

# **POLITECNICO DI TORINO**

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Gestionale



Tesi di Laurea Magistrale

## **ASSET ALLOCATION: COSTRUZIONE DI UN PORTAFOGLIO CON INDICI DI MERCATO**

**Relatore**

**Prof. Franco Varetto**

**Candidato**

**Vincenzo Marra**

Anno Accademico 2018/2019



## Sommario

|                                                                                 |           |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. ANALISI DEI DATI.....</b>                                                 | <b>4</b>  |
| 1.1 TIPOLOGIA DEGLI ASSET .....                                                 | 4         |
| 1.2 PREMessa AL TRATTAMENTO DEI DATI .....                                      | 6         |
| 1.3 ASX 200 .....                                                               | 9         |
| 1.4 CAC 40.....                                                                 | 12        |
| 1.5 DAX .....                                                                   | 15        |
| 1.6 DOW 30 .....                                                                | 18        |
| 1.7 FTSE 100.....                                                               | 21        |
| 1.8 FTSE MIB.....                                                               | 24        |
| 1.9 JSE Top 40.....                                                             | 27        |
| 1.10 NIKKEI 225 .....                                                           | 30        |
| 1.11 TSX .....                                                                  | 33        |
| 1.12 SHANGHAI.....                                                              | 36        |
| <b>2. I MERCATI FINANZIARI .....</b>                                            | <b>39</b> |
| 2.1 IL MERCATO FINANZIARIO .....                                                | 39        |
| 2.2 EFFICIENZA DEI MERCATI .....                                                | 39        |
| 2.3 LA TEORIA DEL “RANDOM WALK”.....                                            | 40        |
| 2.3.1 La teoria del “Random Walk”: approccio matematico .....                   | 41        |
| 2.3.2 Verifica della teoria del “Random Walk” .....                             | 43        |
| 2.3.2 ASX 200 .....                                                             | 44        |
| 2.3.3 CAC 40.....                                                               | 45        |
| 2.3.4 DAX.....                                                                  | 46        |
| 2.3.5 DOW 30 .....                                                              | 47        |
| 2.3.6 FTSE 100.....                                                             | 48        |
| 2.3.7 FTSE MIB .....                                                            | 49        |
| 2.3.8 JSE Top 40.....                                                           | 51        |
| 2.3.9 NIKKEI 225 .....                                                          | 52        |
| 2.3.10 TSX.....                                                                 | 53        |
| 2.3.11 SHANGHAI .....                                                           | 55        |
| <b>3. TEORIA DI SELEZIONE DEL PORTAFOGLIO.....</b>                              | <b>56</b> |
| 3.1 PREZZI, RENDIMENTI, QUOTE .....                                             | 56        |
| 3.2 MODELLO DI MARKOWITZ .....                                                  | 57        |
| 3.4 APPLICAZIONE PRATICA PER LA COSTRUZIONE DELLA FRONTIERA EFFICIENTE .....    | 62        |
| 3.5 IL PORTAFOGLIO DI MERCATO: AGGIUNTA DEL TITOLO RISK FREE .....              | 66        |
| 3.6 PORTAFOGLIO DI MERCATO: APPLICAZIONE PRATICA .....                          | 69        |
| 3.7 IL PORTAFOGLIO OTTIMO .....                                                 | 73        |
| 3.8 PORTAFOGLIO A LA MARKOWITZ POST RISCHIO VALUTARIO .....                     | 77        |
| <b>4. IL MODELLO DI BLACK &amp; LITTERMAN.....</b>                              | <b>85</b> |
| 4.1 L’IMPIANTO TEORICO E LE IPOTESI .....                                       | 85        |
| 4.2 L’APPROCCIO DI EQUILIBRIO .....                                             | 86        |
| 4.3 VIEW DELL’INVESTITORE E LIVELLO DI CONFIDENZA.....                          | 89        |
| 4.4 L’APPROCCIO BAYESIANO AL MODELLO .....                                      | 90        |
| 4.5 L’APPLICAZIONE DEL MODELLO .....                                            | 94        |
| 4.5.1 I pesi della capitalizzazione di mercato .....                            | 94        |
| 4.5.2 Il coefficiente di avversione al rischio .....                            | 96        |
| 4.5.3 Il vettore $\theta$ dei rendimenti impliciti .....                        | 97        |
| 4.6 LE VIEW DELL’INVESTITORE .....                                              | 99        |
| 4.6.1 Le tensioni europee .....                                                 | 99        |
| 4.6.2 Le Americhe.....                                                          | 101       |
| 4.6.3 L’estremo oriente .....                                                   | 102       |
| 4.7 L’APPROCCIO BAYESIANO: AGGREGAZIONE DELLE VIEW AI RENDIMENTI IMPLICITI..... | 105       |
| 4.8 LE QUOTE DI PORTAFOGLIO DI BLACK & LITTERMAN.....                           | 107       |

|                                                              |            |
|--------------------------------------------------------------|------------|
| <b>4.9 IL MODELLO DI B&amp;L POST RISCHIO VALUTARIO.....</b> | <b>109</b> |
| <b>CONCLUSIONI .....</b>                                     | <b>114</b> |
| <b>BIBLIOGRAFIA .....</b>                                    | <b>116</b> |

# Introduzione

L'asset allocation è il processo con il quale si decide in che modo distribuire le risorse fra i diversi possibili investimenti. Le principali categorie di investimenti entro cui si orienta questa scelta possono essere suddivise in attività finanziarie (azioni, obbligazioni, liquidità) o attività reali (immobili, merci, metalli preziosi, etc.).

I vari investimenti o asset gestiti dall'investitore tramite l'asset allocation sono in genere suddivisi e organizzati per tipologie chiamate asset class. Gli asset class possono distinguere la natura dell'investimento: per esempio i titoli di debito come le obbligazioni possono costituire un asset class diverso dai titoli di capitale come le azioni. Il sistema dell'organizzazione degli asset class può però seguire anche altri metodi: per esempio gli asset gestiti possono essere distinti in base all'orizzonte temporale (breve/medio/lungo termine) entro cui si inquadra l'investimento stesso.

In generale l'asset allocation porta alla gestione e all'organizzazione dei vari asset e dei loro insiemi suddivisi per tipologia (gli asset class appunto) in un portafoglio gestito dall'asset manager, ossia da colui che decide da solo o entro l'ambito di un team in che modo allocare le risorse.

In sostanza l'asset allocation ha il compito di raggiungere una gestione ottimale del portafoglio, ossia una gestione che equilibri nel miglior modo possibile il rendimento e il rischio delle attività alle esigenze e alle aspettative dell'investitore. Le due istanze del rendimento e del rischio tendono ad essere proporzionali in quanto in genere un'attività ad elevato rischio tende anche ad avere un elevato rendimento atteso. Il rischio è per questo motivo considerato come uno dei parametri fondamentali per distinguere tra loro gli investimenti. Alcuni studiosi parlano a tal proposito di rischio specifico e di rischio generico:

- Il rischio specifico è un rischio legato alla natura dello stesso investimento. Se per esempio si prende un investimento azionario, il rischio specifico sarà dato dalle caratteristiche economiche della società emittente dall'andamento del conto economico, alla solidità patrimoniale, alle prospettive future, al posizionamento dell'azienda rispetto ai suoi concorrenti;
- Il rischio generico (o sistemico) è invece il rischio a cui il singolo investimento è sottoposto per via delle fluttuazioni del mercato e che non può essere eliminato o sostanzialmente diminuito con la diversificazione del portafoglio, come invece avviene per il rischio generico.

Ovviamente esistono diversissimi profili di investitore che richiedono altrettante gestioni dei singoli portafogli. Per esempio un investitore orientato con un basso profilo rischio/rendimento sarà tendenzialmente più orientato a un portafoglio finanziario con una più elevata componente obbligazionaria che azionaria (Borsa Italiana, 2017).

Negli anni si sono sviluppati però diversi modelli di asset allocation: i più famosi sono quelli che fanno capo al premio nobel Markowitz e agli studiosi Black & Litterman.

- Lo studio di Markowitz si basa sull'analisi del processo che genera la domanda e l'offerta di attività finanziarie in funzione del rapporto rischio/rendimento da esse espresso. Il principio base che governa la teoria di Markowitz è che al fine di costruire un portafoglio efficiente occorre individuare una combinazione di titoli tale da minimizzare il rischio e massimizzare il rendimento complessivo compensando gli andamenti asincroni dei singoli titoli. Per far sì che ciò accada, i titoli che compongono il portafoglio dovranno essere incorrelati o, meglio, non perfettamente correlati. Gli assunti fondamentali della teoria di portafoglio secondo Markowitz sono i seguenti:
  1. Gli investitori intendono massimizzare la ricchezza finale e sono avversi al rischio;
  2. Il periodo di investimento è unico;
  3. I costi di transazione e le imposte sono nulli, le attività sono perfettamente divisibili;
  4. Il valore atteso e la deviazione standard sono gli unici parametri che guidano la scelta;
  5. Il mercato è perfettamente concorrenziale (performance trading, s.d.).

Per la determinazione del portafoglio più efficiente è necessario stabilire intanto la frontiera efficiente: è una curva su cui sono collocati tutti i portafogli che per un dato rendimento hanno minor rischio e per un determinato grado di rischio hanno maggior rendimento. Una volta individuati i portafogli che fanno parte della frontiera efficiente è possibile individuare quello che soddisfa maggiormente il profilo del singolo investitore che varia a seconda della maggiore o minore propensione al rischio dell'investitore stesso. Per questo è necessario introdurre il concetto di curva di indifferenza: indica la preferenza del singolo investitore basandosi sul rendimento atteso e sul grado di rischio. Nel caso in cui l'investitore sia maggiormente propenso al rischio sceglierà un portafoglio posto nella parte in alto a destra della frontiera; se al contrario, l'investitore avrà una minor propensione al rischio preferirà un portafoglio posto nella parte in basso a sinistra della frontiera (ForexWiki, s.d.).

- Nel modello Black & Litterman invece viene utilizzato un approccio bayesiano per combinare le views soggettive di un investitore, riguardo ai rendimenti attesi di uno o più titoli, con il vettore dei rendimenti attesi (la distribuzione a posteriori). I rendimenti attesi di equilibrio rappresentano il punto di partenza e un riferimento neutrale per i rendimenti attesi. Essi permettono al modello di generare portafogli ottimi molto più stabili rispetto alla situazione in cui sono utilizzate altre stime dei rendimenti. La caratteristica più innovativa del modello consiste nella combinazione delle aspettative dell'investitore con il vettore dei rendimenti attesi di equilibrio. Si ottiene una nuova distribuzione dei rendimenti attesi e l'intero vettore dei rendimenti medi attesi da inserire nell'ottimizzazione media-varianza viene modificata. Questa rettifica permette di ridurre le opportunità di arbitraggio che deriverebbero dalle pur minime differenze tra i rendimenti attesi di equilibrio e le previsioni soggettive dell'investitore, evitando così portafogli pesantemente concentrati in pochi titoli. Infine per ottenere il portafoglio ottimo finale, i rendimenti e la varianza calcolati, dovranno essere inseriti come input all'interno del processo di ottimizzazione standard di Markowitz (verafinanza, 2019).

# 1. Analisi dei dati

## 1.1 Tipologia degli asset

Importante ai fini della trattazione in oggetto è la scelta degli strumenti finanziari che verranno utilizzati come set di partenza per la composizione del portafoglio e sui quali si snoderà l'intera analisi. Il problema principale consiste nell'impiegare dati che incorporino il più possibile gli effetti delle operazioni compiute sul capitale quali acquisizioni, scissioni, frazionamenti, dividendi; tutti questi sono eventi che influenzano profondamente le quotazioni e di conseguenza anche gli operatori finanziari. Le fonti utilizzate per il reperimento delle serie storiche (Investing.com) non presentano indicazioni chiare circa le rettifiche applicate ai singoli titoli azionari per operazioni sul capitale, proprio per tale ragione si è deciso di ricorrere agli interi indici borsistici.

In particolare sono stati scelti 10 indici mondiali, cercando di differenziarli il più possibile non solo per aree geografiche, in modo da avere una visione a tutto tondo nella scelta della capital allocation, ma anche per diverse capitalizzazioni di mercato raggiunte e importanza del relativo indice all'interno dello scacchiere economico mondiale, a tal punto da diversificare il più possibile la costruzione del suddetto portafoglio.

Vi è da fare però un'ulteriore osservazione: la maggiore parte degli indici presi in considerazione sono definiti secondo un criterio "value weighted", vale a dire che il peso di cadauno è proporzionale alla capitalizzazione di borsa; ciò permette di limitare fortemente la distorsione indotta da quotazioni determinate secondo il principio "price weighted". In queste ultime i pesi variano in funzione del prezzo, indipendentemente dalla dimensione della capitalizzazione e dell'impresa. Esempi di indici price weighted sono il DOW 30, il NIKKEI 225, SHANGHAI Composite Index. La ratio adottata nell'analisi comunque è stata indirizzata nel cercare di considerare nel paniere asset che per la maggioranza ricalcassero la teoria del value weighted in modo da limitare le distorsioni da variabili omesse.

Sulla base di quanto detto, la tabella seguente riassume gli indici selezionati per l'elaborato in oggetto:



Tabella 1 - Indici di riferimento

| Indice     | Stato         | Valuta |
|------------|---------------|--------|
| ASX 200    | Australia     | AUD    |
| CAC 40     | Francia       | EUR    |
| DAX        | Germania      | EUR    |
| DOW 30     | USA           | USD    |
| FTSE 100   | Gran Bretagna | GBP    |
| FTSE MIB   | Italia        | EUR    |
| JSE TOP 40 | Sud Africa    | ZAR    |
| NIKKEI 225 | Giappone      | JPY    |
| TSX        | Canada        | CAD    |
| SHANGHAI   | Cina          | CNY    |

**Legenda valute:**

AUD: Dollaro Australiano

EUR: Euro

USD: Dollaro Americano

GBP: Sterlina Britannica

ZAR: Rand Sudafricano

JPY: Yen Giapponese

CAD: Dollaro Canadese

CNY: Renminbi Cinese

Quando l'oggetto della scelta di investimento ricade su strumenti finanziari esteri è necessario avere bene a mente i rischi aggiuntivi a cui si è esposti. Il Forex, ossia il mercato delle valute, è una delle piazze più grandi del mondo e presenta delle proprie dinamiche che influenzano in maniera significativa la redditività di un investimento. L'investitore che decide che decide di allocare la sua ricchezza in mercati che presentano una valuta diversa rispetto a quella del suo mercato domestico, deve tenere conto sia del vantaggio comparato, sia del rischio valutario per potere costruire il suo portafoglio in modo razionale ed intelligente. Infatti se da un lato il primo caso può portare maggiori guadagni, il secondo aspetto vincola i rendimenti degli asset in considerazione alle fluttuazioni dei vari tassi di cambio.

Pertanto in questa trattazione, per ulteriore completezza dell'analisi di costruzione di un portafoglio azionario mediante diversi modelli di asset location, si è ritenuto opportuno sviluppare uno studio pre e post rischio valutario nei confronti di una valuta scelta come riferimento (dollaro americano), in modo da studiare come variasse il vettore di composizione di portafoglio, sul quale poi sono state formulate valide considerazioni, in merito anche alla robustezza dei modelli presi in esame. In sostanza si assumerà il punto di vista di un investitore americano.

## 1.2 Premessa al trattamento dei dati

Le serie storiche di dati, impiegate per l'elaborazione delle statistiche descrittive, sono costituite da stringhe composte rispettivamente dalla data di riferimento del relativo record, prezzo di chiusura della borsa, relativo tasso di cambio registrato in quella data relativo al dollaro americano con relativa conversione dell'ammontare<sup>1</sup>; l'arco temporale coperto va dal 1° Gennaio 2014 al 31 Dicembre 2018 (un lustro). La tabella seguente riporta a titolo di esempio come sono state organizzate le varie serie storiche sulla base dei dati citati:

Tabella 2 - Esempio di serie storica relativo all'indice ASX 200

| Data       | Ultimo (AUD) | Cambio AUD/USD | Ultimo (USD) |
|------------|--------------|----------------|--------------|
| 02.01.2014 | 5.367,90     | 0,891          | 4.782,80     |
| 03.01.2014 | 5.350,10     | 0,8947         | 4.786,73     |

I tassi di cambio sono stati utilizzati per tutte le serie storiche in modo da convertire i prezzi di chiusura di borsa in dollari e poi successivamente a partire da questi si sono calcolati i Log rendimenti con le relative statistiche descrittive, utilizzate poi nel proseguo della trattazione. Inoltre per via della diversa gestione delle giornate di contrattazione dei vari Paesi, un po' perché la calendarizzazione dei trading day differisce in funzione del mercato di riferimento, i valori di indice e cambio relativi ad una determinata data in molti casi non corrispondevano; in sostanza le stringhe con i dati valutari presentavano un numero maggiore di elementi rispetto a quelle degli indici azionari, provocando una desincronizzazione tra le variabili. Si è reso dunque necessario un intervento di filtratura dei dati, andando a scartare tutti quei valori che non trovavano una corrispondenza negli indici; solamente una volta fatto ciò è stato possibile calcolare i rendimenti logaritmici con le relative analisi statistiche in entrambe le valute, quella locale e di riferimento.

---

<sup>1</sup> Le serie storiche di dati comprendevano i valori di apertura, massimo, minimo e chiusura delle sedute di contrattazione. Si è ritenuto opportuno utilizzare i soli valori di chiusura perché erano i più attendibili tra le quotazioni disponibili.

La variabile aleatoria di riferimento è rappresentata dai rendimenti logaritmici che, in presenza di variazioni percentuali ragionevolmente piccole, approssimano in modo soddisfacente il calcolo aritmetico. Il Log rendimento è definito nel seguente modo:

$$(1.1) \quad r_t = \ln(p_t/p_{t-1})$$

dove numeratore e denominatore rappresentano rispettivamente il prezzo di chiusura di borsa all'istante  $t$  e  $t-1$ .

Come già detto, successivamente, il passo implementativo ha coinvolto lo studio di ulteriori indicatori che dessero maggiori informazioni sulla distribuzione temporale dei rendimenti logaritmici:

- I. La media come parametro di centratura della distribuzione;*
- II. La deviazione standard e la varianza come misure di dispersione;*
- III. La skewness (asimmetria) per indicazioni sulla decentrata;*
- IV. La curtosi come indicatore dello spessore delle code (fat tails).*

Tali parametri, insieme al “test di normalità” svolto per ciascuno indice, ha permesso di analizzare più approfonditamente la distribuzione dei rendimenti e capire se quest’ultimi erano approssimabili o meno ad una distribuzione normale.

In ultimo ma non meno importante, nella descrizione di ciascun indice è stata inserita anche una parte di analisi delle “medie mobili”.

Le medie mobili come riportato da money.it (money.it, 2019) sono degli algoritmi che consentono attraverso una formula, di ricavare un indicatore sintetico dell’andamento del prezzo di un asset finanziario. Dal punto di vista matematico questo indicatore è una “media” di una determinata quantità di dati, ossia i prezzi di un asset finanziario, rispetto ad una finestra temporale “mobile”, poiché considera soltanto le ultime ‘N’ rilevazioni in ordine di tempo. Nel calcolo di una media mobile infatti il numero di elementi (i prezzi) è fisso, mentre la finestra temporale considerata avanza: il dato più vecchio della serie viene sostituito ogni giorno con quello nuovo. Questo procedimento matematico fa sì che la media si muova in progressione con l’andamento del prezzo del titolo oggetto del calcolo. Ci sono tre tipologie di media mobile, a seconda della differente costruzione della formula aritmetica sottostante: media mobile semplice, media mobile ponderata e media mobile esponenziale<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup> In questa trattazione si farà riferimento puramente alla media mobile semplice.

La media mobile semplice (Simple Moving Average, da cui l'acronimo SMA) è una classica media aritmetica del prezzo. Si calcola sommando i prezzi di chiusura di N periodi di tempo e dividendo il risultato ottenuto per N:

(1.2)

$$SMA = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i$$

Come si vedrà nei seguenti paragrafi, l'analisi condotta è costruita tramite l'utilizzo di due medie mobili: si utilizza una media più veloce e una più lenta e se ne osservano gli incroci. Se la media mobile più veloce taglia al rialzo quella lenta si avrà un segnale di acquisto (il noto "golden cross"), mentre si avrà un segnale di vendita quando la media mobile più lenta incrocia al ribasso quella più veloce (il famoso "death cross") (money.it, 2019).

### 1.3 ASX 200

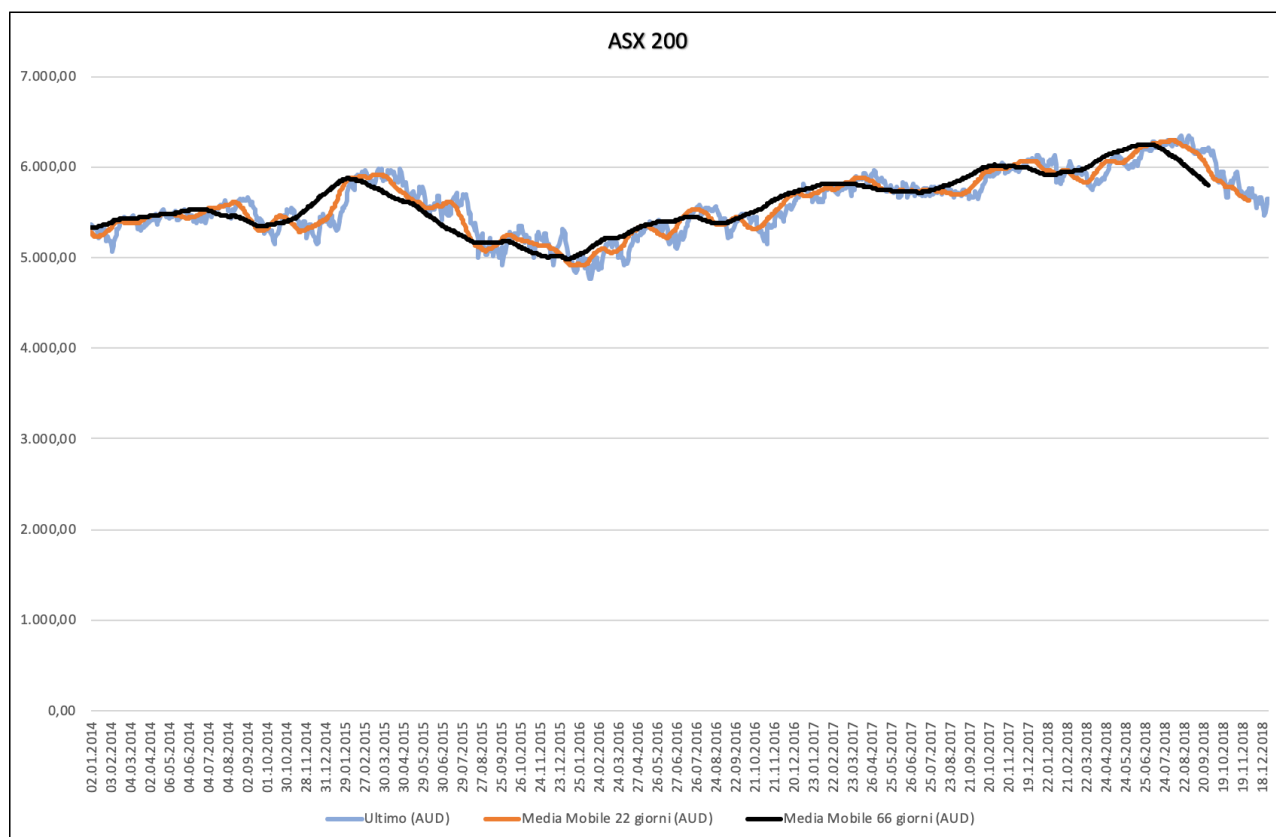


Figura 1 - Andamento prezzi indice di borsa ASX 200 con medie mobili

Il grafico in alto dimostra l'andamento dei prezzi dell'ASX 200 nel quinquennio che va dal 01/01/2014 al 31/12/2018. A quest'ultima curva sono state aggiunte le medie mobili, la cui definizione è stata anticipata nel paragrafo precedente: come si può osservare le medie prese in considerazione sono due, una più "veloce" a 22 giorni, equivalente ad un mese di trading days, e una più "lenta" a 66 giorni, equivalente a 3 mesi di trading days. Come già accennato l'utilizzo combinato di queste due categorie di medie, con quello che è l'andamento complessivo delle oscillazioni delle quotazioni dei prezzi dell'asset di riferimento, è possibile predire in quali range temporali il mercato è rialzista/ribassista e di conseguenza che tipologie di strategie adottare in termini di contrattazione (short/long<sup>3</sup>).

<sup>3</sup> Con questi due termini si identificano rispettivamente la volontà di vendere e acquistare un determinato asset finanziario.

Se si osserva attentamente il grafico, è possibile scorgere nell'arco temporale tra fine Gennaio e inizio Febbraio 2015 come la media mobile più veloce taglia al rialzo quella più lenta, il che predice un imminente ribasso delle performance dei prezzi di borsa, con una possibile entrata tipo long nel mercato (acquistare titoli perché conveniente, dato il ribasso dei prezzi); quanto detto è poi dimostrato da lì a poco, appunto, con performance negative dell'indice, evidenziate dalla curva di colore celeste chiaro.

Viceversa tra Settembre e Ottobre 2014 si avrà un segnale di vendita (andare short), vale a dire che converrebbe vendere asset dato l'imminente fase di rialzo dei prezzi dell'intero mercato, che può portare ad un guadagno tramite ricorso al capital gain<sup>4</sup>; questo viene predetto per il fatto che la media mobile più lenta (curva di colore nero) taglia al ribasso la media più veloce (curva di colore arancione).

Analizzato in prima battuta l'indice ASX 200 da un punto di vista delle performance generali, si è poi proceduto al calcolo dei Log rendimenti e alla determinazione delle variabili statistiche rilevanti. Di seguito vengono riportati i valori dei dati con la rappresentazione della distribuzione dei rendimenti e il test di normalità della stessa, ottenuti in ambiente SPSS:

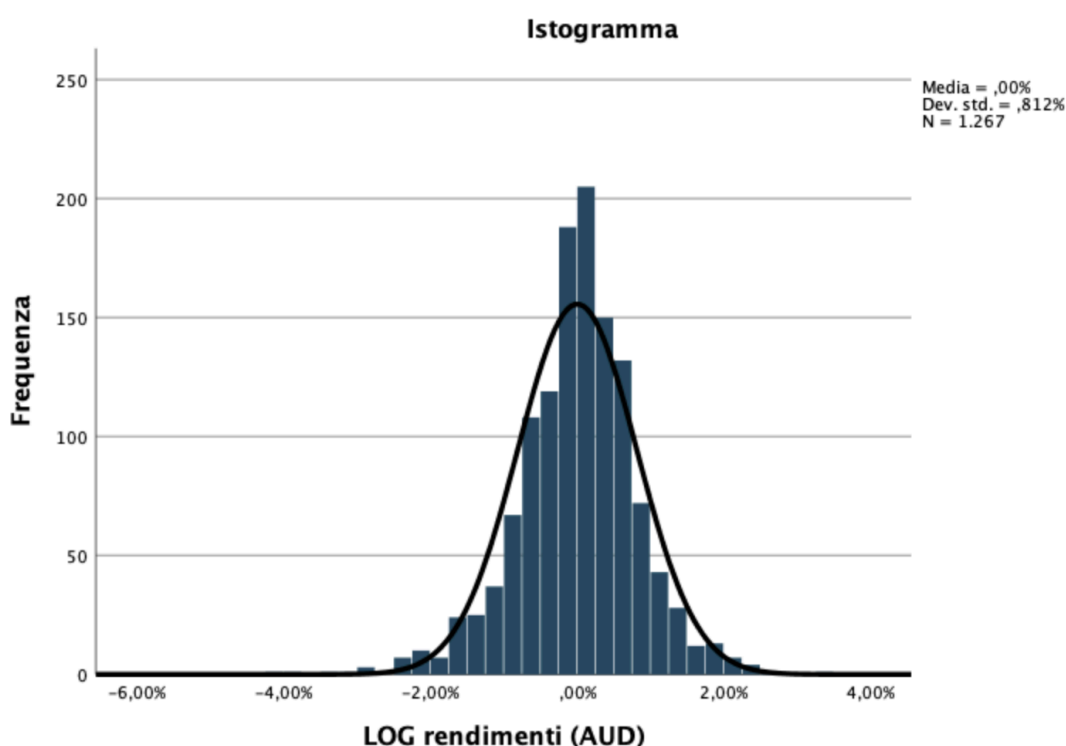


Figura 2 - Distribuzione dei log-rendimenti

<sup>4</sup> Profitti proveniente dalle variazioni di prezzo di un asset finanziario.

La seguente figura mostra la distribuzione dei log-rendimenti che a primo impatto sembra essere normale: per determinare effettivamente ciò, sono necessarie ulteriori parametri quali asimmetria e curtosi, i quali poi insieme al test di normalità ci permetteranno di capire se effettivamente a distribuzione è approssimabile ad una normale.

Nelle seguenti tabelle sono riportati i dati di riferimento:

#### Statistiche

|                                  |          |          |
|----------------------------------|----------|----------|
| LOG rendimenti (AUD)             |          |          |
| N                                | Valido   | 1267     |
|                                  | Mancante | 10       |
| Media                            |          | 0,0040%  |
| Deviazione std.                  |          | 0,81173% |
| Varianza                         |          | ,659     |
| Asimmetria                       |          | -,405    |
| Errore standard della asimmetria |          | ,069     |
| Curtosi                          |          | 1,933    |
| Errore standard della curtosi    |          | ,137     |

#### Test di normalità

|                      | Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup> |      |       | Shapiro-Wilk |      |       |
|----------------------|---------------------------------|------|-------|--------------|------|-------|
|                      | Statistic a                     | gl   | Sign. | Statistic a  | gl   | Sign. |
| LOG rendimenti (AUD) | ,056                            | 1267 | ,000  | ,978         | 1267 | ,000  |

a. Correzione di significatività di Lilliefors

Figura 3 - Analisi statistica descrittiva ASX 200

Calcolati tutti i valori necessari è possibile effettuare il test di normalità. Il suddetto test consta di due parti: la prima riguarda quello di “Kolmogorov-Smirnov”, in cui il valore statistico deve essere inferiore a 0,07; la seconda invece fa riferimento a “Shapiro-Wilk” in cui il valore statistico deve essere contenuto nel range 0,97 e 1.

Come si evince dai dati entrambi i test sono rispettati, pertanto è possibile approssimare la distribuzione dei rendimenti dell’ASX 200 ad una normale, in modo da potere beneficiare di tutte semplificazioni del caso.

## 1.4 CAC 40

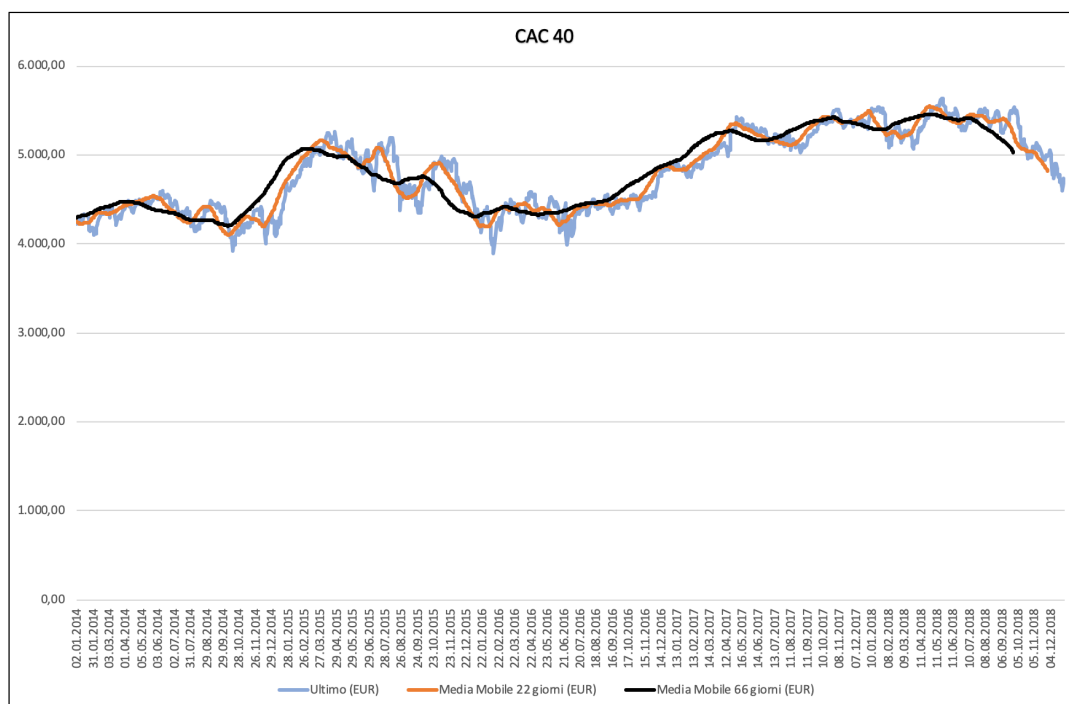


Figura 4 - Andamento prezzi indice di borsa CAC 40 con medie mobili

Il grafico in alto dimostra l'andamento dei prezzi dell'CAC 40 nel quinquennio che va dal 01/01/2014 al 31/12/2018. A quest'ultima curva sono state aggiunte le medie mobili, la cui definizione è stata anticipata nel paragrafo 1.2: come si può osservare le medie prese in considerazione sono due, una più "veloce" a 22 giorni, equivalente ad un mese di trading days, e una più "lenta" a 66 giorni, equivalente a 3 mesi di trading days. Come già accennato l'utilizzo combinato di queste due categorie di medie, con quello che è l'andamento complessivo delle oscillazioni delle quotazioni dei prezzi dell'asset di riferimento, è possibile predire in quali range temporali il mercato è rialzista/ribassista e di conseguenza che tipologie di strategie adottare in termini di contrattazione (short/long).

Se si osserva attentamente il grafico, è possibile scorgere nell'arco temporale tra fine Febbraio e inizio Marzo 2015 come la media mobile più veloce taglia al rialzo quella più lenta, il che predice un imminente ribasso delle performance dei prezzi di borsa, con una possibile entrata tipo long nel mercato (acquistare titoli perché conveniente, dato il ribasso dei prezzi); quanto detto è poi dimostrato da lì a poco, appunto, con performance negative dell'indice, evidenziate la curva di colore celeste chiaro.



Viceversa tra Agosto e Settembre 2015 si avrà un segnale di vendita (andare short), vale a dire che converrebbe vendere asset dato l'imminente fase di rialzo dei prezzi dell'intero mercato, che può portare ad un guadagno tramite ricordo al capital gain; questo viene predetto per il fatto che la media mobile più lenta (curva di colore nero) taglia al ribasso la media più veloce (curva di colore arancione).

Analizzato in prima battuta l'indice CAC 40 da un punto di vista delle performance generali, si è poi proceduto al calcolo dei Log rendimenti e alla determinazione delle variabili statistiche rilevanti. Di seguito vengono riportati i valori dei dati con la rappresentazione della distribuzione dei rendimenti e il test di normalità della stessa, ottenuti in ambiente SPSS:

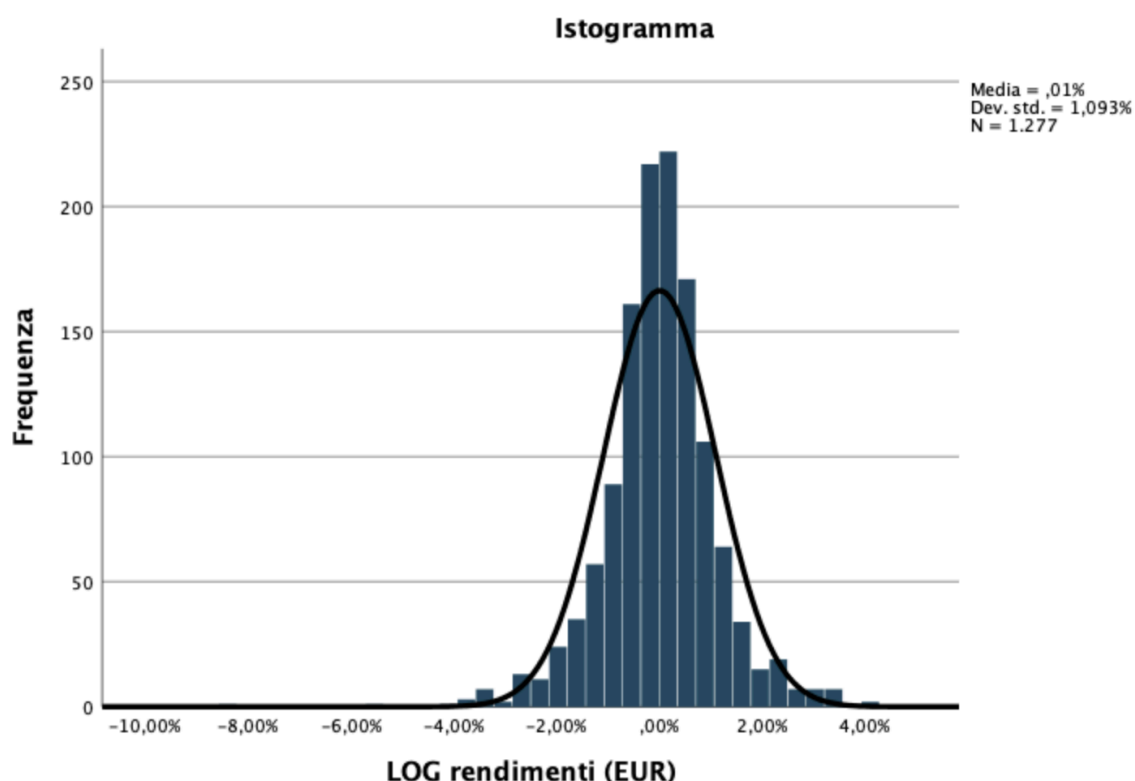


Figura 5 - Distribuzione dei log-rendimenti

La seguente figura mostra la distribuzione dei log-rendimenti che a primo impatto sembra essere normale: per determinare effettivamente ciò, sono necessarie ulteriori parametri quali asimmetria e curtosi, i quali poi insieme al test di normalità ci permetteranno di capire se effettivamente la distribuzione è approssimabile ad una normale.

Nelle seguenti tabelle sono riportati i dati di riferimento:

#### Statistiche

|                                  |          |          |
|----------------------------------|----------|----------|
| LOG rendimenti (EUR)             |          |          |
| N                                | Valido   | 1277     |
|                                  | Mancante | 0        |
| Media                            |          | 0,0088%  |
| Deviazione std.                  |          | 1,09291% |
| Varianza                         |          | 1,194    |
| Asimmetria                       |          | -,469    |
| Errore standard della asimmetria |          | ,068     |
| Curtosi                          |          | 4,364    |
| Errore standard della curtosi    |          | ,137     |

#### Test di normalità

|                      | Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup> |      |       | Shapiro-Wilk |      |       |
|----------------------|---------------------------------|------|-------|--------------|------|-------|
|                      | Statistic a                     | gl   | Sign. | Statistic a  | gl   | Sign. |
| LOG rendimenti (EUR) | ,064                            | 1277 | ,000  | ,957         | 1277 | ,000  |

a. Correzione di significatività di Lilliefors

Figura 6 - Analisi statistica descrittiva CAC 40

Calcolati tutti i valori necessari è possibile effettuare il test di normalità. Il suddetto test consta di due parti: la prima riguarda quello di “Kolmogorov-Smirnov”, in cui il valore statistico deve essere inferiore a 0,07; la seconda invece fa riferimento a “Shapiro-Wilk” in cui il valore statistico deve essere contenuto nel range 0,97 e 1.

Come si evince dai dati entrambi i test sono rispettati (solo il secondo test si discosta di un nulla dal valore soglia), pertanto è possibile approssimare la distribuzione dei rendimenti del CAC 40 ad una normale, in modo da potere beneficiare di tutte semplificazioni del caso.

## 1.5 DAX

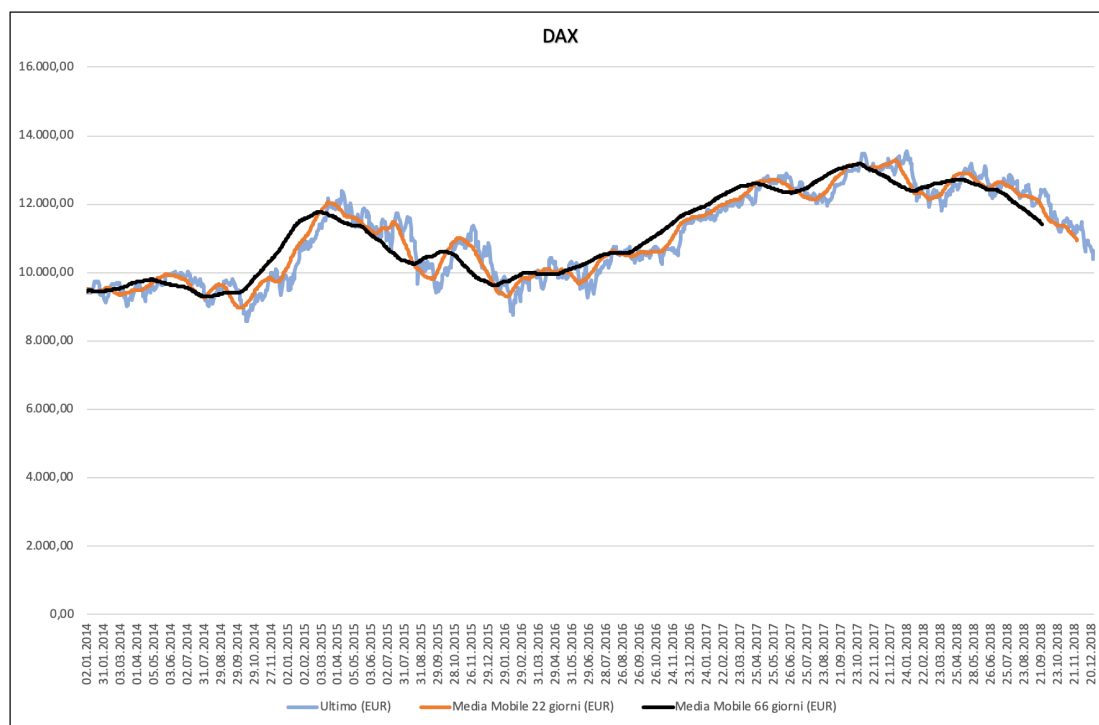


Figura 7 - Andamento prezzi indice di borsa DAX con medie mobili

Il grafico in alto dimostra l'andamento dei prezzi dell'CAC 40 nel quinquennio che va dal 01/01/2014 al 31/12/2018. A quest'ultima curva sono state aggiunte le medie mobili, la cui definizione è stata anticipata nel paragrafo 1.2: come si può osservare le medie prese in considerazione sono due, una più "veloce" a 22 giorni, equivalente ad un mese di trading days, e una più "lenta" a 66 giorni, equivalente a 3 mesi di trading days. Come già accennato l'utilizzo combinato di queste due categorie di medie, con quello che è l'andamento complessivo delle oscillazioni delle quotazioni dei prezzi dell'asset di riferimento, è possibile predire in quali range temporali il mercato è rialzista/ribassista e di conseguenza che tipologie di strategie adottare in termini di contrattazione (short/long).

Se si osserva attentamente il grafico, è possibile scorgere nell'arco temporale tra Marzo e Aprile 2015 come la media mobile più veloce taglia al rialzo quella più lenta, il che predice un imminente ribasso delle performance dei prezzi di borsa, con una possibile entrata tipo long nel mercato (acquistare titoli perché conveniente, dato il ribasso dei prezzi); quanto detto è poi dimostrato da lì a poco, appunto, con performance negative dell'indice, evidenziate la curva di colore celeste chiaro.

Viceversa tra Luglio e Agosto 2015 si avrà un segnale di vendita (andare short), vale a dire che converrebbe vendere asset dato l'imminente fase di rialzo dei prezzi dell'intero mercato, che può

portare ad un guadagno tramite ricordo al capital gain; questo viene predetto per il fatto che la media mobile più lenta (curva di colore nero) taglia al ribasso la media più veloce (curva di colore arancione).

Analizzato in prima battuta l'indice CAC 40 da un punto di vista delle performance generali, si è poi proceduto al calcolo dei Log rendimenti e alla determinazione delle variabili statistiche rilevanti. Di seguito vengono riportati i valori dei dati con la rappresentazione della distribuzione dei rendimenti e il test di normalità della stessa, ottenuti in ambiente SPSS:

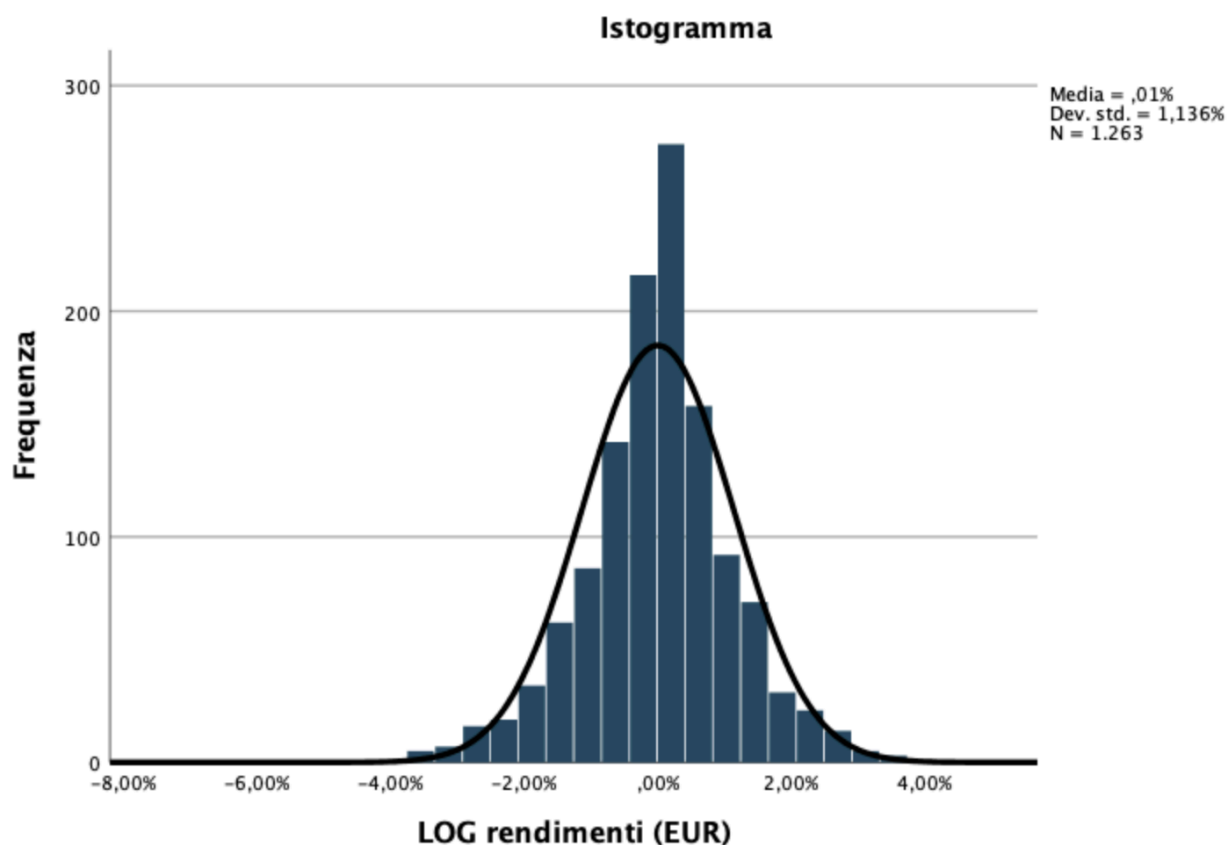


Figura 8 - Distribuzione dei log-rendimenti

La seguente figura mostra la distribuzione dei log-rendimenti che a primo impatto sembra essere normale: per determinare effettivamente ciò, sono necessarie ulteriori parametri quali asimmetria e curtosi, i quali poi insieme al test di normalità ci permetteranno di capire se effettivamente la distribuzione è approssimabile ad una normale.

Nelle seguenti tabelle sono riportati i dati di riferimento:

#### Statistiche

| LOG rendimenti (EUR)             |          |          |
|----------------------------------|----------|----------|
| N                                | Valido   | 1263     |
|                                  | Mancante | 14       |
| Media                            |          | 0,0092%  |
| Deviazione std.                  |          | 1,13565% |
| Varianza                         |          | 1,290    |
| Asimmetria                       |          | -,350    |
| Errore standard della asimmetria |          | ,069     |
| Curtosi                          |          | 2,286    |
| Errore standard della curtosi    |          | ,138     |

#### Test di normalità

|                      | Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup> |      |       | Shapiro-Wilk |      |       |
|----------------------|---------------------------------|------|-------|--------------|------|-------|
|                      | Statistic a                     | gl   | Sign. | Statistic a  | gl   | Sign. |
| LOG rendimenti (EUR) | ,064                            | 1263 | ,000  | ,975         | 1263 | ,000  |

a. Correzione di significatività di Lilliefors

Figura 9 - Analisi statistica descrittiva DAX

Calcolati tutti i valori necessari è possibile effettuare il test di normalità. Il suddetto test consta di due parti: la prima riguarda quello di “Kolmogorov-Smirnov”, in cui il valore statistico deve essere inferiore a 0,07; la seconda invece fa riferimento a “Shapiro-Wilk” in cui il valore statistico deve essere contenuto nel range 0,97 e 1.

Come si evince dai dati, entrambi i test sono rispettati, pertanto è possibile approssimare la distribuzione dei rendimenti del DAX ad una normale, in modo da potere beneficiare di tutte semplificazioni del caso.

## 1.6 DOW 30

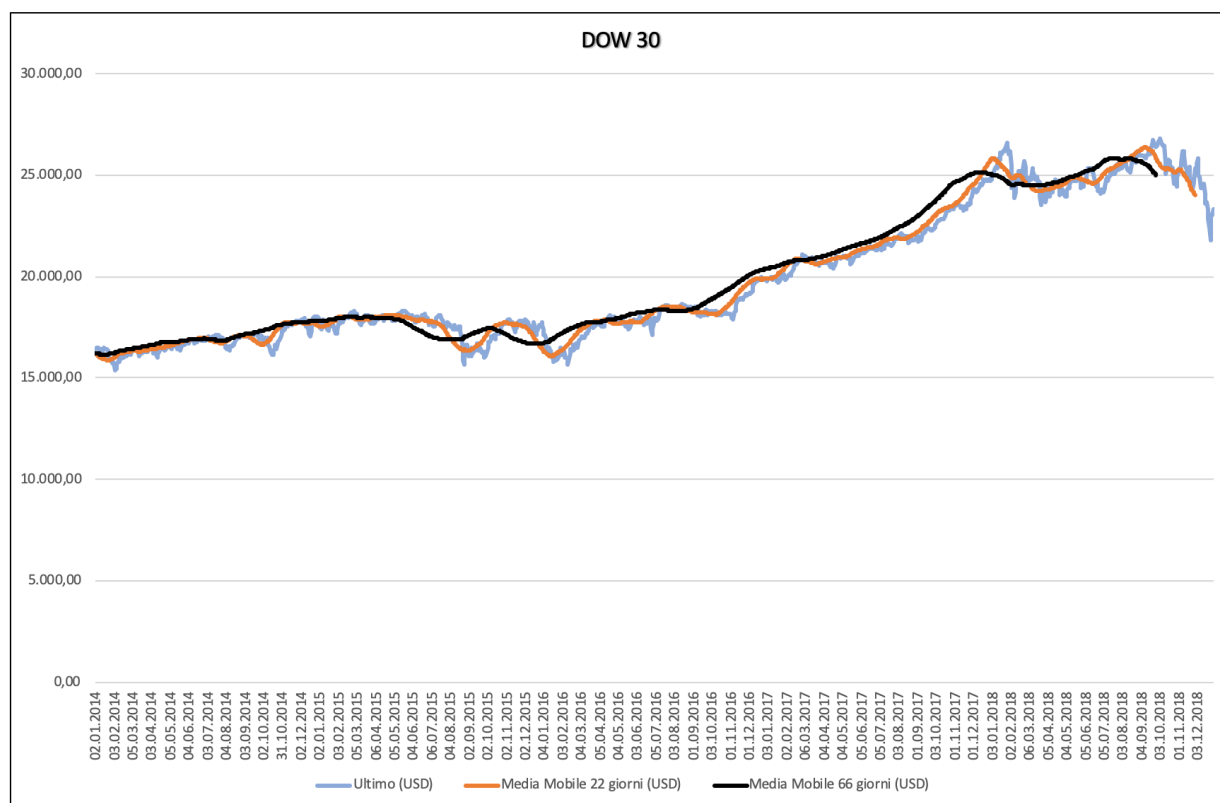


Figura 10 - Andamento prezzi indice di borsa DOW 30 con medie mobili

Il grafico in alto dimostra l'andamento dei prezzi del DOW 30 nel quinquennio che va dal 01/01/2014 al 31/12/2018. A quest'ultima curva sono state aggiunte le medie mobili, la cui definizione è stata anticipata nel paragrafo 1.2: come si può osservare le medie prese in considerazione sono due, una più "veloce" a 22 giorni, equivalente ad un mese di trading days, e una più "lenta" a 66 giorni, equivalente a 3 mesi di trading days. Come già accennato l'utilizzo combinato di queste due categorie di medie, con quello che è l'andamento complessivo delle oscillazioni delle quotazioni dei prezzi dell'asset di riferimento, è possibile predire in quali range temporali il mercato è rialzista/ribassista e di conseguenza che tipologie di strategie adottare in termini di contrattazione (short/long).

Se si osserva attentamente il grafico, è possibile scorgere nell'arco temporale tra Dicembre 2017 e Gennaio 2018 come la media mobile più veloce taglia al rialzo quella più lenta, il che predice un imminente ribasso delle performance dei prezzi di borsa, con una possibile entrata tipo long nel mercato (acquistare titoli perché conveniente, dato il ribasso dei prezzi); quanto detto è poi dimostrato

da lì a poco, appunto, con performance negative dell'indice, evidenziate la curva di colore celeste chiaro.

Viceversa tra Agosto e Settembre 2015 si avrà un segnale di vendita (andare short), vale a dire che converrebbe vendere asset dato l'imminente fase di rialzo dei prezzi dell'intero mercato, che può portare ad un guadagno tramite ricorso al capital gain; questo viene predetto per il fatto che la media mobile più lenta (curva di colore nero) taglia al ribasso la media più veloce (curva di colore arancione).

Analizzato in prima battuta l'indice DOW 30 da un punto di vista delle performance generali, si è poi proceduto al calcolo dei Log rendimenti e alla determinazione delle variabili statistiche rilevanti. Di seguito vengono riportati i valori dei dati con la rappresentazione della distribuzione dei rendimenti e il test di normalità della stessa, ottenuti in ambiente SPSS:

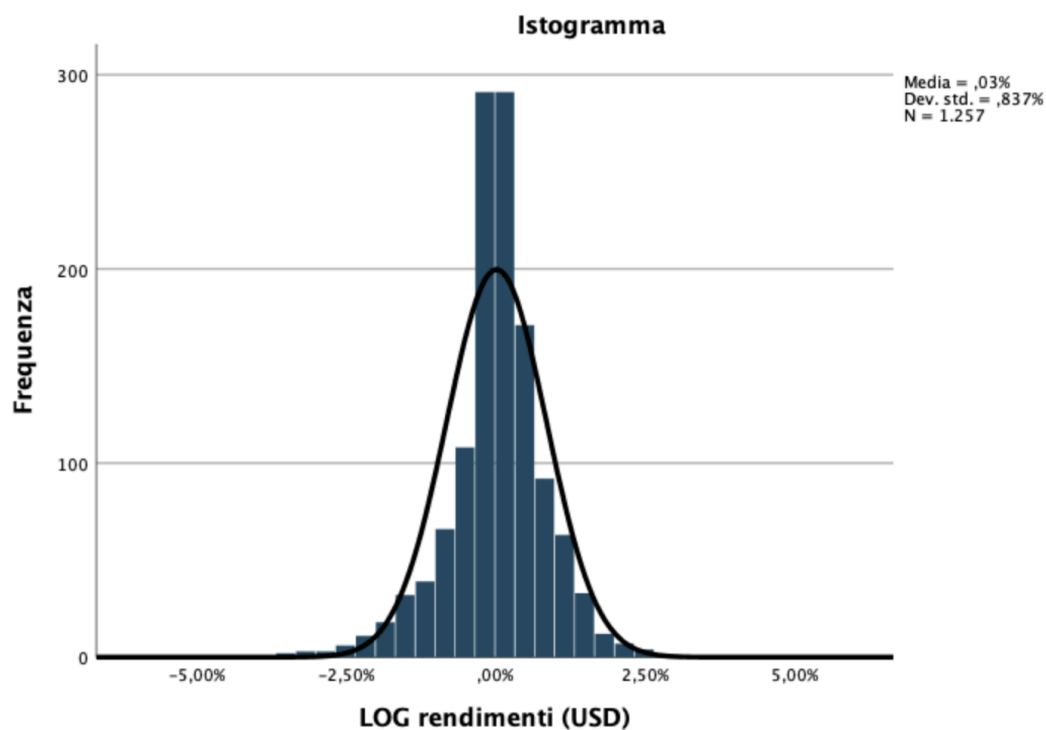


Figura 11 - Distribuzione dei log-rendimenti

La seguente figura mostra la distribuzione dei log-rendimenti che a primo impatto sembra essere normale: per determinare effettivamente ciò, sono necessarie ulteriori parametri quali asimmetria e

curtosi, i quali poi insieme al test di normalità ci permetteranno di capire se effettivamente a distribuzione è approssimabile ad una normale.

Nelle seguenti tabelle sono riportati i dati di riferimento:

#### Statistiche

|                                  |          |          |
|----------------------------------|----------|----------|
| LOG rendimenti (USD)             |          |          |
| N                                | Valido   | 1257     |
|                                  | Mancante | 20       |
| Media                            |          | 0,0278%  |
| Deviazione std.                  |          | 0,83685% |
| Varianza                         |          | ,700     |
| Asimmetria                       |          | -,494    |
| Errore standard della asimmetria |          | ,069     |
| Curtosi                          |          | 3,852    |
| Errore standard della curtosi    |          | ,138     |

#### Test di normalità

|                      | Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup> |      |       | Shapiro-Wilk |      |       |
|----------------------|---------------------------------|------|-------|--------------|------|-------|
|                      | Statistic a                     | gl   | Sign. | Statistic a  | gl   | Sign. |
| LOG rendimenti (USD) | ,104                            | 1257 | ,000  | ,945         | 1257 | ,000  |

a. Correzione di significatività di Lilliefors

Figura 12 - Analisi statistica descrittiva DOW 30

Calcolati tutti i valori necessari è possibile effettuare il test di normalità. Il suddetto test consta di due parti: la prima riguarda quello di “Kolmogorov-Smirnov”, in cui il valore statistico deve essere inferiore a 0,07; la seconda invece fa riferimento a “Shapiro-Wilk” in cui il valore statistico deve essere contenuto nel range 0,97 e 1.

Come si evince dai dati, nonostante i valori non rientrano perfettamente nei range sopra indicati e considerando anche la variabile di errore, pertanto è possibile approssimare la distribuzione dei rendimenti del DOW 30 ad una normale, per via della presenza di piccoli scostamenti dai valori soglia che difatti è possibile trascurare, in modo da potere beneficiare di tutte le semplificazioni del caso.



## 1.7 FTSE 100

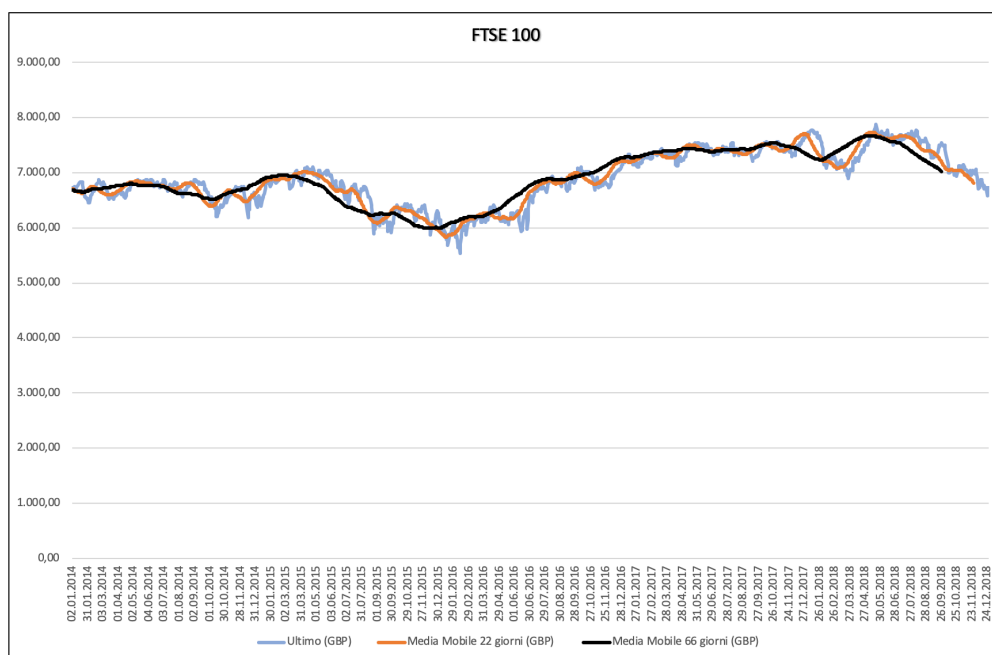


Figura 13 - Andamento prezzi indice di borsa FTSE 100 con medie mobili

Il grafico in alto dimostra l'andamento dei prezzi del FTSE 100 nel quinquennio che va dal 01/01/2014 al 31/12/2018. A quest'ultima curva sono state aggiunte le medie mobili, la cui definizione è stata anticipata nel paragrafo 1.2: come si può osservare le medie prese in considerazione sono due, una più "veloce" a 22 giorni, equivalente ad un mese di trading days, e una più "lenta" a 66 giorni, equivalente a 3 mesi di trading days. Come già accennato l'utilizzo combinato di queste due categorie di medie, con quello che è l'andamento complessivo delle oscillazioni delle quotazioni dei prezzi dell'asset di riferimento, è possibile predire in quali range temporali il mercato è rialzista/ribassista e di conseguenza che tipologie di strategie adottare in termini di contrattazione (short/long).

Se si osserva attentamente il grafico, è possibile scorgere nell'arco temporale tra Aprile e Maggio 2018 come la media mobile più veloce taglia al rialzo quella più lenta, il che predice un imminente ribasso delle performance dei prezzi di borsa, con una possibile entrata tipo long nel mercato (acquistare titoli perché conveniente, dato il ribasso dei prezzi); quanto detto è poi dimostrato da lì a poco, appunto, con performance negative dell'indice, evidenziate la curva di colore celeste chiaro.

Viceversa tra Dicembre 2015 e Gennaio 2016 si avrà un segnale di vendita (andare short), vale a dire che converrebbe vendere asset dato l'imminente fase di rialzo dei prezzi dell'intero mercato, che può portare ad un guadagno tramite ricorso al capital gain; questo viene predetto per il fatto che la media

mobile più lenta (curva di colore nero) taglia al ribasso la media più veloce (curva di colore arancione).

Analizzato in prima battuta l'indice FTSE 100 da un punto di vista delle performance generali, si è poi proceduto al calcolo dei Log rendimenti e alla determinazione delle variabili statistiche rilevanti. Di seguito vengono riportati i valori dei dati con la rappresentazione della distribuzione dei rendimenti e il test di normalità della stessa, ottenuti in ambiente SPSS:

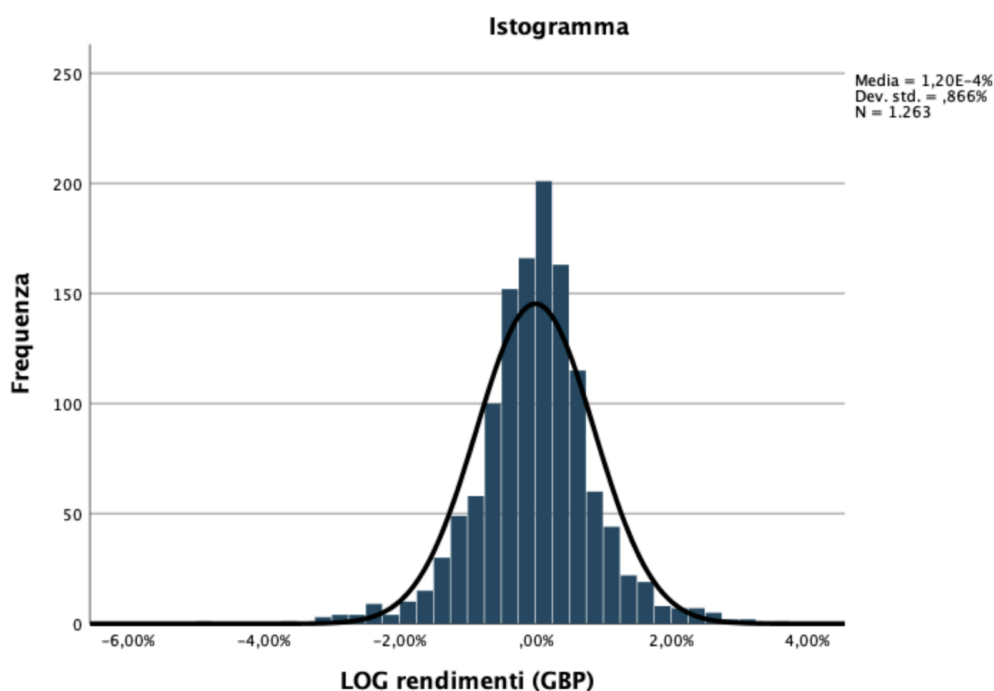


Figura 14 - Distribuzione dei log-rendimenti

La seguente figura mostra la distribuzione dei log-rendimenti che a primo impatto sembra essere normale: per determinare effettivamente ciò, sono necessarie ulteriori parametri quali asimmetria e curtosi, i quali poi insieme al test di normalità ci permetteranno di capire se effettivamente la distribuzione è approssimabile ad una normale.

Nelle seguenti tabelle sono riportati i dati di riferimento:

**Statistiche**

|                                  |          |          |
|----------------------------------|----------|----------|
| LOG rendimenti (GBP)             |          |          |
| N                                | Valido   | 1263     |
|                                  | Mancante | 14       |
| Media                            |          | 0,0001%  |
| Deviazione std.                  |          | 0,86643% |
| Varianza                         |          | ,751     |
| Asimmetria                       |          | -,189    |
| Errore standard della asimmetria |          | ,069     |
| Curtosi                          |          | 2,520    |
| Errore standard della curtosi    |          | ,138     |

**Test di normalità**

|                      | Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup> |      |       | Shapiro-Wilk   |      |       |
|----------------------|---------------------------------|------|-------|----------------|------|-------|
|                      | Statistic<br>a                  | gl   | Sign. | Statistic<br>a | gl   | Sign. |
| LOG rendimenti (GBP) | ,061                            | 1263 | ,000  | ,967           | 1263 | ,000  |

a. Correzione di significatività di Lilliefors

Figura 15 - Analisi statistica descrittiva FTSE 100

Calcolati tutti i valori necessari è possibile effettuare il test di normalità. Il suddetto test consta di due parti: la prima riguarda quello di “Kolmogorov-Smirnov”, in cui il valore statistico deve essere inferiore a 0,07; la seconda invece fa riferimento a “Shapiro-Wilk” in cui il valore statistico deve essere contenuto nel range 0,97 e 1.

Come si evince dai dati, entrambi i test sono rispettati, pertanto è possibile approssimare la distribuzione dei rendimenti del FTSE 100 ad una normale, in modo da potere beneficiare di tutte semplificazioni del caso.

## 1.8 FTSE MIB

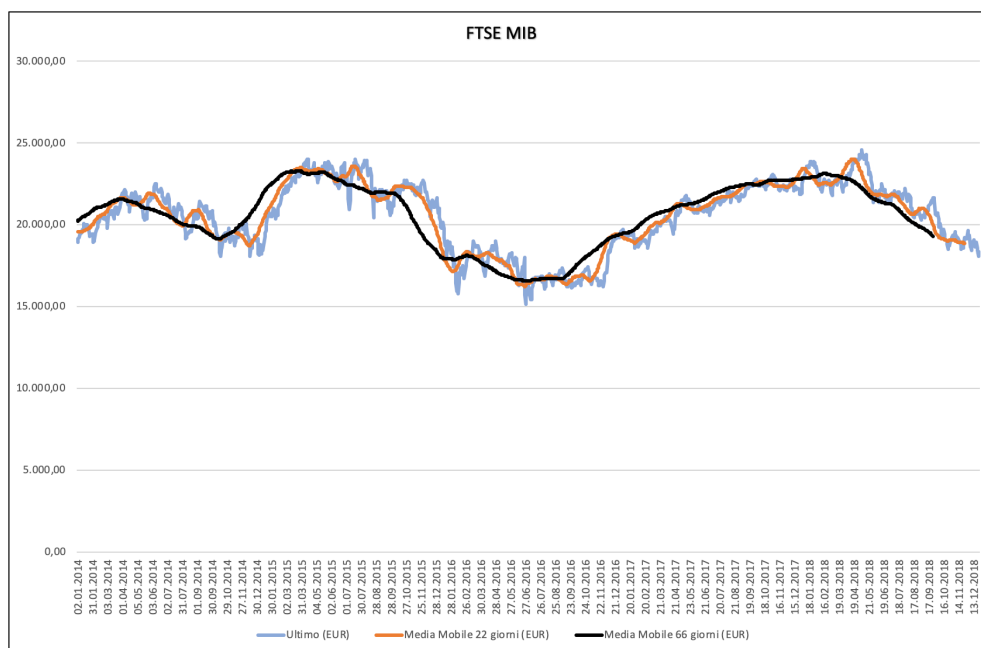


Figura 16 - Andamento prezzi indice di borsa FTSE MIB con medie mobili

Il grafico in alto dimostra l'andamento dei prezzi del FTSE MIB nel quinquennio che va dal 01/01/2014 al 31/12/2018. A quest'ultima curva sono state aggiunte le medie mobili, la cui definizione è stata anticipata nel paragrafo 1.2: come si può osservare le medie prese in considerazione sono due, una più "veloce" a 22 giorni, equivalente ad un mese di trading days, e una più "lenta" a 66 giorni, equivalente a 3 mesi di trading days. Come già accennato l'utilizzo combinato di queste due categorie di medie, con quello che è l'andamento complessivo delle oscillazioni delle quotazioni dei prezzi dell'asset di riferimento, è possibile predire in quali range temporali il mercato è rialzista/ribassista e di conseguenza che tipologie di strategie adottare in termini di contrattazione (short/long).

Se si osserva attentamente il grafico, è possibile scorgere nell'arco temporale tra inizio e fine Marzo 2015 come la media mobile più veloce taglia al rialzo quella più lenta, il che predice un imminente ribasso delle performance dei prezzi di borsa, con una possibile entrata tipo long nel mercato (acquistare titoli perché conveniente, dato il ribasso dei prezzi); quanto detto è poi dimostrato da lì a poco, appunto, con performance negative dell'indice, evidenziate la curva di colore celeste chiaro. Viceversa tra Dicembre 2015 e Gennaio 2016 si avrà un segnale di vendita (andare short), vale a dire che converrebbe vendere asset dato l'imminente fase di rialzo dei prezzi dell'intero mercato, che può portare ad un guadagno tramite ricorso al capital gain; questo viene predetto per il fatto che la media

mobile più lenta (curva di colore nero) taglia al ribasso la media più veloce (curva di colore arancione).

Analizzato in prima battuta l'indice FTSE MIB da un punto di vista delle performance generali, si è poi proceduto al calcolo dei Log rendimenti e alla determinazione delle variabili statistiche rilevanti. Di seguito vengono riportati i valori dei dati con la rappresentazione della distribuzione dei rendimenti e il test di normalità della stessa, ottenuti in ambiente SPSS:

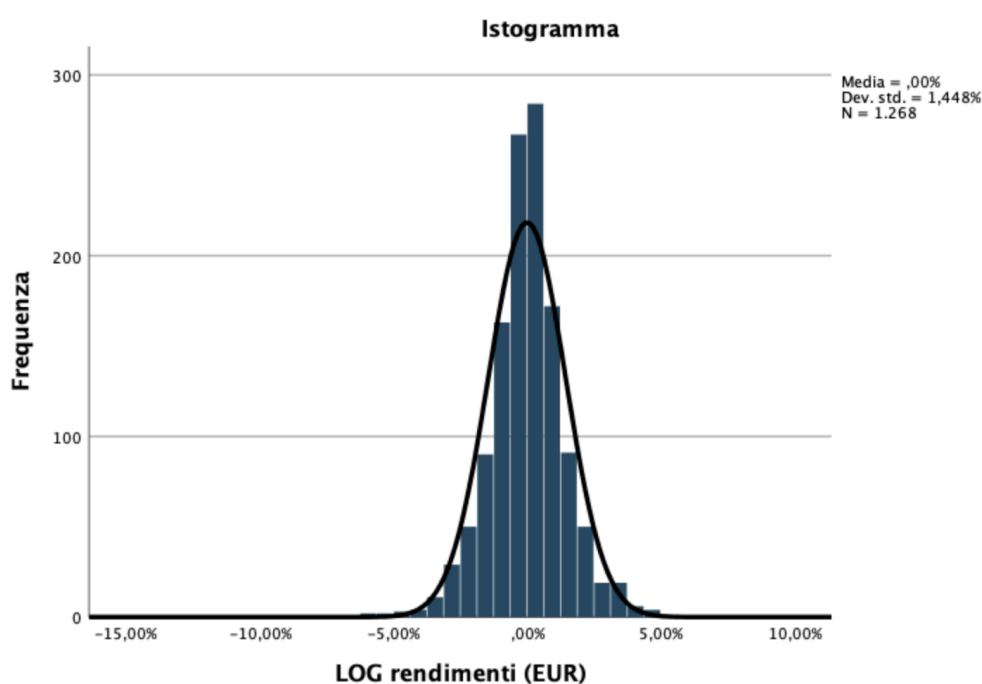


Figura 17 - Distribuzione dei log-rendimenti

La seguente figura mostra la distribuzione dei log-rendimenti che a primo impatto sembra essere normale: per determinare effettivamente ciò, sono necessarie ulteriori parametri quali asimmetria e curtosi, i quali poi insieme al test di normalità ci permetteranno di capire se effettivamente la distribuzione è approssimabile ad una normale.

Nelle seguenti tabelle sono riportati i dati di riferimento:

### Statistiche

|                                  |          |          |
|----------------------------------|----------|----------|
| LOG rendimenti (EUR)             |          |          |
| N                                | Valido   | 1268     |
|                                  | Mancante | 9        |
| Media                            |          | -0,0026% |
| Deviazione std.                  |          | 1,44757% |
| Varianza                         |          | 2,095    |
| Asimmetria                       |          | -,676    |
| Errore standard della asimmetria |          | ,069     |
| Curtosi                          |          | 6,669    |
| Errore standard della curtosi    |          | ,137     |

### Test di normalità

|                      | Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup> |      |       | Shapiro-Wilk |      |       |
|----------------------|---------------------------------|------|-------|--------------|------|-------|
|                      | Statistic a                     | gl   | Sign. | Statistic a  | gl   | Sign. |
| LOG rendimenti (EUR) | ,057                            | 1268 | ,000  | ,955         | 1268 | ,000  |

a. Correzione di significatività di Lilliefors

Figura 18 - Analisi statistica descrittiva FTSE MIB

Calcolati tutti i valori necessari è possibile effettuare il test di normalità. Il suddetto test consta di due parti: la prima riguarda quello di “Kolmogorov-Smirnov”, in cui il valore statistico deve essere inferiore a 0,07; la seconda invece fa riferimento a “Shapiro-Wilk” in cui il valore statistico deve essere contenuto nel range 0,97 e 1.

Come si evince dai dati, entrambi i test sono rispettati (per via di scostamenti trascurabili dai valori soglia), pertanto è possibile approssimare la distribuzione dei rendimenti del FTSE MIB ad una normale, in modo da potere beneficiare di tutte semplificazioni del caso.

## 1.9 JSE Top 40

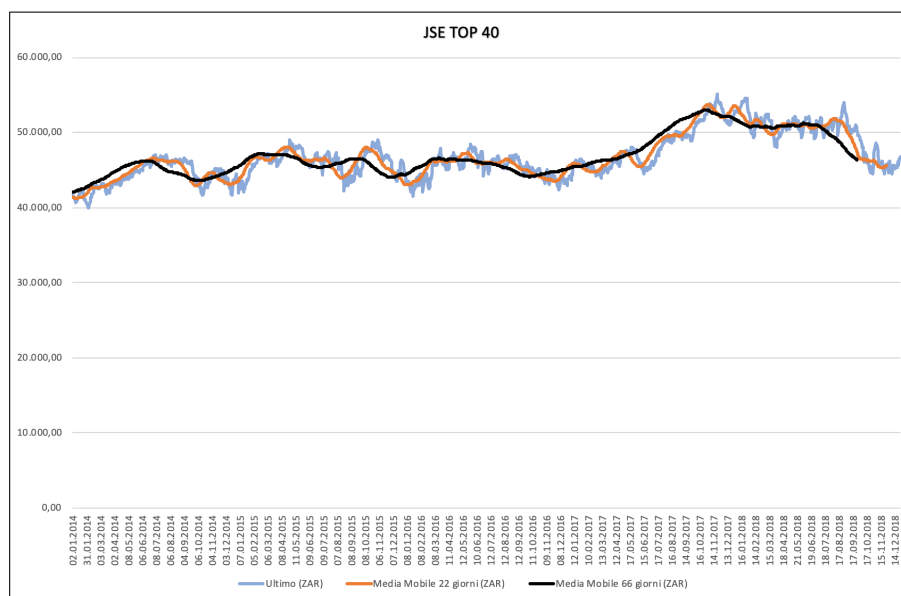


Figura 19 - Andamento prezzi indice di borsa JSE Top 40 con medie mobili

Il grafico in alto dimostra l'andamento dei prezzi del JSE Top 40 nel quinquennio che va dal 01/01/2014 al 31/12/2018. A quest'ultima curva sono state aggiunte le medie mobili, la cui definizione è stata anticipata nel paragrafo 1.2: come si può osservare le medie prese in considerazione sono due, una più "veloce" a 22 giorni, equivalente ad un mese di trading days, e una più "lenta" a 66 giorni, equivalente a 3 mesi di trading days. Come già accennato l'utilizzo combinato di queste due categorie di medie, con quello che è l'andamento complessivo delle oscillazioni delle quotazioni dei prezzi dell'asset di riferimento, è possibile predire in quali range temporali il mercato è rialzista/ribassista e di conseguenza che tipologie di strategie adottare in termini di contrattazione (short/long).

Se si osserva attentamente il grafico, è possibile scorgere nell'arco temporale tra Giugno e Luglio 2014 come la media mobile più veloce taglia al rialzo quella più lenta, il che predice un imminente ribasso delle performance dei prezzi di borsa, con una possibile entrata tipo long nel mercato (acquistare titoli perché conveniente, dato il ribasso dei prezzi); quanto detto è poi dimostrato da lì a poco, appunto, con performance negative dell'indice, evidenziate la curva di colore celeste chiaro.

Viceversa tra Dicembre 2015 e Gennaio 2016 si avrà un segnale di vendita (andare short), vale a dire che converrebbe vendere asset dato l'imminente fase di rialzo dei prezzi dell'intero mercato, che può portare ad un guadagno tramite ricorso al capital gain; questo viene predetto per il fatto che la media

mobile più lenta (curva di colore nero) taglia al ribasso la media più veloce (curva di colore arancione).

Analizzato in prima battuta l'indice JSE Top 40 da un punto di vista delle performance generali, si è poi proceduto al calcolo dei Log rendimenti e alla determinazione delle variabili statistiche rilevanti. Di seguito vengono riportati i valori dei dati con la rappresentazione della distribuzione dei rendimenti e il test di normalità della stessa, ottenuti in ambiente SPSS:

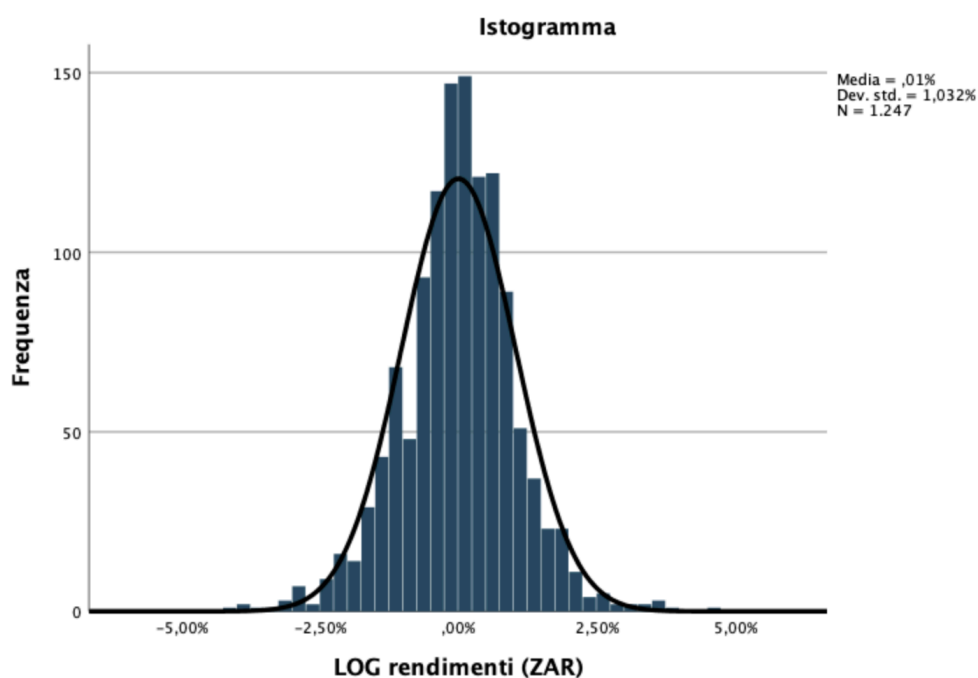


Figura 20 - Distribuzione dei log-rendimenti

La seguente figura mostra la distribuzione dei log-rendimenti che a primo impatto sembra essere normale: per determinare effettivamente ciò, sono necessarie ulteriori parametri quali asimmetria e curtosi, i quali poi insieme al test di normalità ci permetteranno di capire se effettivamente la distribuzione è approssimabile ad una normale.

Nelle seguenti tabelle sono riportati i dati di riferimento:



| Statistiche                      |          |          |
|----------------------------------|----------|----------|
| LOG rendimenti (ZAR)             |          |          |
| N                                | Valido   | 1247     |
|                                  | Mancante | 30       |
| Media                            |          | 0,0090%  |
| Deviazione std.                  |          | 1,03198% |
| Varianza                         |          | 1,065    |
| Asimmetria                       |          | -,079    |
| Errore standard della asimmetria |          | ,069     |
| Curtosi                          |          | 1,434    |
| Errore standard della curtosi    |          | ,138     |

#### Test di normalità

|                      | Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup> |      |       | Shapiro-Wilk |      |       |
|----------------------|---------------------------------|------|-------|--------------|------|-------|
|                      | Statistic a                     | gl   | Sign. | Statistic a  | gl   | Sign. |
| LOG rendimenti (ZAR) | ,044                            | 1247 | ,000  | ,985         | 1247 | ,000  |

a. Correzione di significatività di Lilliefors

Figura 21 - Analisi statistica descrittiva JSE Top 40

Calcolati tutti i valori necessari è possibile effettuare il test di normalità. Il suddetto test consta di due parti: la prima riguarda quello di “Kolmogorov-Smirnov”, in cui il valore statistico deve essere inferiore a 0,07; la seconda invece fa riferimento a “Shapiro-Wilk” in cui il valore statistico deve essere contenuto nel range 0,97 e 1.

Come si evince dai dati, entrambi i test sono rispettati (per via di scostamenti trascurabili dai valori soglia), pertanto è possibile approssimare la distribuzione dei rendimenti del JSE Top 40 ad una normale, in modo da potere beneficiare di tutte semplificazioni del caso.

## 1.10 NIKKEI 225

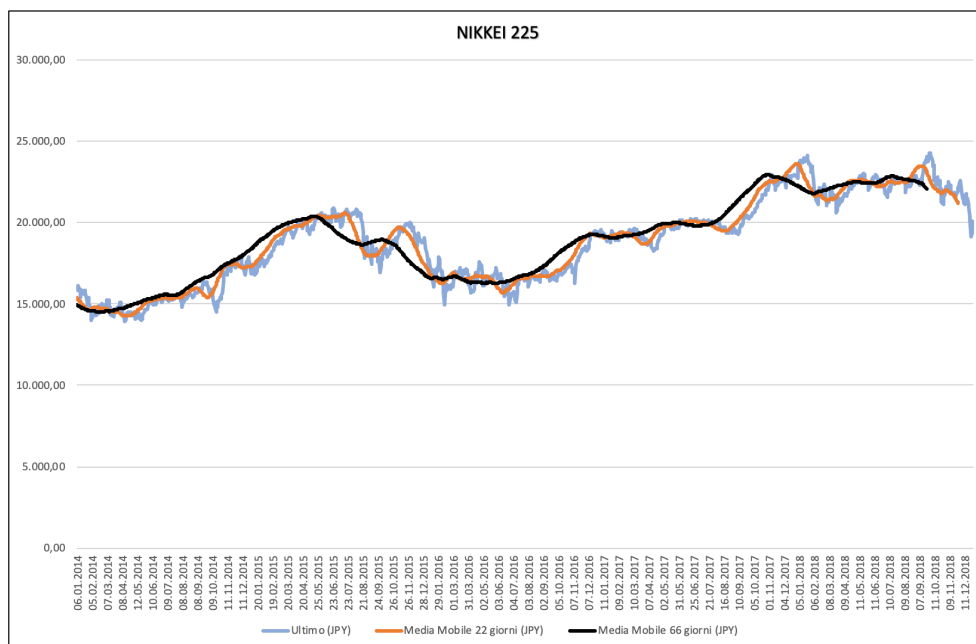


Figura 22 - Andamento prezzi indice di borsa NIKKEI 225 con medie mobili

Il grafico in alto dimostra l'andamento dei prezzi del NIKKEI 225 nel quinquennio che va dal 01/01/2014 al 31/12/2018. A quest'ultima curva sono state aggiunte le medie mobili, la cui definizione è stata anticipata nel paragrafo 1.2: come si può osservare le medie prese in considerazione sono due, una più "veloce" a 22 giorni, equivalente ad un mese di trading days, e una più "lenta" a 66 giorni, equivalente a 3 mesi di trading days. Come già accennato l'utilizzo combinato di queste due categorie di medie, con quello che è l'andamento complessivo delle oscillazioni delle quotazioni dei prezzi dell'asset di riferimento, è possibile predire in quali range temporali il mercato è rialzista/ribassista e di conseguenza che tipologie di strategie adottare in termini di contrattazione (short/long).

Se si osserva attentamente il grafico, è possibile scorgere nell'arco temporale tra Settembre e Ottobre 2015 come la media mobile più veloce taglia al rialzo quella più lenta, il che predice un imminente ribasso delle performance dei prezzi di borsa, con una possibile entrata tipo long nel mercato (acquistare titoli perché conveniente, dato il ribasso dei prezzi); quanto detto è poi dimostrato da lì a poco, appunto, con performance negative dell'indice, evidenziate la curva di colore celeste chiaro.

Viceversa tra Novembre e Dicembre 2017 si avrà un segnale di vendita (andare short), vale a dire che converrebbe vendere asset dato l'imminente fase di rialzo dei prezzi dell'intero mercato, che può

portare ad un guadagno tramite ricorso al capital gain; questo viene predetto per il fatto che la media mobile più lenta (curva di colore nero) taglia al ribasso la media più veloce (curva di colore arancione).

Analizzato in prima battuta l'indice NIKKEI 225 da un punto di vista delle performance generali, si è poi proceduto al calcolo dei Log rendimenti e alla determinazione delle variabili statistiche rilevanti. Di seguito vengono riportati i valori dei dati con la rappresentazione della distribuzione dei rendimenti e il test di normalità della stessa, ottenuti in ambiente SPSS:

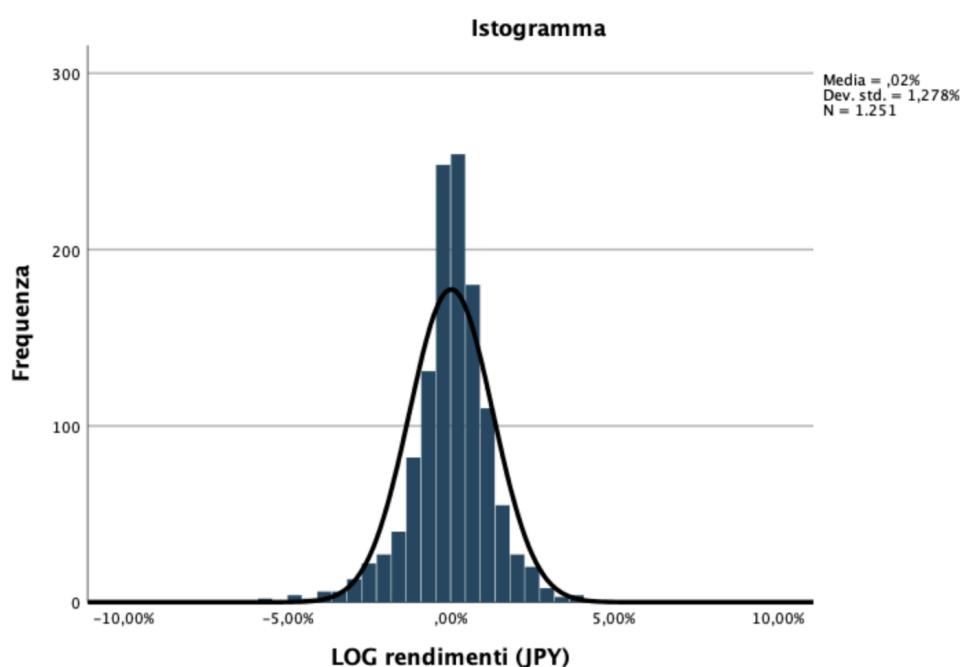


Figura 23 - Distribuzione dei log-rendimenti

La seguente figura mostra la distribuzione dei log-rendimenti che a primo impatto sembra essere normale: per determinare effettivamente ciò, sono necessarie ulteriori parametri quali asimmetria e curtosi, i quali poi insieme al test di normalità ci permetteranno di capire se effettivamente la distribuzione è approssimabile ad una normale.

Nelle seguenti tabelle sono riportati i dati di riferimento:

### Statistiche

|                                  |          |          |
|----------------------------------|----------|----------|
| LOG rendimenti (JPY)             |          |          |
| N                                | Valido   | 1251     |
|                                  | Mancante | 26       |
| Media                            |          | 0,0184%  |
| Deviazione std.                  |          | 1,27804% |
| Varianza                         |          | 1,633    |
| Asimmetria                       |          | -,289    |
| Errore standard della asimmetria |          | ,069     |
| Curtosi                          |          | 5,218    |
| Errore standard della curtosi    |          | ,138     |

### Test di normalità

|                      | Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup> |      |       | Shapiro-Wilk |      |       |
|----------------------|---------------------------------|------|-------|--------------|------|-------|
|                      | Statistic a                     | gl   | Sign. | Statistic a  | gl   | Sign. |
| LOG rendimenti (JPY) | ,091                            | 1251 | ,000  | ,932         | 1251 | ,000  |

a. Correzione di significatività di Lilliefors

Figura 24 - Analisi statistica descrittiva NIKKEI 225

Calcolati tutti i valori necessari è possibile effettuare il test di normalità. Il suddetto test consta di due parti: la prima riguarda quello di “Kolmogorov-Smirnov”, in cui il valore statistico deve essere inferiore a 0,07; la seconda invece fa riferimento a “Shapiro-Wilk” in cui il valore statistico deve essere contenuto nel range 0,97 e 1.

Come si evince dai dati, entrambi i test sono rispettati (per via di scostamenti trascurabili, considerando anche la variabile di errore, dai valori soglia), pertanto è possibile approssimare la distribuzione dei rendimenti del NIKKEI 225 ad una normale, in modo da potere beneficiare di tutte semplificazioni del caso.

## 1.11 TSX

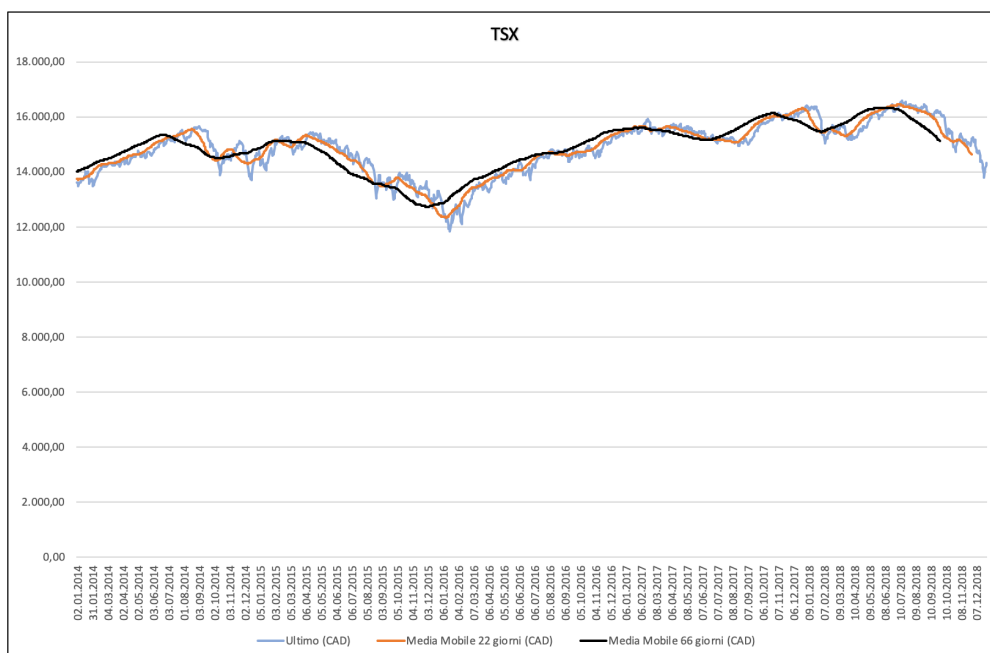


Figura 25 - Andamento prezzi indice di borsa TSX con medie mobili

Il grafico in alto dimostra l'andamento dei prezzi del TSX nel quinquennio che va dal 01/01/2014 al 31/12/2018. A quest'ultima curva sono state aggiunte le medie mobili, la cui definizione è stata anticipata nel paragrafo 1.2: come si può osservare le medie prese in considerazione sono due, una più "veloce" a 22 giorni, equivalente ad un mese di trading days, e una più "lenta" a 66 giorni, equivalente a 3 mesi di trading days. Come già accennato l'utilizzo combinato di queste due categorie di medie, con quello che è l'andamento complessivo delle oscillazioni delle quotazioni dei prezzi dell'asset di riferimento, è possibile predire in quali range temporali il mercato è rialzista/ribassista e di conseguenza che tipologie di strategie adottare in termini di contrattazione (short/long).

Se si osserva attentamente il grafico, è possibile scorgere nell'arco temporale tra Luglio e Agosto 2014 come la media mobile più veloce taglia al rialzo quella più lenta, il che predice un imminente ribasso delle performance dei prezzi di borsa, con una possibile entrata tipo long nel mercato (acquistare titoli perché conveniente, dato il ribasso dei prezzi); quanto detto è poi dimostrato da lì a poco, appunto, con performance negative dell'indice, evidenziate la curva di colore celeste chiaro.

Viceversa tra Maggio e Giugno 2018 si avrà un segnale di vendita (andare short), vale a dire che converrebbe vendere asset dato l'imminente fase di rialzo dei prezzi dell'intero mercato, che può portare ad un guadagno tramite ricorso al capital gain; questo viene predetto per il fatto che la media

mobile più lenta (curva di colore nero) taglia al ribasso la media più veloce (curva di colore arancione).

Analizzato in prima battuta l'indice TSX da un punto di vista delle performance generali, si è poi proceduto al calcolo dei Log rendimenti e alla determinazione delle variabili statistiche rilevanti. Di seguito vengono riportati i valori dei dati con la rappresentazione della distribuzione dei rendimenti e il test di normalità della stessa, ottenuti in ambiente SPSS:

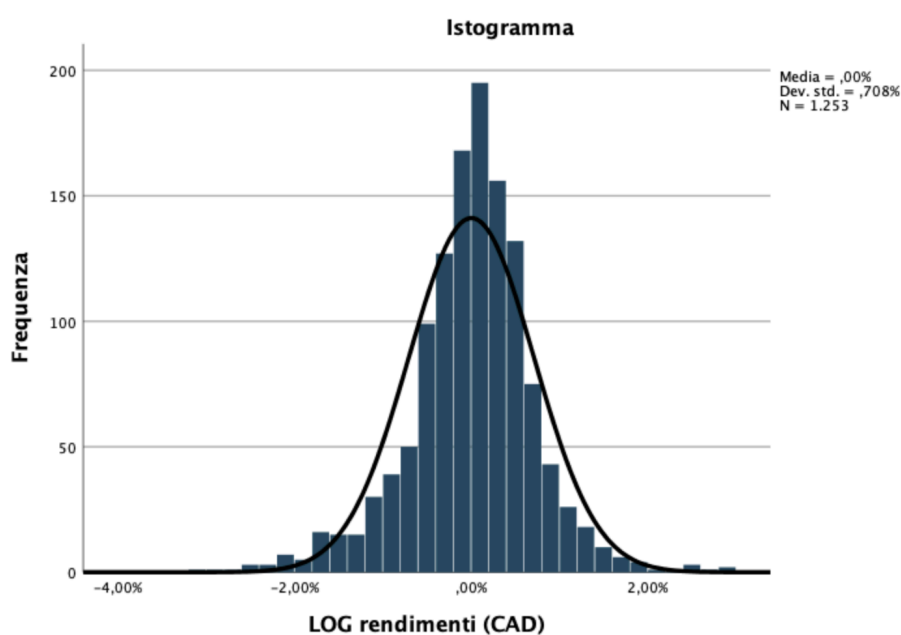


Figura 26 - Distribuzione dei log-rendimenti

La seguente figura mostra la distribuzione dei log-rendimenti che a primo impatto sembra essere normale: per determinare effettivamente ciò, sono necessarie ulteriori parametri quali asimmetria e curtosi, i quali poi insieme al test di normalità ci permetteranno di capire se effettivamente la distribuzione è approssimabile ad una normale.

Nelle seguenti tabelle sono riportati i dati di riferimento:

**Statistiche**

|                                  |          |          |
|----------------------------------|----------|----------|
| LOG rendimenti (CAD)             |          |          |
| N                                | Valido   | 1253     |
|                                  | Mancante | 24       |
| Media                            |          | 0,0042%  |
| Deviazione std.                  |          | 0,70821% |
| Varianza                         |          | ,502     |
| Asimmetria                       |          | -,345    |
| Errore standard della asimmetria |          | ,069     |
| Curtosi                          |          | 2,110    |
| Errore standard della curtosi    |          | ,138     |

**Test di normalità**

|                      | Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup> |      |       | Shapiro-Wilk |      |       |
|----------------------|---------------------------------|------|-------|--------------|------|-------|
|                      | Statistic a                     | gl   | Sign. | Statistic a  | gl   | Sign. |
| LOG rendimenti (CAD) | ,067                            | 1253 | ,000  | ,967         | 1253 | ,000  |

a. Correzione di significatività di Lilliefors

Figura 27 - Analisi statistica descrittiva TSX

Calcolati tutti i valori necessari è possibile effettuare il test di normalità. Il suddetto test consta di due parti: la prima riguarda quello di “Kolmogorov-Smirnov”, in cui il valore statistico deve essere inferiore a 0,07; la seconda invece fa riferimento a “Shapiro-Wilk” in cui il valore statistico deve essere contenuto nel range 0,97 e 1.

Come si evince dai dati, entrambi i test sono rispettati (per via di scostamenti trascurabili, considerando anche la variabile di errore, dai valori soglia), pertanto è possibile approssimare la distribuzione dei rendimenti del TSX ad una normale, in modo da potere beneficiare di tutte semplificazioni del caso.

## 1.12 SHANGHAI

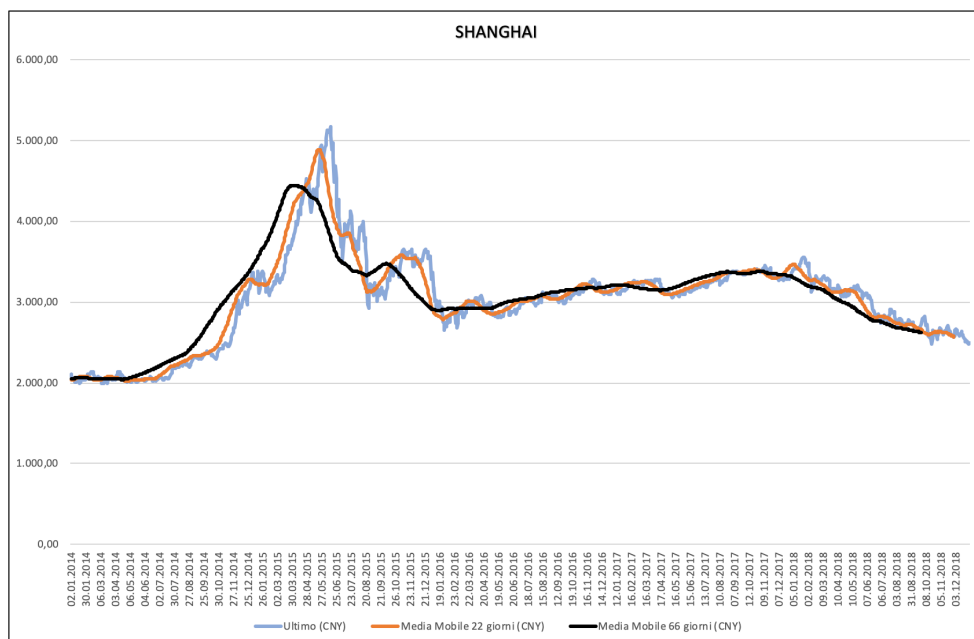


Figura 28 - Andamento prezzi indice di borsa SHANGHAI con medie mobili

Il grafico in alto dimostra l'andamento dei prezzi di SHANGHAI nel quinquennio che va dal 01/01/2014 al 31/12/2018. A quest'ultima curva sono state aggiunte le medie mobili, la cui definizione è stata anticipata nel paragrafo 1.2: come si può osservare le medie prese in considerazione sono due, una più "veloce" a 22 giorni, equivalente ad un mese di trading days, e una più "lenta" a 66 giorni, equivalente a 3 mesi di trading days. Come già accennato l'utilizzo combinato di queste due categorie di medie, con quello che è l'andamento complessivo delle oscillazioni delle quotazioni dei prezzi dell'asset di riferimento, è possibile predire in quali range temporali il mercato è rialzista/ribassista e di conseguenza che tipologie di strategie adottare in termini di contrattazione (short/long).

Se si osserva attentamente il grafico, è possibile scorgere nell'arco temporale tra Settembre e Ottobre 2015 come la media mobile più veloce taglia al rialzo quella più lenta, il che predice un imminente ribasso delle performance dei prezzi di borsa, con una possibile entrata tipo long nel mercato (acquistare titoli perché conveniente, dato il ribasso dei prezzi); quanto detto è poi dimostrato da lì a poco, appunto, con performance negative dell'indice, evidenziate la curva di colore celeste chiaro.



Viceversa tra Marzo e Aprile 2015 si avrà un segnale di vendita (andare short), vale a dire che converrebbe vendere asset dato l'imminente fase di rialzo dei prezzi dell'intero mercato, che può portare ad un guadagno tramite ricorso al capital gain; questo viene predetto per il fatto che la media mobile più lenta (curva di colore nero) taglia al ribasso la media più veloce (curva di colore arancione).

Analizzato in prima battuta l'indice SHANGHAI da un punto di vista delle performance generali, si è poi proceduto al calcolo dei Log rendimenti e alla determinazione delle variabili statistiche rilevanti. Di seguito vengono riportati i valori dei dati con la rappresentazione della distribuzione dei rendimenti e il test di normalità della stessa, ottenuti in ambiente SPSS:

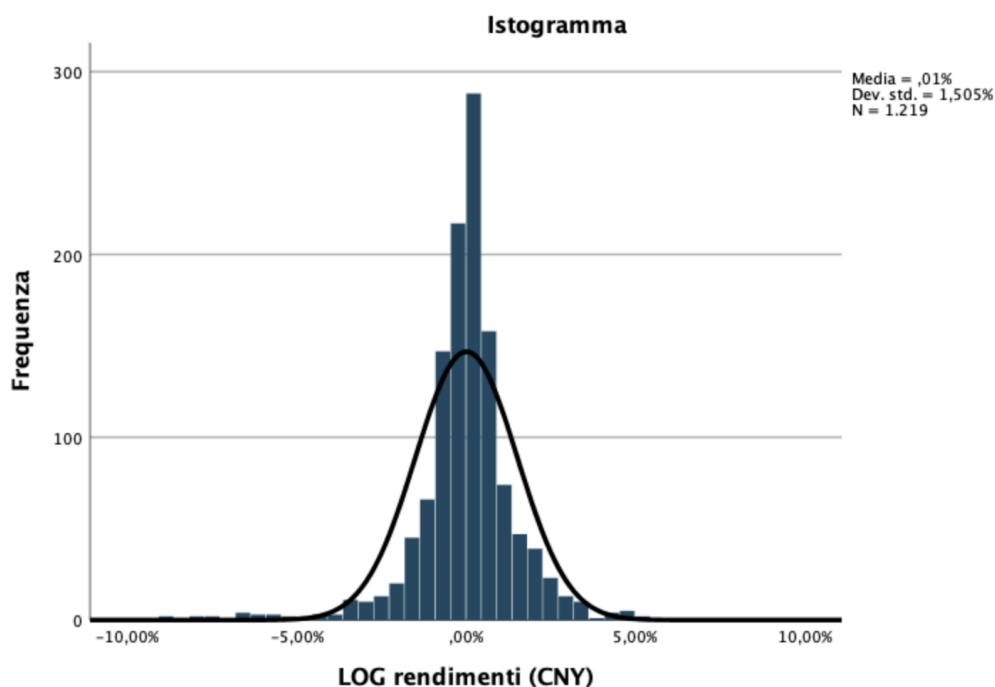


Figura 29 - Distribuzione dei log-rendimenti

La seguente figura mostra la distribuzione dei log-rendimenti che a primo impatto sembra essere normale: per determinare effettivamente ciò, sono necessarie ulteriori parametri quali asimmetria e curtosi, i quali poi insieme al test di normalità ci permetteranno di capire se effettivamente la distribuzione è approssimabile ad una normale.

Nelle seguenti tabelle sono riportati i dati di riferimento:

#### Statistiche

| LOG rendimenti (CNY)             |          |          |
|----------------------------------|----------|----------|
| N                                | Valido   | 1219     |
|                                  | Mancante | 58       |
| Media                            |          | 0,0137%  |
| Deviazione std.                  |          | 1,50496% |
| Varianza                         |          | 2,265    |
| Asimmetria                       |          | -1,226   |
| Errore standard della asimmetria |          | ,070     |
| Curtosi                          |          | 7,031    |
| Errore standard della curtosi    |          | ,140     |

#### Test di normalità

|                      | Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup> |      |       | Shapiro-Wilk |      |       |
|----------------------|---------------------------------|------|-------|--------------|------|-------|
|                      | Statistic a                     | gl   | Sign. | Statistic a  | gl   | Sign. |
| LOG rendimenti (CNY) | ,121                            | 1219 | ,000  | ,877         | 1219 | ,000  |

a. Correzione di significatività di Lilliefors

Figura 30 - Analisi statistica descrittiva SHANGHAI

Calcolati tutti i valori necessari è possibile effettuare il test di normalità. Il suddetto test consta di due parti: la prima riguarda quello di “Kolmogorov-Smirnov”, in cui il valore statistico deve essere inferiore a 0,07; la seconda invece fa riferimento a “Shapiro-Wilk” in cui il valore statistico deve essere contenuto nel range 0,97 e 1.

Come si evince dai dati, se il secondo test è accettabile per scostamenti non altamente significativi per via anche dell’agire del margine di errore, per quanto riguarda il primo test, quest’ultimo non rispetta le soglie prestabilite: una spiegazione plausibile è da attribuire alla elevata volatilità dei rendimenti dovuti a momenti di eccessiva euforia e non, da parte degli investitori; pertanto è possibile approssimare la distribuzione dei rendimenti dei SHANGHAI ad una normale, in modo da potere beneficiare di tutte semplificazioni del caso.

## 2. I Mercati Finanziari

### 2.1 Il Mercato Finanziario

Come riportato dalla CONSOB, i mercati finanziari sono i "luoghi" dove è possibile acquistare o vendere strumenti finanziari (azioni, obbligazioni, derivati, quote di fondi ecc.). Una prima distinzione è fra:

- **mercato primario** – dove si acquistano i titoli al momento dell'emissione;
- **mercato secondario** – rappresentato dai **mercati finanziari** dove si acquistano titoli da chi li ha già sottoscritti.

I mercati finanziari non sono più luoghi fisici ma piattaforme informatiche ("sedi di negoziazione") dove si "incrociano" le proposte di acquisto e di vendita di strumenti finanziari immesse nel sistema telematicamente (Consob, s.d.).

### 2.2 Efficienza dei Mercati

Il concetto di efficienza dei mercati finanziari è un'ipotesi in base alla quale il prezzo di equilibrio di una attività finanziaria riflette in modo completo e continuo tutta l'informazione disponibile, posseduta in modo disomogeneo dai diversi agenti del mercato, di modo da eliminare qualsiasi possibilità di extra profitto da parte degli agenti che raccolgono direttamente informazione sul mercato rispetto a quelli che osservano, al contrario, unicamente le oscillazioni del prezzo sul mercato di riferimento. Il prezzo di equilibrio aggrega l'informazione posseduta dai singoli agenti e si adegua nel continuo all'arrivo di nuova informazione (bankpedia, s.d.).

Secondo l'impostazione del professor Eugene Fama (University of Chicago) si distinguono tre forme di efficienza:

- **L'efficienza in forma forte** implica che il prezzo del titolo rifletta tutta l'informazione relativa al titolo, sia quella pubblica che quella privata (cioè anche l'informazione a disposizione degli insider<sup>5</sup>);

---

<sup>5</sup> Insider: nel linguaggio finanziario, chiunque possa avere accesso in anticipo a informazioni riservate sull'attività economica di un'azienda (treccani, s.d.).

- **L'efficienza in forma semi-forte** implica che il prezzo del titolo rifletta le informazioni pubblicamente disponibili (bilanci, comunicati stampa, ecc.);
- **L'efficienza in forma debole** implica che il prezzo del titolo rifletta solo le informazioni rappresentate dai prezzi e dai volumi storici del titolo stesso (Borsa Italiana, s.d.).

Questa teoria sostiene quindi che i mercati sono efficienti, ossia che tutti gli investitori hanno le stesse informazioni. Eugene Fama definì un mercato finanziario efficiente quello in cui i prezzi dei titoli quotati rispecchiano sempre e pienamente le informazioni disponibili. Secondo tale ipotesi, quindi, un investitore qualsiasi non può pensare di battere regolarmente il mercato e le risorse che impiega per analizzare, scegliere e negoziare titoli sono sprecate. È meglio invece operare con una strategia passiva, detenendo semplicemente il portafoglio di mercato (performance trading, s.d.).

## 2.3 La teoria del “Random walk”

L'idea di base del processo random walk (percorso casuale) è che il valore di una serie<sup>6</sup> domani sia pari al valore di oggi più un valore imprevedibile.

Questo modello implica che l'evoluzione del prezzo di uno strumento finanziario è essenzialmente casuale e la migliore previsione del prezzo dell'istante successivo non può che essere fatta sulla base del prezzo precedente e delle informazioni disponibili al mercato. Pertanto i movimenti dei prezzi e dei rendimenti non seguono alcun trend o regolarità, quindi i movimenti passati non possono essere usati per previsioni future (performance trading, s.d.).

In base a questo modello, quindi, vi è uguale probabilità che la variazione nel tempo sia positiva o negativa: una previsione il più possibile attendibile del prezzo all'istante successivo può essere fatta solo in base al prezzo corrente poiché, dato che l'andamento non è regolare, i movimenti fatti registrare nel passato non danno indicazioni valide per le previsioni future (treccani, s.d.).

Ciò si sposa perfettamente con la teoria dei mercati efficienti, anche solo in forma debole, in quanto, se tutte le informazioni storiche sono già state prezzate dal mercato, vuol dire che

*“i prezzi dei titoli rispecchiano accuratamente tutte le informazioni disponibili in ogni momento, e dunque i mercati finanziari sono sempre correttamente valutati sulla base di ciò che è pubblicamente*

---

<sup>6</sup> Serie storiche: dati ordinati nel tempo. In questo caso vi rientrano i prezzi di azioni, obbligazioni e strumenti derivati, i tassi di cambio delle valute e i tassi di interesse (Santi & Bee, 2013).

*noto. Dunque, i movimenti imprevedibili dei prezzi risultano tali solo perché si verificano soltanto in risposta a informazioni autentiche che, proprio perché nuove, sono di per sé imprevedibili (startingfinance, 2017)."*

### 2.3.1 La teoria del “Random Walk”: approccio matematico

Prima di analizzare in dettaglio la costruzione e l’interpretazione dell’approccio quantitativo della teoria del random walk, è necessario introdurre brevemente alcune definizioni fondamentali per la trattazione. Si supponga di lavorare con dati ordinati nel tempo, ovvero una serie storica. Si noti inoltre che le seguenti formulazioni sono tratte dal testo (Santi & Bee, 2013).

**Definizione 2.1 (Processo Stocastico)** Un processo stocastico è una famiglia di variabili casuali  $\{X_t : t \in T\}$  indicizzate da un insieme  $T$ , comunemente interpretato come “tempo”.

Si consideri una realizzazione  $x_1, x_2, \dots$  di un processo stocastico discreto, vale a dire un processo in cui  $T = \{t_1, t_2, \dots\}$  è un insieme discreto. Una questione fondamentale alla quale siamo interessati è se le osservazioni sono o meno autocorrelate. Se la risposta è negativa, infatti, si ha un primo indizio a favore dell’ipotesi che il processo stocastico sia puramente casuale, cioè composto da osservazioni iid<sup>7</sup>.

**Definizione 2.2 (Random Walk)** Sia  $\{\varepsilon_t\}$  un processo stocastico discreto a componenti indipendenti ed identicamente distribuite (processo iid) aventi valore atteso nullo e varianza finita pari a  $\sigma^2$ . Il processo stocastico  $\{X_t\}$  definito come:

$$(2.1) \quad X_t = \sum_{j=0}^t \varepsilon_j$$

(con  $\varepsilon_0 = 0$ ) è una random walk.

Ci basta calcolare la varianza del processo (2.1) per verificare che esso non è stazionario, infatti:

---

<sup>7</sup> iid: processi o dati indipendentemente ed identicamente distribuiti.

$$\text{var}(X_t) = \text{var} \left( \sum_{j=0}^t \varepsilon_j \right) = \sum_{j=0}^t \text{var}(\varepsilon_j) = \sum_{j=1}^t \sigma^2 = \sigma^2 t ,$$

e quindi la varianza del processo non è indipendente dal tempo.

Se si formula la (2.1) nel seguente modo:

$$(2.2) \quad X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$

è possibile rilevare con maggiore immediatezza la presenza del trend stocastico nel processo  $\{ X_t \}$ , infatti si nota che le innovazioni  $\varepsilon_t$  contribuiscono a determinare il valore del processo  $\{ X_t \}$  ad ogni stadio  $t$  senza mai attenuare nel tempo il loro effetto a causa del fatto che il coefficiente del termine autoregressivo  $X_{t-1}$  è pari ad uno. Si avrebbe infatti che, se la (2.2) potesse essere espressa in questo modo:

$$(2.3) \quad X_t = \varphi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

dovrebbe essere a questo punto evidente che un modo per sottoporre a test statistico la presenza di una radice unitaria in una serie storica consiste nel verificare l'ipotesi che il coefficiente  $\varphi$  dell'equazione (1.3) sia pari ad uno. Il test di Dickey e Fuller è basato su questo principio e prevede che la stima sia effettuata su una trasformazione della (2.3):

$$(2.4) \quad \Delta X_t = \gamma X_{t-1} + \varepsilon_t ,$$

con  $\gamma = \varphi - 1$ .<sup>8</sup> Si ha così che i sistemi di ipotesi formulabili sono:

$$\begin{array}{lll} \begin{cases} H_{p0} : \gamma = 0 \\ H_{p1} : \gamma \neq 0 \end{cases} & \begin{cases} H_{p0} : \gamma = 0 \\ H_{p1} : \gamma < 0 \end{cases} & \begin{cases} H_{p0} : \gamma = 0 \\ H_{p1} : \gamma > 0 \end{cases} \end{array}$$

---

<sup>8</sup> Per ottenere l'equazione (2.4) dalla (2.3) basta sottrarre a quest'ultima  $X_{t-1}$  da entrambi i lati sostituendo in seguito  $\Delta X_t$  a  $(X_t - X_{t-1})$  ed il coefficiente  $\gamma$  a  $(\varphi - 1)$ .

Le cui ipotesi alternative individuano rispettivamente l'assenza di radice unitaria, la stazionarietà e l'esplosività del processo.

### 2.3.2 Verifica della teoria del “Random Walk”

A partire dalla trattazione teorica del random walk poc'anzi illustrata, si vuole ora dimostrare che, a partire dalle serie storiche dei principali indici raccolti, quest'ultimi risultano sostanzialmente soddisfare la suddetta teoria per cercare di giungere a definirli mercati che presentano un grado di efficienza debole.

Per facilità di analisi e trattazione, si è preferito seguire l'impostazione del libro “Finanza quantitativa con R” (Santi & Bee, 2013) e pertanto nelle regressioni effettuate sono stati considerati i rendimenti logaritmici<sup>9</sup>. Si registri nelle analisi effettuate anche la presenza di un Lag<sup>10</sup> pari ad un periodo (valore 1 affinché si studi l'assenza di correlazione tra i rendimenti del periodo  $t$  e  $t-1$ ).

Inoltre il test delle ipotesi scelto per verificare che il coefficiente  $\gamma$  sia nullo e che il processo in questione risulti essere un processo stocastico, quindi casuale, è il seguente:

$$\begin{cases} H_{p_0} : \gamma = 0 \\ H_{p_1} : \gamma \neq 0 \end{cases}$$

dove l'ipotesi nulla  $H_{p_0}$  rappresenta il modello stocastico, in cui si avrebbe radice unitaria del coefficiente autoregressivo poiché il termine  $\gamma$  renderebbe valida la (2.4) in cui si manifesterebbe l'assenza di correlazione tra i rendimenti all'istante  $t$  e quelli dell'istante precedente, affermando pertanto la definizione di random walk del processo in esame.

Viceversa l'ipotesi alternativa  $H_{p_1}$ , come già citato, individua l'assenza di radice unitaria, quindi la sua non casualità.

Si consideri poi un livello di significatività del test pari ad  $\alpha = 5\%$ .

---

<sup>9</sup> Log rendimenti:  $\text{Log}\left(\frac{P(t)}{P(t-1)}\right)$ , dove per  $P(t)$  si intende il prezzo del relativo indice all'istante  $t$ .

<sup>10</sup> Lag: ritardo con cui si manifestano gli effetti delle misure monetarie o fiscali (garzantilinguistica, s.d.). In questo caso la misura di riferimento sono i Log rendimenti.

I risultati ottenuti saranno illustrati di seguito in una tabella, identicamente per tutti gli indici presi in considerazione in questa trattazione, dove il valore dell'intercetta, così come per gli altri mercati, assumerà un valore prossimo o in un intorno vicino allo zero, come difatti ci aspettava, in modo che si possa giungere alla (2.4). L'attenzione quindi ricadrà sull'analizzare il risultato del coefficiente di  $X_{t-1}$  e il suo p-value (valore di significatività), in modo da potere condurre il test delle ipotesi e analizzare i risultati con opportune considerazioni.

### 2.3.2 ASX 200

Tabella 3 - Valori regressione ASX 200

|            | <i>Coefficienti</i> | <i>Errore standard</i> | <i>Valore di significatività</i> |
|------------|---------------------|------------------------|----------------------------------|
| Intercetta | 4,23887E-05         | 0,000228301            | 0,852732902                      |
| $X(t-1)$   | 0,004594858         | 0,028125343            | 0,87025265                       |

I risultati della regressione riportati in tabella sono da riferirsi per la borsa australiana. Il valore del coefficiente di  $X_{t-1}$  è pari a 0,004594858 con un p-value dell' 87%. Si noti come il termine  $\gamma$  è prossimo a zero, valore che sposerebbe la teoria esposta fino ad ora e difatti dimostrerebbe l'ipotesi di moto casuale dell'andamento dei rendimenti. Poiché il suddetto coefficiente, preso in analisi in senso assoluto, non porterebbe ad una concreta conclusione nel test di ipotesi condotto, bisogna spostare l'attenzione ulteriormente sul valore del p-value: esso risulta essere  $p > \alpha = 5\%$ . Tale risultato permette di dire come l'evidenza empirica non è sufficientemente contraria all'ipotesi nulla che quindi non può essere rifiutata. In altre parole si sta cercando di dire come i dati osservati, relativi ai Log rendimenti dell'indice di borsa in questione, non sono statisticamente significativi tali da portare a rigettare l'ipotesi nulla.

Quindi se si uniscono entrambe le valutazioni, queste ci portano a dire come il valore del parametro  $\gamma$  sia, da un punto di vista statistico, accettabile dato che non vi sono dati che permetterebbero di dire l'opposto. Perciò è plausibile ritenere, dal momento che  $H_{p_0}$  non è rifiutabile, come il processo in analisi sia a radice unitaria e quindi soddisfi la (2.4) e pertanto l'assenza di correlazione tra i rendimenti di due periodi differenti.



Quanto poc'anzi dedotto lascia presagire come la definizione di random walk riformulata come la (2.2) sia soddisfatta e che quindi l'indice australiano rispetti il grado di efficienza debole dei mercati.

### 2.3.3 CAC 40

*Tabella 4 - Valori regressione CAC 40*

|            | <i>Coefficienti</i> | <i>Errore standard</i> | <i>Valore di significatività</i> |
|------------|---------------------|------------------------|----------------------------------|
| Intercetta | 0,000111562         | 0,000307267            | 0,716607153                      |
| $X(t-1)$   | 0,006704586         | 0,02812518             | 0,811622103                      |

I risultati della regressione riportati in tabella sono da riferirsi per la borsa francese.

Il valore del coefficiente di  $X_{t-1}$  è pari a 0,006704586 con un p-value dell' 81%. Si noti come il termine  $\gamma$  è prossimo a zero, valore che sposerebbe la teoria esposta fino ad ora e difatti dimostrerebbe l'ipotesi di moto casuale dell'andamento dei rendimenti. Poiché il suddetto coefficiente, preso in analisi in senso assoluto, non porterebbe ad una concreta conclusione nel test di ipotesi condotto, bisogna spostare l'attenzione ulteriormente sul valore del p-value: esso risulta essere  $p > \alpha = 5\%$ . Tale risultato permette di dire come l'evidenza empirica non è sufficientemente contraria all'ipotesi nulla che quindi non può essere rifiutata. In altre parole si sta cercando di dire come i dati osservati, relativi ai Log rendimenti dell'indice di borsa in questione, non sono statisticamente significativi tali da portare a rigettare l'ipotesi nulla.

Quindi se si uniscono entrambe le valutazioni, queste ci portano a dire come il valore del parametro  $\gamma$  sia, da un punto di vista statistico, accettabile dato che non vi sono dati che permetterebbero di dire l'opposto. Perciò è plausibile ritenere, dal momento che  $H_{p0}$  non è rifiutabile, come il processo in analisi sia a radice unitaria e quindi soddisfi la (2.4) e pertanto l'assenza di correlazione tra i rendimenti di due periodi differenti.

Quanto poc'anzi dedotto lascia presagire come la definizione di random walk riformulata come la (2.2) sia soddisfatta e che quindi l'indice francese rispetti il grado di efficienza debole dei mercati.

## 2.3.4 DAX

Tabella 5 - Valori regressione DAX

|            | <i>Coefficienti</i> | <i>Errore standard</i> | <i>Valore di significatività</i> |
|------------|---------------------|------------------------|----------------------------------|
| Intercetta | 9,00122E-05         | 0,000319909            | 0,778474543                      |
| $X(t-1)$   | -0,01070059         | 0,028193693            | 0,7043521                        |

I risultati della regressione riportati in tabella sono da riferirsi per la borsa tedesca.

Il valore del coefficiente di  $X_{t-1}$  è pari a -0,01070059 con un p-value dell' 70%. Si noti come il termine  $\gamma$ , se pure negativo, è in un intorno molto prossimo a zero, valore che sposerebbe la teoria esposta fino ad ora e difatti dimostrerebbe l'ipotesi di moto casuale dell'andamento dei rendimenti. Poiché il suddetto coefficiente, preso in analisi in senso assoluto, non porterebbe ad una concreta conclusione nel test di ipotesi condotto, bisogna spostare l'attenzione ulteriormente sul valore del p-value: esso risulta essere  $p > \alpha = 5\%$ . Tale risultato permette di dire come l'evidenza empirica non è sufficientemente contraria all'ipotesi nulla che quindi non può essere rifiutata. In altre parole si sta cercando di dire come i dati osservati, relativi ai Log rendimenti dell'indice di borsa in questione, non sono statisticamente significativi tali da portare a rigettare l'ipotesi nulla.

Quindi se si uniscono entrambe le valutazioni, queste ci portano a dire come il valore del parametro  $\gamma$  sia, da un punto di vista statistico, accettabile dato che non vi sono dati che permetterebbero di dire l'opposto. Perciò è plausibile ritenere, dal momento che  $H_{p0}$  non è rifiutabile, come il processo in analisi sia a radice unitaria e quindi soddisfi la (2.4) e pertanto l'assenza di correlazione tra i rendimenti di due periodi differenti.

Quanto poc'anzi dedotto lascia presagire come la definizione di random walk riformulata come la (2.2) sia soddisfatta e che quindi l'indice tedesco rispetti il grado di efficienza debole dei mercati.

### 2.3.5 DOW 30

Tabella 6 - Valori regressione DOW 30

|            | <i>Coefficienti</i> | <i>Errore standard</i> | <i>Valore di significatività</i> |
|------------|---------------------|------------------------|----------------------------------|
| Intercetta | 0,000279222         | 0,000236431            | 0,237831799                      |
| $X(t-1)$   | -0,007719127        | 0,028257932            | 0,784770037                      |

I risultati della regressione riportati in tabella sono da riferirsi per la borsa americana.

Il valore del coefficiente di  $X_{t-1}$  è pari a -0,007719127 con un p-value dell' 78%. Si noti come il termine  $\gamma$ , se pure negativo, è in un intorno molto prossimo a zero, valore che sposerebbe la teoria esposta fino ad ora e difatti dimostrerebbe l'ipotesi di moto casuale dell'andamento dei rendimenti. Poiché il suddetto coefficiente, preso in analisi in senso assoluto, non porterebbe ad una concreta conclusione nel test di ipotesi condotto, bisogna spostare l'attenzione ulteriormente sul valore del p-value: esso risulta essere  $p > \alpha = 5\%$ . Tale risultato permette di dire come l'evidenza empirica non è sufficientemente contraria all'ipotesi nulla che quindi non può essere rifiutata. In altre parole si sta cercando di dire come i dati osservati, relativi ai Log rendimenti dell'indice di borsa in questione, non sono statisticamente significativi tali da portare a rigettare l'ipotesi nulla.

Quindi se si uniscono entrambe le valutazioni, queste ci portano a dire come il valore del parametro  $\gamma$  sia, da un punto di vista statistico, accettabile dato che non vi sono dati che permetterebbero di dire l'opposto. Perciò è plausibile ritenere, dal momento che  $H_{p0}$  non è rifiutabile, come il processo in analisi sia a radice unitaria e quindi soddisfi la (2.4) e pertanto l'assenza di correlazione tra i rendimenti di due periodi differenti.

Quanto poc'anzi dedotto lascia presagire come la definizione di random walk riformulata come la (2.2) sia soddisfatta e che quindi l'indice americano rispetti il grado di efficienza debole dei mercati.

### 2.3.6 FTSE 100

Tabella 7 - Valori regressione FTSE 100

|            | <i>Coefficienti</i> | <i>Errore standard</i> | <i>Valore di significatività</i> |
|------------|---------------------|------------------------|----------------------------------|
| Intercepta | -3,18899E-07        | 0,000244072            | 0,998957709                      |
| $X(t-1)$   | 0,010470803         | 0,028169841            | 0,710176797                      |

I risultati della regressione riportati in tabella sono da riferirsi per la borsa inglese.

Il valore del coefficiente di  $X_{t-1}$  è pari a 0,010470803 con un p-value dell' 71%. Si noti come il termine  $\gamma$  è prossimo a zero, valore che sposerebbe la teoria esposta fino ad ora e difatti dimostrerebbe l'ipotesi di moto casuale dell'andamento dei rendimenti. Poiché il suddetto coefficiente, preso in analisi in senso assoluto, non porterebbe ad una concreta conclusione nel test di ipotesi condotto, bisogna spostare l'attenzione ulteriormente sul valore del p-value: esso risulta essere  $p > \alpha = 5\%$ . Tale risultato permette di dire come l'evidenza empirica non è sufficientemente contraria all'ipotesi nulla che quindi non può essere rifiutata. In altre parole si sta cercando di dire come i dati osservati, relativi ai Log rendimenti dell'indice di borsa in questione, non sono statisticamente significativi tali da portare a rigettare l'ipotesi nulla.

Quindi se si uniscono entrambe le valutazioni, queste ci portano a dire come il valore del parametro  $\gamma$  sia, da un punto di vista statistico, accettabile dato che non vi sono dati che permetterebbero di dire l'opposto. Perciò è plausibile ritenere, dal momento che  $H_{p0}$  non è rifiutabile, come il processo in analisi sia a radice unitaria e quindi soddisfi la (2.4) e pertanto l'assenza di correlazione tra i rendimenti di due periodi differenti.

Quanto poc'anzi dedotto lascia presagire come la definizione di random walk riformulata come la (2.2) sia soddisfatta e che quindi l'indice inglese rispetti il grado di efficienza debole dei mercati.

### 2.3.7 FTSE MIB

Tabella 8 - Valori regressione FTSE MIB

|            | <i>Coefficienti</i> | <i>Errore standard</i> | <i>Valore di significatività</i> |
|------------|---------------------|------------------------|----------------------------------|
| Intercetta | -2,04664E-05        | 0,00040615             | 0,95981866                       |
| $X(t-1)$   | -0,08347994         | 0,028068864            | 0,002994292                      |

I risultati della regressione riportati in tabella sono da riferirsi per la borsa italiana.

Il valore del coefficiente di  $X_{t-1}$  è pari a -0,08347994 con un p-value dell' 0,29%. Si noti come il termine  $\gamma$ , se pure negativo, è in un intorno molto prossimo a zero, valore che sposerebbe la teoria esposta fino ad ora e difatti dimostrerebbe l'ipotesi di moto casuale dell'andamento dei rendimenti. Poiché il suddetto coefficiente, preso in analisi in senso assoluto, non porterebbe ad una concreta conclusione nel test di ipotesi condotto, bisogna spostare l'attenzione ulteriormente sul valore del p-value: esso risulta essere  $p < \alpha = 5\%$ . Tale risultato permette di dire come l'evidenza empirica è contraria all'ipotesi nulla che quindi va rifiutata. In altre parole si sta cercando di dire come i dati osservati, relativi ai Log rendimenti dell'indice di borsa in questione, sono statisticamente significativi tali da portare a rigettare l'ipotesi nulla. Quindi se si uniscono entrambe le valutazioni, queste ci portano a dire come il valore del parametro  $\gamma$  sia, da un punto di vista statistico, non accettabile dato che vi sono dati che permetterebbero di dire l'opposto. Perciò è plausibile ritenere, dal momento che  $H_{p0}$  è rifiutabile, come il processo in analisi non sia a radice unitaria e quindi non soddisfi la (2.4) e pertanto l'assenza di correlazione tra i rendimenti di due periodi differenti. Quanto poc'anzi dedotto lascia presagire come la definizione di random walk riformulata come la (2.2) non sia soddisfatta e che quindi l'indice italiano non rispetti il grado di efficienza debole dei mercati. Da un punto di vista statistico, quindi, l'analisi effettuata per l'indice italiano confuterebbe tutti i fondamenti teorici illustrati precedentemente. Bisogna però cercare di contestualizzare e successivamente comprendere le eventuali cause che hanno potuto portare ad un risultato che si presta ad uscire dalle normali aspettative che si erano presupposte; questo perché, quando si parla di modelli che cercano di spiegare perfettamente la realtà, per lo più una realtà complessa e in continua evoluzione come quella dei mercati finanziari, bisogna pur sempre considerare la presenza di errori e l'influire di variabili esogene.

A tal proposito una variabile che potrebbe distorcere il modello matematico è senz'altro l'emotività e la psicologia di coloro i quali risultano essere gli attori principali coinvolti nei mercati.

Infatti *“le componenti psicologiche legate alla irrazionalità degli operatori/investitori [...], sono "rumori" di intensità irrilevante per l'economista. Tuttavia la Borsa è un "fenomeno" molto complesso ma prima di ogni aspetto è un fenomeno sociale, in quanto messo in atto da soggetti umani, e quindi va affrontato con metodologia psicosociale, per cercare di arrivarne a capo e trarre conclusioni che ci possano essere di aiuto ai fini operativi. Il mercato finanziario, a differenza della teoria, è caratterizzato da assenza di modelli dominanti. La pluralità delle opinioni genera comportamenti di massa e questi sono il risultato dei comportamenti di tanti individui [...]. Nella realtà gli investitori sembrano compiere sistematici errori di valutazione ed effettuare scelte di investimento non massimizzanti. I mercati sembrano mostrare significative e ripetute allontanamenti dall'efficienza e non riflettere sempre il valore corretto delle attività finanziarie. [...] le informazioni fanno variare il mercato in una direzione piuttosto che in un'altra, e soprattutto tali informazioni (a volte) sono in possesso di pochi che “controllano” il mercato. Questo è vero specialmente in microeconomie come quella italiana, dove molte aziende sono in mano a lobby famigliari”* (performance trading, s.d.).

Quindi *“la verifica empirica dell'ipotesi d'efficienza ha dimostrato che i mercati finanziari sono poco efficienti. In particolare il mercato italiano risulta essere efficiente in senso debole e comunque meno efficiente dei principali mercati finanziari mondiali”* (bankpedia, s.d.).

### 2.3.8 JSE Top 40

Tabella 9 - Valori regressione JSE Top 40

|            | <i>Coefficienti</i> | <i>Errore standard</i> | <i>Valore di significatività</i> |
|------------|---------------------|------------------------|----------------------------------|
| Intercetta | 9,97829E-05         | 0,000292333            | 0,732910254                      |
| $X(t-1)$   | -0,035010777        | 0,02832906             | 0,216743587                      |

I risultati della regressione riportati in tabella sono da riferirsi per la borsa sudafricana.

Il valore del coefficiente di  $X_{t-1}$  è pari a -0,035010777 con un p-value dell' 21,67%. Si noti come il termine  $\gamma$ , se pure negativo, è in un intorno molto prossimo a zero, valore che sposerebbe la teoria esposta fino ad ora e difatti dimostrerebbe l'ipotesi di moto casuale dell'andamento dei rendimenti. Poiché il suddetto coefficiente, preso in analisi in senso assoluto, non porterebbe ad una concreta conclusione nel test di ipotesi condotto, bisogna spostare l'attenzione ulteriormente sul valore del p-value: esso risulta essere  $p > \alpha = 5\%$ . Tale risultato permette di dire come l'evidenza empirica non è sufficientemente contraria all'ipotesi nulla che quindi non può essere rifiutata. In altre parole si sta cercando di dire come i dati osservati, relativi ai Log rendimenti dell'indice di borsa in questione, non sono statisticamente significativi tali da portare a rigettare l'ipotesi nulla.

Quindi se si uniscono entrambe le valutazioni, queste ci portano a dire come il valore del parametro  $\gamma$  sia, da un punto di vista statistico, accettabile dato che non vi sono dati che permetterebbero di dire l'opposto. Perciò è plausibile ritenere, dal momento che  $H_{p0}$  non è rifiutabile, come il processo in analisi sia a radice unitaria e quindi soddisfi la (2.4) e pertanto l'assenza di correlazione tra i rendimenti di due periodi differenti.

Quanto poc'anzi dedotto lascia presagire come la definizione di random walk riformulata come la (2.2) sia soddisfatta e che quindi l'indice sudafricano rispetti il grado di efficienza debole dei mercati.

### 2.3.9 NIKKEI 225

Tabella 10 - Valori regressione NIKKEI 225

|            | <i>Coefficienti</i> | <i>Errore standard</i> | <i>Valore di significatività</i> |
|------------|---------------------|------------------------|----------------------------------|
| Intercetta | 0,000196452         | 0,000361445            | 0,586869151                      |
| $Y(t-1)$   | -0,043028828        | 0,028278854            | 0,128365105                      |

I risultati della regressione riportati in tabella sono da riferirsi per la borsa giapponese.

Il valore del coefficiente di  $X_{t-1}$  è pari a -0,043028828 con un p-value dell' 12,83%. Si noti come il termine  $\gamma$ , se pure negativo, è in un intorno molto prossimo a zero, valore che sposerebbe la teoria esposta fino ad ora e difatti dimostrerebbe l'ipotesi di moto casuale dell'andamento dei rendimenti. Poiché il suddetto coefficiente, preso in analisi in senso assoluto, non porterebbe ad una concreta conclusione nel test di ipotesi condotto, bisogna spostare l'attenzione ulteriormente sul valore del p-value: esso risulta essere  $p > \alpha = 5\%$ . Tale risultato permette di dire come l'evidenza empirica non è sufficientemente contraria all'ipotesi nulla che quindi non può essere rifiutata. In altre parole si sta cercando di dire come i dati osservati, relativi ai Log rendimenti dell'indice di borsa in questione, non sono statisticamente significativi tali da portare a rigettare l'ipotesi nulla.

Quindi se si uniscono entrambe le valutazioni, queste ci portano a dire come il valore del parametro  $\gamma$  sia, da un punto di vista statistico, accettabile dato che non vi sono dati che permetterebbero di dire l'opposto. Perciò è plausibile ritenere, dal momento che  $H_{p0}$  non è rifiutabile, come il processo in analisi sia a radice unitaria e quindi soddisfi la (2.4) e pertanto l'assenza di correlazione tra i rendimenti di due periodi differenti.

Quanto poc'anzi dedotto lascia presagire come la definizione di random walk riformulata come la (2.2) sia soddisfatta e che quindi l'indice giapponese rispetti il grado di efficienza debole dei mercati.



## 2.3.10 TSX

Tabella 11 - Valori regressione TSX

|            | <i>Coefficienti</i> | <i>Errore standard</i> | <i>Valore di significatività</i> |
|------------|---------------------|------------------------|----------------------------------|
| Intercetta | 4,14352E-05         | 0,000199632            | 0,835608076                      |
| $Y(t-1)$   | 0,081455927         | 0,028198861            | 0,003936011                      |

I risultati della regressione riportati in tabella sono da riferirsi per la borsa canadese.

Il valore del coefficiente di  $X_{t-1}$  è pari a 0,081455927 con un p-value dell' 0,39%. Si noti come il termine  $\gamma$  è contenuto in un intorno di zero, valore che sposerebbe la teoria esposta fino ad ora e difatti dimostrerebbe l'ipotesi di moto casuale dell'andamento dei rendimenti. Poiché il suddetto coefficiente, preso in analisi in senso assoluto, non porterebbe ad una concreta conclusione nel test di ipotesi condotto, bisogna spostare l'attenzione ulteriormente sul valore del p-value: esso risulta essere  $p < \alpha = 5\%$ . Tale risultato permette di dire come l'evidenza empirica è contraria all'ipotesi nulla che quindi va rifiutata. In altre parole si sta cercando di dire come i dati osservati, relativi ai Log rendimenti dell'indice di borsa in questione, sono statisticamente significativi tali da portare a rigettare l'ipotesi nulla. Quindi se si uniscono entrambe le valutazioni, queste ci portano a dire come il valore del parametro  $\gamma$  sia, da un punto di vista statistico, non accettabile dato che vi sono dati che permetterebbero di dire l'opposto. Perciò è plausibile ritenere, dal momento che  $H_{p0}$  è rifiutabile, come il processo in analisi non sia a radice unitaria e quindi non soddisfi la (1.4) e pertanto la presenza di correlazione tra i rendimenti di due periodi differenti. Quanto poc'anzi dedotto lascia presagire come la definizione di random walk riformulata come la (1.2) non sia soddisfatta e che quindi l'indice canadese non rispetti il grado di efficienza debole dei mercati.

Come nel caso della borsa italiana, anche quella canadese rientra in una delle eccezioni che il modello matematico può presentare. Infatti se da un lato i risultati ottenuti mediante il test delle ipotesi, non dimostrino statisticamente la teoria del random walk, bisogna andare ad approfondire le variabili che possono intervenire e che portano alla distorsione del modello stesso.

Come è possibile leggere da un articolo di "Investimento in Borsa" (investimentoinborsa, 2014), *"Il mondo in cui viviamo oggi è come un villaggio globale dove gli investitori hanno molte opzioni per diversificare geograficamente i loro investimenti. Il Canada è uno dei paesi più ricchi al mondo, ma anche uno dei luoghi più sicuri dove investire il proprio denaro. Il paese dispone di abbondanti*

*risorse naturali, con un settore terziario che dà grande sostegno all'economia della nazione. La Borsa di Toronto (Toronto Stock Exchange, TSX) è da sempre uno dei mercati più "performanti" al mondo, con aziende che forniscono una crescita costante in un contesto di stabilità economica e politica. [...] la Borsa di Toronto ha sempre rappresentato per i trader un investimento "sicuro" e redditizio."*

Perciò dal momento che i mercati non sono perfettamente efficienti ed essendo popolati da attori che in quanto essere umani rispecchiano la loro emotività e psicologia nei trend di quest'ultimi (performance trading, s.d.), si può ritenere, così come precedentemente affermato nel caso della borsa italiana, che il mercato canadese rispecchia un grado di efficienza debole inferiore rispetto al resto delle altre principali piazze d'affari, per via probabilmente dei suoi trend facilmente predittivi per il fatto che il sistema paese, sostanzialmente solido e ben lineare, permette appunto di considerare tale mercato un'ancora di salvezza per gli investitori, facendo difatti distorcere la teoria quantitativa del random walk in merito alla non perfetta correlazione dei rendimenti e quindi l'impossibilità di stimare probabili trend futuri.

### 2.3.11 SHANGHAI

Tabella 12 - Valori regressione SHANGHAI

|            | <i>Coefficienti</i> | <i>Errore standard</i> | <i>Valore di significatività</i> |
|------------|---------------------|------------------------|----------------------------------|
| Intercetta | 0,000140527         | 0,000430838            | 0,744350799                      |
| Y(t-1)     | 0,054011365         | 0,028627679            | 0,059440996                      |

I risultati della regressione riportati in tabella sono da riferirsi per la borsa cinese.

Il valore del coefficiente di  $X_{t-1}$  è pari a 0,010470803 con un p-value dell' 71%. Si noti come il termine  $\gamma$  è prossimo a zero, valore che sposerebbe la teoria esposta fino ad ora e difatti dimostrerebbe l'ipotesi di moto casuale dell'andamento dei rendimenti. Poiché il suddetto coefficiente, preso in analisi in senso assoluto, non porterebbe ad una concreta conclusione nel test di ipotesi condotto, bisogna spostare l'attenzione ulteriormente sul valore del p-value: esso risulta essere  $p > \alpha = 5\%$ . Tale risultato permette di dire come l'evidenza empirica non è sufficientemente contraria all'ipotesi nulla che quindi non può essere rifiutata. In altre parole si sta cercando di dire come i dati osservati, relativi ai Log rendimenti dell'indice di borsa in questione, non sono statisticamente significativi tali da portare a rigettare l'ipotesi nulla.

Quindi se si uniscono entrambe le valutazioni, queste ci portano a dire come il valore del parametro  $\gamma$  sia, da un punto di vista statistico, accettabile dato che non vi sono dati che permetterebbero di dire l'opposto. Perciò è plausibile ritenere, dal momento che  $H_{p0}$  non è rifiutabile, come il processo in analisi sia a radice unitaria e quindi soddisfi la (2.4) e pertanto l'assenza di correlazione tra i rendimenti di due periodi differenti.

Quanto poc'anzi dedotto lascia presagire come la definizione di random walk riformulata come la (2.2) sia soddisfatta e che quindi l'indice cinese rispetti il grado di efficienza debole dei mercati.

# 3. Teoria di selezione del Portafoglio<sup>11</sup>

## 3.1 Prezzi, rendimenti, quote

Consideriamo un mercato con orizzonte temporale uniperiodale  $[t; s]$ , aperto esclusivamente alla data corrente  $t$  e a una data futura fissata  $s$ . Assumeremo convenzionalmente un orizzonte temporale unitario ponendo  $t = 0$  e  $s = 1$ . Il generico contratto  $a_i$  (con  $i = 1, \dots, n$ ) avrà valore  $A_i$  all'epoca finale  $s$  e il suo prezzo (ossia la sua quotazione) all'epoca iniziale  $t$  è  $P_i$ . Supponiamo inoltre che i contratti  $a_i$  siano dei titoli rischiosi e che sia possibile considerare anche titoli privi di rischio (risk free); un'altra ipotesi importante riguarda la possibilità di vendite allo scoperto ("short sales"<sup>12</sup>).

Consideriamo nuovamente un insieme di titoli  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ . Un portafoglio costituito dai titoli  $A$  è un insieme di quote  $\lambda_i$  acquistate per ciascun titolo a disposizione. Da un punto di vista matematico, possiamo quindi interpretare un portafoglio come un vettore a  $n$  componenti:

$\Pi = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{R}^n$ . Le quote  $\lambda_i$  possono essere negative se le vendite allo scoperto sono autorizzate. Consideriamo il portafoglio  $\Pi$ . Il suo prezzo all'epoca iniziale  $t$  sarà la somma ponderata dei prezzi dei titoli  $a_i$  con i pesi  $\lambda_i$ :

$$(3.1) \quad P_{\Pi} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot P_i$$

Il valore di mercato del portafoglio all'epoca finale  $s$  sarà dato dalla stessa regola di linearità:

$$(3.2) \quad A_{\Pi} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot A_i$$

nel caso in cui le quote di composizione non siano tutte nulle, possiamo ridefinire le quote in forma percentuale nel modo seguente:

$$(3.3) \quad \omega_i = \frac{\lambda_i \cdot P_i}{P_{\Pi}}$$

---

<sup>11</sup> La trattazione del modello fa riferimento al testo "Manuale di Matematica Finanziaria" (Micocci & Batista Masala).

<sup>12</sup> Short sales: acquistare allo scoperto un'unità del titolo  $a_i$  equivale ad incassare il prezzo di mercato  $P_i$  all'epoca  $t$  e impegnarsi a pagare alla controparte il valore  $A_i$  all'epoca finale  $s$ .

Con la condizione  $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ . In questo caso,  $\omega_i$  rappresenta la frazione di capitale investita nell'attività  $i$ -esima.

Arrivati a questo punto è opportuno esprimere la definizione di rendimento del portafoglio  $\Pi$  come:

$$(3.4) \quad R_{\Pi} = \frac{A_{\Pi}}{P_{\Pi}} - 1$$

dove sostituendo nella (3.4) rispettivamente la (3.1) e la (3.2) avremo:

$$(3.5) \quad R_{\Pi} = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot R_i$$

Abbiamo perciò mostrato che il rendimento del portafoglio è la somma ponderata dei rendimenti dei singoli titoli con pesi le quote di composizione dei titoli stessi.

### 3.2 Modello di Markowitz

La teoria di selezione del portafoglio consiste nello scegliere all'epoca iniziale  $t$  un portafoglio  $\Pi$  avendo a disposizione un insieme di titoli  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  in modo tale da ottimizzare il suo rendimento  $R_{\Pi}$ . Secondo l'approccio rischio-rendimento, l'ottimizzazione del rendimento consiste nel massimizzare una misura di profitto e minimizzare una misura di rischio.

Da un punto di vista probabilistico, assumeremo come misura di profitto come misura di profitto il valore atteso  $E(R_{\Pi})$  e come misura di rischio la varianza  $\text{Var}(R_{\Pi}) = \sigma_{R_{\Pi}}^2$

(o in maniera equivalente lo scarto).

Dal punto di vista media-varianza, diremo che un portafoglio  $\Pi_1$  domina un portafoglio  $\Pi_2$  (scriveremo  $\Pi_1 \succ \Pi_2$ ) se a parità di rischio possiede un rendimento più elevato oppure se a parità di rendimento possiede un rischio più basso. Con questa premessa un portafoglio si dice "efficiente" se non è dominato da nessun altro portafoglio, mentre l'insieme di tutti i portafogli efficienti si chiamerà "frontiera efficiente". Un portafoglio efficiente si ottiene perciò massimizzando il rendimento atteso (a parità di rischio), oppure minimizzando il rischio (a parità di rendimento atteso).

Osserviamo inoltre che la relazione d'ordine  $\Pi_1 \succ \Pi_2$  non è una relazione di ordine totale, nel senso che due portafogli qualsiasi non sono sempre confrontabili. In realtà i portafogli efficienti rappresentano degli ottimi paretiani, nel senso che non è possibile migliorare un obiettivo (ad esempio aumentare il rendimento) senza peggiorare l'altro (in questo caso aumentare il rischio).

Il processo di scelta del portafoglio ottimo segue perciò due fasi:

- il processo di ottimizzazione, che consiste nel determinare la frontiera efficiente (ottimi paretiani) utilizzando gli indicatori media e varianza;
- la scelta definitiva tra i portafogli efficienti, basata sull'avversione al rischio del decisore attraverso la sua funzione di utilità (perciò si sceglierà il portafoglio efficiente che massimizza la funzione di utilità). Questa seconda fase è ovviamente una fase soggettiva, legata alla particolare funzione di utilità del decisore.

Si noti che da un punto di vista empirico, la distribuzione normale non è sempre la distribuzione che si adatta meglio a rappresentare i rendimenti azionari: i fenomeni di leptocurtosi sono molto frequenti (come già evidenziato nei precedenti paragrafi quando si è analizzato l'andamento di ciascun indice preso in considerazione nella trattazione).

Nel modello di selezione di portafoglio di Markowitz, assumeremo l'ipotesi di normalità dei rendimenti (si ricorda che nel nostro caso si stanno utilizzando i Log rendimenti).

Determiniamo ora le espressioni analitiche del rendimento atteso e del rischio del portafoglio in funzione delle quote di composizione.

Il valore atteso è:

$$(3.6) \quad \mu_{\Pi} = E(R_{\Pi}) = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \mu_i$$

ossia la somma ponderata dei rendimenti attesi dei titoli, con pesi le quote di composizione (con  $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ ).

Utilizziamo una notazione matriciale più compatta. Definiamo a questo scopo il vettore dei pesi  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  e il vettore dei rendimenti  $\Theta = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ . Avremo quindi

$$(3.7) \quad \mu_{\Pi} = \Omega \cdot \Theta^T$$

dove  $\Theta^T$  è il vettore trasposto (in questo caso è un vettore colonna).

Passiamo ora alla varianza del portafoglio. Per questo, introduciamo la matrice di covarianza (di ordine  $n$ ) definita nel modo seguente:

$$(3.8) \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

dove  $\sigma_{kj} = \text{Cov} ( R_k, R_j )$  mentre sulla diagonale principale abbiamo le varianze  $\sigma_{kk} = \text{Var} ( R_k ) = \sigma_k^2$ .  
Avremo quindi:

$$(3.9) \quad \text{Var} ( R_{\Pi} ) = \sigma_{\Pi}^2 = \sum_{k=1}^n \omega_k^2 \cdot \sigma_k^2 + 2 \sum_{k < j=1}^n \omega_k \cdot \omega_j \cdot \sigma_{kj}$$

Attraverso la notazione matriciale, avremo quindi:

$$(3.10) \quad \sigma_{\Pi}^2 = \Omega \cdot \Sigma \cdot \Omega^T$$

Osserviamo che, affinché si abbia  $\sigma_{\Pi}^2 \geq 0$ , la matrice di covarianza  $\Sigma$  dovrà essere semidefinita positiva.

### 3.3 Frontiera efficiente

Sulla scorta di quanto detto in precedenza, per individuare la frontiera efficiente, dovremo risolvere uno dei due seguenti problemi di ottimizzazione vincolata:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max}_{\omega_1, \dots, \omega_n} E( R_{\Pi} ) \\ \sigma_{\Pi}^2 = \tilde{\sigma} \\ \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \end{array} \right. \quad [1] \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_{\omega_1, \dots, \omega_n} \sigma_{\Pi}^2 \\ E( R_{\Pi} ) = \tilde{R} \\ \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \end{array} \right. \quad [2]$$

Vogliamo minimizzare la volatilità. Determiniamo ora la forma analitica della frontiera efficiente nel caso generale di  $n$  titoli rischiosi. Conviene esprimere il problema di ottimizzazione [2] in forma vettoriale, ossia:

$$\begin{cases} \text{Min}_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{\Pi}^2 = \frac{1}{2} \Omega^T \cdot \Omega \cdot \Sigma \\ \Omega^T \cdot e = \alpha^{13} \\ \Omega^T \cdot u = 1^{14} \end{cases} \quad [3]$$

dove  $e$  rappresenta il vettore colonna dei rendimenti degli  $n$  titoli (nel nostro caso di studio gli indici azionari),  $u$  rappresenta il vettore colonna unità a  $n$  componenti e  $\Omega$  è il vettore colonna delle quote.

Abbiamo moltiplicato la funzione obiettivo per  $\frac{1}{2}$  per comodità di calcolo.

La funzione lagrangiana del nostro problema si scrive perciò:

(3.11)

$$L = \frac{1}{2} \Omega^T \cdot \Omega \cdot \Sigma - \lambda \cdot (\Omega^T \cdot e - \alpha) - \mu \cdot (\Omega^T \cdot u - 1)$$

Ricorrendo alle condizioni necessarie del primo ordine si giunge alla definizione dei moltiplicatori e del vettore delle quote  $\Omega$ :

(3.12)

$$\Omega = \lambda \cdot (\Sigma^{-1} \cdot e) + \mu \cdot (\Sigma^{-1} \cdot u)$$

con

(3.13)

$$\lambda = \frac{\alpha \cdot C - A}{D};$$

(3.14)

$$\mu = \frac{B - \alpha \cdot A}{D}$$

---

<sup>13</sup> Vincolo di rendimento: ovvero  $\alpha$  è il rendimento che atteso del portafoglio.

<sup>14</sup> Vincolo di bilancio: tutta la liquidità posseduta viene investita nella costruzione del portafoglio.



Dove:

$$A = u^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot e;$$

$$B = e^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot e;$$

$$C = u^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot u;$$

$$D = B \cdot C - A^2.$$

Sostituendo questi valori nell'espressione della varianza, otterremo l'espressione analitica che lega la varianza al rendimento atteso  $\alpha$ , ossia l'equazione analitica della frontiera efficiente:

(3.15)

$$\sigma_{\Pi}^2 = \frac{C}{D} \cdot \alpha^2 - 2 \frac{A}{D} \cdot \alpha + \frac{B}{D}$$

Se dovessimo rappresentare l'equazione nel piano  $(\sigma; \alpha)$ , questa rappresenterebbe un'iperbole. Si mostra facilmente che il centro dell'iperbole ha ordinate  $(0; A/C)$ , mentre il suo vertice (cui corrisponde il portafoglio efficiente che presenta il rischio più basso) ha coordinate  $(\sqrt{1/C}; A/C)$ .

Viceversa nel piano  $(\sigma^2; \alpha)$  abbiamo l'equazione di una parabola con vertice nel punto di coordinate  $(1/C; A/C)$ .

Un esempio viene riportato di seguito:

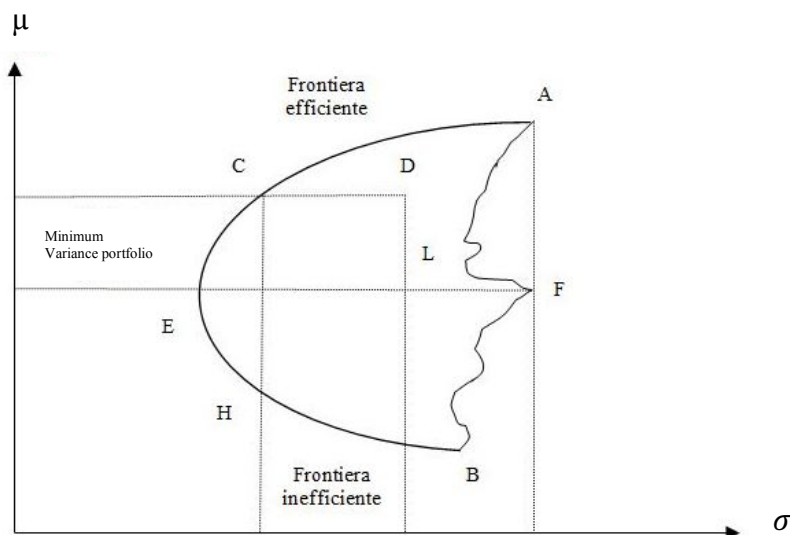


Figura 31 - Esempio Frontiera Efficiente – Fonte: verafinanza.com

Osserviamo che il tratto di curva sotto il vertice (punto E) corrisponde al ramo non efficiente della frontiera. In effetti, i portafogli di questo ramo sono dominati dai portafogli che stanno sul ramo superiore (efficiente) che corrisponde al tratto tra il punto E ed A. Inoltre il punto E rappresenta il portafoglio che minimizza il valore della varianza (Minimum variance portfolio). Infine se per esempio consideriamo i portafogli C ed H, entrambi hanno la stessa varianza ma un rendimento atteso diverso: l'investitore, perciò sceglierà il portafoglio C essendo un portafoglio dominante.

### 3.4 Applicazione pratica per la costruzione della frontiera efficiente

Per la costruzione della frontiera efficiente si utilizzano alcuni strumenti di Excel. In particolare modo, nel nostro caso il problema che si sta affrontando richiede l'impostare un procedimento di ottimizzazione vincolata che restituisca le quote di composizione del portafoglio in grado di risolvere il problema proposto nella [1] oppure nella [2]. Per continuità di trattazione si è scelto il problema [2].

Riferendoci alla tabella 13 estratta dall'ambiente Excel, possiamo dapprima analizzare i dati di input del procedimento di costruzione della frontiera efficiente, essi sono inseriti nella zona da D3 a D12

per quanto riguarda il vettore dei Log rendimenti medi attesi<sup>15</sup> e nella zona da I4 a R13 per la matrice di covarianze. Inoltre nella cella E20 viene riportata la funzione obiettivo del nostro problema che, come già affermato precedentemente, si è scelto di optare per la minimizzazione della varianza; nelle celle E22 ed E23 sono invece riportati i vincoli del problema, rispettivamente il primo rappresenta il rendimento atteso del portafoglio che si sta trovando (vincolo di rendimento), il secondo talvolta il vincolo di bilancio (tutta la liquidità posseduta viene investita). In F3:F12 sono riportate invece le quote di composizione oggetto del procedimento di ottimizzazione vincolata.

Tabella 13 - Dati di input in valute locali

|    | A          | B | C | D                       | E | F                  | G | H          | I           | J           | K           | L            | M                  | N            | O            | P            | Q           | R           |  |  |
|----|------------|---|---|-------------------------|---|--------------------|---|------------|-------------|-------------|-------------|--------------|--------------------|--------------|--------------|--------------|-------------|-------------|--|--|
| 1  |            |   |   | Vettore rendimenti medi |   | Quote composizione |   |            |             |             |             |              | MATRICE COVARIANZE |              |              |              |             |             |  |  |
| 2  |            |   |   |                         |   |                    |   |            |             |             |             |              |                    |              |              |              |             |             |  |  |
| 3  | ASX 200    |   |   | 3,99222E-05             |   | -93,63563524       |   | ASX 200    | ASX 200     | CAC 40      | DAX         | DOW 30       | FTSE 100           | FTSE MIB     | JSE TOP 40   | NIKKEI 225   | TSX         | SHANGHAI    |  |  |
| 4  | CAC 40     |   |   | 8,81067E-05             |   | 2,344339242        |   | ASX 200    | 6,4299E-05  | 1,2101E-05  | 9,2736E-07  | 1,85697E-06  | 1,66387E-06        | 1,32007E-05  | 1,82019E-06  | 1,1568E-05   | -1,1524E-06 | -2,7301E-06 |  |  |
| 5  | DAX        |   |   | 9,20513E-05             |   | 8,888294029        |   | CAC 40     | 1,2101E-05  | 0,00011914  | 8,0207E-06  | 2,22522E-06  | 4,08969E-06        | -5,24374E-06 | -2,67208E-06 | -1,7218E-06  | -9,6405E-07 | -3,9874E-07 |  |  |
| 6  | DOW 30     |   |   | 0,000278307             |   | 330,1910064        |   | DAX        | 9,2736E-07  | 8,0207E-06  | 0,00012871  | 9,30608E-06  | 2,87865E-05        | 1,95846E-05  | 4,54438E-06  | -3,46909E-06 | -3,6721E-06 | -8,0661E-07 |  |  |
| 7  | FTSE 100   |   |   | 1,2036E-06              |   | -128,731896        |   | DOW 30     | 1,857E-06   | 2,2252E-06  | 9,3061E-06  | 6,38491E-05  | 4,6462E-07         | -3,85985E-06 | -4,07706E-06 | 3,0169E-06   | 8,72864E-06 | -2,5577E-06 |  |  |
| 8  | FTSE MIB   |   |   | -2,56428E-05            |   | -51,13395455       |   | FTSE 100   | 1,6639E-06  | 4,0897E-06  | 2,6786E-05  | 4,6462E-07   | 7,41355E-05        | 5,71584E-06  | 4,79923E-06  | -3,81112E-07 | -1,1163E-06 | -2,3157E-06 |  |  |
| 9  | JSE TOP 40 |   |   | 8,96171E-05             |   | 10,15022382        |   | FTSE MIB   | 1,3201E-05  | -5,2437E-06 | 1,9585E-05  | -3,85985E-06 | 5,71584E-06        | 0,000211211  | -3,32605E-06 | 1,34112E-05  | -6,4895E-07 | 2,86024E-05 |  |  |
| 10 | NIKKEI 225 |   |   | 0,000183528             |   | 65,38401786        |   | JSE TOP 40 | 1,8202E-06  | -2,6721E-06 | 4,5444E-06  | -4,07706E-06 | 4,79923E-06        | -3,32605E-06 | 0,000104573  | 1,07368E-05  | -1,3989E-06 | -7,3355E-06 |  |  |
| 11 | TSX        |   |   | 4,16715E-05             |   | -170,5633407       |   | NIKKEI 225 | 1,1568E-05  | -1,7218E-06 | -3,4691E-06 | 3,0169E-06   | -3,81112E-07       | 1,34112E-05  | 1,07368E-05  | 0,000160024  | 5,76198E-07 | 1,3092E-06  |  |  |
| 12 | SHANGHAI   |   |   | 0,000137366             |   | 28,10694519        |   | TSX        | -1,1524E-06 | -9,6405E-07 | -3,6721E-06 | 8,72864E-06  | -1,1163E-06        | -6,48946E-07 | -1,3989E-06  | 5,76198E-07  | 4,88529E-05 | -1,5393E-07 |  |  |
| 13 |            |   |   |                         |   |                    |   | SHANGHAI   | -2,7301E-06 | -3,9874E-07 | -8,0661E-07 | -2,55773E-06 | -2,3157E-06        | 2,36024E-05  | -7,33548E-06 | 1,3092E-06   | -1,5393E-07 | 0,000226304 |  |  |
| 14 |            |   |   |                         |   |                    |   |            |             |             |             |              |                    |              |              |              |             |             |  |  |
| 15 |            |   |   |                         |   |                    |   |            |             |             |             |              |                    |              |              |              |             |             |  |  |
| 16 |            |   |   |                         |   |                    |   |            |             |             |             |              |                    |              |              |              |             |             |  |  |
| 17 |            |   |   |                         |   |                    |   |            |             |             |             |              |                    |              |              |              |             |             |  |  |
| 18 |            |   |   |                         |   |                    |   |            |             |             |             |              |                    |              |              |              |             |             |  |  |
| 19 |            |   |   | funzione obiettivo      |   |                    |   |            |             |             |             |              |                    |              |              |              |             |             |  |  |
| 20 |            |   |   | Min Varianza            |   | 10,51742204        |   |            |             |             |             |              |                    |              |              |              |             |             |  |  |
| 21 |            |   |   | vincoli                 |   |                    |   |            |             |             |             |              |                    |              |              |              |             |             |  |  |
| 22 |            |   |   | Rendimento              |   | 0,099999999        |   | 0,1        |             | 0,15        |             | 0,2          |                    | 0,25         |              | 0,3          |             |             |  |  |
| 23 |            |   |   | Bilancio                |   | 1                  |   | 1          |             | 1           |             | 1            |                    | 1            |              | 1            |             |             |  |  |

Per attivare il procedimento di risoluzione del problema [2] si è utilizzato la funzione “Risolutore” dall’ambiente Excel.

Cambiando il valore del rendimento atteso nella cella F22 ed effettuando nuovamente la selezione si possono ottenere alcuni portafogli ottimi; lo schema successivo mostra il rischio (varianza) e le quote di composizione ottenute realizzando il procedimento di selezione per livelli via via crescenti di rendimento desiderato.

<sup>15</sup> Calcolati precedentemente, per ciascun indice, mediante l’analisi statistica descrittiva esposta nel capitolo 2.

Tabella 14 - Esempi di portafogli della frontiera efficiente

| Area Risultati    |              |              |               |              |              |
|-------------------|--------------|--------------|---------------|--------------|--------------|
| Rendimento atteso | 0,1          | 0,15         | 0,2           | 0,25         | 0,3          |
| Rischio           | 10,51742552  | 23,67856014  | 42,10798709   | 65,80570319  | 94,7717305   |
| ASX 200           | -93,73749254 | -140,5712857 | -187,5745826  | -234,381527  | -281,506081  |
| CAC 40            | 2,392080912  | 3,475812601  | 4,631167692   | 5,7983102    | 6,904338397  |
| DAX               | 8,875127618  | 13,23257497  | 17,6907792    | 22,09069164  | 26,36687722  |
| DOW 30            | 330,1301517  | 495,3693438  | 660,5053533   | 825,6991055  | 991,0830525  |
| FTSE 100          | -128,7529527 | -193,2844732 | -257,8040216  | -322,2227029 | -386,6661989 |
| FTSE MIB          | -51,14029851 | -76,69296597 | -102,2710865  | -128,0337916 | -153,4788398 |
| JSE TOP 40        | 10,28300201  | 15,27836868  | 20,34387597   | 25,40155449  | 30,38177149  |
| NIKKEI 225        | 65,40675322  | 98,08552791  | 130,7753818   | 163,4591885  | 195,8379963  |
| TSX               | -170,5821252 | -256,0224338 | -341,5300272  | -426,9590859 | -512,3088275 |
| SHANGHAI          | 28,1257535   | 42,12953068  | 56,23315995   | 70,14825714  | 84,38591074  |
|                   |              |              |               |              |              |
|                   | Buying       |              | Short Selling |              |              |

Nella tabella 14 sono mostrati i risultati ottenuti, mediante la risoluzione del problema di ottimizzazione [2], di cinque diversi portafogli efficienti con valori di rendimento attesi man mano crescenti: si noti come all'aumentare di quest'ultimo parametro si registra di conseguenza un aumento del rischio, che ci permette di comprendere come quest'ultimi risultino essere portafogli appartenenti alla frontiera efficiente (vedi figura 31, zona dal punto E in poi). Si rammenta inoltre la presenza delle quote di composizione per ciascun portafoglio<sup>16</sup> che permettono di capire come l'investitore dovrebbe muoversi nell'allocare la sua liquidità: le quote positive, evidenziate in verde e denominate con "buying", indicano le quote da comprare di un particolare indice di borsa; viceversa le quote negative, evidenziate in giallo e denominate con "short selling", indicano quote da vendere allo scoperto di un particolare indice.

Pertanto, per un migliore apprezzamento della sensibilità della composizione del portafoglio a variazioni nel vincolo di rendimento atteso, si sono visualizzate le composizioni dei portafogli in oggetto mediante il grafico di figura 32.

<sup>16</sup> Si ricorda che nel nostro caso il portafoglio sarà costituito dai soli indici di Borsa principali, riportati e descritti nel capitolo 2, poiché oggetto dell'intera analisi.

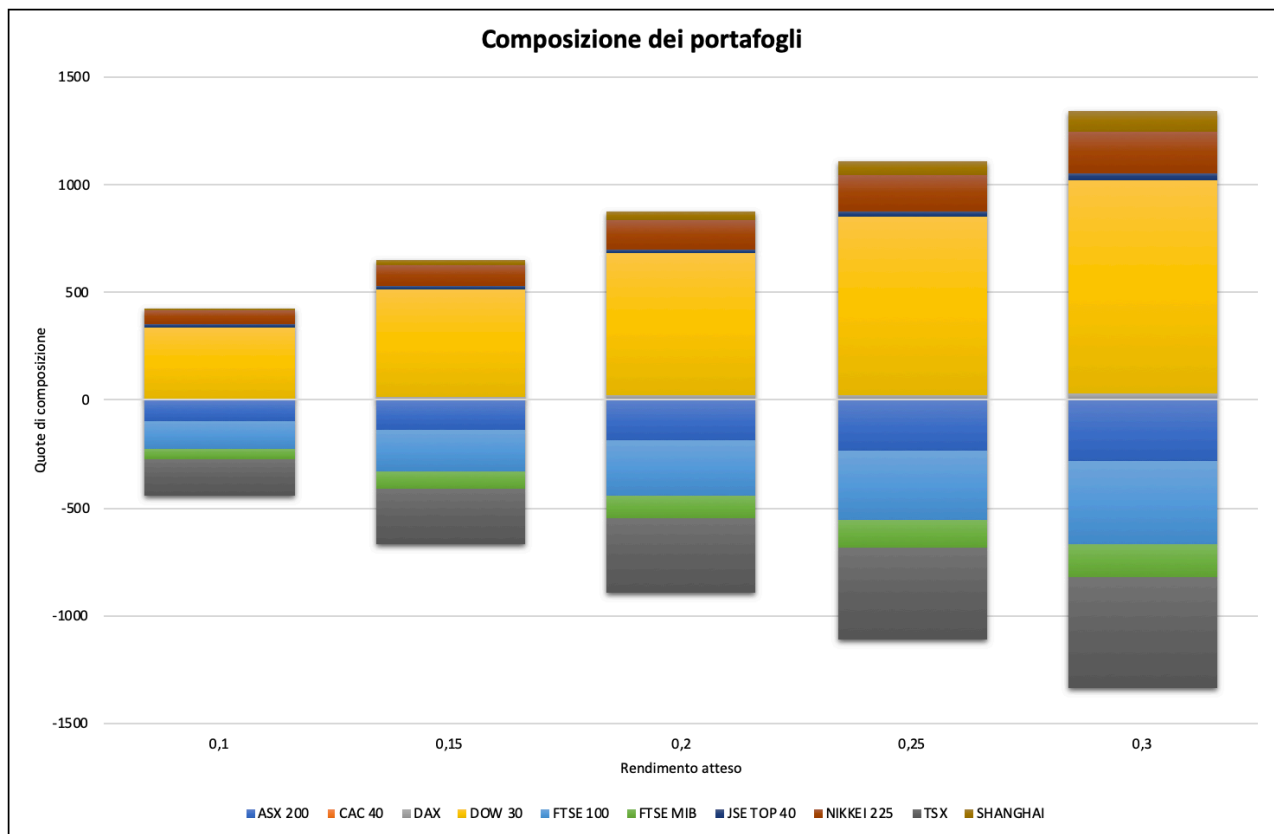


Figura 32 - Composizione dei portafogli azionari

Infine si riporta anche il grafico che mostra la dipendenza tra rendimento atteso e rischio del portafoglio, che mostra la diretta proporzionalità tra i due, sottolineando nuovamente come i portafogli che si sono costruiti risultino appartenere alla frontiera efficiente sicché il seguente schema può essere considerato come una rappresentazione approssimativa, sulla base dei portafogli creati a titolo di esempio, della frontiera efficiente.

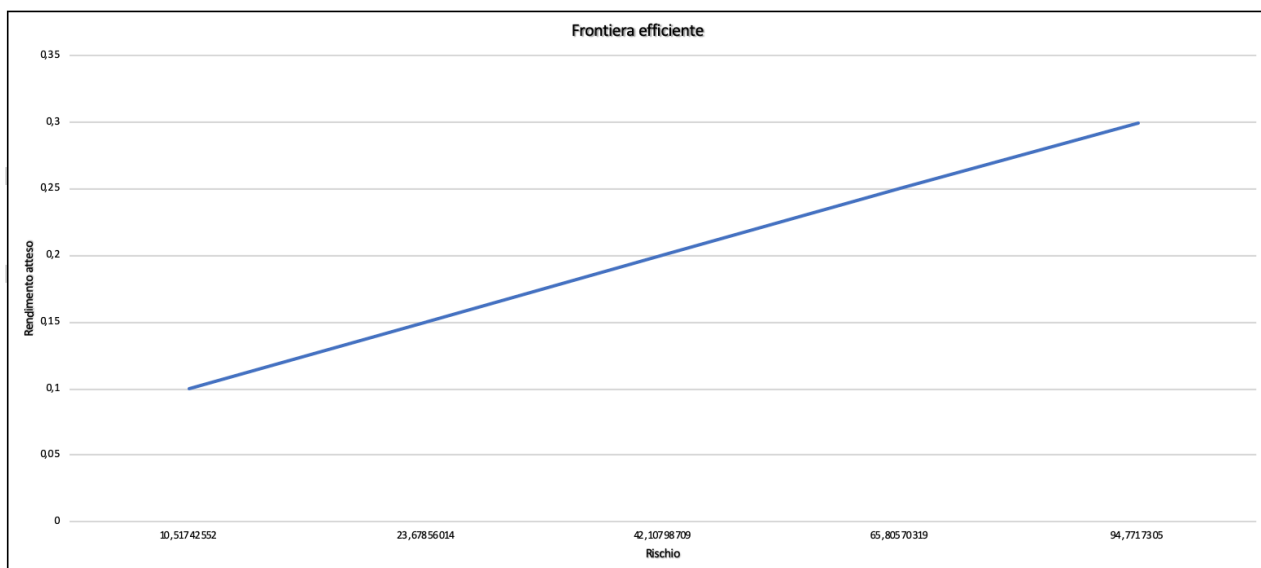


Figura 33 - Frontiera efficiente: dipendenza tra rendimento e rischio

### 3.5 Il portafoglio di mercato: aggiunta del titolo risk free

Consideriamo ora la possibilità di comporre un portafoglio aggiungendo agli  $n$  titoli rischiosi un titolo privo di rischio (ossia un titolo con volatilità nulla e rendimento atteso denominato  $r_f$ ). Il titolo risk free sarà rappresentato sul piano rischio-rendimento da un punto sull'asse delle ordinate. Vogliamo stabilire in questo nuovo contesto come si modifica la frontiera efficiente ottenuta con i soliti titoli rischiosi.

Indichiamo nel piano scarto-rendimento con  $P(0; r_f)$  il titolo risk free. Supponiamo inoltre che il rendimento privo di rischio  $r_f$  sia minore del rendimento del portafoglio a varianza minima. Preso un portafoglio  $\Pi$  sulla FE, possiamo combinarlo con il titolo  $P$ : i portafogli così ottenuti stanno sulla semiretta uscente da  $P$  e passante per  $\Pi$ . I portafogli di questa semiretta non sono tutti efficienti. Se prendiamo invece il portafoglio di tangenza  $M$  (come in figura 34), i portafogli della semiretta  $\overline{PM}$  sono adesso efficienti. La semiretta  $\overline{PM}$  diventa perciò la nuova frontiera efficiente. Con l'introduzione del titolo risk free, si verifica perciò il fenomeno della linearizzazione della frontiera efficiente.

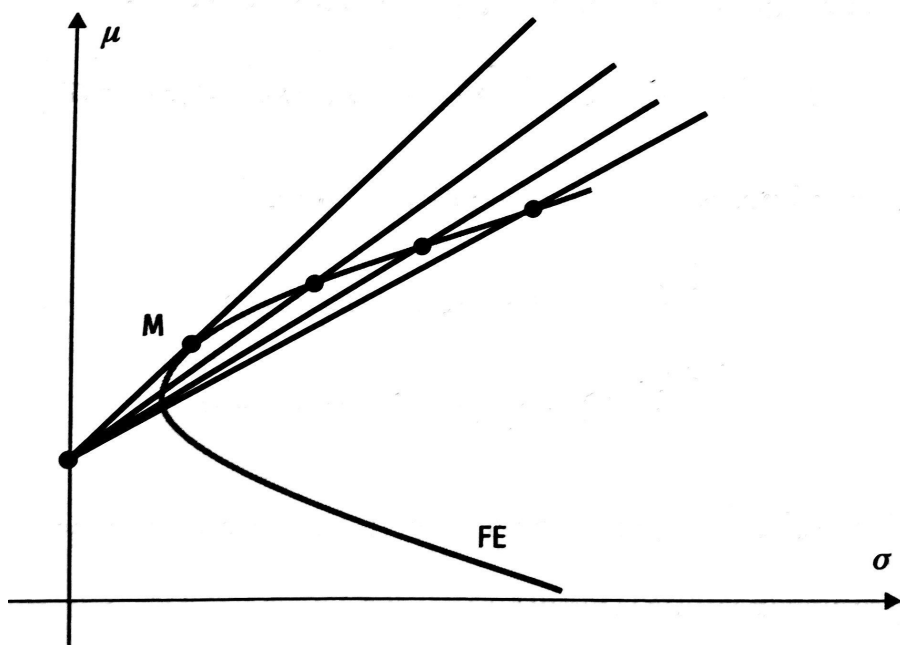


Figura 34 - La frontiera efficiente si linearizza - Fonte: testo "Manuale di Matematica Finanziaria"

Indichiamo con  $M (\sigma_M; \mu_M)$  le coordinate del punto di tangenza  $M$ , l'equazione della semiretta  $\overline{PM}$  è:

$$(3.16) \quad \mu = r_f + \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M} \cdot \sigma$$

I portafogli compresi tra  $P$  e  $M$  sono ottenuti senza vendite allo scoperto. I portafogli alla destra di  $M$  si ottengono tramite una quota negativa (vendita allo scoperto) del titolo  $P$  (ossia l'investitore s'indebita a tasso fisso) per investire nel titolo  $M$  oltre l'effettiva disponibilità. Abbiamo in questo caso un esempio di leva finanziaria.

Esaminiamo il problema da un punto di vista analitico. Esprimiamo nuovamente il problema di ottimizzazione in forma vettoriale, ossia:

$$\begin{cases} \text{Min}_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{\Pi}^2 = \frac{1}{2} \Omega^T \cdot \Omega \cdot \Sigma \\ \Omega^T \cdot e + (1 - \Omega^T \cdot u) \cdot r_f = \alpha^{17} \end{cases} \quad [4]$$

<sup>17</sup> Vincolo di rendimento

dove  $e$  rappresenta ancora il vettore dei Log rendimenti medi degli  $n$  titoli rischiosi e  $u$  rappresenta il vettore unità a  $n$  componenti. La quota di composizione del titolo risk free è  $1 - \Omega^T \cdot u$ . Osserviamo che il vincolo di bilancio  $\Omega^T \cdot u + (1 - \Omega^T \cdot u) \cdot r_f = 1$  è automaticamente soddisfatto. La funzione lagrangiana del nostro problema si scrive ora:

$$L = \frac{1}{2} \Omega^T \cdot \Omega \cdot \Sigma - \lambda \cdot [\Omega^T \cdot e + (1 - \Omega^T \cdot u) \cdot r_f - \alpha]$$

Imponendo le condizioni del primo ordine avremo l'espressione del moltiplicatore  $\lambda$  e del vettore delle quote  $\Omega$ :

$$(3.17) \quad \lambda = \frac{\alpha - r_f}{H}$$

$$(3.18) \quad \Omega = \Sigma^{-1} \cdot (e - u \cdot r_f) \cdot \frac{\alpha - r_f}{H}$$

$$(3.19) \quad \text{con } H = B - 2A \cdot r_f + C \cdot r_f^2$$

Sostituendo nell'espressione della varianza ed estraendo la radice quadrata si ottiene l'espressione della frontiera efficiente:

$$(3.20) \quad \sigma_{\Pi} = \frac{\alpha - r_f}{\sqrt{H}} \quad \text{se } \alpha \geq r_f$$

$$(3.21) \quad \sigma_{\Pi} = - \frac{\alpha - r_f}{\sqrt{H}} \quad \text{se } \alpha \leq r_f$$



Osserviamo che  $H > 0$  perché la matrice  $\Sigma$  è definita positiva. Nel piano scarto-rendimento abbiamo due semirette con pendenza  $\pm\sqrt{H}$  uscenti dal punto  $P(0; r_f)$ . Se  $r_f \neq \frac{A}{C}$ , una di queste due semirette interseca la vecchia frontiera efficiente in unico punto di tangenza. Più precisamente, se  $r_f < \frac{A}{C}$  l'intersezione si ottiene con la semiretta di pendenza  $+\sqrt{H}$  mentre, se  $r_f > \frac{A}{C}$  l'intersezione si ottiene con la semiretta di pendenza  $-\sqrt{H}$  (in questo caso, il portafoglio di tangenza è inefficiente). Determiniamo le coordinate del portafoglio di tangenza. Dobbiamo mettere a sistema l'equazione della frontiera efficiente dei titoli rischiosi con la nuova frontiera efficiente dei titoli rischiosi con la nuova frontiera efficiente linearizzata:

$$\begin{cases} \sigma_{\Pi}^2 = \frac{C}{D} \cdot \alpha^2 - 2 \frac{A}{D} \cdot \alpha + \frac{B}{D} \\ \alpha = \sqrt{H} \cdot \sigma_{\Pi} + r_f \end{cases} \quad [5]$$

Risolvendo il sistema si ottengono le soluzioni che difatti sono le coordinate del portafoglio  $M$  di tangenza:

$$\begin{cases} \mu_M = \frac{B - A \cdot r_f}{A - C \cdot r_f} \\ \sigma_M = \frac{\sqrt{H}}{A - C \cdot r_f} \end{cases} \quad [6]$$

### 3.6 Portafoglio di mercato: applicazione pratica

A partire dal sistema [6] è possibile, sulla base dei dati a disposizione, individuare le coordinate del portafoglio di tangenza, e conseguentemente determinare le quote di composizione. Dal momento

che il nostro pool non prevede la presenza di titoli privi di rischio, ne deriva che  $r_f = 0$ . A tal proposito la retta che nel grafico rischio-rendimento descrive il titolo risk free, con le considerazioni appena fatte, sarà come rappresentato nella seguente figura 35:

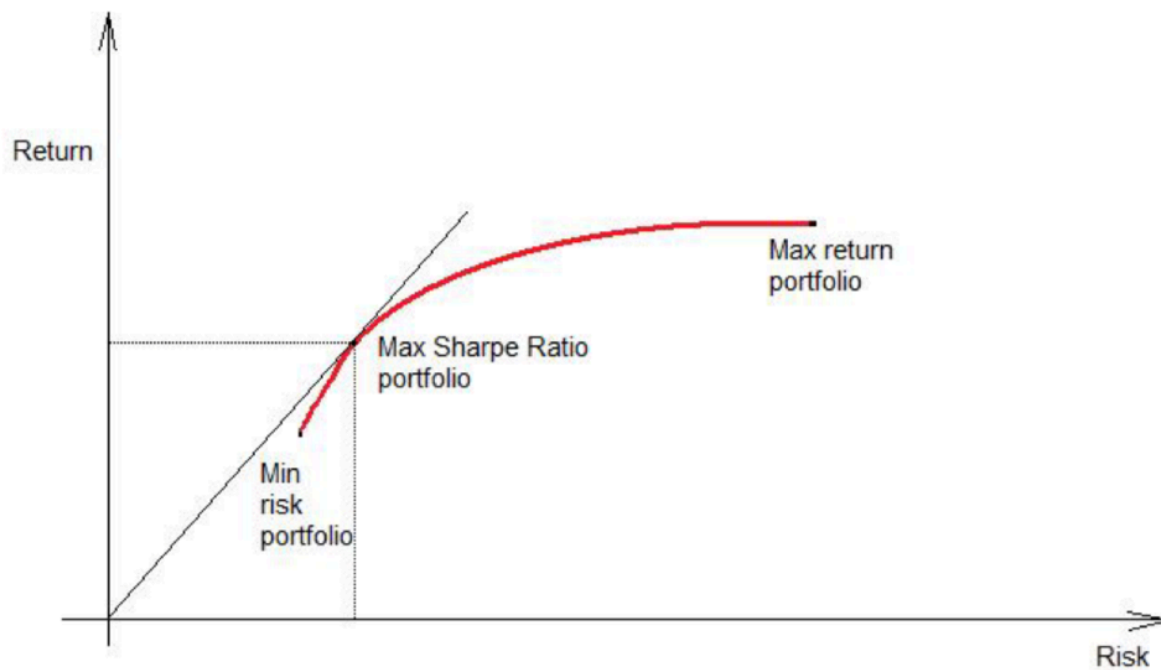


Figura 35 - Lo Sharpe Ratio - Fonte: semanticsscholar.org

Il grafico appena riportato, inoltre ci ricorda che in questa casistica bisogna tenere conto anche dell'indice di Sharpe, espresso come il rapporto tra lo spread dei rendimenti attesi ed il livello di rischio associato al portafoglio, ovvero:

$$(3.22) \quad SR_p = \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p}$$

Dato l'assenza nella nostra analisi, di titoli risk free, appare evidente come l'indice di Sharpe non è altro che la costante di proporzionalità del rapporto, ossia il coefficiente angolare della retta:

(3.23)

$$\mu_p = SR_p \cdot \sigma_p$$

Poiché l'equazione manca dell'intercetta ( $r_f = 0$ ), la retta ottenuta passa per l'origine degli assi e la sua inclinazione specifica è un elemento caratterizzante il tipo di portafoglio cui si riferisce. Pertanto la retta tangente alla curva è quella avente la costante di proporzionalità maggiore rispetto a tutte le altre individuabili (ovvero corrisponde al massimo valore dell'indice di Sharpe o meglio alla migliore combinazione rischio-rendimento a cui è associata un rapporto più alto).

Quindi sulla base di quanto detto fino ad ora, essendo  $r_f = 0$ , il sistema [6] diventa il seguente:

$$\begin{cases} \mu_M = \frac{B}{A} = 0,000209531 \\ \sigma_M = \frac{\sqrt{H}}{A} = 0,005115534 \end{cases} \quad [7]$$

Dove<sup>18</sup>:

$$A = 8,006928791;$$

$$B = 0,001677699;$$

$$\sqrt{H} = 0,040959718.$$

---

<sup>18</sup> Per le formule dei coefficienti A e B si rimanda al paragrafo 3.3

Utilizzando  $\mu_M$  come dato di input per la determinazione del vettore delle quote di composizione del portafoglio, ricorrendo impostazioni analitiche del paragrafo precedente ed allo strumento “Risolutore” nell’ambiente Excel, si ottiene la composizione del portafoglio ottimo secondo la teoria di Markowitz:

Tabella 15 - Composizione portafoglio ottimo di mercato

|                   | <b>Quote composizione</b> | <b>Allocazione</b> |
|-------------------|---------------------------|--------------------|
| <b>ASX 200</b>    | 0,028757849               | Buying             |
| <b>CAC 40</b>     | 0,082708389               | Buying             |
| <b>DAX</b>        | 0,054942229               | Buying             |
| <b>DOW 30</b>     | 0,533654423               | Buying             |
| <b>FTSE 100</b>   | -0,028830558              | Short Selling      |
| <b>FTSE MIB</b>   | -0,025276128              | Short Selling      |
| <b>JSE TOP 40</b> | 0,120177497               | Buying             |
| <b>NIKKEI 225</b> | 0,126630577               | Buying             |
| <b>TSX</b>        | 0,019188975               | Buying             |
| <b>SHANGHAI</b>   | 0,088046746               | Buying             |

Come evidente dalle tabelle riassuntive delle quote di composizione di portafoglio, variando il livello di esposizione al rischio e/o il rendimento la composizione stessa varia molto; mentre in una certa circostanza può esser conveniente acquistare, in un'altra la via più efficiente è magari la vendita allo scoperto.

### 3.7 Il portafoglio ottimo<sup>19</sup>

Seguendo l'impostazione di Markowitz si è giunti all'individuazione della frontiera efficiente. Tuttavia non si è ancora analizzato come sia possibile identificare il “portafoglio ottimo” per l'investitore, ossi il portafoglio che massimizza la sua utilità attesa. Quest'ultimo dovrà selezionare uno dei punti della frontiera efficiente in base al proprio livello di propensione al rischio. Al fine di individuare il portafoglio ottimo si ricorre al concetto di “curva di indifferenza”, la quale permette di identificare le combinazioni rischio-rendimento considerate equivalenti dall'investitore. In presenza di livelli diversi di soddisfazione verrà identificata una mappa di curve di indifferenza.

Nel caso della “Portfolio Selection” analizzato da Markowitz, vengono prese in esame delle curve di indifferenza basate su una funzione di utilità quadratica del tipo:

$$(3.24) \quad U(\mu, \sigma) = \mu - \gamma \cdot (\sigma^2)$$

dove  $\gamma$  rappresenta il coefficiente di avversione al rischio dell'investitore e quest'ultimo sarà scelto in maniera arbitraria e al suo aumentare otteniamo un portafoglio ottimo che converge al titolo risk free.

Questa tipologia di funzione di utilità ha le seguenti proprietà:

- esprimere le preferenze degli investitori esclusivamente in funzione di due sole variabili, il rendimento ed il rischio;
- riconoscere il rendimento atteso come un “bene” e il rischio come un “male”.

Nel grafico che si riporta di seguito, vi è un esempio di mappa di curve di indifferenza:

---

<sup>19</sup> La trattazione di questo paragrafo fa riferimento al libro di testo “Manuale di Matematica Finanziaria” (Micocci & Batista Masala) e al materiale didattico del corso di Finanza Aziendale dell'Università degli Studi di Bergamo (unibg, s.d.).

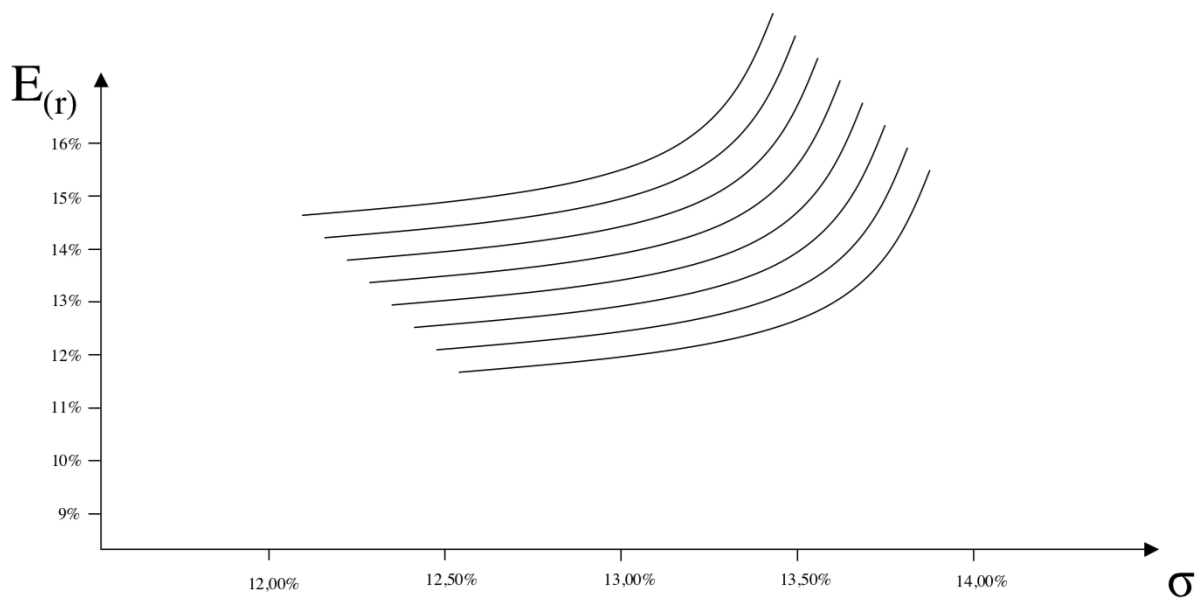


Figura 36 - Mappa curve di indifferenza - Fonte: unibg.it

I portafogli appartenenti a una stessa curva d'indifferenza costituiscono una scelta equivalente per il decisore. Inoltre le suddette curve di indifferenza sono delle curve convesse (presentano la concavità rivolta verso l'alto). Le curve poste più "in alto" corrispondono a valori più elevati dell'utilità  $U$ . Infine maggiore è l'avversione al rischio del decisore, maggiore sarà la convessità delle curve di livello.

Il portafoglio ottimale è identificabile con il portafoglio K, punto di tangenza tra frontiera efficiente con la curva d'indifferenza cui compete il massimo valore di utilità:

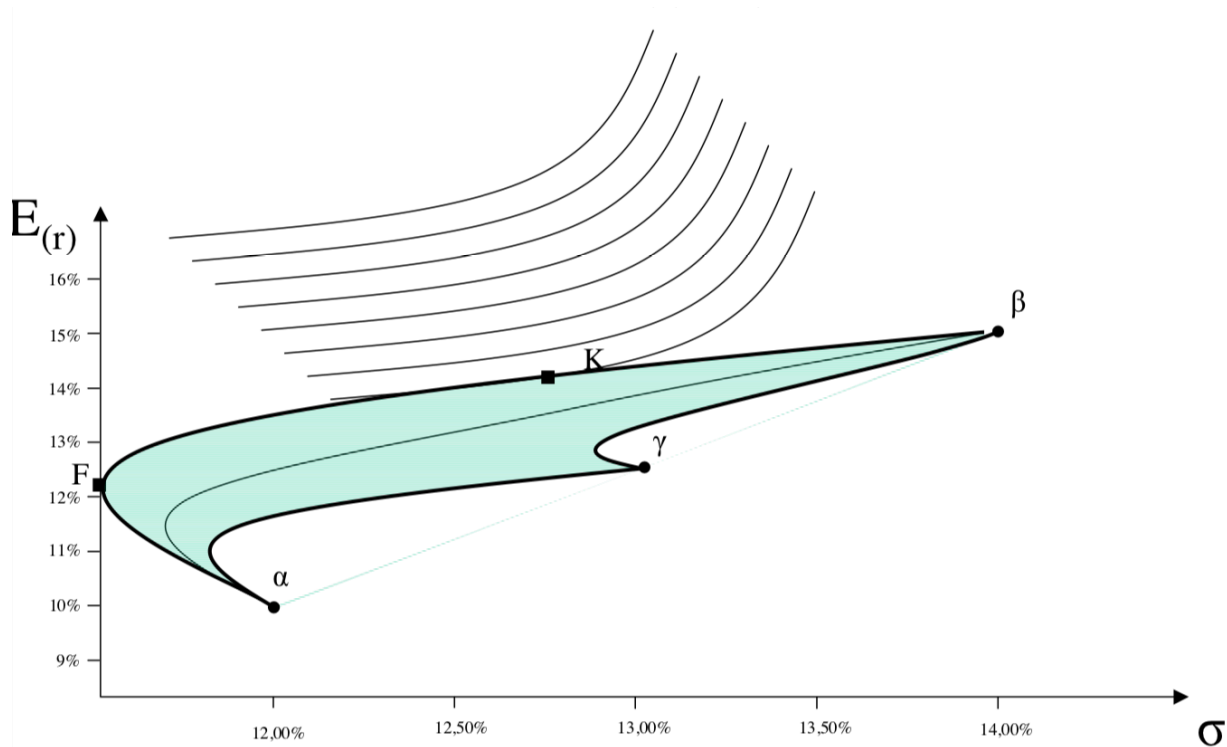


Figura 37 - Portafoglio ottimo - Fonte: unibg.it

Nel caso in cui la frontiera efficiente è stata costruita utilizzando un titolo risk free  $P(0; r_f)$ , si può dimostrare che le coordinate del portafoglio efficiente  $K(\tilde{\sigma}; \tilde{\mu})$  che massimizza l'utilità attesa sono date da:

$$\begin{cases} \tilde{\sigma} = \frac{\pi_M}{1 + \pi_M^2} \cdot (\beta - r_f) \\ \tilde{\mu} = \frac{r_f + \pi_M^2 \cdot \beta}{1 + \pi_M^2} \end{cases} \quad [8]$$

con  $\beta = \frac{1}{\alpha \cdot P_{\Pi}^{20}} - 1$ ,  $\pi_M = \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}$  e  $(\sigma_M; \mu_M)$  sono le coordinate del portafoglio (di mercato) di tangenza M determinato del paragrafo precedente.

<sup>20</sup>  $P_{\Pi}$  è la somma investita che consideriamo per facilità essere pari a 1.

Applicando quanto detto fino ad ora al nostro pool di dati, il quale difatti rientra nell'ultima casistica rappresentata, data l'assenza di un titolo privo di rischio ( $r_f = 0$ ) e con asset che risultino essere i dieci indici di borsa presi come riferimento, la [8] viene ad avere i seguenti valori<sup>21</sup>:

$$\begin{cases} \tilde{\sigma} = 0,040891115 \\ \tilde{\mu} = 0,001674889 \end{cases} \quad [9]$$

A partire dai dati della [9], è possibile individuare le quote di composizione del portafoglio ottimo in ambiente Excel, così riportati di seguito:

Tabella 16 - Composizione portafoglio ottimo

|                   | <b>Quote composizione</b> | <b>Allocazione</b> |
|-------------------|---------------------------|--------------------|
| <b>ASX 200</b>    | -1,345677018              | Short selling      |
| <b>CAC 40</b>     | 0,113709819               | Buying             |
| <b>DAX</b>        | 0,183762685               | Buying             |
| <b>DOW 30</b>     | 5,374795568               | Buying             |
| <b>FTSE 100</b>   | -1,919372931              | Short selling      |
| <b>FTSE MIB</b>   | -0,775497126              | Short selling      |
| <b>JSE TOP 40</b> | 0,269874601               | Buying             |
| <b>NIKKEI 225</b> | 1,084693821               | Buying             |
| <b>TSX</b>        | -2,485519902              | Short selling      |
| <b>SHANGHAI</b>   | 0,499230484               | Buying             |

<sup>21</sup> I dati di partenza relativi alle coordinate del portafoglio di tangenza sono quelli già individuati nel paragrafo precedente. Si rammenta inoltre che è stato considerato un  $\alpha = 0,5$ .



### 3.8 Portafoglio *à la Markowitz* post rischio valutario

Quanto visto fino ad ora ha messo in luce la teoria di Markowitz e la sua applicazione pratica nella costruzione di un portafoglio ottimo per il nostro investitore a partire da asset rappresentati da indici di borsa mondiali, per i quali erano stati calcolati dapprima i Log rendimenti a partire dai prezzi di chiusura nelle loro rispettive valute locali.

L'ulteriore step che si vuole svolgere in questa trattazione, è quello di cercare di capire cosa accade nel momento in cui si prenda in considerazione l'intervenire di un fattore esogeno come lo shock del tasso di cambio sulle varie valute dei diversi indici presi in considerazione. Dapprima però, bisognerà scegliere una valuta di riferimento sulla quale poi andare ad uniformare i prezzi di chiusura delle singole borse e di conseguenza i Log rendimenti: la scelta è ricaduta sul dollaro americano, ritenuta la valuta di riferimento mondiale e anche perché si vuole assumere il punto di vista di un investitore americano.

Pertanto, così come spiegato nel capitolo precedente, sono stati presi in considerazione tutti i tassi di cambio giornalieri delle diverse valute locali nei confronti del dollaro americano, e successivamente sono state apportate le conversioni dei prezzi di chiusura delle borse con il relativo calcolo, poi, dei Log rendimenti. Una volta ottenuti i Log rendimenti in dollari, si è svolta la normale analisi statistica descrittiva su quest'ultimi, in modo tale che si è potuto raccogliere i valori dei rendimenti medi attesi per ciascun indice e la varianza a partire dalla quale poi è stata costruita la rispettiva matrice delle covarianze che gioca un ruolo fondamentale nello sviluppo del modello di Markowitz.

Una volta fatto ciò, il pool di dati di input per avviare il modello di ottimizzazione *à la Markowitz*, basandoci sui fondamenti teorici e sull'applicazione di quest'ultimi ai rendimenti nelle varie valute locali così come svolto precedentemente, risulta essere pronto e si avrà una situazione in ambiente Excel che si presenta nel seguente modo:

Tabella 17 - Dati di input in dollari

|    | A          | B | C | D                       | E | F                  | G | H          | I            | J            | K            | L            | M                  | N            | O            | P            | Q            | R            |
|----|------------|---|---|-------------------------|---|--------------------|---|------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1  |            |   |   | Vettore rendimenti medi |   | Quote composizione |   |            |              |              |              |              | MATRICE COVARIANZE |              |              |              |              |              |
| 2  |            |   |   |                         |   |                    |   |            |              |              |              |              |                    |              |              |              |              |              |
| 3  | ASX 200    |   |   | -0,000144658            |   | 0,037844567        |   | ASX 200    | CAC 40       | DAX          | DOW 30       | FTSE 100     | FTSE MIB           | JSE TOP 40   | NIKKEI 225   | TSX          |              | SHANGHAI     |
| 4  | CAC 40     |   |   | -0,000137522            |   | 0,220986741        |   | ASX 200    | 0,000109832  | -8,26109E-07 | 3,41809E-06  | 7,52649E-07  | 3,73112E-08        | 2,20867E-05  | -4,63569E-06 | 1,20169E-05  | -3,68538E-06 | -3,30559E-07 |
| 5  | DAX        |   |   | -4,50266E-05            |   | 0,015303589        |   | CAC 40     | -9,26109E-07 | 2,5094E-05   | -3,73129E-06 | -1,08795E-06 | 6,18386E-07        | -9,07844E-08 | -3,08282E-06 | 2,38254E-06  | -8,50768E-07 | 3,67273E-06  |
| 6  | DOW 30     |   |   | 0,000278307             |   | 0,465376769        |   | DAX        | 3,41859E-06  | -3,73129E-06 | 0,000128929  | 9,38382E-06  | 2,81829E-05        | 1,29659E-05  | 1,03558E-05  | -8,50328E-06 | -4,75747E-06 | -4,29184E-06 |
| 7  | FTSE 100   |   |   | -0,000200168            |   | 0,023608676        |   | DOW 30     | 7,52649E-07  | -1,08795E-06 | 9,38382E-06  | 6,38491E-05  | -1,18377E-06       | -2,66514E-06 | -4,14438E-06 | 1,03599E-06  | 1,12976E-05  | -2,20993E-06 |
| 8  | FTSE MIB   |   |   | -0,000166344            |   | 0,010573333        |   | FTSE 100   | 3,73112E-08  | 6,18386E-07  | 2,81829E-05  | -1,18377E-06 | 0,000106024        | 7,93178E-06  | 1,0938E-05   | 2,72118E-08  | -5,55088E-06 | -1,81693E-06 |
| 9  | JSE TOP 40 |   |   | -0,00014799             |   | 0,033663849        |   | FTSE MIB   | 2,20867E-05  | -9,07844E-08 | 1,29659E-05  | -2,66514E-06 | 7,93178E-06        | 0,000217865  | -3,85156E-06 | 9,14542E-06  | -9,96523E-07 | 2,09378E-05  |
| 10 | NIKKEI 225 |   |   | 0,000138131             |   | 0,122896603        |   | JSE TOP 40 | -4,63569E-06 | -3,08282E-06 | 1,03558E-05  | -4,14438E-06 | 1,0938E-05         | -2,85156E-06 | 0,000227451  | 7,91325E-06  | 8,53745E-07  | -3,21677E-06 |
| 11 | TSX        |   |   | -0,000154156            |   | 0,003600005        |   | NIKKEI 225 | 1,20169E-05  | 2,38254E-06  | -8,50328E-06 | 1,03599E-06  | 2,72118E-08        | 9,14542E-06  | 7,91325E-06  | 0,000161368  | 2,12097E-06  | 1,7179E-06   |
| 12 | SHANGHAI   |   |   | 3,21374E-05             |   | 0,066145861        |   | TSX        | -3,68538E-06 | -8,50768E-07 | -4,75747E-06 | 1,12976E-05  | -5,55088E-06       | -9,96523E-07 | 8,53745E-07  | 2,12097E-06  | 9,48478E-05  | 4,94828E-08  |
| 13 |            |   |   |                         |   |                    |   | SHANGHAI   | -3,30559E-07 | 3,67273E-06  | -4,29184E-06 | -2,20993E-06 | -1,81693E-06       | 2,09278E-05  | -3,21677E-06 | 1,7179E-06   | 4,94928E-08  | 0,000238075  |
| 14 |            |   |   |                         |   |                    |   |            |              |              |              |              |                    |              |              |              |              |              |
| 15 |            |   |   |                         |   |                    |   |            |              |              |              |              |                    |              |              |              |              |              |
| 16 |            |   |   |                         |   |                    |   |            |              |              |              |              |                    |              |              |              |              |              |
| 17 |            |   |   |                         |   |                    |   |            |              |              |              |              |                    |              |              |              |              |              |
| 18 |            |   |   |                         |   |                    |   |            |              |              |              |              |                    |              |              |              |              |              |
| 19 |            |   |   | funzione obiettivo      |   |                    |   |            |              |              |              |              |                    |              |              |              |              |              |
| 20 |            |   |   | Min Varianza            |   | 1,94473E-05        |   |            |              |              |              |              |                    |              |              |              |              |              |
| 21 |            |   |   | vincoli                 |   |                    |   |            |              |              |              |              |                    |              |              |              |              |              |
| 22 |            |   |   | Rendimento              |   | 1E-04              |   | 0,0001     |              | 0,00013      |              | 0,00015      |                    | 0,0002       |              | 0,00023      |              |              |
| 23 |            |   |   | Bilancio                |   | 0,999999992        |   | 1          |              | 1            |              | 1            |                    | 1            |              | 1            |              |              |
| 24 |            |   |   |                         |   |                    |   |            |              |              |              |              |                    |              |              |              |              |              |

Riferendoci alla tabella 17 estratta dall’ambiente Excel, possiamo analizzare i dati di input del procedimento di costruzione della frontiera efficiente, essi sono inseriti nella zona da D3 a D12 per quanto riguarda il vettore dei Log rendimenti medi attesi convertiti in dollari, e nella zona da I4 a R13 per la matrice di covarianze. Inoltre nella cella E20 viene riportata la funzione obiettivo del nostro problema che prevede la minimizzazione della varianza; nelle celle E22 ed E23 sono invece riportati i vincoli del problema, rispettivamente il primo rappresenta il rendimento atteso del portafoglio che si sta trovando (vincolo di rendimento), il secondo talvolta il vincolo di bilancio (tutta la liquidità posseduta viene investita). In F3:F12 sono riportate invece le quote di composizione oggetto del procedimento di ottimizzazione vincolata.

Per attivare il procedimento di risoluzione del problema si è utilizzato la funzione “Risolutore” dall’ambiente Excel.

Cambiando il valore del rendimento atteso nella cella F22 ed effettuando nuovamente la selezione si possono ottenere alcuni portafogli ottimi; lo schema successivo mostra il rischio (varianza) e le quote di composizione ottenute realizzando il procedimento di selezione per livelli via via crescenti di rendimento desiderato.

Tabella 18 - Esempi di portafogli della frontiera efficiente in dollari

| Area risultati    |             |             |             |             |             |
|-------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Rendimento atteso | 0,0001      | 0,00013     | 0,00015     | 0,0002      | 0,00023     |
| Rischio           | 1,91743E-05 | 2,28609E-05 | 2,57355E-05 | 3,44704E-05 | 3,97575E-05 |
| ASX 200           | 0,03383765  | 0,020939018 | 0,010364623 | 0           | 0           |
| CAC 40            | 0,21495043  | 0,173841958 | 0,140515912 | 0,042868149 | 0           |
| DAX               | 0,062371276 | 0,060135098 | 0,056299952 | 0,043019277 | 0           |
| DOW 30            | 0,451984031 | 0,510725495 | 0,551502394 | 0,656065452 | 0,752155632 |
| FTSE 100          | 0,008120326 | 0           | 0           | 0           | 0           |
| FTSE MIB          | 0,006987019 | 0,00129257  | 0           | 0           | 0           |
| JSE TOP 40        | 0,02902615  | 0,023598051 | 0,01901985  | 0,006082192 | 0           |
| NIKKEI 225        | 0,124115359 | 0,138857327 | 0,148744506 | 0,171930468 | 0,142826379 |
| TSX               | 0,002948185 | 0           | 0           | 0           | 0           |
| SHANGHAI          | 0,065659572 | 0,070610484 | 0,073552762 | 0,080034466 | 0,029285145 |

Buying
No Buying

Nella tabella 18 sono mostrati i risultati ottenuti, mediante la risoluzione del problema di ottimizzazione, di cinque diversi portafogli efficienti con valori di rendimento attesi man mano crescenti: si noti come all'aumentare di quest'ultimo parametro si registra di conseguenza un aumento del rischio, che ci permette di comprendere come quest'ultimi risultino essere portafogli appartenenti alla frontiera efficiente (vedi figura 31 zona dal punto E in poi). Si rammenta inoltre la presenza delle quote di composizione per ciascun portafoglio che permettono di capire come l'investitore dovrebbe muoversi nell'allocare la sua liquidità: le quote positive, evidenziate in verde e denominate con "buying", indicano le quote da comprare di un particolare indice di borsa; viceversa le quote nulle, evidenziate in giallo e denominate con "No buying", indicano quote che non verranno acquistate e quindi non ci sarà un investimento in quello specifico indice.

Pertanto, per un migliore apprezzamento della sensibilità della composizione del portafoglio a variazioni nel vincolo di rendimento atteso, si sono visualizzate le composizioni dei portafogli in oggetto mediante il grafico di figura 38.

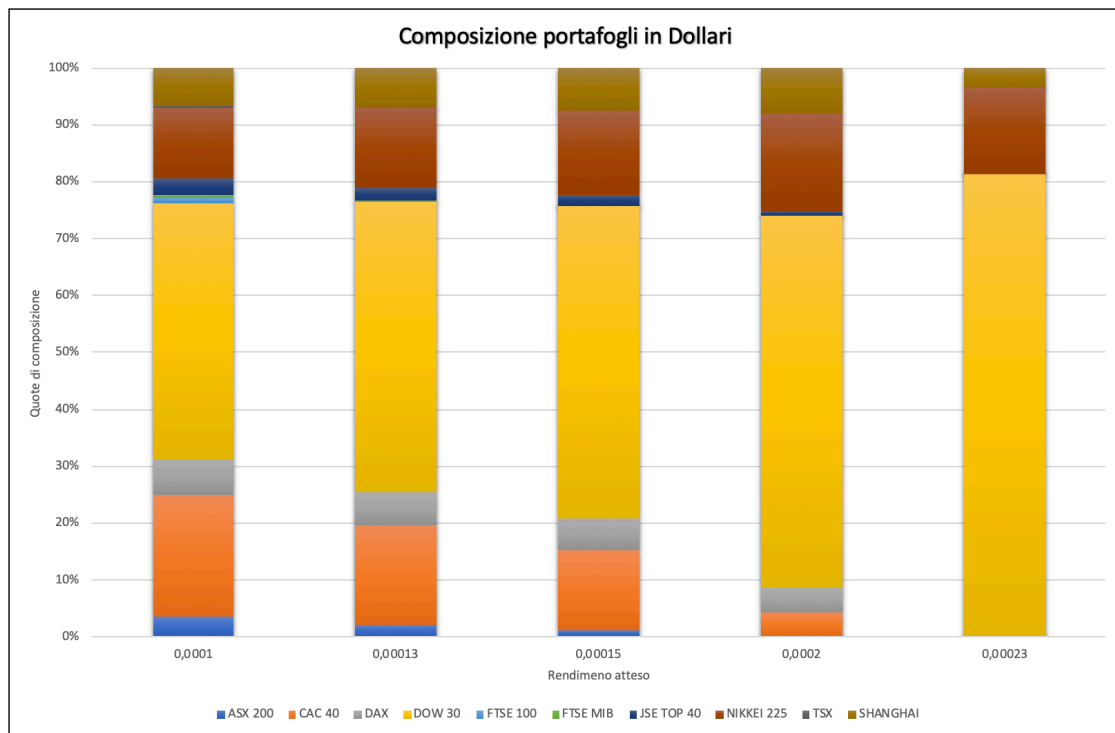


Figura 38 - Composizione portafogli azionari in dollari

Infine si riporta anche il grafico che mostra la dipendenza tra rendimento atteso e rischio del portafoglio, che mostra la diretta proporzionalità tra i due, sottolineando nuovamente come i portafogli che si sono costruiti risultino appartenere alla frontiera efficiente sicché il seguente schema può essere considerato come una rappresentazione approssimativa, sulla base dei portafogli creati a titolo di esempio, della frontiera efficiente.

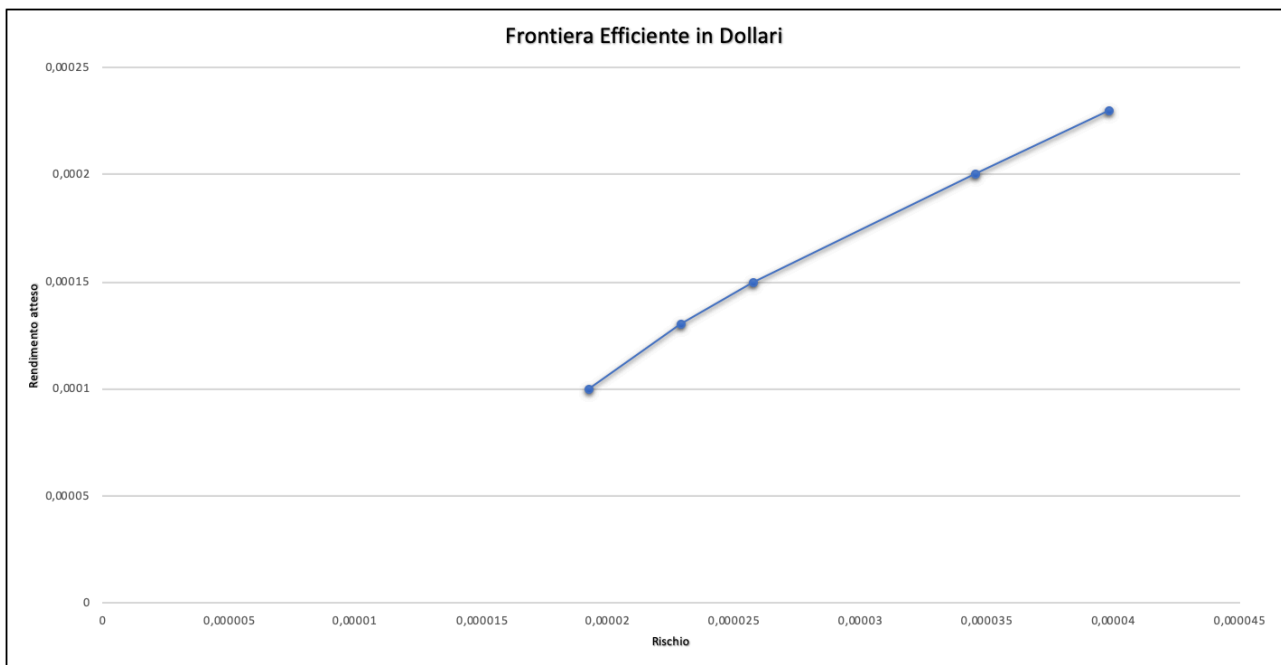


Figura 39 - Frontiera efficiente in dollari: legame rendimento-rischiosità

Quanto illustrato fino ad ora è ciò che si ottenuto mediante l'analisi dei Log rendimenti tutti riportati in dollari americani, per la costruzione di portafogli efficienti; confrontando questi primi risultati, con quanto in precedenza ottenuto, quando i valori degli indici erano tutti espressi in valute locali, è possibile mettere in risalto i seguenti punti:

- i. *Frontiera efficiente*: dalla tabella 18 e figura 39 si nota come effettivamente la frontiera esiste e di conseguenza vi siano dei portafogli efficienti che paretianamente ne dominano altri; ciò che fa più scalpore però è che la frontiera è realizzabile solo per valori di rendimenti molto piccoli o comunque prossimi allo zero, il che fa presagire come nel momento in cui viene inserita nell'analisi lo shock valutario, questo fa sì che la frontiera efficiente shifti verso il basso, appiattendosi quasi all'asse dell'ascisse e registrando per i suoi portafogli efficienti rendimenti davvero esigui.

Inoltre se si pone l'accento anche sulla composizione dei vari portafogli efficienti, ciò che colpisce è che non vi sono più operazioni di "short selling": per rendimenti man mano maggiori, è come se il modello invitasse a fare investire in soli pochi indici di mercato che difatti hanno un impatto e un'importanza maggiore rispetto a tutti gli altri. Emblematici sono i risultati che si evidenziano per la composizione dell'ultimo portafoglio della frontiera efficiente che è possibile osservare in tabella 18:

quest'ultimo per un rendimento molto basso dello 0,023% ed una rischiosità pari allo 0,0039%, propone di investire solamente in tre indici borsistici: il DOW 30, il NIKKEI 225 e

SHANGHAI. Quest'ultimi risultano essere i mercati borsistici che rientrano nella Top 4 dei mercati a più larga capitalizzazione di mercato (ig, 2019) e soprattutto risultano essere lo specchio delle tre economie mondiali più grandi ed influenti del pianeta (investireinborsa, 2019).

Pertanto la conclusione che si raggiunge è che nel momento in cui subentra il rischio di tasso di cambio, il modello sembra replicare un portafoglio che trovi riparo nelle principali borse mondiali, probabilmente perché risultano quelle più sicure in termini di possibilità di investimenti e quindi eventuali guadagni, rispetto alle altre che risultano essere fortemente correlate a quest'ultime e quindi leggermente più fragili.

- ii. *Portafoglio ottimo di mercato*: come fatto nell'analisi pre-rischio di tasso di cambio, anche nella post analisi si è provato a costruire un portafoglio ottimo di mercato, inserendo appunto nel modello un titolo risk free. Come si era già avanzato in una prima fase, il modello si semplificava per via del fatto che nella trattazione venivano presi in considerazione solo i mercati borsistici: da qui, sostituendo nelle formule ottenute rispettivamente nei paragrafi 3.5 e 3.6, si sono individuate le coordinate del portafoglio ottimo di mercato:

$$\begin{cases} \mu_M = \frac{B}{A} = -0,000543567 \\ \sigma_M = \frac{\sqrt{H}}{A} = -0,009518734 \end{cases}$$

Dove:

$$A = -6,000692701;$$

$$B = 0,00326178;$$

$$\sqrt{H} = 0,0571119.$$

Come è possibile osservare dai risultati ottenuti, il portafoglio ottimo di mercato che difatti è rappresentato dal punto di tangenza tra la semiretta uscente dall'origine degli assi (nel nostro caso specifico) e la frontiera efficiente, non sembra esserci: o meglio dal momento che  $r_f > \frac{A}{C}$  ( $r_f = 0$ ;  $\frac{A}{C} = -6,11936E-05$ ) l'intersezione si ottiene con la semiretta di pendenza  $-\sqrt{H}$  (in questo caso, il portafoglio di tangenza è inefficiente). Pertanto quello che mostrano i risultati analitici è che in seguito all'introduzione del rischio di tasso di cambio, non si riesce a raggiungere una soluzione ottima, ovvero quella di un portafoglio che considerasse al suo interno anche un titolo privo di rischio,

poiché risultano esserci altri portafogli che paretianamente dominano quest'ultimo (quelli della sola frontiera efficiente illustrati poc'anzi).

- iii. *Portafoglio ottimo*: facendo riferimento a quanto detto e prodotto nel paragrafo 3.7, si è proceduto ad individuare anche in questa seconda parte di analisi, il portafoglio ottimo per l'investitore come quel portafoglio dato dal punto di tangenza tra la frontiera efficiente e la curva di indifferenza, specifica ad ogni tipo di investitore in base alla sua propensione al rischio, che come già descritto, risulta essere una variabile soggettiva e quindi difficilmente controllabile. In particolare il coefficiente beta che rientra nelle formule e che difatti in qualche modo cerca di quantificare la propensione al rischio, è stato prima considerato con valori bassi (come fatto nell'analisi pre-rischio) e poi con valori più alti, per avere un quadro di valutazione il più ampio possibile sull'avversità al rischio da parte del generico investitore. I risultati relativi a rendimento e rischio, con relative composizioni dei portafogli sono riportate nella seguente tabella:

Tabella 19 - Portafogli ottimi per tipologia di investitore

| Area Risultati    |             |             |
|-------------------|-------------|-------------|
|                   | Beta=1      | Beta=9      |
| <b>Rendimento</b> | 0,000941412 | 0,008472704 |
| <b>Rischio</b>    | 8,86257E-07 | 7,97631E-06 |
| <b>ASX 200</b>    | 0,066847452 | 0,064534567 |
| <b>CAC 40</b>     | 0,306703767 | 0,300271212 |
| <b>DAX</b>        | 0,061730437 | 0,061778391 |
| <b>DOW 30</b>     | 0,262471781 | 0,275747454 |
| <b>FTSE 100</b>   | 0,051363893 | 0,048336665 |
| <b>FTSE MIB</b>   | 0,020367609 | 0,019433888 |
| <b>JSE TOP 40</b> | 0,0397415   | 0,038990048 |
| <b>NIKKEI 225</b> | 0,077266616 | 0,080547137 |
| <b>TSX</b>        | 0,064786903 | 0,060457469 |
| <b>SHANGHAI</b>   | 0,048720039 | 0,04990317  |

Buying

Come riportato dalla tabella, abbiamo diverse composizioni delle quote di portafoglio per un investitore avverso al rischio ( $\beta = 1$ ) e meno avverso al rischio ( $\beta = 9$ ). Ciò che si nota rispetto alla casistica in cui non viene considerato il rischio di tasso di cambio, è che il modello non suggerisce la vendita allo scoperto su determinati indici, ed inoltre man mano che il rendimento del portafoglio aumenta (ovviamente per quelle tipologie di investitori sempre meno propensi al rischio) le quote del portafoglio relativi a specifici indici si riducono sempre di più, per andare a favore (in termini di liquidità da investire) su soli pochi indici (si veda DOW 30, NIKKEI 225 e SHANGHAI) per i quali le quote di composizione aumentano (se pur di poco in questo caso rappresentato) di pari passo con l'aumentare del rendimento, dimostrando quando detto nel punto “i” riguardo i portafogli della frontiera efficiente.



## 4. Il modello di Black & Litterman

### 4.1 L'impianto teorico e le ipotesi<sup>22</sup>

Il modello di Black e Litterman consente di ottenere una maggiore stabilità dei portafogli rispetto ai modelli precedenti. Questo risultato è dovuto al fatto che il modello permette agli asset manager di formulare aspettative (consistenti con l'ottimizzazione del trade-off media-varianza) soltanto in merito a quegli asset su cui essi stessi sono in grado di esprimersi, lasciando la composizione degli altri al cosiddetto "equilibrio di mercato".

Lo schema parte perciò da un portafoglio di equilibrio (per esempio composto secondo la capitalizzazione di mercato), che propende nella direzione degli asset preferiti dall'investitore. Black e Litterman non assumono che ci si trovi costantemente in una condizione d'equilibrio, ma piuttosto che, "quando i rendimenti attesi si spostano dal loro valore di equilibrio, lo sbilanciamento che si viene a creare sui mercati tenda a farli tornare indietro" (Black, Litterman, 1992, p.29). Perciò si può ragionevolmente pensare che i rendimenti attesi non siano molto distanti dai loro valori d'equilibrio e che l'investitore possa trarre profitto combinando le sue personali view sui rendimenti dei diversi mercati con le informazioni contenute nei prezzi e nei rendimenti di equilibrio.

Il modello si basa quindi su due punti focali che lo contraddistinguono, e cioè:

- il cosiddetto "approccio di equilibrio", che garantisce la stabilità dei portafogli risultanti, ancorandoli attorno ad un determinato portafoglio scelto come riferimento (tipicamente il benchmark di mercato);
- la possibilità offerta all'operatore di esprimere le proprie view e di ponderarle secondo la fiducia in esse riposta.

Il meccanismo alla base del modello di figura 40 considera anzitutto l'equilibrio ideale di mercato come punto di riferimento del portafoglio e, in seguito, chiede all'investitore di indicare un determinato numero di view in termini di rendimenti attesi dai mercati, nonché di specificare il livello di confidenza attribuito a ciascuna aspettativa. Attraverso la combinazione delle view con i rendimenti di equilibrio si ottengono i cosiddetti "rendimenti attesi di Black e Litterman", che sono

---

<sup>22</sup> La trattazione teorica fa riferimento al testo "Manuale di Matematica Finanziaria" (Micocci & Batista Masala).

poi utilizzati come input di un'ottimizzazione media-varianza: in questo modo nasce un portafoglio in cui gli scostamenti dai rispettivi valori di equilibrio sono diversi da zero soltanto per quegli asset su cui l'investitore si è espresso, ma non sugli altri. La misura dello scostamento, inoltre, dipende sia dai livelli di confidenza specificati dall'asset manager che da un parametro noto come weight-on-views, il quale ha l'obiettivo di specificare il peso delle view riguardo all'equilibrio di mercato ( $\tau$ ).

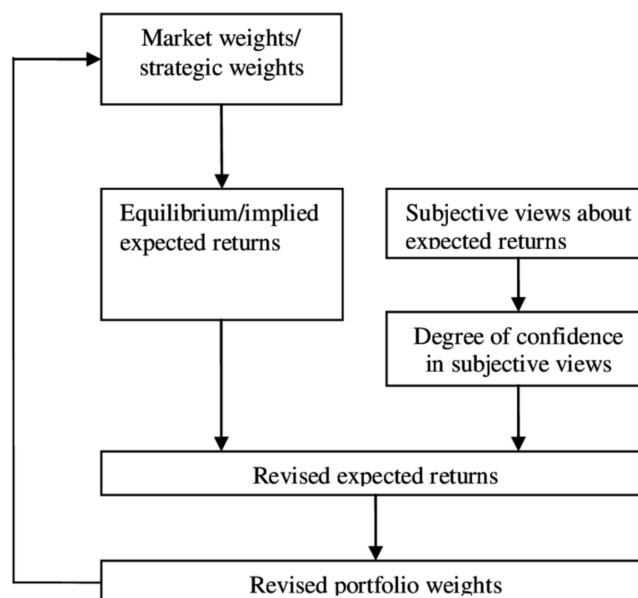


Figura 40 - Step principali del modello di Black & Litterman - Fonte: researchgate.net

## 4.2 L'approccio di equilibrio

Uno dei principali problemi del modello media-varianza, che Black e Litterman si propongono di superare, è rappresentato dal fatto che l'ottimizzazione proposta da Markowitz risulta eccessivamente sensibile alle ipotesi di rendimento formulate dall'investitore. Da qui è scaturita la necessità di fissare un punto di riferimento “neutrale”, attorno al quale strutturare gli input del processo di ottimizzazione: questi ultimi sono identificati dai due autori con il set di rendimenti che sono in grado di spiegare la composizione di mercato, nell'ipotesi in cui tutti gli investitori possiedono identiche view. Il concetto di equilibrio è da intendersi come una situazione ideale di mercato, in cui domanda e offerta si eguagliano: anche se questo stato non si verifica effettivamente nei mercati finanziari, l'idea di un ipotetico equilibrio comporta molte conseguenze interessanti.

Per questa ragione B&L non presuppongono che i mercati siano in equilibrio, piuttosto, l'equilibrio è visto da loro come un "centro di gravità", cui si possono ancorare le diverse quote di portafoglio. Più in particolare l'approccio di equilibrio suggerito dagli autori consiste nello scegliere ex ante un'allocatione di equilibrio e nel determinare previsioni "neutrali" sui rendimenti futuri, in modo che, una volta che tali previsioni sono inserite nel tradizionale schema di ottimizzazione, restituiscano proprio l'allocatione di riferimento.

Tale tecnica è chiamata *reverse optimization*, perché sfrutta il processo di ottimizzazione non per ottenere la composizione ottimale di portafoglio, ma, al contrario, parte da essa e mira a ottenere i rendimenti attesi. In altre parole, anziché implementare la massimizzazione con i rendimenti storici, che danno origine a scelte prive di buon senso economico, il consiglio dei due studiosi è di utilizzare rendimenti in eccesso attesi, in grado di restituire esattamente il portafoglio di riferimento: su queste basi s'inseriranno in un secondo momento le aspettative degli investitori.

Ricordiamo che i rendimenti in eccesso sono i "premi" per il rischio dei vari asset, ossia i rendimenti puri meno il rendimento del titolo privo di rischio<sup>23</sup>.

Quindi la scelta di un indice di riferimento in base alla capitalizzazione del mercato è un ottimo modo di sfruttare i meccanismi di equilibrio che stanno alla base dei mercati finanziari stessi, i quali, per quanto non perfettamente efficienti, possiedono tuttavia un grado d'informazione sicuramente superiore rispetto a quello dei singoli operatori.

Come si è già accennato, una valida metodologia della stima dei rendimenti attesi è rappresentata dalla *reverse optimization*, che consiste nel meccanismo inverso alla massimizzazione della funzione di utilità quadratica, implementato ponendo come incognita i rendimenti attesi piuttosto che i pesi di portafoglio.

Tradizionalmente, infatti, il processo di massimizzazione dell'utilità quadratica assume la seguente formula:

(4.1)

$$\text{Max}_{\Omega} \left[ \Omega^T \theta - \frac{\lambda \cdot \Omega^T \Sigma \Omega}{2} \right]$$

dove:  $\Omega$  rappresenta il vettore delle quote di portafoglio;  $\theta$  è il vettore dei rendimenti attesi;  $\lambda$  è il coefficiente di avversione al rischio;  $\Sigma$  è la matrice varianza-covarianza.

---

<sup>23</sup> Nella maggior parte dei casi il titolo risk-free è un'obbligazione governativa di durata medio-lunga (ad esempio il Bund tedesco a cinque anni).

Il coefficiente di avversione al rischio  $\lambda$  sintetizza il trade-off tra rischio e rendimento atteso dal mercato. Per il suo calcolo la formula proposta è:

$$(4.2) \quad \lambda = \frac{E(R_p) - r_f}{\sigma^2}$$

in cui  $\lambda$  è definito come il rapporto tra il premio al rischio al mercato ( $r_f$  rappresenta infatti, il tasso di rendimento risk free) e il rischio stesso.

Tale equazione ha come soluzione per i pesi ottimi di portafoglio:

$$(4.3) \quad \Omega = (\lambda \cdot \Sigma)^{-1} \Theta$$

La tecnica della reverse optimization suggerisce, invece di assumere che un set di pesi portafoglio  $X$  sia ottimo, e di risolvere l'equazione per il vettore dei rendimenti impliciti:

$$(4.4) \quad \Theta = \lambda \cdot \Sigma \Omega_B$$

dove  $\Omega_B$  rappresenta, stavolta, il vettore delle quote del portafoglio di riferimento scelto dall'asset manager.

Applicando poi una necessaria e diffusa semplificazione, Black e Litterman assumono che i rendimenti teorici di equilibrio siano distribuiti come una normale multivariata, con valore atteso esattamente pari a  $\Theta$  e matrice delle covarianze dei rendimenti teorici di equilibrio proporzionale a quella delle covarianze storiche  $\Sigma$ , ma ridimensionata tenendo conto di uno Shrinkage factor  $\tau$  (solitamente vicino allo zero). Pertanto, la specificazione completa della distribuzione dei rendimenti attesi di equilibrio sarà:

$$(4.5) \quad E(R) \sim N(\Theta, \tau \cdot \Sigma)$$

I rendimenti impliciti ottenuti in questo modo dal benchmark scelto dall'asset manager, com'è stato già detto, forniscono un punto di riferimento “neutrale” da cui partire per incorporare le view soggettive dell'investitore riguardo ai rendimenti futuri. Qualora l'investitore non disponga di alcuna view sui rendimenti attesi, egli potrà semplicemente acquistare un portafoglio composto secondo la

capitalizzazione di mercato: portafoglio che riflette lo stato di equilibrio, in cui la domanda eguagli l'offerta. Se, invece, l'investitore possiede delle aspettative a proposito dei rendimenti futuri, il difficile compito che si prospetta all'asset manager è quello di combinare queste view in maniera coerente con l'equilibrio di mercato.

Black e Litterman danno un'ulteriore possibilità all'investitore, quella di esprimere il proprio grado di fiducia riguardo a ciascuna view. Nel modello, dunque, sia i rendimenti attesi di equilibrio che le aspettative dell'investitore sono espresse in termini probabilistici. Intuitivamente possiamo dire che il peso relativo dell'equilibrio rispetto alle view dipenderà dal livello di confidenza indicato dall'investitore. Una minore sicurezza delle aspettative soggettive dell'investitore determinerà una maggiore tendenza del portafoglio finale verso i pesi del portafoglio di mercato; al contrario, le quote di portafoglio di un investitore che ripone un alto livello di confidenza nelle proprie aspettative sui rendimenti di mercato si scosteranno parecchio dai rispettivi valori d'equilibrio. In conclusione, l'approccio di equilibrio riconosce nel benchmark di mercato un punto di riferimento neutrale cui ancorare il portafoglio.

### **4.3 View dell'investitore e livello di confidenza**

L'idea di Black e Litterman, come si è detto, è quella di combinare il portafoglio di mercato con specifiche aspettative dell'investitore. A ciascuna view, inoltre, è possibile assegnare un livello di confidenza che permette all'asset manager di differenziare le aspettative tra loro.

Le view possono essere espresse nei due seguenti modi:

- in maniera assoluta come ad esempio: “Mi aspetto che il mercato azionario  $X$  produca in futuro un rendimento del 5%”;
- in maniera relativa come ad esempio: “Credo che il mercato azionario  $X$  produrrà in un futuro un rendimento del 2% superiore rispetto al mercato azionario  $Y$ ”.

A ciascuna view, sia essa assoluta o relativa, l'asset manager può anche assegnare un livello di confidenza, espresso in termini di probabilità, che può oscillare tra lo 0% e il 100%: quanto più è alta la fiducia che il manager ripone nella sua aspettativa, tanto più elevato sarà il livello di confidenza che le assegnerà, e viceversa. Il livello di confidenza naturalmente condiziona l'influenza della view sulla composizione del portafoglio: se il livello di confidenza dell'aspettativa è basso, la view

condizionerà in maniera minima le quote di portafoglio. Ad ogni modo, le view indicano gli specifici asset su cui l'investitore vuole scommettere e la direzione (positiva o negativa) che si vuol dare alla scommessa rispetto ai pesi "neutrali" degli stessi.

Bisogna precisare, però, che l'ampiezza degli scostamenti dai valori d'equilibrio, o meglio dal portafoglio "neutrale", dipende non soltanto dal livello di confidenza che si ripone nell'aspettativa, ma anche dalla view stessa, nonché dal parametro  $\tau$ . Infatti, se la view specificata dall'investitore si scosta molto dal rendimento "neutrale", questa contribuirà ad accrescere l'ampiezza dello scostamento. La letteratura definisce il parametro come wight-on-views, giacché esso ha il potere di condizionare in parte il valore delle quote di portafoglio, secondo le aspettative espresse dall'investitore. Black e Litterman nel loro lavoro non propongono una precisa formula di calcolo, ma considerano il valore del parametro come una costante, il cui valore deve essere fissato molto vicino allo zero.

#### 4.4 L'approccio bayesiano al modello

Come si è detto fino a questo punto, l'idea fondamentale del modello di Black e Litterman è quella di combinare l'informazione derivante dal mercato con quella a disposizione dell'asset manager. Per ottenere questo risultato bisogna utilizzare un approccio di tipo bayesano.

La teoria dell'inferenza bayesana prende il nome dal teorema su cui si fonda: il teorema di Bayes, appunto, che consente di combinare due diverse fonti d'informazione come è stato mostrato prima:

(4.6)

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

da cui:

(4.7)

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

dove  $A$  e  $B$  rappresentano due eventi possibili, che nel nostro caso possiamo interpretare come i rendimenti attesi dall'asset manager (evento  $A$ ) e i rendimenti attesi neutrali (evento  $B$ ).

Di conseguenza la funzione di densità di probabilità (pdf) dei rendimenti attesi condizionata ai rendimenti di equilibrio,  $P(A|B)$ , è data dal prodotto tra la pdf dei rendimenti d'equilibrio condizionata dai rendimenti attesi  $P(B|A)$  e la funzione di densità di probabilità dell'evento  $A$ ,  $P(A)$ , che sintetizza le view soggettive del gestore: il tutto è calcolato in unità di probabilità marginale dei rendimenti d'equilibrio  $P(B)$ . In questo modo il teorema di Bayes si propone di fornire un meccanismo formale in grado di sintetizzare le view soggettive con i rendimenti neutrali.

Se indichiamo con  $E(R) = E(R_{t+1}|I_t)$  il vettore dei rendimenti attesi dal manager per il tempo  $t+1$ , condizionati dal set informativo di cui dispone al tempo  $t$ , e con  $\Theta$  il vettore dei rendimenti neutrali, possiamo riscrivere l'espressione del teorema di Bayes in questo modo:

(4.8)

$$P(E(R)|\Theta) = \frac{P(\Theta|E(R)) \cdot P(E(R))}{P(\Theta)}$$

S'ipotizza di seguito che la probabilità dei rendimenti attesi  $P(E(R)|\Theta)$  assuma la forma di  $k$  vincoli lineari sul vettore di  $n$  rendimenti attesi  $E(R)$ , che possono essere espressi con una matrice  $P$ , di dimensioni  $k \times n$ , tale che:

(4.9)

$$P \cdot E(R) = q + \varepsilon$$

(4.10)

$$\text{con } q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_k \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{pmatrix}$$

dove  $q$  è un vettore  $k \times 1$  che incorpora le view espresse dall'investitore in termini di sopra/sotto performance prevista, mentre  $\varepsilon$  è un vettore i cui elementi rappresentano un termine d'errore (white noise), che sintetizza l'incertezza delle view.

Si noti che  $k$  rappresenta il numero delle view espresse sui mercati e poiché tale deve essere sempre minore del numero degli asset: perciò deve sempre valere che  $k \leq n$ .

La distribuzione di  $\varepsilon$  ha media zero e varianza pari a  $\Psi$ , matrice diagonale, poiché si suppone che le view formulate dall'asset manager siano indipendenti tra loro. Tale matrice si costruisce ponendo sulla diagonale la varianza dei singoli termini di errore ( $\Psi_i$ ):

(4.11)

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_k \end{pmatrix}$$

Dal momento che  $\varepsilon \sim N(0, \Psi)$ , si deduce:

(4.12)

$$P \cdot E(R) \sim N(q, \Psi)$$

Come si può notare, la matrice  $\Psi$  incide sulla distribuzione di probabilità dei rendimenti attesi, e questo, suggerisce che, man mano che gli elementi sulla diagonale della matrice si avvicinano a zero (e dunque con il diminuire della varianza dei singoli termini di errore), le aspettative vengono formulate sempre con maggior certezza.

Infine, per quanto riguarda la matrice  $P$ , essa possiederà tante righe quante sono le view espresse ( $k$ ), e tante colonne quanti sono gli asset in portafoglio ( $n$ ), di modo che ciascuna riga della matrice rappresenterà il peso di un determinato asset in una specifica view:

(4.13)

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k,1} & \cdots & p_{k,n} \end{pmatrix}$$

dove  $P$ ,  $\Psi$  e  $q$  sono variabili note all'asset manager.

Se teniamo conto che

(4.14)

$$E(R) \sim N(\theta, \tau \cdot \Sigma)$$



la funzione di densità di probabilità dei rendimenti d'equilibrio condizionati alle aspettative del manager, sarà

(4.15)

$$\theta|E(R) \sim (E(R), \tau \cdot \Sigma)$$

A questo punto, servendoci del teorema di Bayes, possiamo affermare che la funzione di densità  $P(E(R)|\theta)$  è una normale multivariata, con media

(4.16)

$$[(\tau \cdot \Sigma)^{-1} + P^T \Psi^{-1} P]^{-1} [(\tau \cdot \Sigma)^{-1} \theta + P^T \Psi^{-1} q]$$

e varianza

(4.17)

$$[(\tau \cdot \Sigma)^{-1} + P^T \Psi^{-1} P]^{-1}$$

Siamo così giunti a ottenere il valore atteso della distribuzione dei rendimenti attesi dall'asset manager, condizionati dai valori d'equilibrio, equazione fondamentale della ricerca di Black e Litterman in quanto consente di integrare view specifiche e personali con rendimenti neutrali.

Per chiarire meglio quanto esposto, può essere utile riportare in uno schema il processo logico seguito da Black e Litterman nel loro lavoro: la figura 41 riassume in maniera efficace il procedimento seguito.

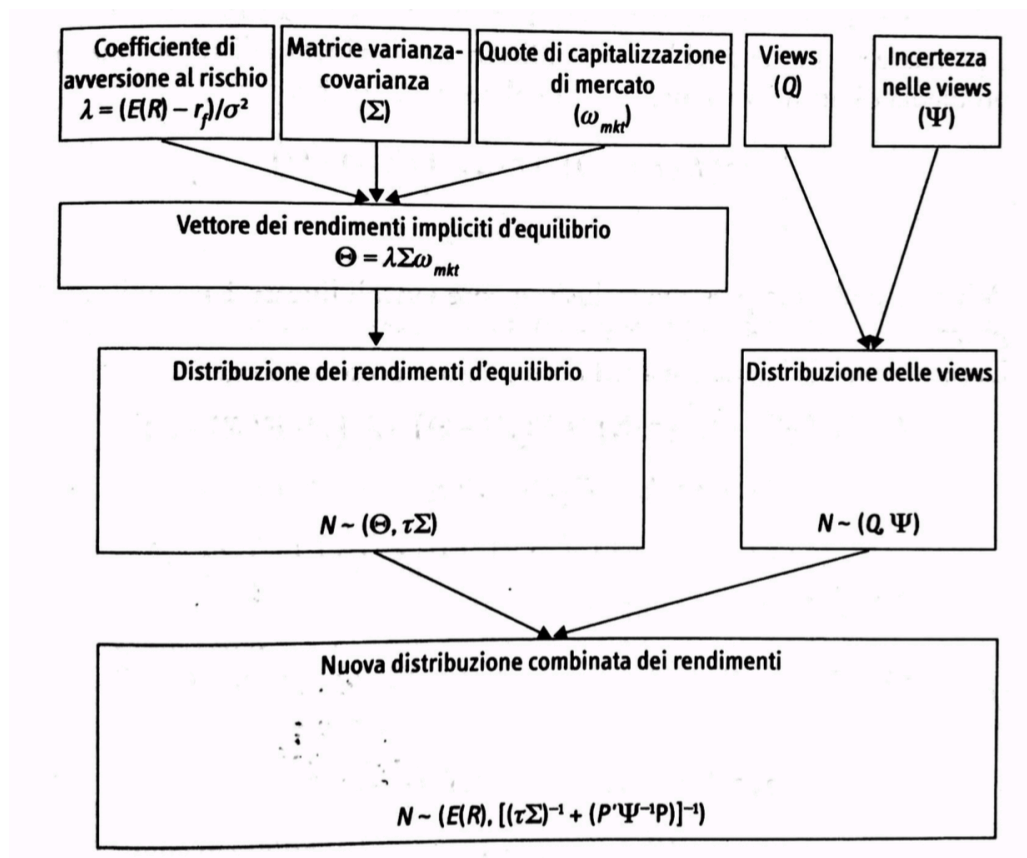


Figura 41 - Schema del modello di Black & Litterman - Fonte: testo di "Manuale di Matematica Finanziaria"

Attraverso questo schema, è possibile osservare la formula generale del valore medio dei rendimenti in eccesso attesi condizionati, derivati combinando l'equilibrio iniziale con le view espresse. A questo punto, per ottenere la nuova composizione del portafoglio ottimale, basterà inserire il vettore dei rendimenti attesi così determinati nel tradizionale processo di ottimizzazione alla Markowitz.

## 4.5 L'applicazione del modello

### 4.5.1 I pesi della capitalizzazione di mercato

Utilizzando come punto di partenza lo stesso paniere impiegato per la costruzione del portafoglio secondo Markowitz, il primo passo da compiere per il calcolo dei rendimenti impliciti è capire quanto pesi la capitalizzazione del singolo indice rispetto al totale degli asset che compongono il basket; in altre parole, occorre definire il peso  $w$  della capitalizzazione di mercato di ciascun indice.

Il peso  $w$  è espresso come rapporto tra la capitalizzazione dello specifico indice e la capitalizzazione totale dell'intero portafoglio data appunto dalla somma delle capitalizzazioni tutti gli asset coinvolti.

Per eseguire un'analisi il più autentica possibile, sono stati dapprima raccolti i relativi dati nelle diverse valute locali e successivamente per uniformarli, e quindi ottenere dei pesi da un set di dati omogenei, quest'ultimi sono stati tutti convertiti in dollari americani, dato che in questa trattazione si sta assumendo il punto di vista di un investitore internazionale che ha come punto di riferimento la valuta più utilizzata a livello globale.

Perciò di seguito viene riportata la tabella con i dieci indici borsisti, con le rispettive capitalizzazioni in dollari e i relativi pesi  $w_i$ .<sup>24</sup>

Tabella 20 - Pesi di capitalizzazione di mercato

|                   | Capitalizzazione Mercato (Miliardi \$) | Peso %         |
|-------------------|----------------------------------------|----------------|
| <b>ASX 200</b>    | 1.789,89                               | 6,61%          |
| <b>CAC 40</b>     | 1.901,91                               | 7,03%          |
| <b>DAX</b>        | 1.386,31                               | 5,12%          |
| <b>DOW 30</b>     | 6.560,00                               | 24,24%         |
| <b>FTSE 100</b>   | 3.778,36                               | 13,96%         |
| <b>FTSE MIB</b>   | 593,00                                 | 2,19%          |
| <b>JSE TOP 40</b> | 952,49                                 | 3,52%          |
| <b>NIKKEI 225</b> | 3.054,30                               | 11,28%         |
| <b>TSX</b>        | 2.270,00                               | 8,39%          |
| <b>SHANGHAI</b>   | 4.779,88                               | 17,66%         |
| <b>Totale</b>     | <b>27.066,15</b>                       | <b>100,00%</b> |

Ciò che è possibile osservare dalla tabella è che l'asset che pesa maggiormente nell'economia dell'intero portafoglio è il DOW 30, seguito poi rispettivamente dalla borsa di Londra, Tokyo e Shanghai: questa peculiarità è coerente con la scelta di volere considerazione nella trattazione indici small/medium/large cap<sup>25</sup>, in modo da avere una maggiore uniformità nella costruzione del portafoglio.

<sup>24</sup> Si rammenta che non è stato possibile individuare tutti i dati relativi al 31/12/2018, data ultima di riferimento della nostra analisi; per alcuni indici sono stati ritrovati valori di capitalizzazione relativi ai primi 6/10 mesi del 2019 e questi ultimi sono stati inclusi ugualmente dato che si è ipotizzato che non vi siano stati enormi cambiamenti rispetto all'intervallo di tempo base.

<sup>25</sup> La capitalizzazione caratterizzante i singoli mercati da un'idea realistica del grado di sviluppo dei relativi Paesi: quelli meno sviluppati e/o maggiormente "banco centrici" detengono quote di capitalizzazione significativamente inferiori rispetto a realtà maggiormente incentrate sulla Borsa.

#### 4.5.2 Il coefficiente di avversione al rischio

Il coefficiente di avversione al rischio  $\lambda$  nel modello di Black & Litterman, come già detto, richiama la tendenza degli investitori ad assumersi dei rischi o meno nel mercato di riferimento; dal punto di vista più strettamente analitico da quindi un'idea dell'extra- rendimento per ciascun punto aggiuntivo di rischio rispetto ad un benchmark. Proprio per quanto concerne il benchmark da scegliere come punto di riferimento neutrale dal quale partire, si è scelto di optare per un indice che tenesse conto del fatto che gli asset del portafoglio che si stanno considerando provengano da tutto il mondo. Per tale motivo il "MSCI All Country World Index" è stata la scelta più logica, in quanto è un indice nel cui paniere sono presenti stocks di società di tutto del mondo, e per l'esattezza provenienti rispettivamente da 23 paesi sviluppati e da 24 mercati emergenti. Inoltre risulta essere un indice che meglio rispecchia il concetto di benchmark per comparare le performance generali e misurare i punti di forza e debolezza dei mercati azionari globali (investopedia, 2019).

Tuttavia per la definizione dell'extra-rendimento e di conseguenza per la determinazione del coefficiente  $\lambda$ , è stato necessario individuare un opportuno asset risk-free: si è ritenuto consono, dal momento che nell'analisi si sta tenendo conto anche del rischio post valutario nei confronti del dollaro, assumere il punto di vista di un investitore internazionale (di stampo Statunitense) e che quindi prendesse come riferimento i titoli obbligazionari degli Stati Uniti. Si rammenta che sono stati presi in considerazione i Bond rispettivamente a 3,5,10 anni, per i quali si è proceduto alla determinazione dei rispettivi Log rendimenti e conseguente analisi statistica descrittiva che ha permesso di individuare il valore medio atteso (stessa cosa si è replicata per il MSCI All Country World Index).<sup>26</sup>

Di seguito sono riportati i risultati ottenuti:

Tabella 21 - Valori del coefficiente  $\lambda$  per diverse combinazioni benchmark/titoli risk-free

| Benchmark                                       | Valore atteso | Varianza    | USA Bond (2y) | USA Bond (5y) | USA Bond (10y) |
|-------------------------------------------------|---------------|-------------|---------------|---------------|----------------|
| MSCI All-Country World Equity                   | 0,000083755   | 0,000046426 | 0,001213879   | 0,000234485   | -0,000077245   |
| Coefficiente di avversione al rischio $\lambda$ |               |             | -24,34227645  | -3,24664738   | 3,467843669    |

La tabella, come è evidente, riporta oltre i dati di input, i diversi valori dei coefficienti di avversione al rischio: dal momento in cui la trattazione considera i rendimenti giornalieri degli asset componenti il portafoglio, ci si attende dei valori degli extra-rendimenti esigui; quindi per rendere quest'ultimi

---

<sup>26</sup> La determinazione dei Log rendimenti e l'analisi statistica descrittiva fa sempre fede al range temporale di un quinquennio, ovvero dal 01/01/2014 al 31/12/2018.

più apprezzabili, si è scelto di individuare la combinazione benchmark/titolo risk-free che dia il valore più alto di  $\lambda$ , al quale corrisponderà una tipologia di investitore che ha una maggiore propensione ad essere avverso al rischio. Pertanto il valore di  $\lambda$  individuato è pari a 3,4678: a tale risultato viene associata la combinazione obbligazione governativa a 10 anni con una media dei rendimenti logaritmici pari a -0,0077245% e il benchmark di mercato MSCI All-Country World Equity che presenta un valore atteso dei Log rendimenti pari 0,0083755% e una varianza pari a 0,0046426% (questo dimostra come l'indice, dal momento che include al suo interno componenti provenienti da qualsiasi parte del mondo, permette di beneficiare di un'ottima diversificazione e quindi di avere un basso livello di rischiosità).

#### 4.5.3 Il vettore $\theta$ dei rendimenti impliciti

Individuati i pesi di portafoglio dei vari asset, la matrice delle covarianze e il coefficiente di avversione al rischio, non resta ora che determinare il vettore dei rendimenti impliciti, che come già detto, forniscono un punto di riferimento da cui partire per incorporare le view soggettive dell'investitore riguardo ai rendimenti futuri. Qualora l'investitore non disponga di alcuna view sui rendimenti attesi, egli potrà acquistare un portafoglio composto secondo le capitalizzazioni di mercato: portafoglio che difatti rispecchia lo stato di equilibrio, in cui domanda e offerta si eguagliano.

La matrice delle varianze e covarianze è la stessa del procedimento alla Markowitz moltiplicata per lo scalare  $\tau$  (considerato in questa trattazione pari a 0,05). Utilizzando a questo punto la formula (4.4) si ottiene il seguente vettore dei rendimenti impliciti:

Tabella 22 - Vettore dei rendimenti impliciti

| Indice            | Rendimenti impliciti |
|-------------------|----------------------|
| <b>ASX 200</b>    | 0,000001199          |
| <b>CAC 40</b>     | 0,000001758          |
| <b>DAX</b>        | 0,000002247          |
| <b>DOW 30</b>     | 0,000002894          |
| <b>FTSE 100</b>   | 0,000002077          |
| <b>FTSE MIB</b>   | 0,000001995          |
| <b>JSE TOP 40</b> | 0,000000564          |
| <b>NIKKEI 225</b> | 0,000003494          |
| <b>TSX</b>        | 0,000000988          |
| <b>SHANGHAI</b>   | 0,000006791          |

Gli extra-rendimenti e la matrice di varianza e covarianza (corretta per lo scalare  $\tau$ ) vengono trattati come nuovi input per il procedimento di costruzione del portafoglio di Markowitz; il nuovo paniere ottimo è caratterizzato pertanto da un rendimento atteso dello 0,000305% a fronte di una varianza praticamente trascurabile dello  $1,7586 \cdot 10^{-5}$ .

Una volta calcolato il primo blocco di parametri, non resta che andare a dettagliare uno degli elementi portanti del modello di Black & Litterman, vale a dire le view dell'investitore.

## 4.6 Le view dell'investitore

### 4.6.1 Le tensioni europee

Le tematiche che stanno tenendo banco in Europa negli ultimi mesi sono riconducibili sostanzialmente alla questione Brexit e il passaggio di consegne ai vertici della Banca Centrale Europea tra il presidente uscente Mario Draghi e l'entrante Christine Lagarde.

- **Fronte Brexit:** *“Dopo un fine settimana di trattative, i Ventisette hanno accettato lunedì 28 ottobre di rinviare nuovamente l'uscita del Regno Unito dall'Unione europea, dal 31 ottobre al 31 gennaio. La notizia è stata data con un tweet dal presidente del Consiglio europeo Donald Tusk”* così citava *Ilsole24ore* (*ilsole24ore*, 2019a), descrivendo difatti un altro tassello dell'infinita telenovela che ormai da tempo sta lacerando i rapporti tra i paesi membri dell'UE e la stessa UK in merito alla sua uscita dalla comunità europea. Ormai non si è più stupiti dei continui rinvii e delle infinite tensioni che popolano il parlamento inglese tra chi è a favore o meno dell'uscita e soprattutto tra coloro che appoggiano un'uscita “forzata” senza alcun accordo che potrebbe avere ripercussioni irreversibili sull'intero apparato economico inglese. Tensioni che toccano da vicini anche i principali paesi della UE come Francia, Germania e Italia, relativamente alla questione Irlanda, riconoscimento dello status di immigrato dei propri concittadini in UK e infine non di meno la questione commerciale relativi all'interscambio di prodotti tra i paesi con l'eventuale nascita di dazi. A tal proposito i primi effetti derivanti da tale incertezza, sono visibili dai continui cambiamenti che la sterlina subisce nei confronti dell'euro in merito ad una sua svalutazione e apprezzamento. Sta difatti che questa aria di forte tensione, che ogni giorno può portare a repentini capovolgimenti di fronte, non rappresenta un fattore rassicurante in termini di stabilità per i mercati finanziari.
- **Fronte BCE:** *Ilsole24ore* intitolava riguardo a Christine Lagarde, difatti all'inizio della sua presidenza presso la BCE, come *“L'ex numero uno del Fmi inizia il suo mandato in un clima rovente: tensioni nel board, l'eredità pesante di Draghi e la sfida, anche politica, a un colosso come la Germania”* (*ilsole24ore*, 2019b).

Ciò che fa più rumore sul tavolo di uno degli organi europei più importanti è senz'altro la nuova manovra di Qe2 (Quantitative Easing<sup>27</sup>), che ha come scopo principale oltre quello di incentivare l'intera economia con nuovi investimenti, anche quello di aumentare il livello di inflazione raggiungendo un target obiettivo del 2% (così come lo statuto della BCE prevede). *“Gli investitori però nelle ultime settimane stanno dimostrando un profondo scetticismo sulla capacità della Bce (se non delle banche centrali in generale a questo punto) di risollevare l'inflazione attraverso una politica in stile quantitative easing. Lo dimostra il fatto che le previsioni sull'inflazione dell'Eurozona nel medio termine (a 5 anni e per i 5 anni successivi) sono risalite dal minimo dell'1,12% all'1,3% (dopo l'annuncio del 12 settembre) ma poi sono rientrate all'1,2%, praticamente sui livelli precedenti la mossa dell'istituto di Francoforte.”* (ilsole24ore, 2019c)

Non solo. Andranno affrontate anche *“le sfide che vanno dal cambiamento climatico alle criptovalute; dalle problematiche della vigilanza su fintech, shadow banking e riciclaggio di denaro sporco all'Unione bancaria in stallo sulla garanzia unica sui depositi e sulla liquidity line per la risoluzione delle banche; dall'unione del mercato dei capitali insabbiata sull'armonizzazione delle leggi sulla liquidazione ai muri di sbarramento sui safe asset. [...] Ma su tutto, le aspettative più alte per l'era Lagarde si ripongono nella capacità della nuova presidente di convincere gli Stati membri dell'euro che la Bce non può fare tutto da sola e che la politica monetaria è più efficace, e più velocemente, se accompagnata da politiche fiscali altrettanto espansive.”* (ilsole24ore, 2019b)

Collocandosi in un mosaico europeo così controverso e complicato ed incerto sulle future azioni da intraprendere per l'imminente futuro, è possibile formulare le seguenti view sui principali indici europei:

---

<sup>27</sup>Parlando di Quantitative Easing ci si riferisce, in genere, ad un'operazione che rientra nel complesso delle politiche monetarie adottate da una banca centrale. Attuando un piano di allentamento monetario, le banche centrali si pongono quali acquirenti di beni (generalmente si tratta di azioni o titoli di stato) con denaro creato "ex-novo" e al fine di incentivare la crescita economica (per questo il QE viene anche chiamato "stimolo") (ForexWiki, s.d.).



- CAC 40: rialzo del 0,4% (assoluta);
- DAX: rialzo del 0,5% (assoluta);
- FTSE 100: ribasso del 0,5% (assoluta);
- FTSE MIB: ribasso del 0,2% rispetto al DAX (relativa).

#### 4.6.2 Le Americhe

Dall'altra parte dell'oceano se a fare scalpore sono i repentini cambi di prospettiva relativi alla guerra commerciale tra USA e Cina, accompagnati dalle nuove strategie della Fed, nel silenzioso Canada tiene banco la vittoria alle urne di Trudeau, con un assottigliamento della sua maggioranza e l'incombere di volontà separatorie "intern nos".

- **Un overview sulla situazione economica degli USA:** *"La spesa al consumo è rimasta solida, ma gli investimenti delle imprese sono diminuiti"* così titola il New York Times (New York Times, 2019) in un articolo in cui si analizza la situazione macroeconomica del paese sulla base degli ultimi risultati inerenti al terzo trimestre del 2019: come sempre riporta il quotidiano americano si è registrata una crescita dell'1,9% su base annua del PIL, ma di contro *"gli investimenti delle imprese, che includono ricerca e sviluppo, edifici e attrezzature, sono stati deludenti, con un calo del 3%. La spesa per fabbriche e uffici è affondata di un enorme 15,3 per cento. La crescita del terzo trimestre ha risentito un po' dello sciopero di sei settimane alla General Motors che ha interrotto la produzione. Anche i problemi a Boeing, il più grande produttore aerospaziale della nazione e il suo più grande esportatore di produzione, si sono sgranocchiati alla produzione. Il 737 Max della compagnia è stato messo a terra dopo due disastrosi incidenti e le consegne di aerei in uscita dalla catena di montaggio si sono in gran parte arrestate. [...] I prezzi al consumo, esclusi i settori volatili dell'alimentazione e dell'energia, sono aumentati del 2,2%, leggermente al di sopra dell'obiettivo della Fed."*

Sulla base di questi dati, uniti anche alle tensioni della battaglia commerciale con la Cina, dove si prevede un possibile accordo di tregua, insieme al rallentamento dell'intera economia globale, la Fed, ovvero la banca centrale americana, ha deciso di giocare di anticipo e sulla difensiva e di tagliare i tassi di un quarto di punto, portandoli all'1,75%, proprio nel momento in cui l'economia continua a mostrare segni di rallentamento (New York Times, 2019).

- **La calma apparente canadese:** *“Una divisione urbana contro campagna, insieme al crescente regionalismo, ha preso piede in un paese celebrato per la coesione sociale”, è questa la fotografia scattata dal New York Times (New York Times, 2019b) all’indomani delle elezioni nazionali canadesi. La vittoria, se pure striminzita, da parte di Justin Trudeau, porta con sé dubbi e riflessioni per quello che è da sempre stato definito un paese caratterizzato da armonia in tutti i sensi. Questo perché il partito conservatore ha riscontrato maggiori consensi rispetto all’ultima tornata elettorale, riportando alla ribalta la questione del regionalismo e delle divisioni tra zona urbana e rurale. Tanto che le elezioni, come scrive ancora il New York Times, “hanno fatto eco a divisioni in altri paesi del mondo in cui il regionalismo si sta intensificando e il divario urbano-rurale sta crescendo. La Gran Bretagna ha Brexit. Gli Stati Uniti hanno Trump Country. E, dopo le elezioni canadesi, i separatisti nelle province della prateria occidentale chiedono di nuovo #Wexit.” (New York Times, 2019)*

Pertanto sulla base di quanto descritto, è possibile stimare i possibili trend futuro per la borsa di NY e per quella di Toronto:

- DOW 30: rialzo del 1,1% (assoluta);
- TSX: ribasso del 0,2% rispetto al DOW 30 (relativa).

#### 4.6.3 L’estremo oriente

Il mosaico asiatico è costituito principalmente dalla realtà cinese e quella giapponese, che rappresentano i due colossi finanziari dell’intera regione.

- **Fronte cinese:** ciò che ormai da qualche tempo tiene banco sul tavolo di Pechino è il rapporto conflittuale con gli USA, in merito all’ennesimo episodio della telenovela dei dazi commerciali. Infatti come riporta il The Economist *“Il 28 ottobre la Cina ha chiesto all’Organizzazione mondiale del commercio (OMC) di consentirle di vendicarsi contro \$ 2,4 miliardi di importazioni dall’America, come parte di una disputa di lunga data sul trattamento*

*americano delle esportazioni cinesi. [...] La disputa riguarda due dei maggiori problemi dell'America: il modello economico cinese e l'incapacità dell'OMC di vincolarlo. L'America accusa il governo cinese di gonfiare il proprio settore privato con sussidi, che si riversano per colpire le imprese all'estero.” (The Economist, 2019a)*

- **Il Giappone e la paura degli investitori stranieri:** agli inizi del mese di ottobre il governo giapponese ha avanzato delle novità per quanto riguarda il mondo della finanza, infatti così come cita il The Economist, vi è stata *“Una proposta di modifica del Foreign Exchange and Foreign Trade Act, presentata l'8 ottobre, che ridurrà la partecipazione minima che gli stranieri possono acquistare in molte società giapponesi quotate senza previa approvazione del governo, dal 10% all'1%. [...] Il ministero delle finanze afferma di voler proteggere settori sensibili come l'energia e la produzione di armi. Ma gli analisti hanno avvertito che le regole potrebbero soffocare gli investimenti.”* Questo scossone potrebbe ribaltare la precedente situazione in termini di investimenti dove *“i proprietari esteri detengono il 30% dell'indice giapponese di titoli TOPIX e rappresentano circa il 70% del fatturato giornaliero alla Borsa di Tokyo (TSE).” (The Economist, 2019b)*

A questo punto è possibile formulare delle aspettative in merito a questi mercati (si inseriranno per facilità nella trattazione anche gli indici sudafricano e australiano nonostante questi non rientrano principalmente nel quadro economico-politico asiatico):

- NIKKEI 225: ribasso del 0,3% (assoluta);
- SHANGHAI: rialzo del 0,2% (assoluta);
- ASX 200: no view;
- JSE Top 40: no view.

Una volta definite le opinioni, dal punto di vista di un asset manager, è possibile costruire il vettore  $q$  (rendimenti previsti di ciascuna view) e la matrice  $P$  (pesi di un determinato asset in una specifica view); si ricorda che, come riporta il testo di Manuale di Matematica Finanziaria (Micocci & Batista Masala), che nella matrice  $P$  l'espressione di un'aspettativa assoluta possiederà un peso pari all'unità in corrispondenza dell'asset interessato, mentre assumerà valore nullo per tutti gli altri asset; diversamente nel caso di una view relativa in cui si avrà un peso pari ad 1 per l'asset che si suppone

produrrà un *over*-rendimento, mentre sarà pari a -1 il peso dell'asset che s'ipotizza produrrà un *under*-rendimento. Ciò che è importante in quest'ultimo caso, è la somma degli elementi della riga che deve essere pari a zero.

Si riassume quanto detto poc'anzi nella tabella 23:

Tabella 23 - Le view dell'asset manager con i rispettivi pesi

|   |        |        | P       |        |     |        |          |          |            |            |     |          |
|---|--------|--------|---------|--------|-----|--------|----------|----------|------------|------------|-----|----------|
| q |        |        | ASX 200 | CAC 40 | DAX | DOW 30 | FTSE 100 | FTSE MIB | JSE Top 40 | NIKKEI 225 | TSX | SHANGHAI |
|   | View 1 | 0,004  | 0       | 1      | 0   | 0      | 0        | 0        | 0          | 0          | 0   | 0        |
|   | View 2 | 0,005  | 0       | 0      | 1   | 0      | 0        | 0        | 0          | 0          | 0   | 0        |
|   | View 3 | -0,005 | 0       | 0      | 0   | 0      | -1       | 0        | 0          | 0          | 0   | 0        |
|   | View 4 | -0,002 | 0       | 0      | 1   | 0      | 0        | -1       | 0          | 0          | 0   | 0        |
|   | View 5 | 0,011  | 0       | 0      | 0   | 1      | 0        | 0        | 0          | 0          | 0   | 0        |
|   | View 6 | -0,002 | 0       | 0      | 0   | 1      | 0        | 0        | 0          | 0          | -1  | 0        |
|   | View 7 | -0,003 | 0       | 0      | 0   | 0      | 0        | 0        | 0          | -1         | 0   | 0        |
|   | View 8 | 0,002  | 0       | 0      | 0   | 0      | 0        | 0        | 0          | 0          | 0   | 1        |

Per quanto riguarda la matrice di confidenza, l'approccio utilizzato per la sua determinazione è quello della diagonalizzazione secondo la formula  $\Psi = \text{diag}(P\tau\Sigma P^T)$  (verafinanza, 2019). Ciò che si ottiene è dunque:

Tabella 24 - Matrice di confidenza delle view

|            |            |            |            |            |            |            |           |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|-----------|
| 0,00000111 | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 0          | 0,00000289 | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 0          | 0          | 0,00000436 | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 0          | 0          | 0          | 0,00000590 | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 0          | 0          | 0          | 0          | 0,00000666 | 0          | 0          | 0         |
| 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0,00000802 | 0          | 0         |
| 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0,00001117 | 0         |
| 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0,0000183 |

La formattazione condizionale permette di avere una visione più chiara e approfondita circa il grado di confidenza dell'investitore rispetto alle sue aspettative relativi ai vari asset: innanzitutto tutti gli elementi appartenenti alla diagonale principale sono molto prossimi allo zero, il che già fa presagire

come queste view posseggono ognuna una bassa varianza per quanto riguarda il termine di errore e quindi sono state formulate con un elevato grado di certezza; inoltre procedendo dal colore giallo chiaro ad un tono più acceso dello stesso, sono stati evidenziati rispettivamente tutti i valori delle opinioni su cui il manager è più sicuro fino a quelle caratterizzate da un minore grado di fiducia (in particolare per quest'ultimo caso si fa riferimento alle view 7 e 8, rispettivamente relative al NIKKEI 225 e SHANGHAI). Viceversa le previsioni di performance che possiedono un maggiore grado di fiducia sono la view 1 e 2, facente rispettivamente riferimento al CAC 40 e al DAX; pertanto questo vorrà dire che le quote di portafoglio terranno debitamente conto della visione personale del manager. Ora che tutti i tasselli del portafoglio di B&L sono al loro posto, occorre utilizzare l'approccio bayesiano per miscelare i rendimenti impliciti ottenuti dal benchmark di mercato con le view personali dell'investitore, in modo da ottenere il valore dei rendimenti dell'asset manager.

#### **4.7 L'approccio bayesiano: aggregazione delle view ai rendimenti impliciti**

Il primo risultato derivante dell'applicazione del teorema di Bayes al modello di B&L è il vettore dei rendimenti di equilibrio di lungo periodo, ottenuto mediante la formula già presentata nei paragrafi precedenti (per memoria si riporta di seguito):

$$\mu_{BL} = [(\tau \cdot \Sigma)^{-1} + P^T \Psi^{-1} P]^{-1} [(\tau \cdot \Sigma)^{-1} \Theta + P^T \Psi^{-1} q]$$

Svolgendo i calcoli è dunque possibile ricavare il vettore di dimensione 10x1 che andrà a costituire il primo dato di input dello stesso procedimento di ottimizzazione impiegato per il portafoglio di Markowitz; la tabella di seguito accosta i rendimenti attesi ottenuti alle rispettive deviazioni standard (queste ultime sono state ricavate estraendo la radice quadrata degli elementi presenti sulla diagonale principale del primo fattore della formula sopra indicata):

Tabella 25 - Rendimenti e rischi di equilibrio secondo B&L

| Indice            | Rendimenti B&L | Deviazione Standard B&L |
|-------------------|----------------|-------------------------|
| <b>ASX 200</b>    | 0,000708661    | 0,001765533             |
| <b>CAC 40</b>     | 0,003402948    | 0,000966883             |
| <b>DAX</b>        | 0,003310585    | 0,001345413             |
| <b>DOW 30</b>     | 0,002850046    | 0,00136366              |
| <b>FTSE 100</b>   | 0,002599003    | 0,001394133             |
| <b>FTSE MIB</b>   | 0,003513241    | 0,002150102             |
| <b>JSE TOP 40</b> | -6,16034E-05   | 0,002277045             |
| <b>NIKKEI 225</b> | 0,001390211    | 0,002156061             |
| <b>TSX</b>        | 0,001307072    | 0,001429888             |
| <b>SHANGHAI</b>   | 0,000879425    | 0,002638189             |

Osservando i risultati ottenuti da una più ampia prospettiva, bisogna sottolineare che i rendimenti di equilibrio di B&L si collocano ad un livello decisamente superiore rispetto agli extra- rendimenti di mercato condizionati dalla propensione al rischio dell'investitore; una quota parte significativa di ciò che il manager si aspetta di ottenere è da imputarsi alle opinioni formulate a riguardo.

I risultati ottenuti per quegli asset sui quali il gestore del fondo non ha espresso delle view precise sono invece influenzati in larga misura dalla correlazione esistente tra i rendimenti dei componenti del paniere, malgrado siano caratterizzati da una volatilità leggermente più elevata. Nella nostra analisi è il caso della borsa di Sydney a Johannesburg, per le quali appunto il manager non ha effettuato view e per le quali si registrano i rendimenti più bassi: in particolare nel caso della borsa del Sudafrica il rendimento risulta essere negativo, per via probabilmente della correlazione che lega l'indice alla situazione dei mercati asiatici investiti dall'incertezza riguardante la guerra commerciale con gli USA e le nuove riforme in termini di investimento che stanno per subentrare nel mondo borsistico nipponico.

Prima di procedere con il calcolo delle quote di portafoglio tramite i rendimenti e le rischiosità identificate, occorre ragionare però sul significato della matrice di varianza e covarianza ottenuta dalla formula già introdotta nella presentazione del modello di Black & Litterman:

$$\sigma_{BL}^2 = [(\tau \cdot \Sigma)^{-1} + P^T \Psi^{-1} P]^{-1}$$

A ben osservare, l'espressione sopra riportata è esattamente la prima componente utilizzata per il calcolo dei rendimenti di equilibrio; non bisogna però lasciarsi trarre in inganno. Le dispersioni che compongono la matrice non si riferiscono infatti al valore atteso dei rendimenti ma alla sua stima e, di conseguenza, non può essere utilizzate come input per la definizione dei pesi. Occorre infatti effettuare un passaggio intermedio di rimodulazione della matrice di varianza e covarianza di B&L addizionando  $\Sigma$  (matrice varianze e covarianze di partenza del modello di Markowitz) a quest'ultima; solo a questo punto è possibile proseguire con il passaggio conclusivo del modello.

#### 4.8 Le quote di portafoglio di Black & Litterman

Una volta ottenuti i rendimenti di equilibrio di Black & Litterman mediante l'approccio bayesiano, che ha permesso di combinare tra loro le aspettative di un gestore di un fondo e i rendimenti impliciti a partire di un benchmark di mercato, è giunto il momento di ottenere la nuova composizione del portafoglio ottimale, inserendo i rendimenti di B&L attesi nel tradizionale processo di ottimizzazione *à la Markowitz* visto nei capitoli precedenti.

Di seguito viene riportata la tabella con le varie composizioni di portafoglio ottenute, con le relative azioni di allocation da implementare:

Tabella 26 - Quote di portafoglio secondo il modello di B&L

|                   | Quote composizione | Allocazione |
|-------------------|--------------------|-------------|
| <b>ASX 200</b>    | 0,000152415        | Buying      |
| <b>CAC 40</b>     | 0,17325621         | Buying      |
| <b>DAX</b>        | 0,090294059        | Buying      |
| <b>DOW 30</b>     | 0,251983465        | Buying      |
| <b>FTSE 100</b>   | 0,177388975        | Buying      |
| <b>FTSE MIB</b>   | 0,098119635        | Buying      |
| <b>JSE TOP 40</b> | 0                  | No Buying   |
| <b>NIKKEI 225</b> | 0,046496505        | Buying      |
| <b>TSX</b>        | 0,142464182        | Buying      |
| <b>SHANGHAI</b>   | 0,019844554        | Buying      |

Si evince che i valori confermano quanto previsto dalla teoria di base: le posizioni più piccole o addirittura quasi nulle (nella nostra analisi si fa riferimento al ASX 200 e JSE Top 40) sono quelle relative agli indici per i quali non sono state formulate delle opinioni. In particolare per l'indice australiano, se pure la quota è minima, il modello suggerisce di andare lungo (ovvero comprare), mentre nel caso della borsa sudafricana il modello suggerisce di non allora ricchezza e difatti di non investire. Altro appunto è da fare nei rimanenti otto indici: se per coloro i quali sono state espresse view rialziste, il modello appunto suggerisce di comprare, per quelli invece in cui erano stati predetti trend ribassisti, ci viene suggerito lo stesso di comprare una quota. Quello che quindi salta all'occhio è l'assenza di operazioni di short selling, probabilmente attribuibile al fatto che dal momento in cui nella trattazione si è scelto di perseguire il punto di vista di un investitore internazionale (in particolare con impronta *made in USA*), questo ha portato una leggera influenza nel modello per quanto riguarda l'asset allocation. Il grafico seguente dà una visione globale più chiara in merito a quest'ultimo punto:

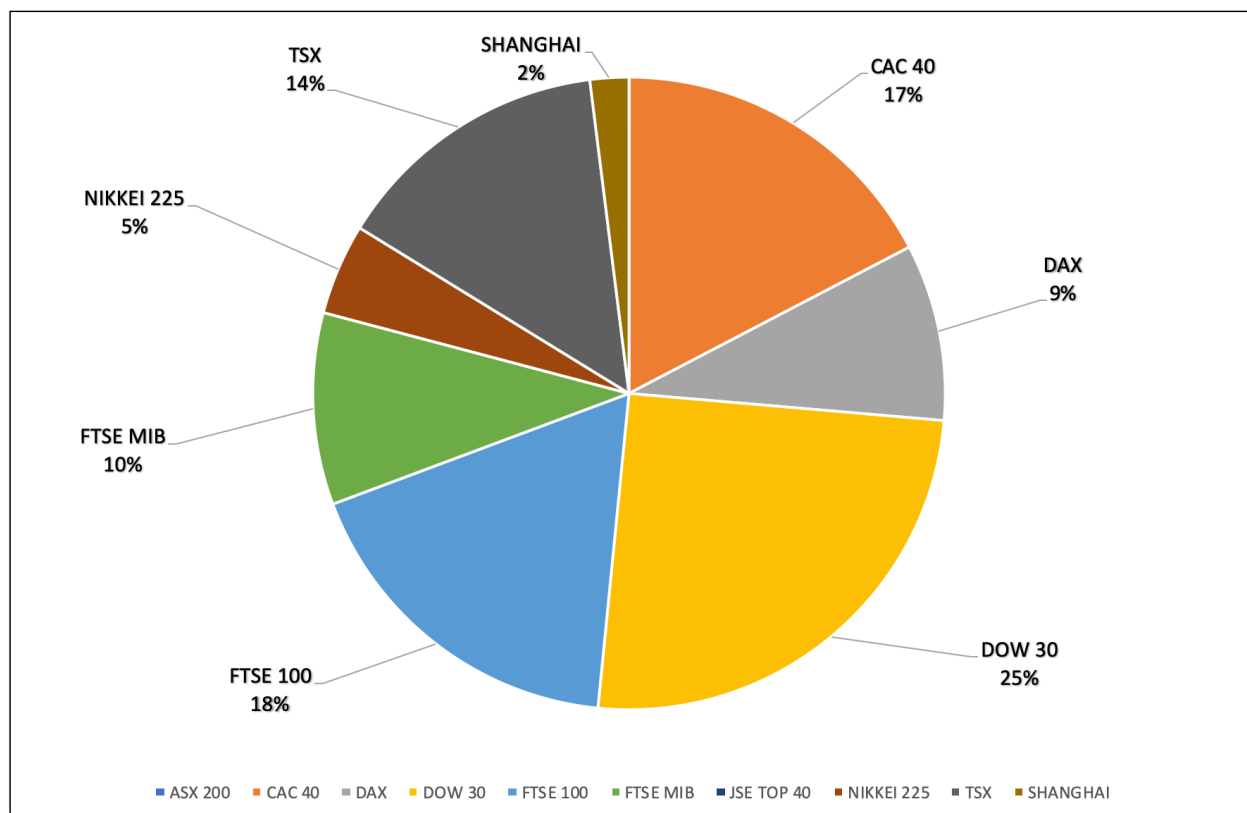


Figura 42 - Composizione del portafoglio di Black & Litterman

Facendo riferimento da quanto riportato nel grafico, è possibile notare come l'investitore preferisca allocare prevalentemente la sua ricchezza in indici di stampo domestico (si veda DOW 30 e TSX) e



in quelli di matrice europea, a discapito difatti di quote minoritarie nei confronti di quelli asiatici (per via forse anche delle tensioni che stanno toccando quest'ultimi). Nonostante quanto evidenziato poc'anzi, l'allocation viene distribuita in modo tale da diversificare il più possibile il rischio e cercare di trarre i maggiori profitti in base anche ai diversi rendimenti di equilibrio di B&L individuati per ciascun indice.

A tal proposito va sottolineato come il portafoglio ottimo di Black & Litterman abbia un rendimento atteso complessivo del 0,26% a fronte di una volatilità del 0,42%; talvolta i risultati del modello di Markowitz presentavano un portafoglio con una combinazione rendimento-rischio pari rispettivamente al 0,021% e 0,51%. Quindi con una performance in termini di redditività aumentata del 0,24% e una volatilità diminuita del 0,09%, la soluzione di Black & Litterman in questo caso si conferma vincente per l'investitore; le aspettative sul trend degli asset consentono al manager di guadagnare mediamente di più rispetto ad una casistica di passiva osservazione dei mercati da cui gli indici provengono.

#### **4.9 Il modello di B&L post rischio valutario**

Così come è stato svolto per il modello di Markowitz, anche per il modello di Black & Litterman si vuole osservare cosa succede in termini di rendimenti e rischiosità, così come varia il vettore del portafoglio ottimo, quando viene introdotta una variabile esogena nello sviluppo del modello come il rischio di tasso di cambio. Si precisa che prima di avviare di nuovo tutti gli step di calcolo che prevede il modello di B&L, si è prima provveduto a convertire i prezzi di chiusura degli indici rispettivamente alla valuta di riferimento (in questo caso il dollaro), applicando i tassi di cambio giornalieri aggiornati; dopodiché si è proceduto a calcolarne i Log rendimenti, i dati statistici descrittivi e la matrice delle varianze e delle covarianze che risulterà essere il fondamento principale dell'implementazione del modello di B&L.

Inoltre si registra come i pesi di portafoglio  $w_i$  delle capitalizzazioni di mercato, il coefficiente di avversione a rischio  $\lambda$ , il fattore di correzione  $\tau$  da moltiplicare per la matrice delle covarianze, così come anche le view espresse dall'investitore con i relativi pesi e la matrice di confidenza, risulteranno essere le stesse rispetto al caso pre-rischio valutario: ciò che cambia nell'implementazione del modello è la matrice delle covarianze, la quale farà riferimento ai Log rendimenti riportati tutti in dollari. Una volta premesso ciò, le formule così come tutte le fasi di

calcolo sono le stesse: si procederà prima a determinare i nuovi rendimenti impliciti rispetto al benchmark di mercato; successivamente si procederà ad applicare il teorema di Bayes per individuare i rendimenti e le rischiosità di equilibrio di B&L ed infine si applicherà il problema di ottimizzazione *à la Markowitz* per determinare le quote di composizione del portafoglio.

Nella tabella seguente vengono riportati i rendimenti impliciti calcolati a partire dal benchmark di mercato preso come riferimento:

Tabella 27 - Rendimenti impliciti in dollari

| Indice            | Rendimenti impliciti in \$ |
|-------------------|----------------------------|
| <b>ASX 200</b>    | 0,000001538                |
| <b>CAC 40</b>     | 0,000000408                |
| <b>DAX</b>        | 0,000001961                |
| <b>DOW 30</b>     | 0,000002815                |
| <b>FTSE 100</b>   | 0,000002736                |
| <b>FTSE MIB</b>   | 0,000002063                |
| <b>JSE TOP 40</b> | 0,000001538                |
| <b>NIKKEI 225</b> | 0,000003459                |
| <b>TSX</b>        | 0,000001669                |
| <b>SHANGHAI</b>   | 0,000007250                |

A prima vista i rendimenti impliciti individuati una volta inserito il rischio di tasso, sembrano ricalcare l'ordine di grandezza di quelli precedentemente calcolati nell'analisi pre-rischio valutario. Una volta fatto ciò, applicando l'approccio bayesiano, è possibile combinare questi rendimenti con le view dell'asset manager e la relativa matrice di confidenza (già calcolate precedentemente), in modo da determinare le coppie di rendimento-rischiosità di equilibrio secondo Black & Litterman. La tabella seguente riporta i dati appena citati:

Tabella 28 - Rendimenti e rischi di equilibrio di B&L post rischio valutario

| Indice            | Rendimenti B&L | Deviazione standard B&L |
|-------------------|----------------|-------------------------|
| <b>ASX 200</b>    | 0,000350050    | 0,002325441             |
| <b>CAC 40</b>     | 0,002230057    | 0,000792738             |
| <b>DAX</b>        | 0,003130810    | 0,001340292             |
| <b>DOW 30</b>     | 0,002922673    | 0,001387320             |
| <b>FTSE 100</b>   | 0,002978781    | 0,001531930             |
| <b>FTSE MIB</b>   | 0,003470745    | 0,002155246             |
| <b>JSE TOP 40</b> | 0,000047533    | 0,003359512             |
| <b>NIKKEI 225</b> | 0,001406128    | 0,002160786             |
| <b>TSX</b>        | 0,001951982    | 0,001837966             |
| <b>SHANGHAI</b>   | 0,001026978    | 0,002679573             |

Da come ci si aspettava i rendimenti di equilibrio risultano maggiori rispetto a quelli impliciti, dovuto al fatto che una parte è da imputare alle view espresse dal manager sui trend futuri delle performance di borsa. In generale la situazione sembra analoga alla casistica precedente, come se il modello fosse in grado di assorbire abbastanza l'effetto del rischio di cambio, ma un appunto va fatto sull'indice sudafricano: rispetto all'analisi precedente, dove il rendimento era negativo, in questo caso esso risulta essere, se pure prossimo a zero, positivo; il suo ordine di grandezza così effimero rispecchia i fondamenti del modello, infatti per quegli indici per i quali non sono state espresse view i rendimenti sono inferiori o pressoché nulli e influenzati dalla correlazioni con gli altri asset. Tutto ciò è un'ulteriore prova del fatto che tale modello risulti essere abbastanza robusto da non farsi, probabilmente, influenzare a tal punto dal rischio di tasso di cambio, diversamente da quanto accadeva nel modello di Markowitz.

Per avere una visione ulteriormente approfondita e dare un giudizio completo rispetto alla casistica precedente, è necessario visualizzare il vettore di composizione del portafoglio di seguito riportato:

Tabella 29 - Quote di portafoglio di B&L post rischio valutario

|                   | Quote di composizione | Allocazione |
|-------------------|-----------------------|-------------|
| <b>ASX 200</b>    | 0,000133044           | Buying      |
| <b>CAC 40</b>     | 0,386840074           | Buying      |
| <b>DAX</b>        | 0,088800634           | Buying      |
| <b>DOW 30</b>     | 0,204975758           | Buying      |
| <b>FTSE 100</b>   | 0,11282277            | Buying      |
| <b>FTSE MIB</b>   | 0,068359325           | Buying      |
| <b>JSE TOP 40</b> | 0                     | No Buying   |
| <b>NIKKEI 225</b> | 0,034847795           | Buying      |
| <b>TSX</b>        | 0,090159427           | Buying      |
| <b>SHANGHAI</b>   | 0,013061174           | Buying      |

La prima cosa che cattura l'attenzione è che così come esattamente accadeva prima dell'inserimento del rischio di tasso di cambio, anche in questa circostanza il modello suggerisce di non allocare nessuna liquidità nell'indice di Johannesburg e una quota davvero minoritaria nell'indice australiano: questo sta a ricalcare nuovamente come i fondamenti del modello funzionano e soprattutto come questo riesca ad assorbire lo shock di tasso limitandone l'azione di disturbo nell'asset allocation. L'ulteriore grafico a torta che si riporta di seguito ci serve ulteriormente per comprendere come è variata l'allocazione della ricchezza rispetto al caso pre-rischio:

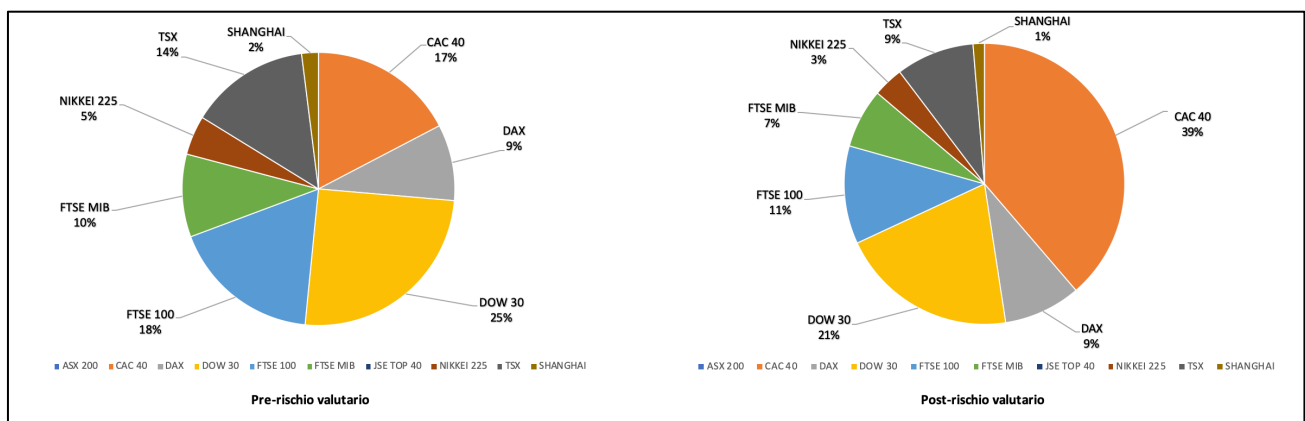


Figura 43 - Composizione portafoglio di B&L nell'analisi pre e post rischio valutario

L'allocazione della ricchezza nei vari asset è pressoché la stessa: ciò che muta particolarmente è il maggiore investimento nell'indice di Parigi nel momento in cui entra in gioco l'Exchange rate; un cambio di tendenza che fa presagire come l'investitore, in base anche alle ultime vicende geopolitiche, avverta l'indice come un "porto sicuro" su cui attingere un maggiore profitto rispetto agli altri asset, sulla base delle sue aspettative. Per il resto è coerente la scelta di quote minoritarie per quanto riguardano le borse asiatiche, per via delle view negative che il manager ha avanzato, causa tensioni con gli USA.

Non solo: il portafoglio così costituito presenta rispettivamente una combinazione rendimento-rischio del 0,25% e del 0,36%, contro i valori del 0,26% e 0,42% dell'analisi pre-rischio. Questi dati stanno a dimostrare come il modello di Black & Litterman sia a tal punto robusto che riesce ad assorbire lo shock di rischio di tasso di cambio, mantenendo difatti inalterato il tandem rendimento-rischio, facendo mutare intelligentemente la composizione di portafoglio (basata sempre sulle view del manager), in asset che risultano essere più prolifici o meglio "sicuri" nel momento in cui subentrano fattori di disturbo esogeni. Infine un'ulteriore differenza che dimostra nuovamente la debolezza del modello di Markowitz rispetto a quello di B&L lo dimostra il fatto che in entrambi i casi, dopo l'analisi post-rischio valutario, se nel primo modello non era possibile individuare un portafoglio ottimo di mercato per via delle eccessive oscillazioni che il tasso di cambio portava, rendendo negativi i valori di quest'ultimo, nel secondo caso questo problema viene praticamente assorbito dal modello, facendo ridurre al minimo l'incertezza dovuta al rischio di tasso.

# Conclusioni

La trattazione appena conclusasi, si prefiggeva l'obiettivo di andare ad analizzare i due modelli principali in ambito di asset allocation (Markowitz e Black & Litterman), utilizzando come tipologia di asset 10 indici borsistici mondiali. Inoltre l'analisi ha riguardato anche lo studio e valutazione della robustezza degli stessi, nel momento in cui si è andato a considerare lo shock del rischio di tasso di cambio, osservandone l'impatto che quest'ultimo ha avuto sulla costruzione del vettore di portafoglio in entrambi i modelli.

Infatti come riportato da verofinanza.it (verafinanza, 2019) “nonostante l'importanza scientifica che riveste il modello di Markowitz per tutta la materia finanziaria, il suo utilizzo pratico nella realtà da parte degli investitori è stato veramente contenuto. La sua validità è messa in discussione per due ragioni:

- La stima dei rendimenti attesi per tutti gli  $N$  asset è richiesta come input;
- I risultati dell'analisi media-varianza sono altamente sensibili alle assunzioni sui rendimenti utilizzati.

Riguardo al primo problema, non solo i rendimenti attesi sono particolarmente difficili da stimare, ma gli investitori posseggono previsioni dettagliate solo con riferimento a pochi titoli o mercati. Pertanto essi non possono far altro che affidarsi ai rendimenti storici che, chiaramente, non consentono una efficiente previsione dei rendimenti futuri. Per quanto riguarda il secondo problema, il modello non offre dei risultati che possano essere considerati veramente affidabili dato che massimizza l'errore di stima degli input, portando a sovrastimare quei titoli che presentano un elevato rendimento atteso, basso rischio e bassa correlazione con gli altri titoli. L'effetto di questo problema si nota nella composizione del portafoglio finale, che risulta essere molto concentrata in pochi asset. Inoltre il modello, oltre a non essere affidabile nei risultati, non è nemmeno affidabile nel tempo dato che è sufficiente una piccola variazione negli input per ottenere come output una media, una varianza e una composizione del portafoglio ottimo completamente diversi da quelli calcolati precedentemente.

Invece il modello di Black & Litterman riesce a superare i problemi di “input intensity”, concentrazione in pochi titoli e poca intuitività dei portafogli derivanti dall'applicazione del modello di Markowitz. Nel modello viene utilizzato un approccio bayesiano per combinare le views soggettive

di un investitore, riguardo ai rendimenti attesi di uno o più titoli, con il vettore dei rendimenti attesi (la distribuzione a posteriori).

Come si è visto quindi, il modello di Markowitz risulta essere meno robusto e quindi più facilmente influenzabile nel momento in cui intervengono variabili di disturbo esogene: infatti quello che hanno mostrato i risultati è stato, nel momento in cui si è considerato il rischio di cambio, un appiattimento della frontiera efficiente verso rendimenti davvero esigui e soprattutto l'incapacità da parte del modello di individuare un portafoglio ottimo di mercato a partire dai titoli risk-free. In aggiunta si è osservato che tra tutti i portafogli efficienti della frontiera, tra i quali può attingere l'investitore, un trend nell'investire in soli pochi asset (nel nostro caso indici) all'aumentare dei rendimenti: questo trend non fa altro che rimarcare la fragilità del modello di Markowitz e la sua elevata sensibilità alle oscillazioni nei confronti dei rendimenti.

Viceversa il modello di Black & Litterman, tra la fase di costruzione del portafoglio pre e post rischio valutario, ha mostrato tutta la sua robustezza, in quanto non solo i rendimenti attesi, stimati tramite l'approccio bayesiano, sono risultati essere pressoché simili tra le due fasi, ma la stessa cosa si è registrata anche per le quote di composizione del portafoglio, con leggere variazioni dovute sempre all'interferenza del tasso di cambio.

Pertanto quello che ci lascia questa trattazione, non è solo la diversa robustezza e fragilità tra i due modelli nel momento in cui subentrano variabili esogene di disturbo, ma anche le diverse performance (nettamente migliori nel caso di Black & Litterman) per via dei diversi impianti teorici alla base di questi ultimi.

## Bibliografia

- bankpedia. (s.d.). *EFFICIENZA DEI MERCATI FINANZIARI*. Tratto da bankpedia:  
[http://www.bankpedia.org/index.php/it/?option=com\\_content&view=article&id=19918](http://www.bankpedia.org/index.php/it/?option=com_content&view=article&id=19918)
- bankpedia. (s.d.). *EFFICIENZA DEI MERCATI FINANZIARI (ENCICLOPEDIA)*. Tratto da bankpedia:  
<http://www.bankpedia.org/index.php/it/99-italian/e/19919-efficienza-dei-mercati-finanziari-enciclopedia>
- Borsa Italiana. (2017, Giugno). *CHE COS'È L'ASSET ALLOCATION? Il processo con il quale si decide in che modo distribuire le risorse*. Tratto da Borsa Italiana:  
<https://www.borsaitaliana.it/notizie/sotto-la-lente/assetallocation.htm>
- Borsa Italiana. (s.d.). *EFFICIENZA DEL MERCATO*. Tratto da Borsa Italiana:  
<https://www.borsaitaliana.it/borsa/glossario/efficienza-del-mercato.html>
- Castiglione, A. (s.d.). *I principi base della teoria di Markowitz*. Tratto da performance trading:  
[https://www.performancetrading.it/Documents/Uomini/SF\\_I\\_principi\\_base.htm](https://www.performancetrading.it/Documents/Uomini/SF_I_principi_base.htm)
- Consob. (s.d.). *I MERCATI FINANZIARI*. Tratto da Consob: <http://www.consob.it/web/investor-education/i-mercati-finanziari>
- Flavio Santi, M. B. (2013). *Finanza quantitativa con R*. Apogeo.
- ForexWiki. (s.d.). *Quantitative Easing (QE)*. Tratto da (ilsole24ore, 2019):  
<http://www.forexwiki.it/Quantitative-Easing>
- ForexWiki. (s.d.). *Teoria di Markowitz*. Tratto da ForexWiki: <http://www.forexwiki.it/Teoria-di-Markowitz>
- garzantilinguistica. (s.d.). Tratto da garzantilinguistica:  
<https://www.garzantilinguistica.it/ricerca/?q=lag>
- ig. (2019, Gennaio). *La classifica delle principali borse mondiali*. Tratto da ig:  
<https://www.ig.com/it/strategie-di-trading/quali-sono-le-piu-importanti-borse-al-mondo--190103>
- ilsole24ore. (2019, Ottobre). *Bce, conto alla rovescia per il Qe2. I 3 motivi per cui rischia di "creare" deflazione*. Tratto da ilsole24ore: <https://www.ilsole24ore.com/art/bce-conto-rovescia-il-qe2-3-motivi-cui-rischia-creare-deflazione-ACeoLKv>
- ilsole24ore. (2019, Novembre). *Bce, la nuova agenda Lagarde tra falchi, colombe e il tabù del surplus tedesco*. Tratto da ilsole24ore: <https://www.ilsole24ore.com/art/bce-nuova-agenda-lagarde-falchi-colombe-e-tabu-surplus-tedesco-ACxp5sv>
- ilsole24ore. (2019, Novembre). *Bce, la nuova agenda Lagarde tra falchi, colombe e il tabù del surplus tedesco*. Tratto da ilsole24ore: <https://www.ilsole24ore.com/art/bce-nuova-agenda-lagarde-falchi-colombe-e-tabu-surplus-tedesco-ACxp5sv>
- ilsole24ore. (2019, Ottobre). *Brexit, Tusk: i 27 paesi Ue danno l'ok per un rinvio (flessibile) al 31 gennaio*. Tratto da ilsole24ore: <https://www.ilsole24ore.com/art/brexit-l-ue-pronta-concedere-proroga-tre-mesi-regno-unito-ACySawu>
- investimentoinborsa. (2014, Agosto). *Perché Investire Alla Borsa di Toronto*. Tratto da investimentoinborsa: <https://www.investimentoinborsa.com/perche-investire-alla-borsa-di-toronto/>
- investireinborsa. (2019, Gennaio). *Classifica Economie Più Forti Al Mondo*. Tratto da (ig, 2019):  
<https://www.investireinborsa.info/classifica-economie-piu-forti-al-mondo/>
- investopedia. (2019, Aprile). *MSCI All Country World Index (ACWI)*. Tratto da investopedia:  
<https://www.investopedia.com/terms/m/msci-acwi.asp>
- Micocchi, M., & Batista Masala, G. (s.d.). *Manuale di Matematica Finanziaria*. Carocci.
- money.it. (2019, Aprile). *Le medie mobili: cosa sono, come si calcolano e quali sono le più usate*. Tratto da money.it: <https://www.money.it/Le-medie-mobili-cosa-sono-come-si>



New York Times. (2019, Ottobre). *Economy Grew at 1.9% Rate in Quarter, Hit by Trade Fight and Global Weakness*. Tratto da New York Times:  
<https://www.nytimes.com/2019/10/30/business/economy/us-gdp-growth.html>

performance trading. (s.d.). *I principi base della teoria di Markowitz*. Tratto da performance trading: [https://www.performancetrading.it/Documents/Uomini/SF\\_I\\_principi\\_base.htm](https://www.performancetrading.it/Documents/Uomini/SF_I_principi_base.htm)

performance trading. (s.d.). *La teoria dei mercati efficienti*. Tratto da performance trading: [https://www.performancetrading.it/Documents/McAnalisi/McA\\_Mercati\\_efficienti.htm](https://www.performancetrading.it/Documents/McAnalisi/McA_Mercati_efficienti.htm)

performance trading. (s.d.). *La teoria dei mercati efficienti*. Tratto da performance trading: [https://www.performancetrading.it/Documents/McAnalisi/McA\\_Mercati\\_efficienti.htm](https://www.performancetrading.it/Documents/McAnalisi/McA_Mercati_efficienti.htm)

performance trading. (s.d.). *La teoria dei mercati efficienti*. Tratto da performance trading: [https://www.performancetrading.it/Documents/McAnalisi/McA\\_Mercati\\_efficienti.htm](https://www.performancetrading.it/Documents/McAnalisi/McA_Mercati_efficienti.htm)

performance trading. (s.d.). *La teoria "random walk"*. Tratto da performance trading: [https://www.performancetrading.it/Documents/McAnalisi/McA\\_Random\\_Walk.htm](https://www.performancetrading.it/Documents/McAnalisi/McA_Random_Walk.htm)

Santi, F., & Bee, M. (2013). *Finanza quantitativa con R*. Apogeo.

startingfinance. (2017, Ottobre). *È possibile prevedere il mercato? Il Random Walk*. Tratto da startingfinance: [https://www.startingfinance.com/approfondimenti/possibile-prevedere-mercato-random-walk/#\\_ftn1](https://www.startingfinance.com/approfondimenti/possibile-prevedere-mercato-random-walk/#_ftn1)

The Economist. (2019, Ottobre). *America and China are sparring over subsidies*. Tratto da The Economist: <https://www.economist.com/finance-and-economics/2019/10/31/america-and-china-are-sparring-over-subsidies>

treccani. (s.d.). Tratto da treccani: <http://www.treccani.it/vocabolario/insider/>

treccani. (s.d.). Tratto da treccani: [http://www.treccani.it/enciclopedia/random-walk\\_%28altro%29](http://www.treccani.it/enciclopedia/random-walk_%28altro%29)

unibg. (s.d.). Tratto da unibg: <http://www00.unibg.it/dati/corsi/52034/30582-Professor%20Fumagalli%20-%202°%20e%203°%20lezione%20-%20La%20teoria%20della%20selezione%20di%20portafoglio%20di%20Markowitz.pdf>

verafinanza. (2019, Luglio). *Il modello Black e Litterman e il portafoglio ottimale*. Tratto da verafinanza: <https://www.verafinanza.com/il-modello-black-e-litterman-e-il-portafoglio-ottimale/>

verafinanza. (2019, Luglio). *Il modello Black e Litterman e il portafoglio ottimale*. Tratto da verafinanza: <https://www.verafinanza.com/il-modello-black-e-litterman-e-il-portafoglio-ottimale/>