}(F)(2^{-k-2})^t \geq n_k(2^{-k-2})^t > 2^{-2t}(1 - 2^{t-s})$$

. Segue che

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{N}_{\delta}(F)\delta^t > 0$$

allora

$$\overline{\dim}_B F \geq t$$

e questo è vero per ogni t , allora

$$\dim_{\mathcal{P}} F \leq \overline{\dim}_B F$$

□

Ora che è stato dimostrato il lemma, si può dimostrare la proposizione.
Se $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ allora

$$\dim_{\mathcal{P}} F \leq \sup_i \dim_{\mathcal{P}} F_i \leq \sup_i \overline{\dim}_B F_i.$$

Dalla definizione di dimensione box-counting modificata deriva che

$$\dim_{\mathcal{P}} F \leq \overline{\dim}_{MB} F.$$

Se $s > \dim_{\mathcal{P}} F$ allora $\mathcal{P}^s(F) = 0$ in modo che $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ per una collezione di insiemi F_i tali che $\mathcal{P}^s(F) < \infty \forall i$. Allora $\forall i$ se δ è sufficientemente piccolo

$$\mathcal{P}_{\delta}^s(F_i) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N}_{\delta}(F_i)\delta^s \text{ è limitato per } \delta \rightarrow 0.$$

Per la (1.17), si ottiene

$$\overline{\dim}_B F_i \leq s \quad \forall i \quad \Rightarrow \quad \overline{\dim}_{MB} F \leq s.$$

Quindi mettendo insieme alla disuguaglianza precedente si ottiene l'uguaglianza. □

Unendo tutte le disuguaglianze ottenute finora, si ottiene la seguente relazione

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_{\text{MB}} F \leq \overline{\dim}_{\text{MB}} F = \dim_{\mathcal{P}} F \leq \overline{\dim}_B F \quad (1.37)$$

1.6 Dimensioni della Polvere di Cantor

Sia F l'insieme di Cantor.

Se $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ allora $\mathbf{dim}_H F = s$ e $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(F) \leq 1$

Dimostrazione. Sia E_k la costruzione di F al k -esimo passo. Allora E_k è composto da 2^k intervalli di lunghezza 3^{-k} . Prendendo gli intervalli di E_k come δ -ricoprimento con $\delta = 3^{-k}$ si ottiene

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq 2^k 3^{-ks} = 1 \quad \text{se } s = \frac{\log 2}{\log 3}$$

Per $k \rightarrow \infty$ si ha

$$\mathcal{H}^s(F) \leq 1$$

Per ogni ricoprimento di F , si può dimostrare che

$$\sum |U_i|^s \geq \frac{1}{2} = 3^{-s}$$

Si supponga che U_i siano dei sottointervalli di $[0, 1]$. Per ogni U_i , sia k un intero tale che

$$3^{-(k+1)} \leq |U_i| \leq 3^{-k}$$

Allora U_i può intersecare al massimo un solo intervallo di E_k perché la distanza tra gli intervalli di E_k è almeno 3^{-k} .

Se $j \geq k$ allora per costruzione U_i interseca al massimo $2^{j-k} = 2^j 3^{-sk} \leq 2^j 3^s |U_i|^s$ intervalli di E_j .

Se per ogni U_i si sceglie j abbastanza grande in modo che

$$3^{-(j+1)} \leq |U_i|$$

allora dal momento che l'unione degli U_i interseca tutti i 2^j intervalli di lunghezza 3^{-j} , contandoli si ottiene che

$$2^j \leq \sum_i 2^j 3^s |U_i|^s \implies \sum_i |U_i|^s \geq 1/2 \quad \text{per ogni ricoprimento } U_i$$

Allora

$$\mathcal{H}^s(F) \geq 1/2$$

□

Inoltre per la polvere di Cantor, può essere calcolata anche la dimensione box-counting. $\underline{\dim}_{\mathbf{B}} F = \overline{\dim}_{\mathbf{B}} F = \frac{\log 2}{\log 3}$

Dimostrazione. Si consideri un ricoprimento dei 2^k intervalli di lunghezza 3^{-k} di E_k , allora sicuramente $\mathcal{N}_\delta(F) \leq 2^k$ se $3^{-k} \leq \delta \leq 3^{-k+1}$. Di conseguenza

$$\underline{\dim}_{\mathbf{B}} F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{N}_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3}$$

D'altra parte ogni intervallo di lunghezza δ interseca al massimo un intervallo di lunghezza 3^{-k} di E_k , perciò servono minimo 2^k intervalli di lunghezza δ per ricoprire F . Quindi $\mathcal{N}_\delta(F) \geq 2^k$, da cui deriva che

$$\underline{\dim}_{\mathbf{B}} F \geq \frac{\log 2}{\log 3}$$

Analogamente si dimostra che $\overline{\dim}_{\mathbf{B}} F = \frac{\log 2}{\log 3}$ □

Osservando le due dimensioni non si può non notare che esse coincidono, quindi $\dim_B F = \dim_H F$.

Capitolo 2

Insiemi auto-simili

Prima di procedere con la discussione formale e rigorosa della proprietà di auto-similarità tipica degli oggetti frattali, introduciamo quest'ultima attraverso un esempio.

Si prenda un triangolo di lato unitario, che rappresenta il punto di partenza della ricorsione, pertanto viene chiamato anche iniziatore. Al passo successivo si divida ogni lato del triangolo in 3 segmenti; si sostituisca il segmento centrale con un promontorio di lato pari a quello appena eliminato. Il risultato sarà che ogni lato è formato da 4 segmenti di uguale lunghezza. Questo oggetto viene chiamato generatore. Allo step successivo si sostituisce ogni segmento del generatore con il generatore ridotto di $1/3$. Andando avanti così, l'oggetto costruito somiglierà a un fiocco di neve come si può osservare nella figura 2.1. Questo insieme fu considerato per la prima volta nel 1904 da von Koch.

La figura risultante è un oggetto autosimile (per costruzione), infatti ad ogni ingrandimento le sue caratteristiche rimangono invariate.

2.1 Autosimilarità

In questa sezione introduciamo le principali nozioni relative all'auto-similarità. Data una successione finita di numeri positivi $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ che vengono definiti *lista di rapporti o ratio list*, un **sistema di funzioni iterate** che producono una lista di rapporti r in uno spazio metrico S è una successione di funzioni $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ dove $f_i: S \rightarrow S$ è una funzione di similarità¹ con coefficiente pari a r_i . Inoltre un insieme non vuoto compatto

¹Una funzione si definisce di similarità con coefficiente k su uno spazio metrico (X, d) , $f: X \rightarrow X$ se dati due punti $x, y \in X$ la seguente relazione è verificata $d(x, y) = kd(f(x), f(y))$

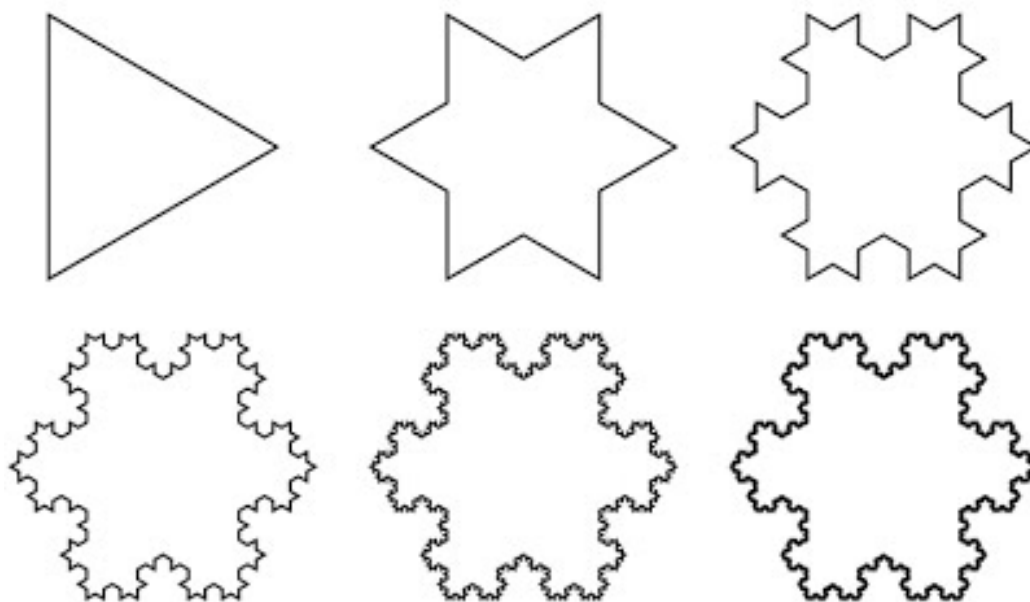


Figura 2.1: Rappresentazione grafica della generazione del fiocco di neve di von Koch. La figura è disponibile in rete

$K \subset S$ è un insieme invariante (o attrattore) per il sistema $(f_1, \dots, f_n) \iff K = f_1[K] \cup \dots \cup f_n[K]$. In questo caso l'insieme viene anche definito **auto-simile**.

Infine il valore di similarità s di una ratio list è il numero positivo tale che

$$r_1^s + \dots + r_n^s = 1$$

e il teorema seguente ne dimostra l'esistenza e l'unicità.

Teorema 2.1. *Sia $(r_1, \dots, r_n)$ una ratio list e ogni elemento $r_i < 1$. Allora esiste un unico numero s non negativo che soddisfi il vincolo*

$$\sum_{i=1}^n r_i^s = 1 \quad (2.1)$$

Inoltre $s = 0 \iff n = 1$

Dimostrazione. Si consideri la funzione $\Phi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ definita come

$$\Phi(s) = \sum_{i=1}^n r_i^s = 1$$

Allora Φ è una funzione continua, $\Phi(0) = n \geq 1$ e $\lim_{s \rightarrow \infty} \Phi(s) = 0 < 1$. Quindi applicando il teorema dei valori intermedi esiste almeno un punto s in cui la funzione valga 1. Inoltre calcolando la derivata di Φ

$$\Phi'(s) = \sum_{i=1}^n r_i \log r_i$$

si vede che è sempre negativa. Di conseguenza Φ è sempre decrescente. Quindi esiste un unico punto per cui $\Phi(s) = 1$. In più se $n > 1$, $\Phi(0) > 1$ allora $s \neq 0$. $\square$

Il numero s è detto *dimensione di similarità* di un insieme non vuoto compatto K se e solo se $K = \bigcup_{i=1}^n f_i[K]$ dove $(f_1, \dots, f_n)$ è il sistema di funzioni iterate la cui ratio list associata ha come valore di similarità s .

Esempio 2.2. La polvere di Cantor è un insieme generato da un sistema di funzioni iterate la cui ratio list è $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Per trovare la dimensione di similarità è necessario risolvere la seguente equazione

$$2\left(\frac{1}{3}\right)^s = 1 \quad \implies \quad s = \frac{\log 2}{\log 3}$$

Esempio 2.3. Nel fiocco di neve, introdotto in precedenza, invece ogni segmento è diviso in 4 più piccoli ognuno di lunghezza $1/3$, quindi la ratio list è $r = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Allora si ottiene l'equazione

$$4\left(\frac{1}{3}\right)^s = 1 \quad \implies \quad s = \frac{\log 4}{\log 3}$$

Data una ratio list $r = (r_1, \dots, r_n)$ con dimensione s . Sia $f = (f_1, \dots, f_n)$ il corrispondente sistema di funzioni di similarità iterate in $\mathbb{R}^d$ e si supponga che K sia l'insieme invariante per il sistema f ; in generale non è vero che $\dim_H K = s$, ma è possibile trovare delle relazioni tra le diverse dimensioni. Prima di procedere con la dimostrazione del legame tra le diverse dimensioni è necessario introdurre la misura di Hausdorff.

2.1.1 La metrica di Hausdorff

Felix Hausdorff introdusse per la prima volta questa metrica nel 1914.[7]

Definizione 2.4. Sia S uno spazio metrico. Siano A e B due sottoinsiemi di S .

Si dice che A e B hanno una **distanza di Hausdorff** r se e solo se ogni punto

di A è distante r da qualche punto di B e se ogni punto di B è distante r da qualche punto di A . Questa idea può essere espressa mediante una metrica, che prende il nome di **metrica di Hausdorff**, D .

Se A è un insieme e dato $r > 0$, si definisce l'intorno aperto di A , l'insieme

$$\mathcal{N}_r(A) = \{y: d(x, y) < r \text{ per qualche } x \in A\}^2 \quad (2.2)$$

Quindi si può definire formalmente la metrica di Hausdorff

$$D(A, B) = \inf \{r > 0: A \subseteq \mathcal{N}_r(B) \text{ e } B \subseteq \mathcal{N}_r(A)\} \quad (2.3)$$

e per convenzione $D(\emptyset) = \infty$.

Tuttavia questa definizione non costituisce una metrica in generale, basti prendere come controesempio $A = 0$ e $B = [0, \infty)$ allora si ha che $D(A, B) = \infty$, pertanto D è una metrica estesa (perché può assumere come valore $+\infty$). Tuttavia per i nostri scopi serve una metrica nella sua definizione rigorosa, per ottenerla è sufficiente imporre dei vincoli sull'insieme: considerare gli elementi non vuoti e compatti. Quindi se S è uno spazio metrico, si definisce l'insieme $\mathbb{H}(S)$, la collezione di tutti i sottoinsiemi compatti e non vuoti di S . In tal caso si può dimostrare che D è una metrica su $\mathbb{H}(S)$.

Dimostrazione. Per dimostrare che D è una metrica è necessario che essa soddisfi le seguenti proprietà:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{H}(S)$

La proprietà 2) viene gratis dalla costruzione della metrica.

Verifichiamo la 1) $D(A, B) = 0 \iff A = B$

($\Leftarrow$) Se $A = B$ allora $\forall \epsilon > 0$ si ha $A \subseteq \mathcal{N}_\epsilon(B)$, dunque $D(A, B) = 0$.

($\Rightarrow$) Siano $A, B \in \mathbb{H}(S)$ tali che $D(A, B) = 0$

Se $x \in A$, allora $\forall \epsilon > 0$ si ha $x \in \mathcal{N}_\epsilon(B)$, allora $\text{dist}(x, B) = 0$. B è un insieme compatto, quindi chiuso, allora $x \in B$. Questo prova che $A \subseteq B$, ma si può ripetere il ragionamento partendo con $x \in B$, allora anche $B \subseteq A$. Pertanto $A = B$.

Infine rimane da dimostrare la disuguaglianza triangolare. Siano $A, B, C \in \mathbb{H}(S)$ e sia $\epsilon > 0$. Se $x \in A$, allora esiste $y \in B$ tale che $d(x, y) < D(A, B) + \epsilon$; allo stesso tempo esiste $z \in C$ tale che $d(y, z) < D(B, C) + \epsilon$. Da qui si vede

² $d(x, y)$ è una generica metrica definita su S

che A è contenuto in $\mathcal{N}_r(C)$ con $r = D(A, B) + D(B, C) + 2\varepsilon$ e similarmemente C è contenuto in $\mathcal{N}_r(A)$. Quindi $D(A, C) \leq D(A, B) + D(B, C) + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$. Perciò

$$D(A, C) \leq D(A, B) + D(B, C)$$

□

Proprietà dello spazio metrico $\mathbb{H}(S)$ Se S è uno spazio metrico completo allora $\mathbb{H}(S)$ è completo.

Dimostrazione. Bisogna mostrare che ogni successione di Cauchy in $\mathbb{H}(S)$ è convergente in $\mathbb{H}(S)$.

Si supponga che (A_n) sia una successione di Cauchy in $\mathbb{H}(S)$. Sia $A = \{x : \exists \text{ successione } \{x_k\} \text{ con } x_k \in A_k \text{ t.c. } x_k \rightarrow x\}$. Si vuole dimostrare che $(A_n) \rightarrow A$, cioè che $D(A_n, A) \rightarrow 0$ e che A sia un insieme non vuoto e compatto, cioè appartiene ad $\mathbb{H}(S)$.

Sia $\varepsilon > 0$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che dati $n, m \geq N$ $D(A_n, A_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Dato $n \geq N$ si dimostrerà che $D(A_n, A) \leq \varepsilon$.

Se $x \in A$ allora $\exists x_k$ tale che $x_k \rightarrow x$; quindi dati un k abbastanza grande $d(x_k, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Se si prende $k \geq N$ allora $D(A_k, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, inoltre esiste un $y \in A_n$ tale che $d(x_k, y) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Mettendo insieme si ottiene

$$d(x, y) \leq d(x_k, x) + d(x_k, y) \leq \varepsilon$$

Pertanto $A \subseteq \mathcal{N}_\varepsilon(A_n)$.

Si assuma che $y \in A_n$; si scelgano degli interi $k_1 < k_2 < \dots$ con $k_1 = n$, allora

$$D(A_{k_j}, A_m) < 2^{-j}\varepsilon$$

. Questa relazione è vera in quanto A_n è di Cauchy.

Si costruisce una successione (y_k) con $y_k \in A_k$:

- Per $k < n$ si può prendere qualsiasi y_k purchè stia in A_k
- Per $k = n$ si scelga $y_n = y$
- Per $k > n$, sono già stati scelti gli y_{k_j} con $k_j < k \leq k_{j+1}$, allora i successivi y_k dovranno esser scelti in modo che

$$d(y_{k_j}, y_k) < 2^{-j}\varepsilon$$

In questo modo è stata costruita una successione (y_k) di Cauchy in A_k , che è un insieme compatto. Quindi la successione converge $y_k \rightarrow x$ e la successione limite è contenuta in A . Dunque si ha

$$d(x, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(y, y_k) < \varepsilon$$

Da qui segue che $y \notin (A)$ e si conclude che $A_n \subsetneq (A)$.

Perciò è stato dimostrato che $d(A_n, A) \leq \varepsilon$, per cui A_n converge ad A .

Rimane da verificare che A è compatto. Per dimostrarlo facciamo vedere prima che A è chiuso e limitato, questo ci servirà nella dimostrazione dal momento che in uno spazio metrico se A è compatto allora è anche chiuso e limitato, ma non è vero il contrario.

Introduciamo la definizione di un **r -net**: Sia $r > 0$, dato A un insieme di uno spazio metrico S . Si definisce A r -net per $S \iff$ ogni punto di S è distante r da un punto di A . Inoltre se S è uno spazio metrico compatto, S ha un r -net finito.

Quindi ritornando alla dimostrazione, A è uno spazio metrico compatto, allora $\forall \varepsilon > 0$ esiste un ε -net finito in A . Scelto A tale che $d(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{3}$, allora sicuramente esiste un $\frac{\varepsilon}{3}$ -net finito per gli A_n , che supponiamo essere $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Ora per come sono definiti gli ε -net, per ogni y_i esiste un $x_i \in A$ tale che $d(y_i, x_i) < \frac{\varepsilon}{3}$. In questo modo è stato trovato un insieme finito $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ che è un ε -net per A . Dimostriamo ora che A è chiuso. Sia $x \in \bar{A}$. Allora esiste una successione (y_n) in A con $d(y_n, x) < 2^{-n}$. Per ogni n esiste $z_n \in A_n$ tale che $d(z_n, y_n) < d(A_n, A) + 2^{-n}$. Ora

$$d(z_n, x) \leq d(z_n, y_n) + d(y_n, x) < d(A_n, A) + 2^{-n} + 2^{-n}$$

Prendendo il limite per $n \rightarrow \infty$ si ottiene che $z_n \rightarrow x$, perché sappiamo che $A_n \rightarrow A$ e $2^{-n} \rightarrow 0$. In questo modo $x \in A$, per cui $\bar{A} = A$ e quindi A è un chiuso.

Bisogna comunque dimostrare che A è un compatto.

Sia F un insieme infinito di A . Esiste un $\frac{1}{2}$ -net finito per l'insieme A , che chiamiamo B , tale che ogni elemento di F abbia una distanza inferiore a $\frac{1}{2}$ da ogni elemento di B . Sappiamo che B è un insieme finito, mentre F è un insieme infinito; allora l'affermazione precedente è vera per un numero infinito di punti di F , che indichiamo con F_1 . I punti all'interno di F_1 distano tra loro al più 1, allora $\text{diam} F_1 \leq 1$. Quindi, esiste un sottoinsieme $F_2 \subseteq F_1$ per cui $\text{diam} F_2 \leq \frac{1}{2}$. Iterando il procedimento appena introdotto, trovo infiniti insiemi F_j il cui $\text{diam} F_j \leq 2^{-j}$ e tali che $F_j \subseteq F_{j+1} \forall j$. Ora consideriamo $x_j \in F_j$ allora

$$d(x_j, x_k) \leq 2^{-j} \quad \text{se } j < k$$

Allora $(x_j)_j$ è una successione di Cauchy. Poiché S è completo, allora $(x_j)_j$ converge a x ed essendo A un insieme chiuso, $x \in A$. Infine notiamo che x è una collezione di punti di F , per cui A è compatto. $\square$

2.2. FUNZIONI DI SIMILARITÀ E CONNESSIONE CON LE DIMENSIONI 133

Uno dei tanti vantaggi dovuti all'utilizzo delle funzioni iterate consiste nel fatto che il calcolo delle dimensioni viene notevolmente semplificato. A tal proposito è utile ricordare i seguenti risultati in cui partendo da un insieme costruito con funzioni iterate si mettono in relazione la dimensione di similarità con quella di Hausdorff e Box-Counting.

Proposizione 2.5. Il sistema di funzioni iterate $(f_1, \dots, f_n)$ soddisfa la condizione degli insiemi aperti di Moran $\iff$ esiste un insieme non vuoto U tale che

$$f_i(U) \cap f_j(U) = \emptyset \text{ per } i \neq j$$

e

$$f_i(U) \subseteq U \quad \forall i$$

Teorema 2.6. Supponiamo che il sistema di funzioni iterate $(f_1, \dots, f_n)$ con ratio list $\{c_i\}_{i=1}^n$ soddisfi la condizione degli insiemi aperti di Moran. Se F è un insieme invariante che soddisfa la

$$F = \bigcup_{i=1}^n f_i(F)$$

allora

$$\dim_H F = \dim_B F = s$$

dove s è la soluzione dell'equazione $\sum_{i=1}^n c_i^s = 1$.

La dimostrazione del teorema viene omessa.

2.2 Funzioni di similarità e connessione con le dimensioni

Sia f una trasformazione di similarità che scala l'immagine di un fattore $\lambda > 0$. Se $F \subseteq \mathbb{R}^n$ allora

$$\mathcal{H}^s(f(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F) \tag{2.4}$$

In altre parole, se l'insieme F viene scalato di un fattore λ , allora la sua dimensione viene scalata di λ^s . Per dimostrarlo utilizziamo la definizione di misura di Hausdorff. Sia U_i un δ -ricoprimento dell'insieme F . Applicandone la funzione si ottiene che $f(U_i)$ è un $\lambda\delta$ -ricoprimento di $f(F)$, allora

$$\sum |f(F)|^s = \lambda^s \sum |U_i|^s$$

Quindi

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(f(F)) \leq \lambda^s \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

Prendendo l'estremo inferiore e passando al limite si arriva alla seguente disuguaglianza

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$$

Rimane da dimostrare l'implicazione inversa, per farlo si usa la trasformazione inversa f^{-1} e si ripete lo stesso ragionamento, in tal modo si ottiene

$$\lambda^s \mathcal{H}^s(F) \leq \mathcal{H}^s(f(F))$$

Mettendo insieme entrambe le disuguaglianze, si dimostra la tesi. La proprietà precedente si può estendere a tutte le funzioni che soddisfano la condizione di Hölder di esponente α , cioè le $f: F \rightarrow \mathbb{R}^n$ tali che date due costanti $c, \alpha > 0$

$$|f(x) - f(y)| \leq c |x - y|^\alpha \quad x, y \in F \quad (2.5)$$

Per tali funzioni si ha che

$$\mathcal{H}_\alpha^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(F) \quad (2.6)$$

Di particolare importanza è il caso in cui $\alpha = 1$, perché la disuguaglianza 2.5 diventa la condizione di Lipschitzianità, e quindi possiamo dire che per funzioni lipschitziane vale la seguente relazione

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \leq c^s \mathcal{H}^s(F) \quad (2.7)$$

Quindi il coefficiente λ è proprio uguale alla costante di Lipschitz c . Infine se f è un'isometria

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

allora

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \leq \text{haus}(F)$$

Quindi si può affermare che la misura di Hausdorff è invariante per rotazioni e traslazioni.

Proprietà analoghe possono essere presentate per la dimensione di Hausdorff. Infatti, se f è una funzione che soddisfa la condizione di Hölder 2.5, allora

$$\dim_H f(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F \quad (2.8)$$

La dimostrazione di questa relazione segue dalla disuguaglianza 2.6.

In più se $f: F \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione bi-Lipschitziana, cioè

$$c_1 |x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2 |x - y| \quad x, y \in F \quad (2.9)$$

con $0 < c_1 < c_2 < \infty$ allora si ottiene esattamente l'uguaglianza

$$\dim_H f(F) = \dim_H F \quad (2.10)$$

Grazie a questa proprietà la dimensione di Hausdorff è invariante per trasformazioni bi-Lipschitziane. Pertanto due insiemi aventi dimensioni di Hausdorff differenti non possono essere l'uno la trasformazione bi-Lipschitziana dell'altro.

Finora sono state illustrate le proprietà della dimensione di Hausdorff in relazione alle trasformazioni di similarità. Tuttavia anche la dimensione box-counting si comporta bene con queste funzioni. Infatti, tale dimensione risulta essere invariante per trasformazioni Lipschitziane. Se vale la condizione 2.7, F può essere ricoperto da $\mathcal{N}_\delta(F)$ insiemi di diametro al più δ , allora le immagini di questi insiemi costituiscono un ricoprimento di $f(F)$ con insiemi di diametro al massimo $c\delta$, allora

$$\dim_B f(F) \leq \dim_B F$$

Inoltre come per la dimensione di Hausdorff, quella box-counting si comporta allo stesso modo in presenza di funzioni che soddisfino la condizione di Hölder e funzioni bi-Lipschitziane, per cui anche la box-counting è una dimensione invariante per funzioni bi-Lipschitziane.

Capitolo 3

Insiemi di Julia

Gli insiemi di Julia sono uno dei più noti esempi di insiemi frattali. Essi hanno origine da una semplice funzione nel piano complesso che dà luogo a una serie di rappresentazioni fortemente intricate e allo stesso tempo spettacolari come mostrato nella figura 3.1.

In questo capitolo verrà presentato l'insieme di Julia partendo dalla sua costruzione come chiusura dei punti repulsivi di un polinomio fino alla definizione data dallo stesso Julia nel 1918. Si introdurranno le proprietà chiave dell'insieme in modo da poter dimostrare l'equivalenza delle due definizioni. Nella sezione 3.4 verrà definito il celebre insieme di Mandelbrot e infine nell'ultima sezione verrà calcolata la dimensione di Hausdorff di entrambi gli insiemi.

3.1 Costruzione insieme di Julia

L'insieme di Julia, come anticipato precedentemente, è costruita a partire da una funzione del piano complesso. Si considera infatti una funzione polinomiale di grado almeno 2, ($n \geq 2$) a coefficienti complessi, $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ che assume il seguente valore

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$. Nel corso di questo capitolo utilizzeremo spesso la composizione di una funzione con se stessa, a tal proposito introduciamo ora la notazione che sarà mantenuta per tutto il capitolo. Quindi si indicherà con f^k la composizione di f con se stessa k volte,

$$f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ volte}}$$

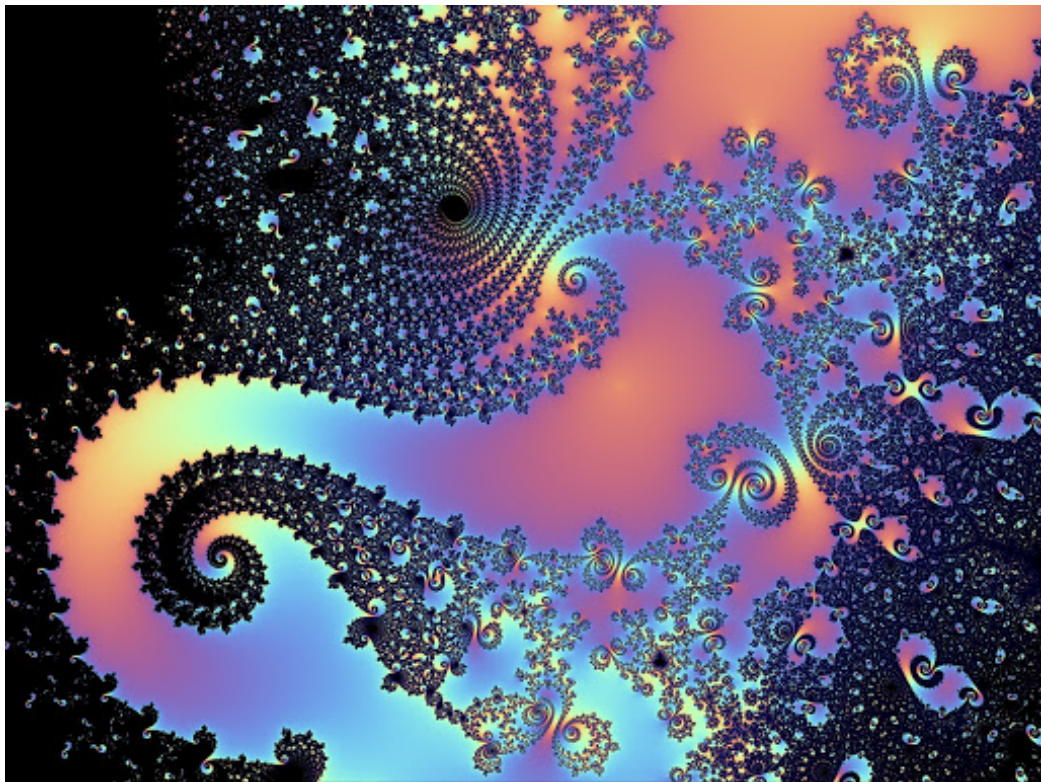


Figura 3.1: Esempio di insieme di Julia

Si definiscono ora diversi tipi di punti del piano complesso: dato $w \in \mathbb{C}$ diciamo che esso è

- un *punto fisso* se $f(w) = w$
- un *punto periodico* se $f^p(w) = w$ per qualche $p \geq 1$.

Nel caso di un punto periodico, il minimo numero intero p per cui $f^p(w) = w$ è detto *periodo* di w e la successione $(w, f(w), \dots, f^p(w))$ è detta *orbita di periodo* p . Inoltre i punti periodici si suddividono a loro volta in altre 4 categorie. Se definiamo $\lambda = (f^p)'(w)$, allora il punto w si definisce

- *superattrattivo* se $\lambda = 0$
- *attrattivo* se $0 \leq |\lambda| < 1$
- *indifferente* se $|\lambda| = 1$
- *repulsivo* se $|\lambda| > 1$

Adesso ci sono tutti gli ingredienti per poter definire formalmente l'insieme di Julia.

Definizione 3.1. L'**insieme di Julia** $J(f)$ è definito come la chiusura dell'insieme dei punti repulsivi di f . E il complementare è detto insieme di Fatou, $F(f)$.

Per chiarire bene quali punti contiene un insieme di Julia, presentiamo un esempio con la funzione "canonica" con cui vengono costruiti gli insiemi di Julia.

Esempio 3.2. Sia $f(z) = z^2$, allora si avrà $f^k = z^{2^k}$.

Come primo step è necessario calcolare i punti periodici ($f^p(z) = z$). Essi sono

$$\left\{ e^{\frac{2\pi i q}{2^p - 1}} \quad \text{con } 0 \leq q \leq 2^p - 2 \right\}$$

Il secondo step prevede di calcolare il modulo della derivata prima:

$$|(f^p)'(z)| = 2 \quad \text{per ogni punto dell'insieme}$$

Pertanto tutti i punti periodici di f sono repulsivi. Allora l'insieme di Julia $J(f)$ è la circonferenza unitaria $|z| = 1$. In questo caso si può notare che l'insieme $J(f) = f(J) = f^{-1}(J)$ con $f^k \rightarrow 0$ se $k \rightarrow \infty$ nel caso di $|z| < 1$, altrimenti $f^k \rightarrow \infty$ se $|z| > 1$. Invece se $|z| = 1$ si ha che la funzione f^k rimane all'interno di $J(f)$ per ogni k . Pertanto $J(f)$ può essere anche visto

come la frontiera tra gli insiemi di punti che iterati tendono a 0 e a ∞ . In questo caso, però l'insieme $J(f)$ così ottenuto non è un frattale.

Per costruirne uno è sufficiente modificare di poco la funzione di partenza. Basta infatti prendere $f(z) = z^2 + c$, ove $c \in \mathbb{C}$ è un numero complesso abbastanza piccolo.

3.2 Definizione originale

La definizione data nella sezione precedente tuttavia non è quella originale fornita dal matematico francese Gaston Julia nel 1918. Egli insieme a Pierre Fatou studiarono il comportamento delle iterazioni di una famiglia di funzioni dette normali. Per poter enunciare la definizione data dallo stesso Julia, è necessario introdurre il concetto di normalità di una funzione e le sue principali proprietà.

Definizione 3.3. Sia U un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$. Sia $g_k : U \rightarrow \mathbb{C}$ una famiglia di funzioni analitiche. La collezione $\{g_k\}$ si dice **normale** sull'insieme U , se ogni successione di funzioni in $\{g_k\}$ ha una sottosuccessione convergente uniformemente su un sottoinsieme compatto di U a una funzione analitica oppure divergente a $+\infty$.

La famiglia $\{g_k\}$ è **normale nel punto** w di U se esiste un intorno di w , $V \subset U$, tale che $\{g_k\}$ sia una famiglia normale su V .

Julia e Fatou considerano come successione la famiglia delle funzioni iterate $\{f^k\}$, giungendo alla seguente definizione per l'insieme di Julia.

Definizione 3.4. Sia f una funzione polinomiale a valori complessi. Sia f^k la composizione della funzione f con se stessa k volte. Si definisce insieme di Julia, l'insieme dei punti complessi tali per cui la collezione $\{f^k\}$ non è normale nel punto z

$$J_0(f) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{la famiglia } \{f^k\}_{k \geq 0} \text{ non è normale in } z \right\} \quad (3.1)$$

Di conseguenza si può definire anche l'insieme di Fatou, essendo il complementare di quello di Julia.

$$F_0(f) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{la famiglia } \{f^k\}_{k \geq 0} \text{ è normale in } z \right\} \quad (3.2)$$

Per come sono state definite le famiglie normali, si nota che l'insieme di Fatou è un aperto. Per cui l'insieme di $J_0(f)$ è chiuso, in linea con quanto detto nella sezione precedente; infatti avevamo definito l'insieme di Julia come la chiusura dell'insieme dei punti repulsivi. In effetti le due definizioni sono del tutto equivalenti e lo dimostreremo nella sezione successiva.

3.3 Equivalenza tra le definizioni di $J(f)$ e $J_0(f)$

Prima di dimostrare l'equivalenza tra le due definizioni, è importante introdurre alcune proprietà dell'insieme $J_0(f)$ e il teorema di Montel, perchè saranno utili in alcuni passaggi della dimostrazione. In tutta la sezione supporremo che la funzione complessa f sia un polinomio complesso di grado almeno 2.

Abbiamo già visto come conseguenza della definizione che l'insieme $J_0(f)$ è chiuso. Inoltre si dimostra che esso è compatto e non è vuoto. - **Compattezza.**

Dal momento che f è un polinomio di grado almeno 2, esiste almeno un numero $r > 0$ tale che

$$|f(z)| \geq 2|z| \quad \text{se } |z| \geq r$$

Per cui

$$|f^k(z)| \geq 2^k r \quad \text{se } |z| > r$$

In tal modo si ottiene che $f^k \rightarrow \infty$ uniformemente sull'insieme aperto $U = \{z : |z| > r\}$. Ricordando la definizione di famiglia normale, si vede che $\{f^k\}$ è normale su U ; allora $U \subset F_0(f)$. Di conseguenza essendo $J_0(f)$ il complementare di un insieme illimitato, è limitato. Poiché $J_0(f)$ è anche chiuso, allora è un insieme compatto.

- **Non vuoto.**

Si supponga, per assurdo, che $J_0(f) = \emptyset$. Per ogni $r > 0$, la famiglia $\{f^k\}$ è normale su $B_r(0)$, disco aperto di raggio r e centro nell'origine. Prendendo r abbastanza grande, poiché f è un polinomio, si ha la certezza che z sia in $B_r(0)$ e per tale z si ha $f^k(z) \rightarrow \infty$. Inoltre $B_r(0)$ contiene anche w , punto fisso di f , con $f^k(w) = w \forall k$. Allora è impossibile che ogni sottosuccessione di $\{f^k\}$ converga uniformemente a una funzione analitica limitata oppure a ∞ su un sottoinsieme compatto di $B_r(0)$ che contenga allo stesso tempo z e w . Per cui si giunge a un assurdo contraddicendo l'ipotesi di normalità di $\{f^k\}$. Di conseguenza l'insieme contiene almeno la famiglia $\{f^k\}$, perciò non è vuoto.

Una proprietà importante dell'insieme di Julia è che esso è sia forward che backward invariante.

$$J_0(f) = f(J_0) = f^{-1}(J_0) \quad (3.3)$$

Questa proprietà sarà utile in seguito per dimostrare la prima parte dell'equivalenza delle due definizioni.

Per dimostrarla conviene considerare il suo complementare, l'insieme di Fatou $F_0(f)$, che è definito come l'insieme dei punti tali che le famiglie $\{f^k\}$ siano normali in z . Allora si deve dimostrare che $F_0(f)$ sia forward e backward invariante.

Sia V un aperto con $\{f^k\}$ normale su V . Per la continuità della funzione f , $f^{-1}(V)$ è un aperto. Sia ora $\{f^{k_1}\}$ una sottosequenza di $\{f^k\}$. Per la normalità di $\{f^k\}$ anche $\{f^{k_1+1}\}$ ha una sottosequenza $\{f^{k'_1+1}\}$ che è uniformemente convergente sugli insiemi compatti di V . Dunque se D è un insieme compatto di $f^{-1}(V)$ allora per continuità $\{f^{k'_1+1}\}$ è convergente su $f(D)$, togliendo un'iterazione si ottiene la sequenza $f^{k'}$ che quindi è convergente uniformemente su D . Dunque $\{f^k\}$ è normale su $f^{-1}(V)$, per cui $F_0 \subseteq f^{-1}(F_0)$. implicazione contraria si ottiene ragionando allo stesso modo, ma considerando la funzione f , che è una funzione aperta, per cui $f(V)$ è aperto se V è aperto. Applicando più volte la definizione di famiglia di funzioni normali, si arriva a dimostrare che

$$J_0(f^p) = J_0(f) \quad \text{per ogni intero positivo } p \quad (3.4)$$

Lemma 3.5. Sia f un polinomio, sia $w \in J_0(f)$ e sia U un qualsiasi intorno di w ; allora

$$W = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) \text{ è l'intero insieme } \mathbb{C} \quad (3.5)$$

ad eccezione di al massimo un singolo punto. Qualsiasi punto che non soddisfi questa equazione non appartiene a $J_0(f)$ ed è indipendente da w e dall'intorno U .

Dimostrazione. Per come è stato definito $J_0(f)$ $\{f^k\}$ non è normale in w , allora l'equazione 3.5 deriva dall'applicazione del teorema di Montel. Tale teorema sostiene che data una famiglia $\{g_k\}$ non normale definito in U , allora per tutti i punti nel piano complesso si ha che $g_k(z) = w$ per qualche $z \in U$ e qualche indice k . Rimane quindi da dimostrare che se l'equazione non è soddisfatta allora $w \notin J_0(f)$.

Si supponga quindi che $v \notin W$ e sia $f(z) = v$, allora anche $z \notin W$. Poichè $\mathbb{C} \setminus W$ può contenere al massimo un punto, $z = v$. Dunque f è un polinomio di grado n tale che $f(z) = v$ la cui unica soluzione è $z = v$. Allora

$$f(z) - v = c(z - v)^n \quad \text{per qualche costante } c$$

Se z è molto vicino a v allora

$$f^k(z) - v \rightarrow 0 \text{ per } k \rightarrow \infty$$

uniformemente. Di conseguenza $\{f^k\}$ è normale in v , perciò $v \notin J_0(f)$. Infine v è indipendente dal punto w o dal suo intorno U , ma dipende esclusivamente dal polinomio f . $\square$

Da questo lemma si trovano due corollari importanti. **Corollario a.** Per ogni $z \in \mathbb{C}$ (ad eccezione di un singolo punto), se U è un aperto che interseca $J_0(f)$

$$U \cap J_0(f) \neq \emptyset$$

allora $f^{-k}(z)$ interseca U per un numero infinito di indici k .

Corollario b.

Se $z \in J_0(f)$ allora $J_0(f)$ è la chiusura di W definito come nell'equazione 3.5. Infine l'ultima nozione che serve per poter dimostrare l'equivalenza è che $J_0(f)$ è un insieme perfetto, cioè è chiuso e non contiene punti isolati. Inoltre esso non è numerabile.

Dimostrazione. E' già stato dimostrato che $J_0(f)$ è un insieme chiuso, rimane da far vedere che non contiene punti isolati. Sia $v \in J_0(f)$ e sia U un suo intorno. Bisogna dimostrare che U contiene altri punti di $J_0(f)$. Allora ci possono essere tre casi:

- v non è un punto fisso o periodico di f . Per il corollario b del lemma 3.5 e perchè $J_0(f)$ è backward invariante, U contiene un punto $f^{-k}(v) \in J_0(f)$ per qualche $k \geq 1$ e tale punto è diverso da v .
- Se $f(z) = v$ non ha altre soluzioni al di fuori di v , allora $v \notin J_0(f)$. Allora esiste $w \neq v$ con $f(w) = v$. Per il Corollario b del lemma, U contiene il punto $f^{-k}(w)$ per qualche $k \geq 1$. Qualunque punto di U è contenuto in $J_0(f)$ perchè è backward invariante e il punto $f^{-k}(w)$ è diverso da v .
- v è periodico di periodo $p \geq 1$. Per la proprietà 3.4 di $J_0(f)$ e ripetendo il ragionamento del punto precedente considerando il polinomio f^p , si nota che U contiene i punti di $J_0(f^p) = J_0(f)$ oltre che v .

In tutti i tre casi si vede che oltre a v l'intorno U contiene altri punti, per cui per la definizione di punti isolati, si può affermare che $J_0(f)$ non ne contiene. $\square$

Ora abbiamo tutte le nozioni per poter enunciare e dimostrare l'uguaglianza tra le due definizioni di insieme di Julia date.

Teorema 3.6. *Se f è un polinomio, allora*

$$J(f) = J_0(f) \tag{3.6}$$

Dimostrazione. Sia w un punto periodico repulsivo di f con periodo $p \geq 1$, allora se definisco $g = f^p$, w è un punto fisso repulsivo per g .

Si supponga che $\{g_k\}$ sia normale in w , allora w ha un intorno V in cui la sottosuccessione $\{g_k\}$ converge uniformemente alla funzione analitica g_0 . Possiamo affermare che non diverge perchè $g^k(w) = w \forall k$. Allo stesso tempo anche le derivate convergono

$$(g^{k_i})'(z) \rightarrow g_0'(z) \text{ se } z \in V$$

Tuttavia $|(g^{k_i})'(w)| = |(g'(w))^{k_i}| \rightarrow \infty$ perchè w è repulsivo. Questo 'però contraddice il fatto che $g_0'(w)$ sia una funzione finita, di conseguenza $\{g_k\}$ non può essere normale in w , allora $w \in J_0(g) = J_0(f^p) = J_0(f)$. Dal momento che $J_0(f)$ è chiuso,

$$J(f) \subseteq J_0(f)$$

Sia $K = \left\{ w \in J_0(f) : \exists z \neq w \text{ con } f(z) = w \text{ e } f'(z) \neq 0 \right\}$ Supposto che $w \in K$, esiste un intorno aperto V di w , su cui si può trovare una funzione analitica inversa $f^{-1}: V \rightarrow \mathbb{C} \setminus V$ tale che

$$f(f^{-1}(z)) = z \text{ per } z \in V$$

Definiamo una famiglia di funzioni analitiche $\{h_k\}$ su V definita come

$$h_k(z) = \frac{f^k(z) - z}{f^{-1}(z) - z}$$

Sia U un qualsiasi intorno aperto di w , quindi $U \subset V$.

Poichè $w \in J_0(f)$ allora la famiglia $\{h_k\}$ deve assumere valori 0 oppure 1 per qualche k e $z \in U$. In particolare assume valore 0, quando $f^k(z) = z$ per qualche $z \in U$. Altrimenti si ha che $f^k(z) = f^{-1}(z)$ il che implica che $f^{k+1}(z) = z$, allora U contiene un punto periodico di f , per cui $w \in J(f)$. In questo modo è stato dimostrato che $K \subset J(f)$. Posso prendere la chiusura di K , ottenendo

$$\overline{K} \subseteq \overline{J(f)} = J(f)$$

Comunque K contiene tutti i punti di $J_0(f)$ ad eccezione di un numero finito di essi. Poichè $J_0(f)$ non contiene punti isolati,

$$J_0(f) = \overline{K} \subseteq J(f)$$

Avendo dimostrato che $J_0(f) \subseteq J(f)$ e che $J(f) \subseteq J_0(f)$, i due insiemi coincidono. $\square$

3.4 Insieme di Mandelbrot

Partendo dall'insieme di Julia, in questa sezione definiremo uno dei primi oggetti frattali, l'insieme di Mandelbrot. Questo insieme è stato definito per la prima volta dallo stesso Benoit Mandelbrot nel 1980.

Nelle sezioni precedenti sono stati considerati gli insiemi generati dal polinomio complesso $f_c(z) = z^2 + c$. Il procedimento si può tuttavia generalizzare a tutte le funzioni quadratiche.

Infatti si definisce $h(z) = \alpha z + \beta$ con $\alpha \neq 0$, allora se componiamo il polinomio $f_c(z)$ con l'inversa di $h(z)$ si ottengono, al variare dei parametri, tutte le funzioni quadratiche

$$h^{-1}(f_c(z)) = \frac{\alpha^2 z^2 + 2\alpha z + \beta^2 + c - \beta}{\alpha}$$

Allora si nota che

$$h^{-1} \circ f \circ h = f$$

il che implica

$$h^{-1} \circ f^k \circ h = f^k \quad \forall k$$

In altre parole la sequenza delle funzioni iterate $\{f^k\}$ non è altro che l'immagine di h^{-1} della serie $\{f^k(h(z))\}$. Questo porta ad affermare che z è un punto periodico di f se e solo se $h(z)$ è un punto periodico di f_c . Allora si possono vedere gli insiemi di Julia generati da f come l'immagine h^{-1} degli insiemi di Julia generati da f_c .

Una funzione h che gode di questa proprietà viene chiamata **congiunzione** tra f e f_c .

Dopo questa generalizzazione sugli insiemi di Julia, si può giungere al cuore di questa sezione, ovvero la definizione dell'insieme di Mandelbrot. Sappiamo che l'inverso del polinomio f_c prende due valori ben distinte $\pm(z-c)^{\frac{1}{2}}$. Allora se consideriamo un piccolo aperto U con $c \notin U$, allora la controimmagine di U $f^{-1}(U)$ contiene due regioni distinte dello spazio.

Definizione 3.7. Si può definire l'insieme di Mandelbrot come l'insieme dei parametri c per cui l'insieme di Julia associato al polinomio f_c è un insieme connesso.

$$M = \left\{ c \in \mathbb{C} : J(f_c) \text{ è connesso} \right\} \quad (3.7)$$

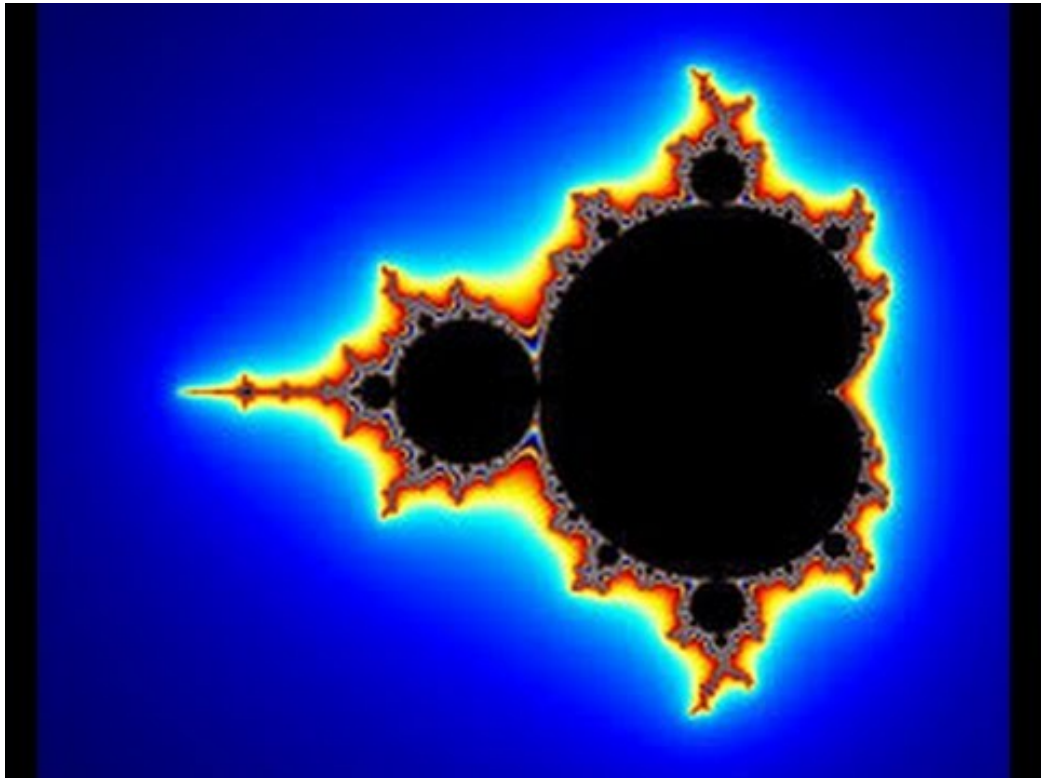


Figura 3.2: Esempio di insieme di Mandelbrot

Esistono delle definizioni equivalenti dell'insieme di Mandelbrot rispetto a quella appena enunciata.

$$M = \left\{ c \in \mathbb{C} : \{f_c^k(0)\}_{k \geq 1} \text{ è limitato} \right\} = \left\{ c \in \mathbb{C} : f_c^k(0) \text{ non tende a } \infty \text{ per } k \rightarrow \infty \right\} \quad (3.8)$$

3.5 Dimensione dell'insieme di Julia e di Mandelbrot

In questa sezione verranno enunciati i teoremi per il calcolo delle dimensioni di Hausdorff della frontiera dell'insieme di Mandelbrot e dell'insieme di Julia generato dal polinomio $f_c(z)$.

Teorema 3.8. *Sia ∂M la frontiera dell'insieme di Mandelbrot M , si ha che*

$$\dim_H(\partial M) = 2$$

E in più per ogni insieme aperto U che interseca ∂M si ha che $\dim_H(\partial M \cap U) = 2$.

Teorema 3.9. *Data una costante $c \in \partial M$,*

$$\dim_H J_c = 2 \quad (3.9)$$

In altri termini, esiste un insieme R denso in ∂M tale che per ogni $c \in R$ allora $\dim_H J_c = 2$

Entrambe le dimostrazioni vengono omesse, ma si possono trovare nell'articolo [8].

Abbiamo quindi trovato che la dimensione di Hausdorff per entrambi gli insiemi è 2. L'insieme di Julia e di Mandelbrot sono un chiaro esempio del fatto che non esista una vera e propria definizione di un oggetto frattale. Infatti essi sono dei frattali pur non avendo una dimensione frazionaria, tuttavia mantengono la struttura frastagliata e irregolare e sono autosimili (a meno di piccole variazioni) come si può vedere nelle figure 4.2 e 4.3.

Capitolo 4

Applicazione musicale

In questa sezione viene spiegato l'algoritmo per la generazione di melodie musicali a partire dagli oggetti frattali. In particolare sono stati generati i seguenti insiemi:

- merletto di van Koch
- insieme di Mandelbrot
- insieme di Julia
- la sequenza di Fibonacci
- gli alberi Frattali

4.1 Generazione di oggetti frattali

Gli oggetti frattali scelti per la generazione sono tutti accomunati dall'essere costruibili tramite una funzione ricorsiva, che è facilmente replicabile con qualsiasi linguaggio di programmazione.

Ognuno dei prossimi algoritmi di generazione restituisce come *output* una lista di punti caratterizzanti l'oggetto frattale in questione. Questa lista sarà poi l'input dell'algoritmo di generazione della melodia vera e propria.

4.1.1 Merletto di von Koch

Il primo insieme di punti generato è quello corrispondente al merletto di van Koch. Come è stato descritto nel primo capitolo, questo insieme si ottiene per sostituzione partendo da un segmento iniziale. Considerando quindi un segmento che congiunge due punti $P1 = (x_1, y_1)$ e $P2 = (x_2, y_2)$. Questo segmento deve essere diviso in tre parti e la parte centrale va sostituita con

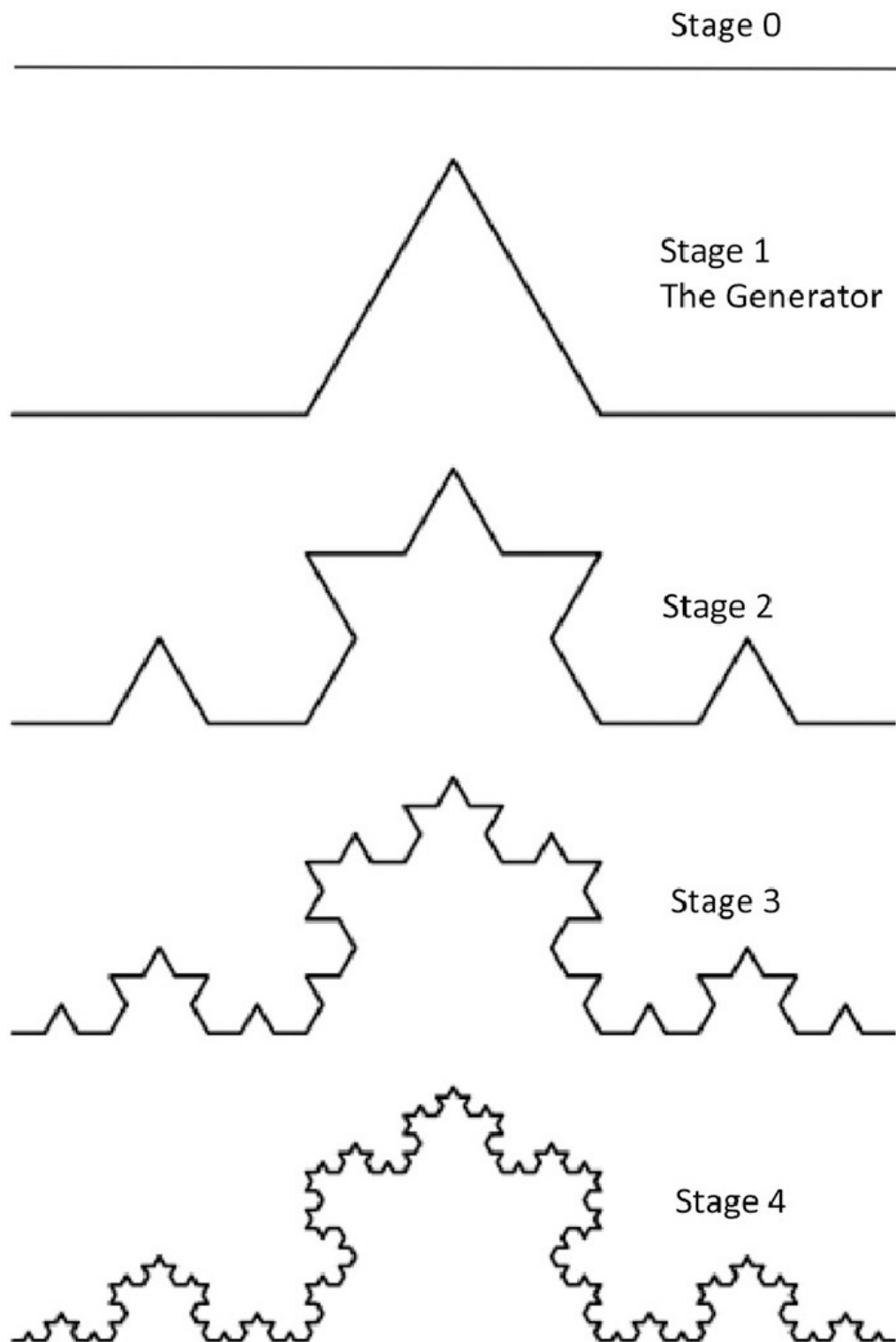


Figura 4.1: Rappresentazione grafica dell'algoritmo

una "montagna", cioè i due segmenti laterali di un triangolo equilatero che ha lato uguale alla lunghezza del segmento appena eliminato. Quindi ad ogni iterazione è necessario calcolare 3 nuovi punti, quelli del segmento eliminato che saranno l'inizio del primo lato del monte e la fine del secondo, in più bisogna calcolare anche la cima. Questi vengono calcolati rispettivamente nel seguente modo:

$$\begin{aligned}x_3 &= \frac{2x_1+x_2}{3} \\y_3 &= \frac{2y_1+y_2}{3} \\x_4 &= \frac{x_1+2x_2}{3} \\y_4 &= \frac{y_1+2y_2}{3} \\x_5 &= x_3 + (x_4 - x_3) \cos \frac{\pi}{3} + (y_4 - y_3) \sin \frac{\pi}{3} \\y_5 &= y_3 + (x_4 - x_3) \sin \frac{\pi}{3} + (y_4 - y_3) \cos \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

Una volta costruito l'elemento generatore, esso sarà composto da 4 segmenti. Su ognuno di essi viene quindi ripetuta la procedura considerando come punti iniziali quelli che descrivono il segmento in considerazione. In questo modo si inizia la vera e propria iterazione che viene stoppata una volta raggiunto il limite di passi stabilito a priori.

Di seguito il codice scritto in java per la creazione dei punti.

```
public ArrayList<String> koch(double x1, double y1, double x2, double y2,
    ArrayList<String> array = new ArrayList<String>();
    double angle = Math.PI/3.0;
    Color clr = Color.blue;
    int iter = it;
    double x3 = (x1 * 2.0 + x2) / 3.0;
    double y3 = (y1 * 2.0 + y2) / 3.0;
    double x4 = (x1 + x2 * 2.0) / 3.0;
    double y4 = (y1 + y2 * 2.0) / 3.0;
    double x5 = x3+(x4-x3)*Math.cos(angle)+(y4-y3)*Math.sin(angle);
    double y5 = y3-(x4-x3)*Math.sin(angle)+(y4-y3)*Math.cos(angle);
    if (iter > 0) {
        iter--;
        array.addAll(koch(x1, y1, x3, y3, iter));
        array.addAll(koch(x3, y3, x5, y5, iter));
        array.addAll(koch(x5, y5, x4, y4, iter));
        array.addAll(koch(x4, y4, x2, y2, iter));
    }else {
        array.addAll(drawLine((int)x1,(int) y1,(int) x3,(int) y3, clr,100));
        array.addAll(drawLine((int)x3,(int) y3,(int) x5, (int)y5, clr, 100));
```

```

array.addAll(drawLine((int)x5,(int) y5,(int) x4,(int) y4, clr,100))
array.addAll(drawLine((int)x4,(int) y4,(int) x2,(int) y2, clr, 100))
}
System.out.println(array.size());
return array;
}

```

4.1.2 Insieme di Mandelbrot

Nelle sezioni precedenti l'insieme di Mandelbrot è stato definito in tre modi equivalenti tra cui l'insieme dei punti tali che il polinomio f_c si mantenga limitato. Se il polinomio è $f_c(z) = z^2 + c$ la successione delle sue iterate è limitata se $|f^k(z)| < 2$. Pertanto per determinare i punti dell'insieme partendo da un punto d'inizio $P = (x, y)$ possiamo generare il successivo calcolando la sua parte reale x e la sua parte immaginaria y . Se c è il numero complesso con parte reale c_x e parte immaginaria c_y , ad ogni iterazione si ha che il punto successivo è caratterizzato dalle seguenti componenti:

$$x_{new} = x^2 - y^2 + c_x$$

$$y_{new} = 2xy + c_y$$

Il punto verrà considerato ed aggiunto alla lista se il suo modulo è inferiore a 2. Ecco il codice per la generazione dei punti dell'insieme di Mandelbrot.

```

public static ArrayList<String> calculatePoint(float x, float y) {
    float cx=x;
    float cy=y;
    int i=0;
    ArrayList<String> array = new ArrayList<String>();

    for (; i<ITERATIONS;i++) {
        float nx= x*x -y*y+cx;
        float ny = 2*x*y+cy;
        x=nx;
        y=ny;

        if (x*x +y*y < 4) {
            array.add(new String(x+"_"+y));
        }
    }
}

```

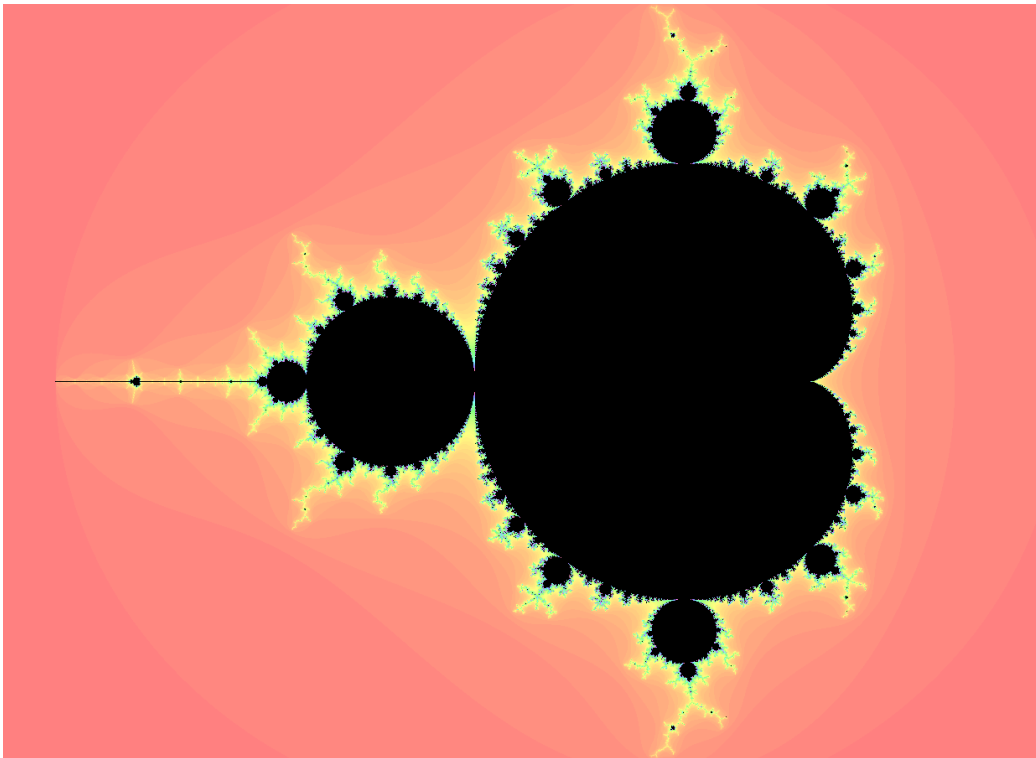


Figura 4.2: Grafico dell'insieme di Mandelbrot generato con l'algoritmo impostando come numero massimo di iterazioni 100 e partendo da $z = 0$

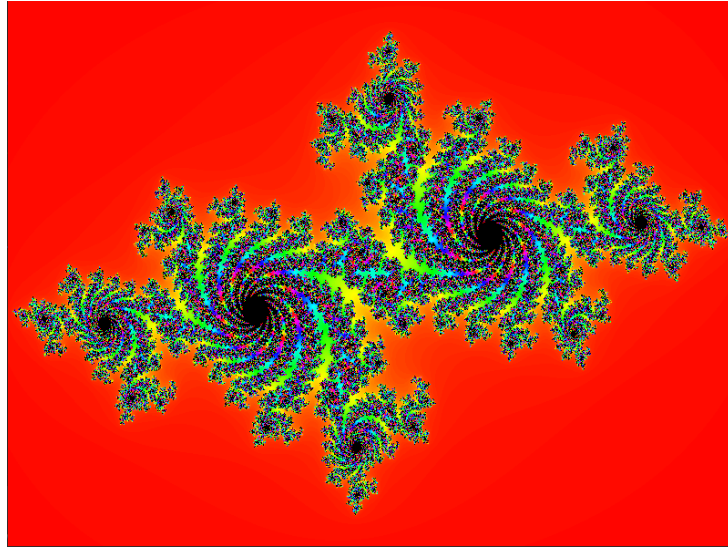


Figura 4.3: Grafico dell'insieme di Julia generato dall'algoritmo ponendo come costante c il numero complesso $-0.7 + 0.27015i$

4.1.3 Insieme di Julia

Per costruire l'insieme di Julia conviene partire dalla sua definizione data nel 3; con $J(f)$ si definisce la chiusura dell'insieme dei punti repulsivi di f . Quindi per costruire l'insieme bisogna calcolare i punti periodici repulsivi del polinomio f .

In questa tesi è stato scelto come polinomio $f(z) = z^2 + c$, dove c è una costante. Analizziamo ora i passaggi per la costruzione. Partendo da $z = 0$ e con la costante $c =$, al passo 0 si ha $z_0 = 0$.

Passo 1. $z_1 = z_0^2 + c = c$

Passo 2. $z_2 = z_1^2 + c = c^2 + c$

Passo 3. $z_3 = z_2^2 + c = c^4 + 2c^3 + c^2 + c$

E avanti così finché i punti non avranno un modulo maggiore di 2 o avremo raggiunto il massimo di iterazioni. Successivamente si cambia punto di partenza z_0 e si ripete l'algoritmo, fino a ricoprire tutto lo spazio possibile. Di seguito è riportato il codice per la generazione dei punti dell'insieme di Julia scritto in Java.

```
int maxIter= 100;
double zoom = 1;
double cX, cY;

int w =800;
```

```

int h =600;
BufferedImage image = new BufferedImage(w, h,
BufferedImage.TYPE_INT_RGB);

cX = -0.7;
cY = 0.27015;
double moveX = 0, moveY = 0;
double zx, zy;

for (int x = 0; x < w; x++) {
    for (int y = 0; y < h; y++) {
        zx = 1.5 * (x - w / 2) / (0.5 * zoom * w) + moveX;
        zy = (y - h / 2) / (0.5 * zoom * h) + moveY;
        float i = maxIter;
        while (zx * zx + zy * zy < 4 && i > 0) {
            double tmp = zx * zx - zy * zy + cX;
            zy = 2.0 * zx * zy + cY;
            zx = tmp;
            i--;
            punti.add(zx+"_"+zy);
        }
    }
}

```

4.1.4 Fibonacci word

Se consideriamo la sequenza di Fibonacci 2, possiamo riformulare la sua costruzione per creare una stringa, che chiamiamo *Fibonacci word*, f , otteniamo quindi la seguente "successione" ricorsiva

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_1 = 01 \\ w_n = w_{n-1} + w_{n-2} \quad \forall n > 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

La *Fibonacci word* f sarà dunque la sequenza infinita $f = 0100101001001010010100\dots$; questa è la sequenza A003849 di OEIS (The Online Encyclopedia of Integer Sequences). Partendo quindi dalla *Fibonacci word* f , si può costruire un insieme frattale utilizzando la regola *Odd-Even Drawing*.

Si indichi con f_n la sequenza corrispondente ai primi n caratteri di f ; per esempio con $n = 10$

$$f_{10} = 0100101001$$

La Odd–Even Drawing rule afferma che:
considerato l'elemento i –esimo della stringa f

- si disegna un segmento
- se l'elemento i –esimo è uguale a 0 allora
 - si svolta a sinistra se l'indice i è pari
 - si svolta a destra se l'indice i è dispari

I primi segmenti vengono quindi costruiti nel modo seguente:

- il primo numero è 0, allora si disegna un segmento verticale e si svolta a destra
- il secondo elemento è un 1, allora si disegna solo un segmento orizzontale senza svoltare
- il terzo elemento è uno 0, dunque si continua disegnando un segmento orizzontale e si svolta a destra
- il quarto numero è 0, quindi si disegna un segmento verticale e si svolta a sinistra

La figura 4.4 mostra la costruzione delle curve frattali, partendo dalla Fibonacci word $f_3 = 010$ che nella figura viene indicata con f_3 , fino a $f_{14} = 01001010010010$. Seguendo questo procedimento è stato costruito il seguente algoritmo.

```

public static ArrayList<String> pointWordFractal(int x, int y, int N) {
    String word = wordFractal(N);
    ArrayList<String> lista = new ArrayList<String>();
    for (int n = 0; n < word.length(); n++) {
        lista.add(x+"_"+y);
        x += dx;
        y += dy;
        if (word.charAt(n) == '0') {
            int tx = dx;
            dx = (n % 2 == 0) ? -dy : dy;
            dy = (n % 2 == 0) ? tx : -tx;
        }
    }
    return lista;
}

```

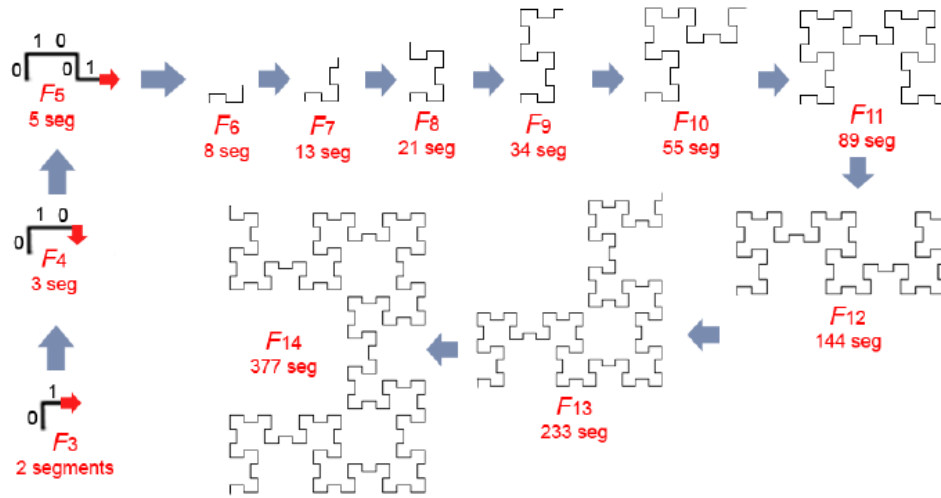


Figura 4.4: Visualizzazione dell'algoritmo di costruzione del frattale di Fibonacci. La figura è tratta dall'articolo [6].

4.1.5 Alberi Frattali

Gli alberi frattali sono costruiti a partire da una linea verticale che rappresenterà il tronco dell'albero. Al passo successivo vengono disegnati altri due segmenti a partire dalla parte alta della linea precedente. Questi due segmenti avranno la stessa lunghezza e saranno ruotati dello stesso angolo, uno verso destra e l'altro verso sinistra, in modo da formare i due rami principali. Ognuno dei segmenti sarà diviso in altri due segmenti con la regola appena descritta. In tal modo si otterrà un albero come quello in figura 4.5.

```
public static void pointTree(int x1, int y1, double angle, int depth) {
    if (depth == 0) return;
    int x2 = x1 + (int)(Math.cos(Math.toRadians(angle)) * depth * 10.0);
    int y2 = y1 + (int)(Math.sin(Math.toRadians(angle)) * depth * 10.0);
    punti.add(x2 + "_" + y2);
    pointTree(x2, y2, angle - 20, depth - 1);
    pointTree(x2, y2, angle + 20, depth - 1);
    return;
}
```

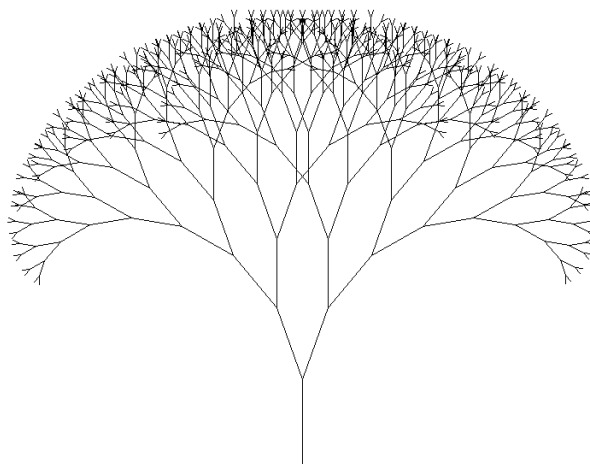


Figura 4.5: Albero frattale generato dall'algoritmo

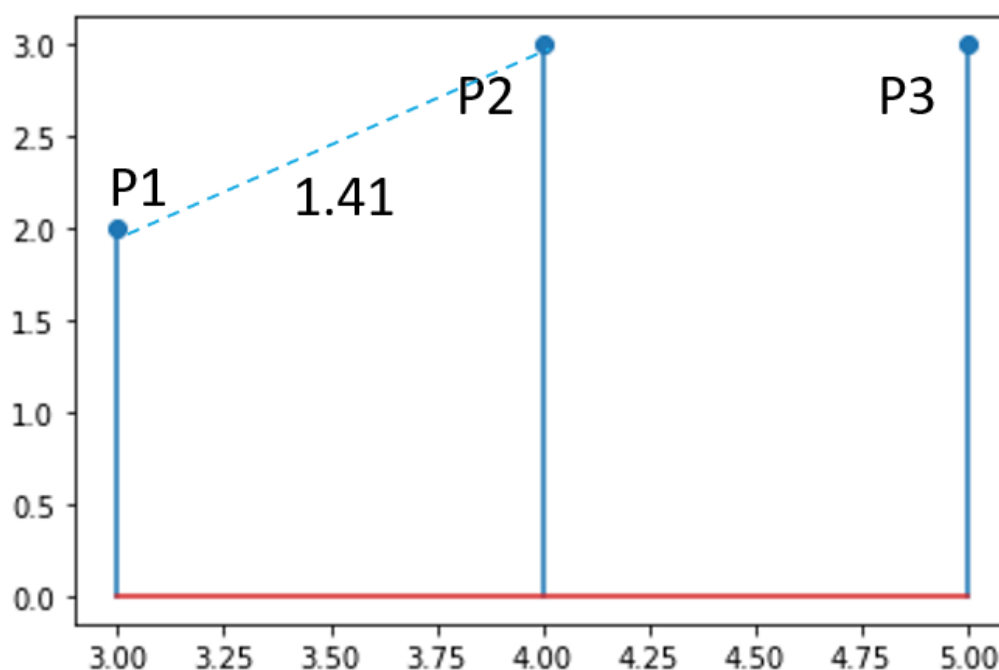
4.2 Algoritmo per la generazione di una melodia

Già nel 1938 Villa Lobos produsse una colonna sonora di un film, che venne poi identificata come «**Mountain Music**». Egli considerò la curva piana del profilo della montagna e tradusse le altezze in note, creando così con la variazione delle altezze una melodia.

L'algoritmo sviluppato in questa tesi, scritto in linguaggio Java, parte da una lista di punti bidimensionali $P = (x, y)$, che corrispondono ai punti appartenenti a un oggetto frattale generato in precedenza.

L'idea alla base consiste nel considerare come note musicali questi punti, in particolare l'ascissa corrisponde a una nota (do, re, mi...), mentre l'ordinata determina l'ottava di appartenenza. Infine rimane da determinare la durata di ciascuna nota; questa è stata calcolata considerando la distanza euclidea tra due punti consecutivi. Per chiarire meglio come funziona l'algoritmo viene presentato il seguente esempio.

Esempio 4.1. Si consideri la seguente lista di punti $P = [(3, 2), (4, 3), (5, 3)]$, la cui rappresentazione grafica è visibile nella figura 4.6. Ad ognuno dei punti è associata una nota (compresi eventuali diesis) e un'ottava nel seguente modo. Le ascisse che in questo caso sono 3, 4, 5 vengono associate alle note seguendo la seguente mappa di associazione

Figura 4.6: Rappresentazione dei punti nella lista P dell'esempio 4.1

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Do	Do♯	Re	Re♯	Mi	Fa	Fa♯	Sol	Sol♯	La	La♯	Si

Quindi in questo caso si ottengono le seguenti note:

3 → Re♯
4 → Mi
5 → Fa

Dopo aver assegnato la nota, ci occupiamo di calcolare la sua ottava. Analogamente per come fatto con le note, partendo dal punto $P = (x, y)$ la funzione che associa al punto il numero di ottava è

$$f(y) = y \mod 12$$

se pensiamo di avere uno strumento con 12 ottave. Quindi tornando all'esempio si hanno le seguenti note: Re♯ della seconda ottava, Mi e Fa della terza ottava.

Ora è necessario calcolare la durata di ogni nota (avendo in questo esempio solo tre note possiamo calcolare la durata di due note - Re♯ e Mi). Per farlo

si utilizza la distanza euclidea tra due punti nello spazio $\mathbb{R}^2$, definita come

$$d(P1, P2) = \sqrt{(x_{P2} - x_{P1})^2 + (y_{P2} - y_{P1})^2} \quad \text{dove } Pi = (x_{Pi}, y_{Pi}) \text{ con } i = 1, 2$$

Una volta calcolata la distanza, viene troncata all'intero più vicino e poi moltiplicata per l'unità base scelta (una semicroma, $\frac{1}{16}$). Pertanto si ottengono le seguenti note:

Nota	Ottava	Durata
Re $\sharp$	2	$\frac{1}{16}$
Mi	3	$\frac{1}{16}$

Bisogna osservare che nel caso in cui i valori vadano oltre l'11, nel caso delle note, o il 16 nel caso della distanza su di essi viene applicato il corrispondente modulo (12 e 17 rispettivamente), così da rientrare negli indici sopra individuati. Una volta costruite tutte le note esse vengono inserite in un'unica stringa.

4.2.1 Riproduzione della melodia - Libreria JFugue

Per poter riprodurre le note appena prodotte, è stata utilizzata la libreria JFugue nella versione 5.0.9. La libreria permette di riprodurre dei suoni a partire da una stringa in cui vengono elencate le note, l'ottava di appartenenza e la loro durata (in linea con quanto costruito in precedenza). In particolare le note vengono individuate considerando la loro forma "anglosassone", cioè ad ogni nota è associata una lettera dell'alfabeto. Di seguito un breve riepilogo delle lettere associate alle note.

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si
C	D	E	F	G	A	B

Inoltre per ottenere gli eventuali diesis basta inserire $\sharp$ accanto alla lettera corrispondente.

Oltre alla nota in sé bisogna inserire nella stringa anche la corrispondente ottava. In questo caso basta aggiungere accanto alla nota la sua ottava.

Infine rimane da definire la durata. Anch'essa si scrive nella stringa, subito dopo l'indicazione dell'ottava. Ogni durata ha un suo simbolo caratteristico che è identificato da una o più lettere in sequenza. Nella tabella di seguito vengono elencate le durate e il corrispondente valore per la libreria.

$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	1
s	i	sss	q	sssss	iii	s7	h	s9	i5	s11	q3	s13	i7	s15	w

Per di più la libreria permette di scegliere il tempo e lo strumento musicale di riproduzione, si possono far suonare delle melodie allegre, moderate, adagio o lente impostando i beats per minuto, l'impostazione di default (cioè se essa non viene indicata) è impostata a 120. Nelle melodie costruite si è scelto di impostare un tempo di esecuzione allegretto con 110 beats al minuto. Invece per gli strumenti musicali si può scegliere se utilizzare un pianoforte, un violino, una chitarra, la voce umana o altri strumenti.

Per far sì che la melodia scritta venga riprodotta si utilizza la classe *Player*, la quale possiede il metodo *play*. Questa funzione riceve in input una stringa come quella composta ed è in grado di tradurla in uno suono.

Conclusioni

L'obiettivo di questa tesi è stato lo studio degli insiemi frattali dal punto di vista geometrico e l'applicazione in ambito musicale con la scrittura degli algoritmi di generazione sia di alcuni frattali che della melodia.

Per sviluppi futuri, si possono costruire nuovi oggetti frattali e fornire in input la lista di punti ottenuta all'algoritmo di generazione di una melodia per sentire come "suona" quell'insieme.

Inoltre per generare altre melodie utilizzando comunque gli algoritmi già implementati, si possono variare i parametri all'interno delle funzioni, dal momento che questi sono stati scelti in maniera arbitraria, basti pensare alla scelta della costante c per costruire l'insieme di Julia.

Infine i risultati dell'applicazione ad alcuni insiemi generati sono disponibili ai seguenti link [9], [10], [11].

Bibliografia

- [1] Luigi Ambrosio and Paolo Tilli. *Topics on analysis in metric spaces*, volume 25. Oxford University Press on Demand, 2004.
- [2] KJ Falcomer. *Fractal geometry: Mathematical foundation and applications*, 1990.
- [3] Gerald Edgar. *Measure, topology, and fractal geometry*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [4] Kenneth J Falconer. *The geometry of fractal sets*, volume 85. Cambridge university press, 1986.
- [5] Benoit B Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*. Freeman, San Francisco, 1982.
- [6] Alexis Monnerot-Dumaine. The fibonacci word fractal. 2009.
- [7] Encyclopedia of Mathematics. Hausdorff metric. http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Hausdorff_metric&oldid=38917.
- [8] Mitsuhiro Shishikura. The hausdorff dimension of the boundary of the mandelbrot set and julia sets. *arXiv preprint math/9201282*, 1991.
- [9] Antonella Cupi. von koch curve music. https://youtu.be/_y1KzZqaj3M.
- [10] Antonella Cupi. Mandelbrot music. <https://youtu.be/Qo1CnAaqutU>.
- [11] Antonella Cupi. Julia set music. <https://youtu.be/Z-w-XNFwlvC>.
- [12] Encyclopedia of Mathematics. Similarity. <http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Similarity&oldid=31636>.

- [13] Encyclopedia of Mathematics. Julia set. http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Julia_set&oldid=14959.
- [14] Encyclopedia of Mathematics. Analytic function. http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Analytic_function&oldid=32488.
- [15] S Sukumaran and Dheepa Thiyagarajan. Generation of fractal music with mandelbrot set. *Global Journal of Computer Science and Technology*, 9(4), 2009.
- [16] L. Caire. *Dispense del corso di 'Fondamenti scientifico-tecnologici della musica', Lezione 5/ Caire L.* Politecnico di Torino, Torino, 2011.