POLITECNICO DI TORINO

DIPARTIMENTO DI ING. MECCANICA E AEROSPAZIALE Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

Validazione di un codice CFD per flussi laminari ipersonici





Relatore:

Domenic D'Ambrosio

Tutor aziendali:

Vincenzo Mareschi

Cosimo Chiarelli

Marco Cisternino

Candidato:

Riccardo Milano

Dicembre 2019

1.1 SOMMARIO

1.1	Sommario	1
1.2	Abstract	6
2	CAPITOLO 1: INTRODUZIONE AL FLUSSO IPERSONICO	7
2.1	Entropy layer	7
2.2	Interazione viscosa	8
2.3	Effetti delle alte temperature	9
2.4	Flussi a bassa densità - effetti della rarefazione	10
2.5	Gas termicamente e caloricamente perfetto	11
2.6	Miscele di reagenti chimici in gas termicamente perfetti	12
2.7	Composizioni dei gas reagenti all'equilibrio	13
2.8	Calore di reazione	14
2.9	Proprietà termodinamiche di una singola specie chimica	15
2.10	Proprietà termodinamiche di reagenti gassosi chimicamente in equilibrio	18
2.11	Non equilibrio chimico e vibrazionale	20
2.	11.1 Non equilibrio vibrazionale	21
2.	11.2 Non equilibrio chimico	23
2.12	Equazioni di governo per un flusso inviscido in equilibrio ad alta temperatura	26
2.	12.1 Onda d'urto normale in flussi in equilibrio ad alta temperatura	27
2.13	Equazioni di governo per flusso inviscido ad alta temperatura in non-equilibrio	29
2.14	Flusso congelato, in equilibrio e non	31
2.15	Flusso viscoso ad alta temperatura	32
2.16	Aerodinamica ipersonica non viscosa	34
2.	16.1 Onde d'urto attaccate e staccate	34
2 17	Vojasli suparsonici o ondo d'urto	25
4.1 /		55
2.18	Relazioni degli urti normali per numeri di Mach molto alti	36
2.19	Relazioni per l'urto obliquo a valori di Mach molto alti	37
2.20	Flusso a valle di un urto obliquo: flusso supersonico o subsonico, urto attaccato o staccato?	38

1

2.21	Calcolo dei valori limite per $M \to \infty$	39
2.22	Flussi supersonici 2D asimmetrici	39
2.23	Urti obliqui deboli e forti	40
2.24	Il problema del corpo arrotondato ipersonico	41
2.24	4.1 Fisica dei flussi ipersonici sul corpo tozzo: comportamento della linea sonica	41
2.24	4.2 Fisica dei flussi ipersonici sul corpo tozzo: stagnazione e entropia massima delle linee di corrente	2 42
2.25	Correlazioni per la forma dell'urto ipersonico	42
2.26	Variazione del numero di Reynolds attraverso l'urto	43
2.27	Equazioni di governo per flusso inviscido (equazioni di Eulero)	44
2.28	Principio di indipendenza del numero di Mach di Oswatitsch	45
2.29	Simulazione numerica di flussi ipersonici inviscidi	47
2.30	Estensione del problema al campo di flussi 2D assialsimmetrici	51
2.31	Aerodinamica ipersonica viscosa	53
2.3	1.1 Equazioni di governo	53
2.32	Condizioni al contorno	54
2.33	Proprietà di trasporto (per un gas non reattivo)	55
2.33	3.1 Viscosità dell'aria $\mu = [kg/ms]$	55
2.33	3.2 Conduttività termica $k = [W/mk]$	55
2.33	3.3 Variazione del numero di Prandtl con la temperatura	56
2.34	Equazioni per lo strato limite per flussi compressibili	56
2.35	Self-Similar Solution	59
2.36	La trasformata di Lees-Dorodnistyn	59
2.37	Coefficiente di attrito e trasferimento di calore	61
2.38	Equazioni dello strato limite compressibile: caso lamina piana	62
2.39	Caso lamina piana	63
2.39	P.1 Effetto del numero di Mach	63
2.39	9.2 Effetti della temperatura di parete	64
2.39	9.3 Sforzi di taglio e coefficiente di attrito a parete	64
2.39	9.4 Trasferimento di calore a parete e numero di Stanton	65
2.40	Temperatura di parete adiabatica	65
2.41	Radiation Cooled Surfaces	66
2.42	Possibili stati termici di una superficie	67 2

2.43	Parete a radiazione-adiabatica	67
2.44	Punto d'arresto	68
2.45	Strati limite ipersonici <i>non-similar</i>	72
2.46	Il metodo della temperatura di riferimento	73
2.47	Strato limite ipersonico turbolento	74
2.48	Transizione Laminare-Turbolento nei flussi ipersonici	75
2.4	8.1 Confronto tra cono e transizione planare turbolenta	78
2.4	8.2 Effetti della curvatura del naso	79
2.4	8.3 Instabilità della linea di attacco	79
2.4	8.4 Contaminazione della linea di <i>attachment</i>	79
2.4	8.5 Effetto della tridimensionalità del flusso: <i>cross flow instability</i>	80
2.4	8.6 Effetto della interazione tra urto e strato limite	80
2.4	8.7 Effetti delle alte temperature con un gas reattivo	81
2.4	8.8 Irregolarita superficiali	81
2.4	8.9 Instabilità di Gortler	81
2.4	8.10 Kilaminarizzazione 8.11 Eoromoni embienteli	82
2.4	o.11 Fenomeni ambientan	82
2.49	Predizione della stabilità e della transizione di flussi turbolenti	83
2.50	Interazioni ipersoniche viscose	83
2.5	0.1 Interazioni di pressione	83
2.5	0.2 Interazione tra urto e strato limite	88
3	CAPITOLO 2: ANASTASIA	92
3.1	Introduzione Anastasia	92
3.2	Introduzione alle tecniche multigrid	93
3.2	.1 Multigrid features	98
	3.2.1.1 Multigrid come risolutore lineare iterativo	98
	3.2.1.2 Multigrid come risolutore per problemi differenziali	98
-	3.2.1.3 Efficienza	98
-	3.2.1.4 Generalità	98
	3.2.1.5 Ottimizzazione vs robustezza	99
	3.2.1.6 Adattività	99
	3.2.1.7 Caratteristiche parallele	99
3.2	.2 Multigrid method	100
3.3	FAS	107
3.4	Limiter	109
3.5	Schema risolutivo	110
3.6	Griglia	111
		3

3.7 File Input.dat	113
3.8 File bc.dat	114
3.9 File VTK	115
3.10 File CFD_LOG	115
4 CAPITOLO 3: TEST E ANALISI DATI	116
4.1 Test 1 4.1.1 Analisi dati	116 118
4.2 Test 2 4.2.1 Analisi dati	121 121
4.2.1.1 Mach=2	122
4.2.1.2 Mach=3	124
4.2.1.3 Mach=4	126
4.3 Test3	128
4.3.1 Prima Run	129
4.3.2 Seconda Run	131
4.3.3 Terza Run	133
4.3.4 Quarta Run	136
4.4 Test 4	139
4.4.1 Prima Run	142
4.4.1.1 Griglia A	142
4.4.1.2 Griglia B	
4.4.1.3 Griglia C	145
4.4.1.4 Griglia D	146
4.4.2 Seconda Run	147
4.4.2.1 Griglia A2	147
4.4.2.2 Griglia B2	148
4.4.3 Terza Run	149
4.5 Test 5	150
5 CAPITOLO 4	153
5.1 Conclusioni	153
5.2 Ringraziamenti	154
6 APPENDICI	155
6.1 Esempio di file di Input.dat	155
6.2 Esempio di file bc.dat	157

4

6.3	Esempio di file CFD_LOG.dat	158
7	INDICI FIGURE, GRAFICI E TABELLE	160
7.1	Indice delle figure	160
7.2	Indice dei grafici	162
7.3	Indice delle tabelle	163
8	BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA	164
8.1	Bibliografia	164
8.2	Sitografia	165

1.2 Abstract

Ormai le tecniche CFD vengono impiegate quotidianamente nei settori dell'ingegneria per le analisi fluidodinamiche. Prima di poter essere usato o commercializzato ogni nuovo software deve superare una campagna di test in cui vengono confrontati i risultati computazionali con quelli reali per validarne l'efficacia nella predizione delle grandezze del flusso.

L'obiettivo di questa tesi è stato proprio quello di svolgere diverse simulazioni, più o meno complesse, per valutare l'efficacia del codice nel lavorare con flussi laminari ipersonici. Come prima è stato necessario ricercare in bibliografia dei dati sperimentali comparabili.

Prima di vedere i test svolti sono state inserite due introduzioni teoriche. La prima è relativa ai fenomeni fisici mentre la seconda è un'introduzione ai metodi multigriglia i quali sono stati implementati nel nostro software. Per l'introduzione teorica è stato preso come riferimento il corso di "*Hypersonic Aero-dynamics*" tenuto dal relatore e professore Domenic D'Ambrosio presso il Politecnico di Torino. Per quanto concerne la parte delle tecniche multigriglia e il funzionamento del software si è seguito il testo fondamentale relativo a tali tecniche: "*Multigrid Method*" ad opera di Ulrich Trottenberg, Cornelis Oosterlee e Anton Schuller. Sono presenti alcuni paragrafi con una spiegazione dei principali parametri di input così da comprendere come operare con questo codice.

Al termine di queste presentazioni si giunge ai report dei test veri e proprio. I test svolti sono cinque, svolti su geometrie e flussi diversi. Nel primo test si è eseguita l'analisi su una geometria abbastanza semplice, un cilindro con una semisfera sull'estremità controvento, per diversi valori di mach, ma sempre ad incidenza nulla e con parete adiabatica. Il secondo era sempre un test adiabatico, ma in questo caso la geometria è quella di un proiettile di artiglieria a diversi valori di mach in campo supersonico e con diversi valori di incidenza, inoltre il corpo è stato fatto ruotare attorno al suo asse principale per poter prendere le componenti di pressione tutt'attorno al corpo. Il terzo test è stato svolto su una rampa di compressione con un flusso che è possibile considerare bidimensionale così da poter valutare l'applicazione 2D del codice. In quest'ultimo test il flusso a parete era isotermo consentendo, pertanto, di confrontare la componente di calore a parete; erano forniti anche i valori degli sforzi viscosi consentendo un controllo anche su questa misura. Come quarto test, per valutare ulteriormente l'analisi dei flussi di calore, si è scelto un test isotermo tridimensionale eseguendo vari test con griglie diverse per cercare la dimensione ideale delle celle a parete per valutarne i flussi. I test eseguiti non sono stati soddisfacenti non fornendo andamenti simili a quelli di riferimento. Come ultimo test si è scelto di eseguirne uno, per testare anche i tool per lo studio dei fenomeni chimici, con dei dati relativi ad un caso non catalitico riguardante IXV. Gli ultimi due test non hanno dato dei risultati attendibili, sarebbero quindi necessari ulteriori prove per controllare se il problema è legato alle griglie o se fosse insito nel programma.

2 CAPITOLO 1: INTRODUZIONE AL FLUSSO IPERSONICO



FIGURA 1.2.1: FENOMENI FISICI CARATTERISTICI DEL FLUSSO IPERSONICO

Dal momento che nella presente tesi ci si è occupati della validazione di un codice di calcolo in grado di risolvere flussi laminati ipersonici è doveroso un approccio teorico iniziale per descrivere le principali caratteristiche del campo di moto ipersonico. L'introduzione teorica è stata estrapolata dalle slide del corso "*Hypersonic Aerodynamics*" tenuto dal prof. Domenic D'Ambrosio presso il Politecnico di Torino.

2.1 ENTROPY LAYER



FIGURA 2.1.1: ENTROPY LAYER

Considerando un corpo con un naso smussato, come quello riportato nella figura a lato, si può notare come a velocità ipersonica si abbia una ridotta distanza tra l'urto curvo e il corpo e una forte curvatura dell'urto.

A causa di questa curvatura si hanno diversi salti di entropia per particelle differenti. Per questa ragione la regione a valle dell'urto non presenta un flusso omoentropico, ma uno isentropico. Il risultato è la presenza di uno strato ad entropia variabile (*entropy layer*) che si sviluppa lungo il corpo e si fonde insieme allo strato limite (*boundary layer*). Lungo il corpo i due strati aumentano il loro spessore ed è possibile arrivare alla

condizione in cui lo strato limite inglobi quello entropico.

Sono presenti elevati gradienti di pressione ed è una zona a forte vorticità in accordo al teorema di $Crocco^1$.

2.2 INTERAZIONE VISCOSA

Un flusso ipersonico ha un'elevata energia cinetica, parte di questa viene trasformata in energia interna quando il gas viene rallentato all'interno dello strato limite dagli effetti viscosi. Questo causa un incremento della temperatura all'interno dello strato limite.



FIGURA 2.2.1: PROFILO DI TEMPERATURA IN UNO STRATO LIMITE IPERSONICO

Un aumento della temperatura provoca un incremento della viscosità dinamica del gas che, a sua volta, provoca un inspessimento dello strato limite: inoltre, la pressione costante nella direzione normale allo strato limite e un aumento della temperatura comportano una riduzione della densità del flusso². La quale comporta un ulteriore accrescimento dello strato limite per poter mantenere la portata in massa costante.

Per queste ragioni lo strato limite cresce più velocemente in un flusso ipersonico piuttosto che in uno a bassa velocità³.

Lo spessore dello strato limite ipersonico ha un forte effetto sul flusso inviscido esterno ad esso poiché "vede" un volume maggiore di quella del corpo reale. La forte deviazione del flusso inviscido per via dello strato limite fornisce un feedback sullo stesso.

Questa stretta correlazione tra flusso interno ed esterno allo strato limite viene chiamato interazione viscosa.

L'interazione viscosa può avere forti effetti sulla distribuzione di pressione all'interno dello strato limite la quale influenza direttamente la portanza, la resistenza e la stabilità di un velivolo ipersonico.

Inoltre, gli effetti dell'interazione viscosa incrementano il trasferimento di calore e gli sforzi di attrito a parete.

Un'altra conseguenza legata allo spessore dello strato limite è la possibilità che si fonda con l'onda d'urto rendendo impossibile lo studio separato del flusso esterno inviscido con quello interno allo strato limite.

 $[\]vec{V} \times \nabla \times \vec{V} = -T \nabla S$

 $^{^{2}\}rho = \frac{p}{p}$

 $p = \frac{1}{RT}$ $^{3} \delta \alpha \frac{M_{\alpha}^{2}}{\sqrt{Re}}$

2.3 EFFETTI DELLE ALTE TEMPERATURE

Nei flussi ipersonici le temperature a valle dell'urto sono molto elevate, sia all'interno dello strato limite che fuori da esso. All'interno dello strato limite la dissipazione viscosa rilascia calore.

La principale conseguenza delle alte temperature è l'elevata velocità di trasferimento di calore verso la superficie. Il progetto del sistema di protezione termica (TPS⁴), che isola l'interno del veicolo spaziale dalle elevate temperature presenti all'esterno, è un elemento chiave del design dell'intero velivolo.

Le elevate temperature possono eccitare lo stato vibrazionale delle molecole del gas e possono portare alla loro dissociazione e, infine, alla ionizzazione delle stesse.

Per queste ragioni, un flusso ipersonico è spesso un flusso con reazioni chimiche al suo interno.



FIGURE 1.17 High-temperature shock layer.



I fenomeni termochimici possono influenzare la portanza, la resistenza e i momenti nei velivoli ipersonici. Un tipico esempio della loro importanza è la valutazione a progetto dell'angolo dei flap nel rientro in atmosfera dello Space Shuttle il quale, senza tenere in considerazione gli effetti del non equilibrio chimico, forniva un angolo più piccolo rispetto a quello realmente necessario in tale fase.

Un altro effetto delle temperature molte elevate è il riscaldamento radiativo dal flusso al corpo. Per il rientro in atmosfera terrestre non è molto importante per velocità inferiori agli 8 km/s e ad altitudini inferiori ai 100 km.

Includere gli effetti termochimici è fondamentale nello studio dei flussi ipersonici per le ragioni appena esposte, l'assunzione di gas perfetto con γ^5 costante non è più valida per questo tipo di casi. Quando le temperature crescono il comportamento del gas diventa non ideale.

In particolare, l'energia vibrazionale delle molecole viene eccitata perciò i calori specifici variano e, di conseguenza, il loro rapporto diventa funzione della temperatura. Per l'aria questo effetto diventa importante superata la temperatura di 800 K.

⁴ Thermal Protection System

⁵ Rapporto tra calori specifici

La temperatura alla quale la chimica diventa importante dipende anche dalla pressione alla quale si trova il gas.



FIGURA 2.3.2: (A SINISTRA) GRAFICO CON L'ANDAMENTO DELLA TEMPERATURA NELLO *SHOCK LAYER*, (A DESTRA) COMPOSIZIONE DELL'ARIA IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO IN FUNZIONE DELLA TEMPERATURA PER $p = 10^{-2}$ ATM

L'aria è una miscela di gas composta principalmente da molecole biatomiche ovvero O_2 e N_2 . Alla pressione di 1 atm, l'ossigeno inizia la dissociazione intorno ai 2000 K e le molecole di ossigeno saranno completamente dissociate intorno ai 4000 K, a questa temperatura inizia anche la dissociazione dell'azoto la quale si completa una volta raggiunti i 9000 K. La combinazione dei ossigeno e azoto genera ossido d'azoto (*NO*). Superati i 9000 K si verifica il processo di ionizzazione degli atomi di azoto e ossigeno con la conseguente liberazione di elettroni, una conseguenza della ionizzazione del gas è il black-out delle comunicazioni che si verifica nella fase di rientro.

2.4 FLUSSI A BASSA DENSITÀ - EFFETTI DELLA RAREFAZIONE

La dinamica dei gas classica è basata sull'assunzione che i gas possano essere trattati come un continuo sebbene siano composti da molecole individuali. L'ipotesi di continuo è accettabile fintanto che il libero cammino medio⁶ delle tra le molecole si mantiene molto piccolo rispetto la lunghezza caratteristica del fenomeno in analisi. Il rapporto tra queste due grandezze prende il nome di **numero di Knudsen**⁷.

Quando la densità del gas si riduce, cosa che avviene con il crescere della quota, il libero cammino medio aumenta e con esso anche il Kn, quando il valore del Kn è dell'ordine di 0.1 o maggiore cade l'ipotesi di continuo e la dinamica del gas deve esser trattata usando la teoria cinetica dei gas.

⁷ $Kn = \lambda/L$



FIGURA 2.4.1: NUMERO DI Kn_{∞} in funzione dell'altitudine per A) il Sänger *lower stage L* \approx 80*m*, b) lo Space shuttle *L* \approx 30*m*, c) l'X-38 *L* \approx 8*m*, d) un naso conico *D* \approx 0.3*m*, e) una presa di Pitot *D* \approx 0.01*m*, f) un foro per le misurazioni *D* \approx 0.001*m*

È possibile usare il *Kn* per distinguere i seguetni regimi di flusso:

•	Continuo	$Kn \leq 0.01$
•	Continuo con slip effect	$0.01 \leq Kn \leq 0.1$
•	Molecole libere disturbate	$0.1 \le Kn \le 10$
•	Molecole libere	Kn > 10

Per flusso continuo con *slip effect* si intende un regime dove le equazioni di governo sono ancora simili a quelle di Navier-Stokes, ma le condizioni di velocità e temperatura a parete sono differenti da quelle tipiche del flusso continuo⁸.

2.5 Gas termicamente e caloricamente perfetto

Un gas perfetto obbedisce alla legge dei gas perfetti⁹ e presenta valori dei calori specifici costanti. Un gas che rispetta la legge dei gas perfetti è chiamato gas termicamente perfetto, uno che ha i calori specifici costanti è un gas caloricamente perfetto. Un gas ideale è uno che presenta entrambe queste caratteristiche.

Un gas termicamente perfetto può essere modellizzato come un gas i cui costituenti non hanno un'estensione spaziale e non sono soggetti a forze intermolecolari fatta eccezione per le collisioni tra molecole. Questo avviene quando le molecole sono sufficientemente distanti per la maggior parte del tempo ed è necessario che pressione e densità non siano troppo elevate. In questo tipo di gas il c_p e il c_v sono variabili e sono funzioni della sola temperatura. Gradienti di energia interna e nell'entalpia sono collegati a variazioni di temperatura.

$$de = c_v dT \to e_2 - e_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_v(T) dT$$
 : $dh = c_p dT \to h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT$

 $^{9} p = \rho RT$

⁸ La velocità a parete non è più nulla e la temperatura del flusso a parete è differente da quella della superficie.

Se, al contrario, lo spazio tra le molecole è comparabile al raggio di azione delle forze intermolecolari sono presenti gli effetti delle forze di van der Waals e l'equazione di stato diventa $p = \rho R T Z(\rho, T)$ dove Z è il coefficiente dei gas reali ed è una funzione dei coefficienti viriali¹⁰ B,C,D, etc.

$$Z(\rho, T) = 1 + \rho B(T) + \rho^2 C(T) + \rho^3 D(T) + \cdots$$

Gli effetti di van der Waals sono presenti a temperature abbastanza basse e pressioni sufficientemente elevate. Durante il volo ipersonico, le condizioni del flusso sono tali da non rendere molto importanti tali effetti. Diversamente, i livelli di pressione in un serbatoio di un impianto ipersonico di test al suolo, possono essere molto elevati.

2.6 MISCELE DI REAGENTI CHIMICI IN GAS TERMICAMENTE PERFETTI

Di seguito considereremo miscele di gas reagenti i cui componenti seguono la legge dei gas perfetti.

È necessario fare una distinzione preliminare tra equilibrio e non-equilibrio chimico. Il non equilibrio chimico si ha quando i reagenti stanno modificando i legami chimici in risposta alla variazione delle condizioni ambientali, una volta che raggiunta la composizione di equilibrio le reazioni si interrompono.

Perciò, in equilibrio, la composizione delle miscele è funzione della temperatura e della pressione:

$$y_i = y_i(T, p)$$

mentre, in non equilibrio, è anche funzione del tempo:

$$y_i = y_i(T, p, t)$$

 y_i è la frazione in massa, ovvero il rapporto tra la massa della specie i-esima e la massa totale della miscela.

Se si immagina un volume di fluido in movimento in un campo di flusso in cui pressione e temperatura sono variabili da punto a punto, si può dire che la composizione della miscela dipenda dalla "storia" del flusso.

Si è già detto che, nel caso di un gas con al suo interno una sola specie, l'energia interna e_i e l'entalpia h_i (il pedice *i* indica la specie i-esima) sono funzioni della sola temperatura e si comporta come un gas termicamente perfetto, ma nel caso in cui si tratti di una miscela di diverse specie chimiche diventano anche funzione della frazione in massa di ogni specie all'interno della miscela.

$$h, e, c_p, c_v = f(T, y_1, y_2, \dots, y_{NS})$$

L'equazione di stato dei gas perfetti è ancora p v = R T, ma R è variabile in questo caso e dipende dalla composizione della miscela per via della sua dipendenza dalla massa molecolare.

$$\mathbf{R} = \frac{\tilde{R}}{M} = \tilde{R} \sum_{i=1}^{Ns} \frac{y_i}{M_i} = \tilde{R} \sum_{i=1}^{Ns} q_i$$

 q_i indica il numero di moli della specie i-esima per unità di massa, M_i è la massa molecolare delle specie e \tilde{R} è la costante universale dei gas. In condizioni di equilibrio, avendo che $y_i = y_i(T,p)$, si hanno h, e, c_p, c_v funzioni delle sole temperature e pressioni in gioco.

¹⁰ "In meccanica classica, il teorema del viriale è una proposizione che lega la media temporale dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di un sistema stabile di N particelle, e che ha importanti risvolti in diverse branche della fisica." https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema del viriale

2.7 Composizioni dei gas reagenti all'equilibrio

Per ogni reazione chimica si può definire una costante di equilibrio¹¹ in forte dipendenza dalla temperatura. Il suo valore può essere ottenuto sperimentalmente per una certa reazione chimica e può sempre essere calcolata dalla termodinamica statistica. Una volta determinata tale costante si può valutare la condizione di equilibrio della composizione della miscela di gas.

Considerando che siano presenti 17 reazioni chimiche nell'aria:

- 5 reazioni di dissociazione per l'ossigeno molecolare
- 5 reazioni di dissociazione per l'azoto molecolare
- 5 reazioni di dissociazione per l'ossido di azoto
- 2 reazioni di trasformazione che possono avere un ruolo importante in determinate condizioni.

Se si applica l'equazione per la determinazione della costante di equilibrio riportata nella nota a piè di pagina si ottengono le seguenti 5 equazioni algebriche:

•
$$\frac{p_0^2}{p_{0_2}} = K_{p,1} = K_{p,2} = K_{p,3} = K_{p,4} = K_{p,5} = K_{p,0_2 diss}$$

•
$$\frac{p_{\tilde{N}}}{p_{N_2}} = K_{p,6} = K_{p,7} = K_{p,8} = K_{p,9} = K_{p,10} = K_{p,N_2 diss}$$

•
$$\frac{p_N p_O}{p_{NO}} = K_{p,11} = K_{p,12} = K_{p,13} = K_{p,14} = K_{p,15} = K_{p,NOdiss}$$

• $\frac{p_N p_O}{p_N p_O_2} = K_{p,11}$

•
$$\frac{p_N p_{02}}{p_N o p_0} = K_{p,16}$$
•
$$\frac{p_N p_N o}{p_N p_N o} = K$$

•
$$\frac{p_N p_N o}{p_{N_2} p_o} = K_{p,17}$$

È possibile dimostrare come le ultime due equazioni siano ottenibili direttamente dalle prime tre cosicché solo tre equazioni siano indipendenti.

Infatti, considerando le seguenti reazioni chimiche:

$$\begin{array}{l} NO + O = N + O + O \\ N + O + O = N + O_2 \end{array} => NO + O = N + O_2 \end{array}$$

Si ottiene la reazione tra la quarta equazione, la prima e la terza:

$$\frac{\frac{p_{N}p_{O}}{p_{NO}}}{\frac{p_{O}^{2}}{p_{O_{2}}}} = \frac{1}{K_{p,O_{2}diss}} = > \frac{\frac{p_{N}p_{O_{2}}}{p_{NO}p_{O}}}{\frac{p_{NO}p_{O}}{p_{O}}} = K_{p,16} = \frac{\frac{p_{N}p_{O}}{p_{NO}}}{\frac{p_{O}}{K_{p,11}}} \frac{\frac{p_{O}}{p_{O}}}{\frac{p_{O}}{K_{p,11}}} = \frac{K_{p,NOdiss}}{\frac{1}{K_{p,O}}}$$

Le relazioni rimanenti possono essere usate per ottenere la composizione della miscela rappresentando due ulteriori vincoli che devono essere soddisfatti. Il primo è:

$$p_0 + p_N + p_{N0} + p_{O_2} + p_{N_2} = p$$

Ovvero la pressione è pari ai contributi delle pressioni delle singole specie.

¹¹ $K_p(T) = \prod_i^{Ns \ reagenti} p_i^{v_i}$

Il secondo è legato al fatto che il numero di nuclei di azoto e ossigeno nella miscela deve rimanere costante non avendo reazioni nucleari.

$$N_{O} = N_{A} (2q_{O_{2}} + q_{O} + q_{NO})$$
$$N_{N} = N_{A} (2q_{N_{2}} + q_{N} + q_{NO})$$

 N_0 e N_N sono il numero di nuclei per unità di massa di ossigeno e azoto, mentre, N_A è il numero di Avogadro.

Dal momento che il numero di N_0 e N_N deve rimanere costante, la stessa cosa deve valere anche per il loro rapporto, applicando la legge di stato dei gas perfetti per ogni specie chimica¹² si ottiene equazione che chiude il sistema:

$$\frac{N_O}{N_N} = \frac{2p_{O_2} + p_O + p_{NO}}{2p_{N_2} + p_N + p_{NO}}$$

La composizione di equilibrio così ottenuta è funzione delle p che a loro volta sono funzioni della pressione e della temperatura ambiente, questi sono i soli parametri necessari per la risoluzione del sistema che è stato ottenuto.

2.8 CALORE DI REAZIONE

Durante una reazione chimica è possibile avere scambi di calore. Nel caso di calore assorbito si parla di **reazione endotermica**, viceversa di **reazione esotermica**. Il calore legato ad una reazione chimica prende il nome di **calore di reazione**, $\Delta H_{T_{ref}}^{R}$. Il calore di reazione è valutato ad una data temperatura di riferimento ed è definito come la differenza di entalpia dei prodotti e quella dei reagenti per unità di mole alla temperatura di riferimento.

Prima e dopo la reazione, l'entalpia deve essere uguale perché il sistema è isolato, quando viene introdotto del calore nel sistema, a pressione costante, per poter mantenere la T pari alla T_{ref} dei prodotti si ha una variazione di entalpia uguale al calore immesso nel sistema.

2.9 PROPRIETÀ TERMODINAMICHE DI UNA SINGOLA SPECIE CHIMICA

Di seguito verranno proposte le causa che portano a lavorare con gas caloricamente imperfetti e quindi con calori specifici variabili.

 $\epsilon' = \epsilon'_{traslazionale} + \epsilon'_{rotazionale} + \epsilon'_{vibrazionale} + \epsilon'_{elettronico}$

L'energia interna di una molecola può essere modulata come se fosse composta da quattro termini:



FIGURA 2.9.1: SCHEMATIZZAZIONE DEI LIVELLI DI ENERGIA PER I MODI ENERGETICI MOLECOLARI

La meccanica quantistica ha mostrato come tutti questi stati di energia interna siano quantizzati perciò una molecola può possedere solo valori discreti di energia traslazionale, rotazionale, vibrazionale e elettronica.

Nella figura riportata a fianco è possibile osservare una rappresentazione qualitativa dei possibili livelli energetici.

I livelli inferiori per ogni tipo di energia interna sono chiamati **stati fondamentali**¹³. Lo schema mostra chiaramente come i livelli energetici traslazionali siano più ravvicinati rispetto agli altri e ad una distanza co-

stante. Al contrario, i livelli energetici rotazionali sono maggiormente distanziati e il loro divario cresce all'aumentare dell'energia. Quelli vibrazionali hanno un andamento opposto, al crescere dell'energia in gioco i salti si riducono. I livelli energetici legati all'energia elettronica sono quelli più distanti tra tutti e, anch'essi, decrescono la loro distanza all'aumentare dell'energia in gioco.

Gli stati fondamentali sono le energie che delle molecole dovrebbero alla temperatura dello zero assoluto, i loro valori rappresentano i punti zero delle energie.

La meccanica quantistica dimostra che il *zero-point* per l'energia rotazionale vale esattamente zero a differenza delle altre energie che, seppur piccole, sono differenti da zero anche nel loro *zero-point*. Questo significa che anche allo zero assoluto le molecole hanno una certa quantità di energia ben definita per ogni specie: $\epsilon'_0 = \epsilon'_{0 tr} + \epsilon'_{0 vibr} + \epsilon'_{0 el}$.

Si è soliti misurare l'energia di una molecola come differenza di energia rispetto allo *zero-point*. Si definiscono le energie per il j-esimo livello traslazionale, il k-esimo livello rotazionale, l'1-esimo livello vibrazionale e l'm-esimo livello elettronico ognuna rispetto al proprio *zero-point*:

- $\epsilon_{j\,tr} = \epsilon'_{j\,tr} \epsilon'_{0\,tr}$
- $\epsilon_{k rot} = \epsilon'_{k rot}$
- $\epsilon_{l\,vibr} = \epsilon'_{l\,vibr} \epsilon'_{0\,vibr}$
- $\epsilon_{m\,el} = \epsilon'_{m\,el} \epsilon'_{0\,el}$

Tutte queste energie sono nulle alla temperatura dello zero assoluto per la loro stessa definizione.

¹³ $\epsilon'_{0 tr}, \epsilon'_{0 rot}, \epsilon'_{0 vibr}, \epsilon'_{0 el}$

L'energia totale di una molecola può essere scritta come segue:

$$\epsilon' = \epsilon_{j trans} + \epsilon_{l vibr} + \epsilon_{m el} + \epsilon'_0$$

mentre per un atomo:

$$\epsilon' = \epsilon_{j trans} + \epsilon_{m el} + \epsilon'_0$$

Essendo l'energia totale una somma di energie quantizzate lo sarà anch'essa.

La meccanica quantistica consente di ottenere le proprietà termodinamiche di una singola specie chimica.

Nella descrizione dei modi dell'energia interna si è fatto riferimento ai gradi di libertà derivati dalla termodinamica classica. Un classico teorema della teoria cinetica, il **teorema dell'equipartizione dell'energia**, afferma che ogni grado di libertà termico di una molecola contribuisce con $\frac{1}{2}k_BT$ all'energia di ogni molecola, o, per unità di massa, con $\frac{1}{2}R_iT$. La teoria cinetica e il teorema di equipartizione dell'energia furono sviluppati tra la fine del XIX secolo e l'inizio del XX, prima dell'introduzione della meccanica dei quanti.

Se si considerano le energie traslazionali e rotazionali, il risultato del teorema dell'equipartizione dell'energia per unità di massa è che:

$$e_{tr} = \frac{3}{2}RT$$

 $e_{rot} = \frac{3}{2}RT$ per molecole poliatomiche $e_{rot} = RT$ per molecole diatomiche

Il risultato è in perfetto accordo con la moderna meccanica quantistica.

Tuttavia, se si considera l'energia vibrazionale di una molecola diatomica si ha $e_{vibr} = RT$; questo risultato è in disaccordo con il risultato della meccanica quantistica secondo cui in generale vale $e_{vibr} < RT$ e tenderà a tale valore solo per $T \rightarrow \infty$.

La formula per l'energia vibrazionale che può essere ottenuta dalla meccanica quantistica dipende dai livelli energetici del modello scelto. Si è visto che lo spazio tra differenti livelli di energia vibrazionale varia con il livello di energia decrescendo al crescere dell'energia. Una possibile formulazione per questi livelli di energia è data dal modello di **oscillazione dis-armonico**:

$$\epsilon_{i \ vibr} = h \nu \left(i + \frac{1}{2} \right) - h \nu \ x_e \left(i + \frac{1}{2} \right)^2 + h \nu \ y_e \left(i + \frac{1}{2} \right)^3$$

Se il termine cubico fosse nullo si otterrebbe il modello di oscillatore (dis-armonico) di Morse, se fosse nullo anche il termine di secondo grado ciò che rimarrebbe rappresenta ul modello di oscillatore armonico.

Quest'ultimo modello è il più semplice utilizzabile per definire i livelli di energia vibrazionale considerando che lo spazio tra livelli di energia sono costanti e pari a *hv*.

Il massimo numero di livelli energetici vibrazionali corrisponde al più alto livello di energia vibrazionale che è inferiore dell'energia di dissociazione.

Considerando il modello di oscillatore armonico:

$$\epsilon_{i \ vibr} = h \nu \left(i + \frac{1}{2} \right)$$

e assumendo, per semplicità, un numero infinito di livelli energetici vibrazionali, si ottiene la classica formula per l'energia vibrazionale di una molecola in condizioni di equilibrio:

$$e_i^{\nu} = \frac{h\nu_i/k_BT}{\underbrace{e^{h\nu_i/k_BT} - 1}_{<1}}R_iT$$

 k_B è la costante di Boltzmann, h è la costante di Planck e ν è la frequenza vibrazionale fondamentale della molecola ed è differente da molecola a molecola. Il termine $h\nu/k_B$ è definito come **temperatura** vibrazionale caratteristica della molecola e viene indicata con Θ_i^{ν} .

Pertanto, per un modello con oscillatore armonico e infiniti livelli di energia si ha:

$$e_i^{\nu} = \frac{R_i \Theta_i^{\nu}}{e^{\Theta_i^{\nu}/T} - 1}$$

Valori tipici della temperatura vibrazionale caratteristica per le molecole maggiormente presenti nell'aria sono:

$$\Theta_{O_2}^{\nu} = 2240 \ K$$
 $\Theta_{N_2}^{\nu} = 3354 \ K$ $\Theta_{NO}^{\nu} = 2740 \ K$

Migliorando il modello, assumendo un numero finito di livelli energetici¹⁴ si giunge a:

$$e_i^{\nu} = R_i \Theta_i^{\nu} \left[\frac{1}{e^{(\Theta_i^{\nu})/T} - 1} - \frac{N_i^{\nu}}{e^{(N_I^{\nu} \Theta_i^{\nu})/T} - 1} \right]$$
$$N_i^{\nu} = 1 + Int \left(\left| \frac{D_i}{h\nu} \right| \right) = 1 + Int \left(\left| \frac{D_i}{k_B \Theta_i^{\nu}} \right| \right) = 1 + Int \left(\left| \frac{\Theta_i^{\nu}}{\Theta_i^{\nu}} \right| \right) \quad ; \quad \Theta_i^{D} = \frac{D_i}{k_B}$$

 D_i è l'energia di dissociazione caratteristica, mentre, come già detto, Θ_i^{ν} è la temperatura di dissociazione caratteristica. Valori tipici sono:

$$\Theta_{O_2}^D = 59500 \, K \qquad \Theta_{N_2}^D = 113200 \, K \qquad \Theta_{NO}^D = 75500 \, K$$

Ricapitolando, l'energia interna di una particella appartenente all'i-esima specie nelle condizioni di equilibrio è:

$$e_{i \ atom} = \frac{3}{2}R_{i}T + e_{i \ el} \quad ; \quad e_{i \ molecule} = \frac{3}{2}R_{i}T + R_{i}T + \frac{R_{i}\Theta_{i}^{\nu}}{e^{\Theta_{i}^{\nu}/T} - 1} + e_{i \ el}$$

Queste energie sono valutate sopra lo zero-point e vengono chiamate sensible energy.

I valori *zero-point* delle energie sono costanti ed è possibile calcolare i calori specifici dalle *sensible energy*:

$$c_{v_i} = \left(\frac{\partial e_i}{\partial T}\right)_{v_i}$$

$$c_{v_i \, atom} = \frac{3}{2}R + \frac{\partial e_{i \, el}}{\partial T} \qquad ; \qquad c_{v_i \, molecule} = \frac{3}{2}R + R + \frac{(\Theta_i^v/T)^2 e^{\Theta_i^v/T}}{\left[e^{\Theta_i^v/T} - 1\right]^2}R_i + \frac{\partial e_{i \, el}}{\partial T}$$

2.10 Proprietà termodinamiche di reagenti gassosi chimicamente in equilibrio

Noto come valutare le proprietà termodinamiche di una singola specie chimica e come calcolare le concentrazioni di ognuna di esse all'interno di una miscela nelle condizioni di equilibrio, si può vedere come per calcolare le proprietà termodinamiche di una miscela di gas reagenti in equilibrio chimico.

Concentrandosi sull'entalpia, che è una variabile importante nella dinamica dei gas, per una miscela di gas l'entalpia per unità di massa, h, si può valutare come:

$$h = \sum_{i=1}^{NS} y_i h_i = \sum_{i=1}^{NS} q_i H_i$$

O, per unità di mole:

$$H = \sum_{i=1}^{Ns} X_i H_i$$

 X_i indica la frazione molare, H_i è il valore assoluto dell'entalpia associata alla specie i-esima. Quest'ultima si può vedere come la somma delle *sensible entalpy* e i *zero-point* delle energie delle rispettive specie per unità di mole.

$$H_{i} = \overbrace{(H - \epsilon_{0})}^{H_{sens}} + \epsilon_{0 i} \quad \leftrightarrow \quad H_{i} = (\epsilon - \epsilon_{0})_{i} + RT + \epsilon_{0 i}$$

Nell'equazione a sinistra si è introdotta l'energia sensibile di una singola specie chimica che è una quantità che si è in grado di calcolare.

Dividendo l'energia sensibile nei vari contributi provenienti dai modi dell'energia interna si ha:

$$H_{i} = (\epsilon - \epsilon_{0})_{i} + RT + \epsilon_{0 i} = \underbrace{\frac{3}{2}RT + RT + \frac{R_{i}\Theta_{i}^{\nu}}{e^{\Theta_{i}^{\nu}/T} - 1} + \epsilon_{el} + RT}_{(H - \epsilon_{0})_{i}} + \epsilon_{0 i}$$

Non si è in grado di valutare gli *zero-point* energetici, per cui nemmeno l'entalpia assoluta di una singola specie o di una miscela è determinabile, ma questo non rappresenta un problema essendo interessati alle variazioni di energia piuttosto che ai valori assoluti.

Considerando un fenomeno in cui avviene una variazione di energia e prendendo due posizioni all'interno del flusso si ha:

$$h_1 = h_{sens1} + e_{01}$$

 $h_2 = h_{sens2} + e_{02}$

La variazione locale di entalpia tra il punto 1 e 2 è:

$$h_2 - h_1 = h_{sens2} - h_{sens1} + e_{02} - e_{01} \rightarrow \Delta h = \Delta h_{sens} - \Delta e_0$$

Quanto riportato è la dimostrazione che è necessario conoscere la variazione dell'energia e non il suo valore assoluto.

Per valutare il salto energetico rispetto allo *zero-point* si introduce il concetto di **calore di formazione** di una specie chimica. Il calore di formazione è collegato al concetto, già analizzato in precedenza, di **calore di reazione**.

Quando una reazione avviene con tutti i reagenti e i prodotti nelle loro condizioni standard¹⁵, il calore di reazione è chiamato **entalpia standard di reazione**¹⁶. Se la reazione presenta la formazione di nuove specie chimiche, allora l'entalpia standard di reazione è anche **l'entalpia standard di formazione**¹⁷ delle specie chimiche.

Per definizione, l'entalpia standard di formazione della forma più stabile di ogni elemento è zero perché non sono richieste reazioni di formazione quando l'elemento è già nel suo stato standard. Per esempio, l'entalpia standard di formazione di O_2 e di N_2 sono entrambe nulle.

A seguire si riporta un esempio.

Considerando la formazione di N partendo dalla molecola N_2 attraverso la seguente reazione di dissociazione:

$$N_2 + M \rightarrow 2N + M$$

Il calore standard di formazione per questa reazione, trascurando i contributi energetici vibrazionale ed elettronico che sono piccoli alla T_s :

$$\begin{aligned} H_{N_2}^s &= \frac{7}{2} R T_s + \epsilon_{0_{N_2}} \\ H_N^s &= \frac{5}{2} R T_s + \epsilon_{0_N} \end{aligned} \\ &= > \left(\Delta H_f \right)_N^s = 2 H_N^s - H_{N_2}^s = \frac{3}{2} R T_s + 2 \epsilon_{0_N} - \epsilon_{0_{N_2}} \end{aligned}$$

 $\left(\Delta H_f\right)_N^s$ coincide con il calore di reazione per $T_{ref} = T_s$.

Se si definisce il calore di formazione allo zero assoluto, sia per reagenti che per prodotti, si ha:

$$\left(\Delta H_f\right)_N^0 = 2H_N^0 - H_{N_2}^0 = 2\epsilon_{0_N} - \epsilon_{0_{N_2}}$$

In generale la variazione della *zero-point energy* in una reazione chimica è uguale alla differenza tra il calore di formazione dei prodotti allo zero assoluto e quello dei reagenti. Questo può essere visto dalla precedente relazione, dove la variazione di energia rispetto allo *zero-point*¹⁸ è uguale a $(\Delta H_f)_N^0$, che è il calore di formazione allo zero assoluto dei prodotti, meno $(\Delta H_f)_{N_2}^0 = 0$, che è il calore di formazione di energia.

Un ulteriore esempio di reazione può essere:

$$NO + M \rightarrow N + O + M$$

A cui corrisponde:

$$\Delta \epsilon_0 = \epsilon_{0_N} + \epsilon_{0_O} - \epsilon_{0_{NO}} = \left(\Delta H_f\right)_{NO}^0 - \left(\Delta H_f\right)_N^0 - \left(\Delta H_f\right)_O^0$$

 $^{17}\left(\Delta H_{f}\right)^{s}$

$${}^{18}\Delta\epsilon_0 = 2\epsilon_{0_N} - \epsilon_{0_{N_2}}$$

¹⁵ Lo stato standard di una sostanza è la sua forma stabile a 298.16 K e 1 atm.

 $^{^{16} (\}Delta H)^s$

Si può notare come esista una correlazione tra *zero-point energy* e il calore di formazione allo zero assoluto, questo legame può essere sfruttato per riscrivere la precedente equazione per l'entalpia della miscela:

$$h = \sum_{i=1}^{NS} q_i (H - \epsilon_0)_i + \sum_{i=1}^{NS} q_i \epsilon_{0_i}$$

che diventa:

$$h = \sum_{i=1}^{Ns} q_i (H - \epsilon_0)_i + \sum_{i=1}^{Ns} q_i \left(\Delta H_f\right)_i^0$$

Le due equazioni per l'entalpia forniscono valori differenti, ma, se usate per valutare le variazioni di entalpia, forniscono esattamente lo stesso risultato. Per questa ragione si può dire che $\sum_{i=1}^{Ns} q_i \epsilon_{0_i}$ sia la **reale** zero-point energy della miscela, mentre $\sum_{i=1}^{Ns} q_i \left(\Delta H_f\right)_i^0$ sia **l'effettiva** zero-point energy della miscela.

 $(\Delta H_f)_i^0$ è il calore di formazione allo zero assoluto per unità di mole, per ottenere la medesima quantità per unità di massa è sufficiente dividerle per la massa molecolare:

$$\left(\Delta h_f\right)_i^0 = \frac{\left(\Delta H_f\right)_i^0}{M_i}$$

È possibile scrivere l'entalpia della miscela nel seguente modo:

$$h = \sum_{i=1}^{N_S} y_i (h - e_0)_i + \sum_{i=1}^{N_S} y_i (\Delta h_f)_i^0$$

2.11 Non equilibrio chimico e vibrazionale

Nella precedente trattazione si era assunto che la miscela di gas avesse tempo sufficiente a raggiungere la condizione di equilibrio chimico e di energia interna. Tale ipotesi implica l'idea che la ridistribuzione dei modi energetici interni e delle reazioni chimiche richieda un tempo finito per verificarsi, questi processi in generale sono frutto delle collisioni molecolari o di interazioni radioattive.

Prendendo in considerazione le sole collisioni molecolari, è noto che non tutte siano in grado di eccitare i modi energetici interni o a portare a dissociazioni e ricombinazioni. La causa è che non tutte le collisioni rilasciano energia sufficiente a dare luogo ad una reazione.

L'ordine di grandezza del numero di collisioni necessarie a raggiungere l'equilibrio rotazionale e traslazionale è di 10, sale a 10⁴ per raggiungere l'equilibrio vibrazionale e deve essere ancora maggiore perché si verifichi la dissociazione.

Le collisioni richiedono tempo e il numero di collisioni per unità di tempo dipende dalla densità e dalla temperatura del gas. Prima di raggiungere le condizioni di equilibrio il gas sperimenta sempre, per un certo tempo, una fase di rilassamento dove la sua distribuzione di energia e la composizione variano nel tempo; in questa fase il gas è nella condizione di **non-equilibrio**.

2.11.1 NON EQUILIBRIO VIBRAZIONALE

Il tempo di variazione dell'energia vibrazionale può essere derivato dalla termodinamica statistica. Se si considerano transizioni di un singolo livello quantico¹⁹ e se l'energia, guadagnata o perduta dalla molecola durante una transizione, riappare nell'energia cinetica traslazionale della molecola come, per esempio, nella reazione qui sotto:

$$N_2(v) + N_2(v') \leftrightarrow N_2(v-1) + N_2(v') + \underbrace{E_k}_{energia\ cinetica}$$

 $v \in v'$ indicano l'energia vibrazionale del livello v-esimo e v'-esimo.

L'equazione della velocità vibrazionale è data da:

$$\left(\frac{de_i^{\nu}}{dt}\right)_{V-T} = \frac{e_i^{\nu,eq} - e_i^{\nu}}{\tau_i^{V-T}}$$

V-T indica un trasferimento per "vibrazione-traslazione".

Si noti che la velocità di variazione di e_i^v è proporzionale alla "distanza" dalle condizioni di equilibrio e alla temperatura di roto-traslazione (chiamata *driving force*) ed è inversamente proporzionale al tempo di rilassamento vibrazionale τ .

Al fine di descrivere gli effetti della *driving force* si immagini che, senza modificare la temperatura, si voglia portare l'energia vibrazionale di un gas diatomico ad un livello di energia più alto di quello di equilibrio a quella temperatura. In accordo all'equazione della velocità vibrazionale, una *driving force* negativa riduce nel tempo l'energia vibrazionale fino a quando non raggiunge il valore di equilibrio. Tuttavia, la riduzione dell'energia vibrazionale delle molecole è dovuta ad un suo trasferimento all'energia traslazionale e rotazionale. Questo fatto può essere compreso considerando la reazione V-T precedente, o notando che, considerando due istanti di tempo $t_1 e t_2$:

$$\Delta h = \frac{7}{2}R_iT_2 + (e_i^{\nu})_2 - \frac{7}{2}R_iT_1 - (e_i^{\nu})_1 = 0$$

è uguale a zero perché non si hanno reazioni chimiche in questo processo. Essendo $(e_i^{\nu})_2 < (e_i^{\nu})_1$, si deve avere $T_2 > T_1$ che sono le temperature roto-traslazionali proporzionali all'energie roto-traslazionali. L'incremento di questa temperatura ne produce un altro nel valore dell'energia vibrazionale di equilibrio. I grafici seguenti illustrano quanto appena descritto.



GRAFICO 2.11.1: ANDAMENTI DELLE ENERGIAE VIBRAZIONALI E DELLE TEMPERATURE IN FUNZIONE DEL TEMPO IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO E NON

¹⁹ I casi più probabili in cui una molecola diatomica salta da un livello quantico di energia a quello adiacente.6666

È anche possibile definire una **temperatura vibrazionale** estraendo la temperatura dalla formula dell'energia vibrazionale. Nel caso di un oscillatore armonico infinito si ha:

$$T_i^{\nu} = \frac{\Theta_i^{\nu}}{\ln\left(\frac{R_i\Theta_i^{\nu}}{e_i^{\nu}} + 1\right)}$$

 e_i^{ν} è l'energia vibrazionale nelle condizioni di non-equilibrio. Quindi, in non-equilibrio, T_i^{ν} è diversa dalla temperatura roto-traslazionale e, in particolare, si ha $T_i^{\nu} > T$ se $e_i^{\nu} > e_i^{\nu,eq}$ e viceversa. Nelle condizioni di equilibrio la temperatura roto-traslazionale coincide con quella vibrazionale. Dato che, in una miscela, si possono avere più specie nelle condizioni di non-equilibrio si hanno diverse temperature vibrazionali, una per ogni specie.

Il tempo di rilassamento vibrazionale nell'equazione della velocità di trasferimento vibrazionale V-T è una funzione della temperatura e della pressione. Una tipica espressione per il **tempo di rilassamento** è:

$$\tau^{V-T} p = C_1 T^{\alpha_1} e^{(C_2/T)^{\alpha_2} - C_3}$$

si possono trovare anche delle scritture leggermente diverse in letteratura. Mentre la formula del tempo di rilassamento può essere ottenuta da considerazioni basate sulla teoria cinetica, i valori delle costanti sono generalmente determinati sperimentalmente. Questo è un tipico problema dei sistemi in non-equilibrio che colpisce anche la velocità delle reazioni chimiche, i dati relativi alla velocità di rilassamento sono incerti e, spesso, sono validi solo in condizioni prossime a quelle a cui sono state valutate le costanti.

In letteratura viene fatta una distinzione tra tempo di rilassamento delle specie biatomiche e le specie con cui queste collidono. In un ambiente in cui è presente solamente N_2 si ha un unico tempo di rilassamento, $\tau_{N_2N_2}^{V-T}$, dovuto alle uniche collisioni che causano rilassamento vibrazionale, ovvero quelle tra molecole di N_2 . Nel caso in cui siano presenti più specie chimiche all'interno di una miscela si hanno molte più tipologie di urti. Considerando, ad esempio, una miscela d'aria ad alta temperatura con la presenza di N_2, O_2 e NO, ma anche di singoli atomi di azoto e ossigeno si possono avere tutte le combinazioni possibili di urti tra queste particelle. Le collisioni con atomi sono molto importanti per il rilassamento vibrazionale delle specie biatomiche e, quindi, vanno prese in considerazione. Per ottenere il tempo di completo rilassamento per la i-esima specie vibrazionale considerando le collisioni con tutte le specie chimiche presenti nella miscela, si usa frequentemente la seguente formula:

$$\tau_i^{V-T} = \frac{1}{M\sum_{j=1}^{N_S} \frac{q_j}{\tau_{i,j}^{V-T}}}$$

dove *i* indica il rilassamento delle specie biatomiche e *j* ogni altra specie con cui si porta in collisione.

Il trasferimento di energia vibrazionale-traslazionale non è l'unico meccanismo possibile per scambiare energia vibrazionale, un altro meccanismo che può essere importante, in determinate condizioni, prende il nome di **scambio di energia** *vibration-vibration*, V-V.

Un esempio di questo tipo di meccanismo è descritto dalla seguente reazione:

$$N_2(v) + N_2(v') \leftrightarrow N_2(v-1) + N_2(v'+1)$$

Nel caso di un modello armonico, lo spazio tra due livelli adiacenti di energia vibrazionale è costante, come si era già detto, e così il trasferimento V-V non produce eccesso di energia. Al contrario, se si

usasse un modello non armonico un singolo salto quantico coinvolgerebbe un differente apporto di energia a seconda del livello vibrazionale e si avrebbe un eccesso di energia trasferita ai gradi di libertà traslazionali.

$$N_2(v) + N_2(v') \leftrightarrow N_2(v-1) + N_2(v'+1) + \underbrace{E_k}_{energia\ cinetica}$$

Nel caso in cui il trasferimento V-V coinvolga altre specie diatomiche l'eccesso di energia è presente anche in un modello ad oscillazione armonica perché lo spazio tra livelli di energia di diverse molecole biatomiche è differente:

$$N_2(v) + O_2(v') \leftrightarrow N_2(v-1) + O_2(v'+1) + E_k$$

La formula per la velocità vibrazionale dovuta a trasferimento V-V è più complessa e non viene riportata per semplicità. Nonostante ciò il contributo del trasferimento V-V viene aggiunto a quello V-T nell'equazione della velocità di trasferimento globale della i-esima specie:

$$\left(\frac{de_i^{\nu}}{dt}\right)_{V-T} = \frac{e_i^{\nu,eq} - e_i^{\nu}}{\tau_i^{V-T}} + \left(\frac{de_i^{\nu}}{dt}\right)_{V-V}$$

Malgrado siano frequentemente separati i fenomeni di non-equilibrio chimico e vibrazionale sono accoppiati.

2.11.2 Non equilibrio chimico

Anche la composizione chimica richiede un certo periodo di tempo prima che le collisioni la portino all'equilibrio. Durante questo transitorio il gas è in non-equilibrio chimico. Di seguito verrà descritto come il rateo di variazione di concentrazione di tutte le specie chimiche presenti in una miscela vari nel tempo.

Considerando la seguente reazione di dissociazione:

$$O_2 + M \rightarrow 2O + M$$

L'equazione della velocità di variazione di concentrazione per l'ossigeno atomico è:

$$\left(\frac{d[O]}{dt}\right)_f = 2k_f[O_2][M]$$

[M] indica la concentrazione²⁰ della generica specie e k_f è la velocità di reazione in avanti²¹, funzione della sola temperatura. La reazione può avvenire anche nell'altro verso:

$$O_2 + M \leftarrow 2O + M$$

In questo caso la velocità di variazione di concentrazione di O è:

$$\left(\frac{d[O]}{dt}\right)_b = 2k_b[O]^2[M]$$

dove k_b è la velocità di reazione all'indietro²², anch'essa funzione della sola temperatura.

²⁰ Numero di moli per unità di volume

²¹ Forward reaction rate

²² Backward (Reverse) reaction rate

Nella realtà le due reazioni avvengono contemporaneamente, perciò la velocità di variazione netta di O è legata alla reazione:

$$O_2 + M \leftrightarrow 2O + M$$

Ossia:

$$\frac{d[O]}{dt} = \left(\frac{d[O]}{dt}\right)_f + \left(\frac{d[O]}{dt}\right)_b = 2k_b[O_2][M] + 2k_b[O]^2[M]$$

Raggiunta la condizione di equilibrio la velocità netta di variazione diviene uguale a zero, per cui:

$$2k_b[O_2][M] - 2k_b[O]^2[M] = 0$$
 (in condizioni di equilibrio chimico)

Da ciò:

$$k_f = k_b \frac{[O]_{eq}^2}{[O_2]_{eq}}$$

Quest'ultima relazione rimanda alla costante di equilibrio K_p che, per la reazione considerata, è uguale a:

$$K_p = \frac{p_0^2}{p_{O_2}} = RT \frac{[O]^2}{[O_2]}$$

Definendo K_c , pari al rapporto di k_f e di k_b , è possibile scriverlo in funzione della costante di equilibrio grazie alle relazioni sopra riportate:

$$K_c = \frac{k_f}{k_b} = \frac{1}{RT} K_p$$

Questo significa che il rapporto tra le due velocità di reazione può essere visto come una costante di equilibrio basata sulle concentrazioni piuttosto che sulle pressioni parziali.

Generalizzando il caso della dissociazione dell'ossigeno per una generica, ma elementare, reazione chimica:

$$\sum_{i=1}^{Ns} \nu_i' X_i \leftrightarrow \sum_{i=1}^{Ns} \nu_i'' X_i$$

Le velocità di variazione di concentrazione per la generica specie X_i in avanti e indietro:

$$\left(\frac{d[X_i]}{dt}\right)_f = (\nu_i^{\prime\prime} - \nu_i^{\prime})k_f \prod_{j=1}^{Ns} [X_j]^{\nu_j^{\prime}}$$
$$\left(\frac{d[X_i]}{dt}\right)_b = (\nu_i^{\prime\prime} - \nu_i^{\prime})k_b \prod_{j=1}^{Ns} [X_j]^{\nu_j^{\prime\prime}}$$

Per cui, il netto della velocità di variazione della concentrazione:

$$\frac{d[X_i]}{dt} = (v_i'' - v_i') \left\{ k_f \prod_{j=1}^{Ns} [X_j]^{v_j'} - k_b \prod_{j=1}^{Ns} [X_j]^{v_j''} \right\}$$

Questa equazione prende anche il nome di azione della legge di massa.

Qualora in equilibrio:

$$k_f \prod_{j=1}^{NS} [X_j]_{eq}^{v'_j} = k_b \prod_{j=1}^{NS} [X_j]_{eq}^{v''_j}$$

La relazione tra le costanti di equilibrio basate sulla pressione e quelle basate sulla concentrazione è:

$$K_{c} = \frac{k_{f}}{k_{b}} = \frac{k_{f} \prod_{j=1}^{N_{s}} [X_{j}]_{eq}^{\nu_{j}'}}{k_{b} \prod_{j=1}^{N_{s}} [X_{j}]_{eq}^{\nu_{j}'}} = \frac{\prod_{j=1}^{N_{s}} [p_{j}]_{eq}^{\nu_{j}'}}{\prod_{j=1}^{N_{s}} [p_{j}]_{eq}^{\nu_{j}'}} \left(\frac{1}{RT}\right)^{\sum_{j=1}^{N_{s}} (\nu_{j}'' - \nu_{j}')} = K_{p} \left(\frac{1}{RT}\right)^{\sum_{j=1}^{N_{s}} (\nu_{j}'' - \nu_{j}')}$$

Questa scrittura viene spesso usata così da sostituire il k_b con il rapporto tra k_f e K_c in modo da essere necessaria solo la velocità di reazione in avanti per calcolare il netto della velocità:

$$\frac{d[X_i]}{dt} = (v_i'' - v_i')k_f \left\{ \prod_{j=1}^{N_s} [X_j]^{v_j'} - \frac{k_b}{k_f} \prod_{j=1}^{N_s} [X_j]^{v_j''} \right\}$$
$$\frac{d[X_i]}{dt} = (v_i'' - v_i')k_f \left\{ \prod_{j=1}^{N_s} [X_j]^{v_j'} - \frac{1}{K_c} \prod_{j=1}^{N_s} [X_j]^{v_j''} \right\}$$

Le costanti della velocità chimica possono essere valutate sperimentalmente, ma, in alcuni casi, possono anche essere calcolate. Un classico modo per esprimere attraverso una formula matematica tali costanti è usare l'**equazione di Arrhenius**:

$$k_f = c_1 T^{\alpha} e^{-\frac{\epsilon_{\alpha}}{kT}}$$

 $c_1, \alpha \in \epsilon_{\alpha}$ sono tutti dati sperimentali; ϵ_{α} è l'energia di attivazione.

Nel caso considerato la reazione è una reazione di dissociazione, l'energia di attivazione è la differenza tra la *zero-point energy* dei reagenti e dei prodotti e prende il nome di **energia di dissociazione**.

Prendendo la reazione:

$$N_2 + M \rightarrow 2N + M$$

l'energia di dissociazione è:

$$\epsilon_d = \Delta \epsilon_0 = 2(\epsilon_0)_N - (\epsilon_0)_{N_2}$$

Tutti i formalismi introdotti sono validi solo nel caso di reazioni elementari, ovvero che avvengono in un singolo passaggio. In casi non elementari non è possibile applicare la legge di massa, ma è possibile applicarla alle singole reazioni elementari che la compongono.

Trattando l'aria come una miscela di 5 componenti²³, è possibile analizzare le reazioni predominanti riportate nella Tabella 2.11.1.

²³ O₂ N₂ O N NO

r	chemical reaction	ν'_O	ν_N'	ν'_{NO}	ν'_{O_2}	ν'_{N_2}	ν_O''	ν_N''	$\nu_{NO}^{\prime\prime}$	ν_{O_2}''	$\nu_{N_2}^{\prime\prime}$
1)	$O_2 + O \longrightarrow 2O + O$	1	0	0	1	0	3	0	0	0	0
2)	$O_2 + N \longrightarrow 2O + N$	0	1	0	1	0	2	1	0	0	0
3)	$O_2 + NO \longrightarrow 2O + NO$	0	0	1	1	0	2	0	1	0	0
4)	$O_2 + O_2 \longrightarrow 2O + O_2$	0	0	0	2	0	2	0	0	1	0
5)	$O_2 + N_2 \longrightarrow 2O + N_2$	0	0	0	1	1	2	0	0	0	1
6)	$N_2 + O \longrightarrow 2N + O$	1	0	0	0	1	1	2	0	0	1
7)	$N_2 + N \longrightarrow 2N + N$	0	1	0	0	1	0	3	0	0	0
8)	$N_2 + NO \longrightarrow 2N + NO$	0	0	1	0	1	0	2	1	0	0
9)	$N_2 + O_2 \longrightarrow 2N + O_2$	0	0	0	1	1	0	2	0	1	0
10)	$N_2 + N_2 \longrightarrow 2N + N_2$	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0
11)	$NO + O \longrightarrow N + O + O$	1	0	1	0	0	2	1	0	0	1
12)	$NO + N \longrightarrow N + O + N$	0	1	1	0	0	1	2	0	0	0
13)	$NO + NO \longrightarrow N + O + NO$	0	0	2	0	0	1	1	1	0	0
14)	$NO + O_2 \longrightarrow N + O + O_2$	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0
15)	$NO + N_2 \longrightarrow N + O + N_2$	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
16)	$NO + O \longrightarrow N + O_2$	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
17)	$N_2 + O \longrightarrow N + NO$	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0

TABELLA 2.11.1: REAZIONI CHIMICHE NELL'ARIA

Per ogni reazione sono necessarie la k_f e la k_b o, in alternativa, una delle due e la costante di equilibrio. Successivamente si applica la legge di azione di massa per ogni specie che costituisce la miscela ottenendo il netto della velocità di concentrazione. Ogni reazione sopra riportata fornisce il suo contributo, pertanto è possibile scrivere la velocità di variazione, a patto che $(v_i'' - v_i')_r$ sia diverso da zero, come:

$$\frac{d[X_i]}{dt} = \sum_{r=1}^{Nr} (\nu_i'' - \nu_i')_r \left\{ k_{f_r} \prod_{j=1}^{Ns} [X_j]^{\nu_{jr}'} - k_{b_r} \prod_{j=1}^{Ns} [X_j]^{\nu_{jr}''} \right\}$$

2.12 Equazioni di governo per un flusso inviscido in equilibrio ad alta temperatura

Sotto l'ipotesi di equilibrio chimico e vibrazionale le equazioni di governo per un flusso inviscido ad alta temperatura sono le classiche equazioni di Eulero.

Bilancio di massa

$$\rho_t + (\rho u)_x + (\rho u)_y + (\rho u)_z = 0$$

Bilancio di quantità di moto

$$(\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x + (\rho u v)_y + (\rho u w)_z = 0$$

$$(\rho v)_t + (\rho v u)_x + (p + \rho v^2)_y + (p v w)_z = 0$$

$$(\rho w)_t + (\rho w u)_x + (\rho w v)_y + (p + \rho w^2)_z = 0$$

Bilancio di energia

$$E_t + [u(E+p)]_x + [v(E+p)]_y + [w(E+p)]_z = 0 \quad \text{oppure} \qquad h_t^0 + uh_x^0 + vh_y^0 + wh_z^0 = \frac{p_t}{\rho}$$

La definizione di energia totale per unità di volume²⁴ contiene il calore di formazione cosicché gli scambi di energia locale, dovuti alle reazioni chimiche, siano automaticamente conteggiati per:

$$e = \sum_{i=1}^{N_s} \left[y_i \left(e_i^{tr} + e_i^{rot} + e_i^{vibr} + e_i^{el} + \left(\Delta h_f\right)_i^0 \right] + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right]$$
$$h^0 = \sum_{i=1}^{N_s} \left[y_i \left(e_i^{tr} + e_i^{rot} + e_i^{vibr} + e_i^{el} + R_i T + \left(\Delta h_f\right)_i^0 \right] + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right]$$

Da notare che, in questa fase, la nomenclatura è cambiata poiché la *e* indica **l'energia interna per unità di massa**, in precedenza era l'energia totale per unità di volume.

2.12.1 Onda d'urto normale in flussi in equilibrio ad alta temperatura

Le condizioni attraverso un'onda d'urto retta stazionaria possono essere ottenute applicando le leggi di conservazione ad un volume di controllo che racchiuda l'urto per un flusso inviscido, unidimensionale e stazionario:



FIGURA 2.12.1: NOMENCLATURA URTO

Le condizioni 1, a monte dell'urto, sono note diversamente da quelle in 2 che devono essere calcolate. Le equazioni sopra riportate sono valide sia per flussi di gas reagenti che non. Nel caso di gas caloricamente perfetto e non reagente, l'equazione di stato che risolve il sistema è semplice, infatti, per un gas caloricamante perfetto è possibile introdurre nelle equazioni precedenti il numero di Mach come nuova variabile. Ciò che si ottiene è una serie di semplici equazioni algebriche che esprimono i rapporti delle grandezze, a valle e a monte dell'urto, in funzione del numero di Mach e di γ ²⁵. Diversamente, se il gas è vibrazionalmente eccitato e/o chimicamente reattivo, l'equazione di stato diventa più complessa tanto da non consentire una semplice formulazione in grado di risolvere numericamente il sistema.

Una possibile tecnica è supporre un valore arbitrario del rapporto ρ_2/ρ_1 e riordinare le leggi di conservazione così da poter risolvere le variabili sconosciute:

$$u_{2} = \frac{\rho_{1}}{\rho_{2}}u_{1}$$

$$p_{2} = p_{1} + \rho_{1}u_{1}^{2}\left(1 - \frac{\rho_{1}}{\rho_{2}}\right)$$

$$h_{2} = h_{1} + \frac{u_{1}^{2}}{2}\left[1 - \left(\frac{\rho_{1}}{\rho_{2}}\right)^{2}\right]$$

È possibile usare la definizione di entalpia e la tecnica per la determinazione della composizione di equilibrio di una miscela di gas introdotta in precedenza per ottenere $T e y_i^{26}$.

 $^{^{24}}E = \rho e$

²⁵ Il rapporto dei calori specifici

²⁶ Frazione in massa

$$h_{2} = \sum_{i=1}^{N_{S}} \left[y_{i} \left(e_{i}^{tr} + e_{i}^{rot} + e_{i}^{vibr} + e_{i}^{el} + R_{i}T + \left(\Delta h_{f}\right)_{i}^{0} \right]_{2} \right]$$

$$p \frac{y_{0}^{2}}{y_{0_{2}}} = K_{p,0_{2},diss.(T)}$$

$$p \frac{y_{N}^{2}}{y_{N_{2}}} = K_{p,N_{2},diss.(T)}$$

$$p \frac{y_{N}y_{0}}{y_{N0}} = K_{p,N0,diss.(T)}$$

$$y_{0} + y_{N} + y_{N0} + y_{0_{2}} + y_{N_{2}} = 1$$

$$\frac{2(y_{0_{2}})_{1} + (y_{0})_{1} + (y_{N0})_{1}}{2(y_{N_{2}})_{1} + (y_{N})_{1} + (y_{N0})_{1}} = \frac{2(y_{0_{2}})_{2} + (y_{0})_{2} + (y_{N0})_{2}}{2(y_{N_{2}})_{2} + (y_{N})_{2} + (y_{N0})_{2}}$$

Infine, è possibile ottenere un nuovo valore per ρ_2 dall'equazione di stato.

$$\rho_2 = \frac{p_2}{\left(\sum_{i=1}^{NS} \frac{(y_i)_2}{M_i}\right) RT_2}$$

A questo punto si ripete la procedura fino a giungere a convergenza.

Di seguito si riportano i grafici degli andamenti tipici assumendo equilibrio chimico.



GRAFICO 2.12.1: (A SINISTRA) INFLUENZA DELLA PRESSIONE SULLA TEMPERATURA DI UN URTO RETTO CON L'ARIA IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO, (A DESTRA) VARIAZIONE DELLA TEMPERATURA IN FUNZIONE DELLA VE-LOCITÀ E DELLA QUOTA, *RANGE* DI VELOCITÀ INFERIORE A QUELLA ORBITALE



GRAFICO 2.12.2: VARIAZIONE DELLA DENSITÀ CON UN URTO NORMALE IN FUNZIONE DELLA VELOCITÀ E DELLA QUOTA, *RANGE* DI VELOCITÀ INFERIORE A QUELLA ORBITALE

Si nota che il rapporto delle densità può raggiungere valori molto superiori a 6 che è il limite per un gas caloricamente perfetto (γ =1.4) nel caso di Mach tendente ad infinito. Questo fatto ha delle conseguenze importanti: dal momento che la densità del gas è maggiore, assumendo condizioni di equilibrio, di quanto non lo sarebbe con un gas caloricamente perfetto, **lo spessore dell'urto è più sottile per gas reagenti**. Ciò significa che la distanza di stazionamento di un urto curvo e staccato si riduce notevolmente se si considerano l'eccitazione vibrazionale e le reazioni chimiche, inoltre anche l'inclinazione degli urti obliqui si riduce rispetto al caso di gas caloricamente perfetto.

2.13 EQUAZIONI DI GOVERNO PER FLUSSO INVISCIDO AD ALTA TEMPERATURA IN NON-EQUILIBRIO

Per un flusso non in equilibrio, bisogna aggiungere all'equazione di bilancio per la massa globale anche quelle per le singole specie. Tali equazioni possono essere derivate considerando un volume di controllo fisso nello spazio e notando che la massa della specie i-esima contenuta al suo interno può cambiare nel tempo solo se c'è un flusso netto di una, o più, i-esima specie attraverso la superficie che circonda il volume; oppure, in alternativa, se vi è una produzione o eliminazione di specie all'interno del volume a causa di reazioni chimiche.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V} \rho_{i} \, dV + \int_{S} \rho_{i} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = \int_{V} \Omega_{i}^{ch} \, dV$$

 Ω_i^{ch} è la velocità di variazione locale della densità della specie i-esima dovuta a reazioni chimiche.

Usando il teorema della divergenza si ottiene:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \vec{v}) = \Omega_i^{ch}$$

La velocità locale di variazione di ρ_i , dovuta a reazioni chimiche, è legata a quella di concentrazione dalla seguente formula:

$$[X_i]M_i = \rho_i \to \Omega_i^{ch} = \frac{d\rho_i}{dt} = M_i \frac{d[X_i]}{dt} = M_i \sum_{r=1}^{Nr} (\nu_i'' - \nu_i')_r \left\{ k_{f_r} \prod_{j=1}^{Ns} [X_j]^{\nu_{jr}'} - k_{b_r} \prod_{j=1}^{Ns} [X_j]^{\nu_{jr}''} \right\}$$

$$(29)$$

Forme alternative dell'equazione di bilancio della massa per la i-esima specie possono essere ottenute ricordando che $\rho_i = \rho y_i$:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \vec{v}) = y_i \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right] + \rho \left[\frac{\partial y_i}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla y_i \right] = \Omega_i^{ch} \rightarrow \frac{\partial y_i}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla y_i = \frac{Dy_i}{Dt} = \frac{\Omega_i^{ch}}{\rho}$$

O ancora, essendo che $q_i = \frac{y_i}{M_i}$:

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla q_i = \frac{Dq_i}{Dt} = \frac{\Omega_i^{ch}}{\rho M_i}$$

Le formule che contengono la derivata sostanziale rappresentano la velocità di variazione di y_i e q_i di una particella fluida di massa costante che si muove con il flusso²⁷. Com'è possibile notare la velocità di variazione è dovuta solo alle cinetiche chimiche che si verificano nella particella fluida.

Nel caso in cui si volesse considerare anche un non-equilibrio vibrazionale sarebbe necessario aggiungere altre equazioni di governo. Indicando con e_i^v l'energia vibrazionale per unità di massa della specie i-esima, se si analizzasse nella sua evoluzione una fissata particella del fluido, sarebbe possibile scrivere, in analogia a quanto già notato per un caso di non-equilibrio chimico:

$$\frac{De_i^{\nu}}{Dt} = \frac{\partial e_i^{\nu}}{\partial t} + \vec{\nu} \cdot \nabla e_i^{\nu} = \frac{e_i^{\nu,eq} - e_i^{\nu}}{\tau_i^{V-T}}$$

In questo caso si è considerato il solo meccanismo di trasferimento V-T, ma può essere generalizzata per altre tipologie di trasferimento.

Per ottenere un'equazione in forma conservativa è possibile scrivere:

$$\rho_i \frac{De_i^{\nu}}{Dt} + e_i^{\nu} \left[\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \vec{v}) \right] = \frac{\partial (\rho_i e_i^{\nu})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i e_i^{\nu} \vec{v}) = \rho_i \frac{e_i^{\nu, eq} - e_i^{\nu}}{\tau_i^{V-T}} + e_i^{\nu} \Omega_i^{ch}$$

La variabile conservativa $\rho_i e_i^{\nu}$ ha un chiaro significato fisico. Trattandosi dell'energia vibrazionale della specie i-esima per unità di volume. Questa scelta potrebbe comportare dei problemi di natura numerica qualora le specie considerate dovessero dissociare completamente. Per ottenere e_i^{ν} si dovrebbe dividere la variabile conservativa per la densità i-esima, ma se la specie fosse completamente dissociata si otterrebbe una divisione nella forma 0/0.

Altra possibilità è considerare ρe_i^{ν} come variabile conservativa:

$$\rho \frac{De_i^{\nu}}{Dt} + e_i^{\nu} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right] = \frac{\partial (\rho e_i^{\nu})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_i^{\nu} \vec{v}) = \rho \frac{e_i^{\nu, eq} - e_i^{\nu}}{\tau_i^{V-T}}$$

In questo modo non si hanno problemi anche se la i-esima specie dovesse giungere a completa dissociazione.

²⁷ In accordo ad uno studio secondo il punto di vista lagrangiano.

Ricapitolando, le equazioni di governo, per un gas chimicamente reattivo in non equilibrio vibrazionale, sono:

$$\begin{split} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (p \vec{t} + \rho u \vec{v}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot (p \vec{j} + \rho v \vec{v}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \nabla \cdot (p \vec{k} + \rho w \vec{v}) &= 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + p) \vec{v}] &= 0 \\ \frac{\partial (\rho e_i^v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_i^v \vec{v}) &= \rho \frac{e_i^{v,eq} - e_i^v}{\tau_i^{V-T}} \quad i = 1, \dots, Ns \\ \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \vec{v}) &= \Omega_i^{ch} \quad i = 1, \dots, Ns \end{split}$$

Dove:

$$\begin{split} E &= \rho e = \rho \left\{ \sum_{i=1}^{Ns} \left[y_i \left(e_i^{tr} + e_i^{rot} + e_i^{vibr} + e_i^{el} + \left(\Delta h_f \right)_i^0 \right] \right\} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) \\ &= \rho \left\{ \sum_{i=1}^{Ns} \left[y_i \left(\frac{3}{2} R_i T + \frac{L_i^{rot}}{2} R_i T + e_i^{vibr} + e_i^{el} + \left(\Delta h_f \right)_i^0 \right] \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\left[(\rho u)^2 + (\rho v)^2 + (\rho w)^2 \right]}{\rho} \\ &\rho_i = \rho y_i \end{split}$$

2.14 Flusso congelato, in equilibrio e non

Un flusso congelato è un flusso in cui le costanti delle velocità di reazione sono uguali a zero²⁸ e il tempo di rilassamento tende a infinito.

Un flusso in equilibrio è un flusso dove le costanti di reazione tendono a infinito e la velocità di rilassamento vibrazionale è infinita.

Per un flusso congelato, l'unico modo per avere una variazione nella composizione e nell'energia vibrazionale è avere una velocità di variazione nulla o un tempo di rilassamento infinito.

Per un flusso in equilibrio, se la pressione e la temperatura variano come funzioni dello spazio e del tempo, l'unico modo per mantenere le condizioni di equilibrio locale ai valori locali di pressione e temperatura è quello di avere velocità di vibrazione o rilassamento infinitamente veloci, o, analogamente, tempi di rilassamento nulli.

 $^{{}^{28}}k_f = k_b = 0$

In pratica, nessuna delle due tipologie di flusso esiste nella realtà. Tuttavia, definendo come τ_f il tempo caratteristico necessario ad un elemento fluido per attraversare la regione di flusso interessata e τ_c il tempo caratteristico per una composizione chimica o per l'energia vibrazionale di raggiungere l'equilibrio, si può dire che:

- se $\tau_f \gg \tau_c$ si possono assumere condizioni locali di equilibrio
- se $\tau_f \ll \tau_c$ si può considerare flusso congelato
- se $\tau_f \approx \tau_c$ allora il flusso è in condizioni di non-equilibrio

Il parametro adimensionale che governa la condizione di non-equilibrio è chiamato **numero di Damkhoeler**:

$$Da = \frac{\tau_f}{\tau_c}$$

Per $Da \rightarrow 0$ si ha un flusso congelato, mentre per $Da \rightarrow \infty$ si assume un flusso in equilibrio. Se Da è nell'ordine di 1 il flusso non è in equilibrio. Possono esserci vari numeri di Damkhoeler all'interno di uno stesso flusso, uno per ogni fenomeno che può contribuire al non-equilibrio.

Per semplicità, definiremo un *Da* per l'energia vibrazionale di ogni specie biatomica e uno per la concentrazione di ogni specie nella miscela.

2.15 Flusso viscoso ad alta temperatura

Diffusione di massa

Allo stesso modo in cui i gradienti di temperatura innescano la diffusione di energia, come descritto dalla legge di Fourier, e i gradienti di velocità la diffusione di quantità di moto, i gradienti di concentrazione causano diffusione di massa, descritta dalla **legge di Fick**.

$$J_i = -\rho D_{im} \nabla y_i$$

 J_i rappresenta la **diffusione** del flusso della specie i-esima; D_{im} è il **coefficiente di diffusione multicomponente**, ovvero il coefficiente di diffusione della specie i-esima nella miscela. D_{im} è legato ai **coefficienti di diffusione binari**²⁹ che valutano la diffusione della specie i nella j, l'espressione approssimata è:

$$D_{im} = \frac{1 - X_i}{\sum_j \frac{X_j}{D_{ij}}}$$

 X_i rappresenta la frazione molare della specie i-esima.

Sebbene la principale causa di diffusione di massa sia la presenza di gradienti di concentrazione anche quelli di temperatura e pressione possono avere il loro peso su tale fenomeno. Pertanto esiste una formulazione più generale:

$$J_i = -\rho D_{im} \nabla y_i - \frac{1}{T} D_i^T \nabla T + \frac{1}{p} D_i^p \nabla p$$

Qualora i meccanismi di diffusione legati alla temperatura e alla pressione non fossero molto forti vengono trascurati ritornando, perciò, alla più semplice legge di Fick. Il flusso di diffusione di massa può essere incorporato nell'equazione di bilancio di massa:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \vec{v}) + \nabla \cdot J_i = \Omega_i^{ch}$$

Trasporto di energia dalla conduzione e diffusione termica

In un flusso viscoso, l'energia viene trasportata dalla conduzione termica, espressa dal postulato di Fourier.

$$q_c = -k\nabla T$$

Per un gas chimicamente reattivo vi è anche un trasporto di energia per mezzo della diffusione. Durante la diffusione, le specie i-esime trasportano l'entalpia della loro specie, in questo modo si ha un trasporto di energia a seguito della diffusione delle specie.

$$(q_D)_i = -h_i \rho D_{im} \nabla y_i$$

Per avere il flusso totale è sufficiente sommare i contributi parziali:

$$q_D = -\sum_{i=1}^{Ns} h_i \rho D_{im} \nabla y_i$$

In questo moda la forma finale dell'equazione dell'energia diviene:

$$E_t + \nabla \cdot \left[(E+p)\vec{v} \right] - \nabla \cdot (\bar{\tau} \cdot \vec{v}) - \nabla \cdot \left(k\nabla T + \sum_{i=1}^{NS} h_i \rho D_{im} \nabla y_i \right) = 0$$

Trasporto di quantità di moto

In un gas chimicamente reattivo, il trasporto di quantità di moto è modificato rispetto al caso di un gas caloricamente perfetto perché la viscosità del gas è di fatto la viscosità della miscela, la quale può essere ottenuta dalle viscosità delle singole specie e approssimata grazie alla **regola di Wilke**:

$$\mu = \sum_{i} \frac{X_{i} \mu_{i}}{\sum_{i} X_{i} \phi_{ij}} \qquad \phi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(1 + \frac{M_{i}}{M_{j}} \right)^{-1/2} \left[1 + \left(\frac{\mu_{i}}{\mu_{j}} \right)^{1/2} \left(\frac{M_{j}}{M_{i}} \right)^{1/4} \right]^{2}$$

Condizioni al contorno

- Velocità: nulla a parete
- Temperatura: fissa a parete, con parete adiabatica. Per un gas chimicamente reattivo, il flusso netto di calore totale a parete include anche l'entalpia di diffusione. La condizione di parete adiabatica è data da:

$$\left(k\frac{\partial T}{\partial n} + \rho \sum_{i} D_{im}h_i \frac{\partial y_i}{\partial n}\right)_{w} = 0$$

- Concentrazione: nei gas ad alta temperatura, le concentrazioni sono variabili dipendenti e sono quindi necessarie delle condizioni al contorno anche per loro. Tipicamente il materiale a parete è realizzato in modo tale da favorire le reazioni chimiche, questo genere di superfici sono chiamate **pareti catalitiche**. Si possono distinguere tre condizioni al contorno:
 - parete **totalmente catalitica**: le reazioni chimiche sono catalizzate ad una velocità infinita. Le frazioni in massa a parete sono in condizioni di equilibrio locale
 - o parete parzialmente catalitica: le reazioni sono catalizzate con una velocità finita
 - o parete non catalitica: non si ha ricombinazione a parete.

Considerando di avere una parete parzialmente catalitica, si definisce $(\Omega_w^{ch})_i$ la massa della specie i-esima persa a parete, per unità di superficie e tempo, a causa delle reazioni chimiche catalizzate. La perdita di massa deve essere bilanciata dalla diffusione di massa della parete, in questo modo è possibile scrivere la condizione al contorno, per un caso stazionario, riportata qui di seguito:

$$\left(\Omega_w^{ch}\right)_i = \rho D_{im} \frac{\partial y_i}{\partial n}$$

Per una parete non catalitica si ha $(\Omega_w^{ch})_i = 0$, per cui la sua condizione al contorno è $(\partial y_i)/\partial n = 0$.

2.16 Aerodinamica ipersonica non viscosa

In aereodinamica, se il numero di Reynolds è sufficientemente alto è possibile separare il flusso in due porzioni, una viscosa e una inviscida.

Per un veicolo ipersonico il Re è adeguatamente elevato in buona parte della traiettoria di volo, pertanto questo genere di separazione viene fatta frequentemente.

L'approssimazione di flusso inviscido non è sufficiente per la completa determinazione delle caratteristiche aerodinamiche di un velivolo supersonico. Nonostante questa semplificazione possa fornire una buona stima della distribuzione di pressione lungo il corpo, non fornisce più valori affidabili qualora siano presenti fenomeni viscosi in grado di modificare sensibilmente il flusso inviscido esterno.

2.16.1 Onde d'urto attaccate e staccate

Le **onde d'urto** sono sostanzialmente un **fenomeno viscoso**, ma, essendo il loro spessore molto ridotto, possono essere viste come delle discontinuità inserite in un flusso inviscido.





Un corpo con la punta smussata, come quello in alto nella figura, presenta sempre un urto curvo staccato con una zona subsonica a valle della porzione in cui il flusso incontra gli angoli maggiori dell'urto, all'esterno di questa porzione di spazio con velocità subsoniche si torna in campo supersonico grazie ad espansioni successive. A grande distanza dal corpo l'onda d'urto svanisce e la sua inclinazione rispetto alla direzione del flusso libero tende asintoticamente al valore dell'angolo di Mach³⁰.

Nel caso di un corpo conico la configurazione dell'onda d'urto dipende dall'angolo di apertura dello stesso. Se è abbastanza piccolo, inferiore al valore critico, si presenta un urto lineare e attaccato. Al contrario, se l'angolo di apertura è abbastanza grande da essere supercritico, l'urto è curvo e staccato e simile a quello descritto nel primo caso, le caratteristiche della zona sub e supersonica sono funzione della geometria de corpo.

FIGURA 2.16.1: GEOMETRIA URTI

 $^{30}\mu_{\infty} = \arcsin\frac{1}{M_{\infty}}$
2.17 VEICOLI SUPERSONICI E ONDE D'URTO

La forma degli urti che interessano un veicolo ipersonico dipendono dalla sua geometria. Vi è una certa differenza tra la forma degli urti sui veicoli in rientro (RV^{31}) e quelli con crociera ipersonica (CAV^{32}) .



La crescita di entropia, e la conseguente perdita di pressione totale a valle dell'urto, dipendono dalla geometria dell'onda d'urto. Come conseguenza della perdita di pressione totale si ha la nascita della **resistenza d'onda** che si aggiunge a quella di attrito, quella di forma e a quella indotta. Il salto di entropia è maggiore quando l'onda d'urto è normale al flusso e decresce con il ridursi dell'inclinazione.

In generale, maggiore è la zona di campo che vede angoli elevati dell'onda d'urto e maggiore è l'intensità della resistenza d'onda. Ciò spiega perché i veicoli RV, che richiedono elevati valori di resistenza per poter ridurre la propria velocità, siano smussati e con angoli di volo molto grandi, al contrario di quelli del tipo CAV che sono snelli e con piccoli angoli d'incidenza per minimizzare la resistenza totale.

Un altro aspetto per cui è interessante valutare la forma dell'arco d'urto è la possibilità che possano nascere interazioni tra urti e strato limite; tali iterazioni portano a carichi termici e meccanici critici sulla superficie del veicolo.



FIGURA 2.17.3: SCHEMATIZZAZIONE DELL'INTERAZIONE FORTE DI TRA L'URTO TRA L'ARCO DELL'URTO SUL NASO DEL VEICOLO CAV E LA SECONDA APERTURA A DELTA DELL'ALA

Un tipico fenomeno frutto di un'interazione tra urto/urto/strato limite è mostrato nella figura a fianco. Si tratta di un tipico problema che interessa sia i veicoli CAV che RV i quali necessitano di un'ala a doppio delta per ragioni di controllo a velocità di basso subsonico e elevate incidenze.

³¹ Reentry Vehicle

³² Cruise and Acceleration Vehicle



FIGURA 2.17.4: SCHEMATIZZAZIONE DI UNA TRIPLA RAMPA DI UNA PRESA PER *RAMJET*

Altro esempio di una situazione in cui si presenta un'interazione urto/urto/strato limite è relativa alle prese d'aria dei sistemi propulsivi ipersonici. Nella camera di combustione dei motori super e ipersonici il numero di Mach deve essere minore di quello del flusso libero³³ e il flusso viene precompresso. Questa precompressione viene eseguita per mezzo di urti obliqui, non retti per-

ché genererebbero perdite di pressione eccessive. Nell'immagine è possibile osservare una rampa costituita da tre diverse inclinazioni che originano tre onde, le quali convergono nel labbro inferiore della presa che è smussato per meglio resistere ai carichi termici e meccanici. L'interazione tra gli urti obliqui e l'urto curvo è molto critica e può produrre carichi termici eccezionalmente alti sulla superficie del labbro inferiore.

2.18 RELAZIONI DEGLI URTI NORMALI PER NUMERI DI MACH MOLTO ALTI Si valutano le relazioni dell'urto retto nel caso di M_{∞} elevato.

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M_{\infty}^2}{(\gamma-1)M_{\infty}^2+2} \to \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$
$$M_2^2 = \frac{(\gamma-1)M_{\infty}^2+2}{2\gamma M_{\infty}^2-(\gamma-1)} \to \frac{\gamma-1}{2\gamma}$$
$$c_{p_2} = \frac{2(p_2 - p_{\infty})}{\rho V_{\infty}^2} = \frac{4(M_{\infty}^2 - 1)}{(\gamma+1)M_{\infty}^2} \to \frac{4}{\gamma+1}$$

Si noti come i valori ottenuti per questi rapporti siano finiti a valle di un urto retto.

Invece, i rapporti della pressione e della temperatura, insieme al salto entropico, tendono ad infinito con il numero di Mach del flusso libero.

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_{\infty}^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \rightarrow \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_{\infty}^2$$
$$\frac{s_2 - s_{\infty}}{c_{\nu}} = \ln\left[\frac{2\gamma M_{\infty}^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}\right] - \gamma \ln\left[\frac{(\gamma + 1)M_{\infty}^2}{(\gamma - 1)M_{\infty}^2 + 2}\right] \rightarrow \ln\left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1}M_{\infty}^2\right)$$

Al contrario il salto di pressione totale tende a zero in queste condizioni.

Dalla legge di Poisson si ricava:

$$\frac{p_2^0}{p_\infty^0} = \left[\frac{(\gamma+1)M_\infty^2}{(\gamma-1)M_\infty^2+2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma M_\infty^2 - (\gamma-1)}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \to \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma M_\infty^2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

³³ Tra 0.4 e 0.6 per i motori ramjet e tra 2 e 3 negli scramjet.

Infine, se si assume una compressione isentropica a valle dell'urto retto, si può trovare il coefficiente di pressione nel punto di arresto con un valore finito:

$$c_{p_{2}^{0}} = \frac{2(p_{2}^{0} - p_{\infty})}{\rho V_{\infty}^{2}} = \frac{2}{\gamma M_{\infty}^{2}} \left\{ \left[\frac{(\gamma + 1)M_{\infty}^{2}}{(\gamma - 1)M_{\infty}^{2} + 2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left[\frac{\gamma + 1}{2\gamma M_{\infty}^{2} + 2} \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} - 1 \right\} \rightarrow \left[\frac{(\gamma + 1)^{2}}{4\gamma} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \frac{4}{\gamma + 1} \frac{1}{\gamma + 1}$$

2.19 Relazioni per l'urto obliquo a valori di Mach molto alti

Nella maggior parte dei casi, le relazioni per l'urto obliquo sono le stesse di quello retto a patto di sostituire la sola componente normale del Mach a monte in tali equazioni.



$$M_{\infty n} = M_{\infty} \sin \beta$$

FIGURA 2.19.1: SCHEMA URTO OBLIQUO

La differenza si ha nella relazione che determina il valore del numero di Mach, a valle dell'urto, frutto di una composizione vettoriale:

$$M_{2}^{2} = \frac{(\gamma+1)^{2} M_{\infty}^{4} \sin^{2}\beta - 4(M_{\infty}^{2} \sin^{2}\beta - 1)(\gamma M_{\infty}^{2} \sin^{2}\beta + 1)}{[2\gamma M_{\infty}^{2} \sin^{2}\beta - (\gamma-1)][(\gamma-1)M_{\infty}^{2} \sin^{2}\beta + 2]} \xrightarrow{M_{\infty} \gg 0} \frac{(\gamma+1)^{2} - 4\gamma \sin^{2}\beta}{2\gamma(\gamma-1)\sin^{2}\beta}$$

Anche la relazione del coefficiente di pressione dietro l'urto varia:

$$c_{p_2} = \frac{4(M_{\infty}^2 \sin^2 \beta - 1)}{(\gamma + 1)M_{\infty}^2} \xrightarrow{M_{\infty} \gg 0} \frac{4 \sin^2 \beta}{\gamma + 1}$$

Nel punto di arresto:

$$c_{p_{2}^{0}} = \frac{2}{\gamma M_{\infty}^{2}} \left\{ \left[\frac{(\gamma+1)^{2} M_{\infty}^{2} \sin^{2} \beta \left[(\gamma-1) M_{\infty}^{2} + 2 \right]}{[4\gamma M_{\infty}^{2} \sin^{2} \beta - 2(\gamma-1)][(\gamma-1) M_{\infty}^{2} \sin^{2} \beta + 2]} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left[\frac{2\gamma M_{\infty}^{2} \sin^{2} \beta - (\gamma-1)}{\gamma+1} \right] - 1 \right\} \xrightarrow{M_{\infty} \gg 0} \left[\frac{(\gamma+1)^{2}}{4\gamma \sin^{2} \beta} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{4 \sin^{2} \beta}{\gamma+1}$$

Si può notare come il coefficiente di pressione nel punto d'arresto sia maggiore negli urti obliqui, rispetto a quelli retti, per qualsiasi valore di M_{∞} supersonico.

Esiste una relazione che lega i valori dell'angolo di rampa δ , l'angolo dell'urto β e il Mach a monte, per questa ragione si è soliti usare un grafico o delle tabelle che rappresentano tale legame.



In questo modo, note due di queste grandezze è possibile ottenere il valore della terza.

$$\tan \delta = 2 \cot \beta \left[\frac{M_{\infty}^2 \sin^2 \beta - 1}{M_{\infty}^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \right]$$

2.20 Flusso a valle di un urto obliquo: flusso supersonico o subsonico, urto attaccato o staccato?

A valle di un'onda d'urto obliqua, il valore normale del numero di Mach è subsonico, ma il suo valore complessivo può essere sia subsonico che supersonico.

Risolvendo l'equazione per il calcolo del M_2 nell'urto obliquo nel caso in cui questo fosse esattamente uguale ad 1 è possibile ottenere il valore di β per cui si ha la condizione limite di sonicità.

$$\sin^2 \beta_{M_2=1} = \frac{1}{4\gamma M_{\infty}^2} \left[(\gamma+1)M_{\infty}^2 + (\gamma-3) + \sqrt{(\gamma+1)[(\gamma+1)M_{\infty}^4 + 2(\gamma-3)M_{\infty}^2 + (\gamma+9)]} \right]$$

Per angoli più piccoli di questo valore il flusso a valle è supersonico, di conseguenza, per angoli maggiore è invece subsonico.

Il massimo angolo possibile che consenta di mantenere la condizione di urto attaccato è ottenuta risolvendo l'equazione differenziale che lega δ , β e il Mach, riportata in precedenza³⁴, esplicitando β nel caso di δ_{max} .

$$\sin^2 \beta_{\delta_{max}} = \frac{1}{4\gamma M_{\infty}^2} \left[(\gamma + 1)M_{\infty}^2 - 4 + \sqrt{(\gamma + 1)[(\gamma + 1)M_{\infty}^4 + 8(\gamma - 1)M_{\infty}^2 + 16]} \right]$$

```
^{34}\tan\delta = 2\cot\beta \left[\frac{M_{\infty}^{2}\sin^{2}\beta - 1}{M_{\infty}^{2}(\gamma + \cos 2\beta) + 2}\right]
```



Grafico 2.20.1: andamento β e del mach a valle in funzione dell'angolo di rampa e del mach a monte

2.21 Calcolo dei valori limite per $M \to \infty$

Angolo di massima deflessione:

$$\sin^2 \beta_{max} = \frac{1}{4\gamma M_{\infty}^2} \left[(\gamma+1)M_{\infty}^2 - 4 + \sqrt{(\gamma+1)[(\gamma+1)M_{\infty}^4 + 8(\gamma-1)M_{\infty}^2 + 16]} \right] \xrightarrow{M_{\infty} \to \infty} \frac{\gamma+1}{2\gamma}$$
$$\lim_{M_{\infty} \to \infty} \beta_{M_2=1} = \arcsin \sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma}} \xrightarrow{\gamma=1.4} 67.79^{\circ}$$

Massimo angoli di rampa per un urto attaccato:

$$\tan \delta = 2 \cot \beta \left[\frac{M_{\infty}^2 \sin^2 \beta - 1}{M_{\infty}^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \right]$$
$$\lim_{M_{\infty} \to \infty} \tan \delta = \frac{2 \sin \beta \cos \beta}{\gamma + 1 - 2 \sin^2 \beta} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \xrightarrow{\gamma = 1.4} \delta_{max} = 45.58^{\circ}$$

2.22 Flussi supersonici 2D asimmetrici

Il flusso attorno ad un cono è differente da quello di un cuneo per via degli effetti tridimensionali.

Per un dato numero di Mach, e un uguale angolo di rampa, per un cono ed un cuneo si osservano diversi valori di β , più precisamente si osserva un maggiore valore nel caso bidimensionale.

Questo fenomeno è dovuto al fatto che nel caso del cono la terza dimensione fornisce maggiore spazio al gas, quindi è sufficiente un angolo minore per avere lo stesso flusso di massa.





Il flusso a valle di un urto obliquo attaccato è uniforme e parallelo alla superficie del corpo, le linee di flusso hanno la stessa inclinazione δ .

Nel caso di un urto obliquo generato da un flusso supersonico che investe un cono con angolo di attacco nullo si ha una deviazione della corrente in accordo alle relazioni degli urti obliqui riportate in precedenza. Dopo l'urto, le linee di corrente si avvicinano asintoticamente alla direzione della superficie del cono inclinandosi di un angolo δ rispetto alla direzione del flusso libero. Tutte le quantità sono costanti su ogni superficie conica concentrica racchiusa tra la superficie dell'onda e quella del corpo.

Come già detto, M_2 può essere sia subsonico che supersonico a seconda dei valori di M_{∞} e di δ in gioco.

2.23 URTI OBLIQUI DEBOLI E FORTI

Riprendendo il diagramma $\delta - \beta - M$, per un dato angolo di rampa/deflessione si hanno due possibili valori dell'angolo dell'urto separati dalla linea che rappresenta la massima deflessione e distingue due zone, una degli urti deboli³⁵ e una per quelli forti³⁶.



FIGURA 2.23.1: DIAGRAMMA $\theta - \beta - M$

M = 20 1.5 M = 20 1.5 Streamline #2 0.5 0 -1 x/R Sono tutte e due soluzioni fisiche, ma quella degli urti forti è conseguenza di un urto curvo e staccato, per cui la soluzione dell'urto debole è naturalmente privilegiata.

Le soluzioni degli urti deboli possono essere trovate anche in presenza di urti curvi e staccati nelle porzioni di arco che seguono la zona subsonica di tali urti.

A seguire si riporta un esempio di quanto detto per un urto curvo e staccato attorno ad un cilindro. Nelle figure sono rappresentate le linee di corrente, la prima attraversa la zona subsonica frutto di un urto forte per via della forte pendenza dell'onda d'urto incontrata dalla corrente. Mentre, la seconda, entra all'incirca nel punto in cui la zona dopo l'urto è già divenuta sonica e l'urto ha perso di intensità.



FIGURA 2.23.2: GEOMETRIA DELL'URTO E DELLE *STREAMILINE*, INSIEME AD UNA RAPPRESENTAZIONE DELLA DE-FLESSIONE E DEL MACH LUNGO QUESTE ULTIME

³⁵ Quelli che comportano un valore di β minore

 $^{^{36}}$ Con un β maggiore e quindi più vicini all'urto retto che è la condizione più critica

2.24 IL PROBLEMA DEL CORPO ARROTONDATO IPERSONICO

Il corpo tozzo³⁷ è una forma particolarmente importante nell'aerodinamica ipersonica poiché i veicoli che operano in tale range di velocità presentano un "naso" con questa geometria per ridurne il surriscaldamento aerodinamico.

Una conoscenza dettagliata del flusso in questa regione è essenziale per poter operare delle previsioni accurate sulla distribuzione dei flussi di calore e della struttura dello strato entropico creato in questa zona. Anche lo spessore e la forma dell'urto possono avere un forte impatto sulle condizioni superficiali del corpo anche a valle del naso.

Lo studio del flusso inviscido è importante per la previsione della distribuzione di pressione, la forma dell'onda d'urto, la struttura dello strato entropico e il calcolo delle proprietà dello strato limite al bordo.

La prima soluzione pratica venne pubblicata da Moretti e Abbett nel 1966.

La difficoltà nella soluzione del problema supersonico sul corpo tozzo risiedeva nella natura stessa delle equazioni di governo per questo tipo di flusso. Considerando un flusso supersonico stazionario, si può osservare una zona subsonica a valle della porzione di flusso normale all'arco dell'urto, e una supersonica a valle della zona più obliqua. La zona di flusso subsonico è separata da quella supersonica dalla **linea sonica**. Il flusso è regolato dalle equazioni di Eulero in campo stazionario, nella regione **subsonica** sono in forma **ellittica**, in quella **supersonica**, invece, sono in forma **iperbolica**. Per questa ragione i metodi numerici sviluppati per la soluzione esatta della porzione subsonica sono inadeguati per quella supersonica e viceversa.

L'approccio di Moretti e Abbett usa una **soluzione tempo dipendente alle differenze finite** delle equazioni di Eulero instazionarie, partendo da condizioni iniziali arbitrarie, e si calcola il campo di flusso stazionario attraverso un limite asintotico lontano nel tempo. Le equazioni di Eulero instazionarie sono iperboliche rispetto al tempo, non importa che si sia in campo super o subsonico. Pertanto, un metodo *time-marching*³⁸ parte da una scelta arbitraria di condizioni iniziali scelte in maniera opportuna in tutte le regioni che caratterizzano il campo in analisi e analizza la loro evoluzione per *step* temporali.

2.24.1 FISICA DEI FLUSSI IPERSONICI SUL CORPO TOZZO: COMPORTAMENTO DELLA LINEA SONICA



FIGURA 2.24.1: GENERICA LINEA SONICA E COMPORTAMENTO DELLA LINEA CARATTERISTICHE AL CRESCERE DEL NUMERO DI MACH Flussi piani 2-D: l'angolo formato dalla linea sonica con il corpo è sempre acuto. La linea sonica diventa sempre più curva al crescere del Mach.

Flussi asimmetrici 2-D: l'angolo tra linea sonica e corpo rimane acuto fino a Mach prossimi a 3, ma diviene ottuso superato tale valore.

Per definizione, il **limite caratteristico** è il luogo dei punti ognuno dei quali ha un solo punto della linea sonica nel suo rag-

gio d'azione. Nonostante il flusso sia localmente supersonico ovunque, al di fuori della zona subsonica, i disturbi che avvengono tra la linea sonica e il limite caratteristico possono raggiungere la linea sonica, influenzando in questo modo l'intera porzione subsonica del campo di flusso.

³⁷ Un corpo con un raggio di curvatura molto ampio

³⁸ Tempo dipendente

2.24.2 Fisica dei flussi ipersonici sul corpo tozzo: stagnazione e entropia massima delle linee di corrente

Per un corpo asimmetrico con angolo di attacco nullo, il punto di arresto e la sua linea di corrente sono lungo l'asse di simmetria. La linea di corrente, in questo caso, attraversa l'urto curvo con incidenza normale perciò l'entropia raggiunge il valore massimo.

Nel caso asimmetrico³⁹ la forma e la posizione del punto di arresto e della linea di corrente corrispondente non sono note a priori, ma fanno parte della soluzione. In questo caso, la linea di corrente non attraversa perpendicolarmente la curvatura dell'arco di urto e perciò non corrisponde alla condizione di massima entropia. Di conseguenza, la pressione di arresto è maggiore di quella del caso simmetrico perché la perdita di pressione totale è minore.

La linea di corrente del punto d'arresto si avvicina alla porzione del corpo con la curvatura massima, quella a massima entropia nella direzione di decrescita della curvatura del corpo.



FIGURA 2.24.2: STAGNAZIONE ED ENTROPIA MASSIMA STREAMLINE

2.25 CORRELAZIONI PER LA FORMA DELL'URTO IPERSONICO

Le seguenti equazioni, basate su dati sperimentali, sono valide per un gas perfetto con $\gamma = 1.4$ e $M \le 8$ assumendo una forma iperbolica per l'urto:



³⁹ Sia dovuta alla geometria, sia ad un angolo d'attacco diverso da zero

R è il raggio del bordo d'attacco, R_c è quello di curvatura dell'urto al vertice dell'iperbole, Δ è la distanza tra urto e corpo, β è l'angolo dell'onda d'urto ad grande distanza dal bordo d'attacco.

2.26 VARIAZIONE DEL NUMERO DI REYNOLDS ATTRAVERSO L'URTO

La variazione dei parametri caratteristici del flusso attraverso un urto determinano anche una variazione del *Re* dei fenomeni.

Il rapporto tra i *Re* a valle e a monte:

$$\frac{Re_2^u}{Re_\infty^u} = \frac{\rho_2}{\rho_\infty} \frac{V_2}{V_\infty} \frac{\mu_\infty}{\mu_2}$$

Usando una relazione che descrive la variazione della viscosità dinamica in funzione della temperatura è possibile riscrivere il rapporto come segue:

$$\mu = c_{\mu} T^{\omega \mu} \longrightarrow \frac{R e_2^u}{R e_{\infty}^u} = \frac{\rho_2}{\rho_{\infty}} \frac{V_2}{V_{\infty}} \left(\frac{T_{\infty}}{T_2}\right)^{\omega \mu}$$

L'interesse per il numero di Reynolds dopo l'urto è legato al fatto che questo dipende lo sviluppo dello strato limite nel campo.

Attraverso un urto normale la variazione di Re è funzione del solo rapporto tra temperature⁴⁰, le quali aumentando comportano una **riduzione del numero di Reynolds**.

$$\frac{Re_2^u}{Re_\infty^u} = \left(\frac{T_\infty}{T_2}\right)^{\omega\mu}$$

La situazione è più complessa attraverso onde d'urto oblique. Il numero di *Re* può sia crescere che decrescere a seconda dell'angolo dell'urto e del Mach della corrente libera come riportato nei grafici qui si seguito.



GRAFICO 2.26.1: ANDAMENTI DEI RE, PRIME E DOPO L'URTO IN FUNZIONE DI $\theta \in \beta$

2.27 EQUAZIONI DI GOVERNO PER FLUSSO INVISCIDO (EQUAZIONI DI EU-LERO)

Le equazioni di conservazione che descrivono un flusso senza fenomeni viscosi.

Bilancio di massa

$$\rho_t + (\rho u)_x + (\rho u)_y + (\rho u)_z = 0$$

Bilancio di quantità di moto

$$(\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x + (\rho uv)_y + (\rho uw)_z = 0$$

$$(\rho v)_t + (\rho vu)_x + (p + \rho v^2)_y + (pvw)_z = 0$$

$$(\rho w)_t + (\rho wu)_x + (\rho wv)_y + (p + \rho w^2)_z = 0$$

In alternativa alle forme conservative, si può usare l'equazione di Crocco in notazione vettoriale.

$$\vec{v}_t + \nabla h^0 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) - T \nabla S = 0$$

Bilancio di energia

Anche se l'equazione è sempre la stessa si può scrivere in forme differenti più utili a seconda della situazione.

$$e_t + [u(e+p)]_x + [v(e+p)]_y + [w(e+p)]_z = 0$$

$$S_t + uS_x + vS_y + wS_z = 0$$

$$\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right)_t + u\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right)_x + v\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right)_y + w\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right)_z = 0$$

$$h_t^0 + uh_x^0 + vh_y^0 + wh_z^0 = \frac{p_t}{\rho}$$

Dove:

$$e = \rho c_v T + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2 + w^2) \rightarrow$$
 energia totale per unità di volume
 $h^0 = c_p T + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \rightarrow$ entalpia totale per unità di massa

La condizione al contorno a parete è di perfetta tangenza del flusso:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow u n_x + v n_y + w n_z = 0$$

Lontano da parete, invece, le condizioni sono di flusso libero; nel caso di flusso supersonico le condizioni di flusso libero sono sostituite da quelle descritte dalle relazioni di Rankine-Hugoniot per gli urti obliqui.

2.28 Principio di Indipendenza del numero di Mach di Oswatitsch

Per numeri di Mach elevanti, fissata la geometria di un corpo, certi coefficienti di forza tendono a diventare indipendenti dal numero di Mach, come mostrato di seguito.



MACH DEL COEFFICIENTE DI ATTRITO PER UNA SFERA A UN CONO-CILINDRO DA MISURE IN *RANGE* BALISTICO

Questo è vero anche per la forma degli urti curvi, il modello delle linee di corrente, le linee soniche, le linee di Mach nella regione del flusso supersonico, i coefficienti di pressione e, in generale, tutti i coefficienti di momento e di forza.

Quando si parla di limite di $M_{\infty} \rightarrow \infty$ si dovrebbe anche definire come cambia il numero di Mach del flusso libero. Se il Mach varia, a fissati ρ_{∞} e V_{∞} e con $a_{\infty} \rightarrow 0$, allora il flusso dietro l'urto dipende unicamente dal ρ_{∞} e V_{∞} ed è indipendente dalla pressione, dall'entalpia, dalla temperatura e dalla velocità del suono del flusso libero. Fisicamente questa condizione può essere interpretata immaginando che il campo di

flusso venga "congelato", a patto che la velocità del suono a monte sia piccola⁴¹. Matematicamente, il principio di indipendenza del numero di Mach afferma che, per ρ_{∞} e V_{∞} fissati, la soluzione all'interno di un dominio fissato tende uniformemente ad una soluzione limite per $M_{\infty} \rightarrow \infty$.

Quanto appena affermato verrà dimostrato di seguito.

Definendo tre **dimensioni fondamentali di riferimento**: ρ_{∞} per la densità, V_{∞} per la velocità ed *L* per la lunghezza.

Si possono definire delle grandezze di riferimento partendo da quelle fondamentali:

$$p_{ref} = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \qquad h_{ref}^0, h_{ref} = u_{ref}^2 = RT_{\infty} \qquad e_{ref} = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \qquad T_{ref} = \frac{V_{\infty}^2}{R} \qquad S_{ref} = c_v \qquad t_{ref} = \frac{L}{V_{\infty}}$$

A seguite dell'adimensionalizzazione, le equazioni di Eulero rimangono nella stessa forma, tuttavia bisogna tenere presente che le variabili sono intese come adimensionali.

$$Eulero in forma adimensionale \begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x + (\rho u)_y + (\rho u)_z = 0\\ (\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x + (\rho uv)_y + (\rho uw)_z = 0\\ (\rho v)_t + (\rho vu)_x + (p + \rho v^2)_y + (pvw)_z = 0\\ (\rho w)_t + (\rho wu)_x + (\rho wv)_y + (p + \rho w^2)_z = 0\\ e_t + [u(e + p)]_x + [v(e + p)]_y + [w(e + p)]_z = 0 \end{cases}$$

Gli effetti della normalizzazione sono ben visibili in alcune definizioni.

$$e = \frac{1}{\gamma - 1}\rho T + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2 + w^2) \Rightarrow$$
 energia totale adimensionale per unità di volume

Per quanto riguarda la condizione di tangenza del flusso a parete, rimane verificata e si continua ad esprimere allo stesso modo anche con le componenti di velocità adimensionali.

 $^{^{41}}a_{\infty} \rightarrow 0$

Considerando un corpo tozzo, investito da un flusso ipersonico, le condizioni del flusso libero sono date da quelle dopo l'urto.

Le variabili adimensionali sono riportate seguire, con i rispettivi valori per $M_{\infty} \rightarrow \infty$:

$$\frac{\rho_2}{\rho_{\infty}} = \overline{\rho_2} = \frac{(\gamma+1)M_{\infty}^2 \sin^2 \beta}{(\gamma-1)M_{\infty}^2 \sin^2 \beta + 2} \qquad \overline{\rho_2} \to \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

$$\frac{u_2}{V_{\infty}} = \overline{u_2} = 1 - \frac{2(M_{\infty}^2 \sin^2 \beta - 1)}{(\gamma+1)M_{\infty}^2} \qquad \overline{u_2} \to 1 - \frac{2\sin^2 \beta}{\gamma+1}$$

$$\frac{v_2}{V_{\infty}} = \overline{v_2} = \frac{2(M_{\infty}^2 \sin^2 \beta - 1) \cot \beta}{(\gamma+1)M_{\infty}^2} \qquad \overline{v_2} \to \frac{\sin 2\beta}{\gamma+1}$$

$$\frac{p_2}{\rho_{\infty}V_{\infty}^2} = \overline{p_2} = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_{\infty}^2 \sin^2 \beta - 1)\right] \frac{1}{\gamma M_{\infty}^2} \qquad \overline{p_2} \to \frac{2\sin^2 \beta}{\gamma+1}$$

Sia le equazioni di governo che le condizioni al contorno sono indipendenti dal Mach del flusso libero. Quindi, per numeri di Mach sufficientemente grandi, il campo di flusso raggiunge una configurazione limite per cui la forma d'urto, lo schema delle linee di corrente e, in generale, il valore locale di qualsiasi variabile fluidodinamica adimensionale sono indipendenti dal $M_{\infty} \rightarrow \infty$.

La dimostrazione del principio di indipendenza del numero di Mach è stata condotta partendo dalla considerazione di densità e velocità a monte fisse, usandole, come variabili di riferimento. Tuttavia, il risultato finale che afferma che la forma dell'urto, lo schema delle linee di flusso e delle linee di Mach siano indipendenti dal Mach a monte rimane valido, indipendentemente dal modo in cui si sono adimensionalizzate le equazioni.

Quanto detto è valido anche quando M_{∞} tende a infinito perché la $V_{\infty} \rightarrow \infty$ e non perché è la velocità del suono ad essere piccola. In questo caso tutti i parametri termodinamici del flusso libero possono essere considerati costanti, ma V_{∞} non può essere usata per adimensionalizzare.

Tipicamente, le tre variabili fondamentali di riferimento sono: densità, temperatura e lunghezza.

Le altre grandezze di riferimento, definite da quelle fondamentali sono:

$$\begin{aligned} u_{ref} &= \sqrt{RT_{\infty}} \quad p_{ref} = \rho_{\infty} u_{ref}^2 = \rho_{\infty} RT_{\infty} = p_{\infty} \quad h_{ref}^0, h_{ref} = V_{\infty}^2 \quad e_{ref} = \rho_{\infty} u_{ref}^2 \quad t_{ref} \\ &= \frac{L}{u_{ref}} \end{aligned}$$

Certamente, la forma di urto, linee di corrente e linee di Mach sono indipendenti rispetto al valore di Mach della corrente a monte. Rispetto al caso precedente per rendere adimensionali le equazioni, i profili di velocità, quelli di pressione e le altre variabili correlate manterrebbero, nel limite di grandi numeri di Mach, le stesse forme, ma i loro valori numerici dovrebbero essere scalati rispetto a M_{∞} o M_{∞}^2 .

2.29 SIMULAZIONE NUMERICA DI FLUSSI IPERSONICI INVISCIDI

Tipicamente, i moderni metodi CFD⁴² per flussi ipersonici sono basati sulla discretizzazione a volumi finiti risolvendo il campo con le equazioni di governo scritte nella forma integrale conservativa.

Considerando un caso bi-dimensionale per ragioni di semplicità, una scrittura compatta delle equazioni di Eulero in forma integrale conservativa è:

$$\int_{V} \vec{W}_{t} dV + \int_{S} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad \text{dove} \quad \vec{W} = \{\rho, \rho \vec{v}, e\}^{T} \quad , \quad \vec{F} = \{\rho \vec{v}, pI + \rho \vec{v} \vec{v}, (e+p)\vec{v}\}^{T}$$

 \vec{W} rappresenta il vettore delle variabili conservative e \vec{F} il tensore contenente i flussi.

La scrittura per esteso:

$$\int_{V} \rho_{t} dV + \int_{S} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0$$

$$\int_{V} (\rho u)_{t} dV + \int_{S} (pn_{x} + \rho u \vec{v} \cdot \vec{n}) dS = 0$$

$$\int_{V} (\rho u)_{t} dV + \int_{S} (pn_{y} + \rho v \vec{v} \cdot \vec{n}) dS = 0$$

$$\int_{V} e_{t} dV + \int_{S} [(e + p)\vec{v} \cdot \vec{n}] dS = 0$$

Tali equazioni possono essere risolte in un dominio fisico che, nel caso di un flusso ipersonico attorno ad un corpo tozzo, ha, tipicamente, la forma riportata nella figura a lato.

Le condizioni al contorno a parete, per flusso inviscido, stabiliscono che la componente di velocità normale alla superficie deve essere nulla.

Sul limite esterno, la condizioni supersonica può essere ottenuta imponendo che, in quella zona, il flusso sia completamente supersonico. Il dominio computazionale deve essere scelto in maniera tale che la zona subsonica sia al suo interno.

Se la geometria del corpo è simmetrica e l'incidenza nulla le condizioni al contorno potrebbero essere riportate per simmetria sopra-sotto.

Riguardo alle condizioni di input possono essere adottate due filosofie:

- Shock capturing. In questo caso, il limite esterno racchiude l'onda d'urto, ottenuta dalla soluzione del campo di flusso come un rapido cambiamento delle proprietà del flusso all'interno di un certo numero (tipicamente non meno di tre) dei punti della griglia. Le condizioni al contorno sul bordo d'ingresso sono condizioni di flusso supersonico.
- *Shock fitting*. Secondo questo approccio l'urto è trattato esplicitamente come una discontinuità e costituiste il bordo esterno del volume di controllo. Solo la zona di flusso tra l'urto e il corpo viene risolta ricorrendo alle equazioni discretizzate, mentre l'urto il limite esterno, il quale è calcolato usando le relazioni dell'urto obliquo per determinare le proprietà a valle dell'urto.

La filosofia *shock fitting* è un modo molto elegante di risolvere questo tipo di flussi e produce risultati "puliti" che non sono affetti da problemi numerici relativi alla cattura della discontinuità (l'urto) in un numero finito di punti; problema che, al contrario, si verifica nel primo approccio. Tuttavia, il secondo



FIGURA 2.29.1: ZONE URTO

⁴² Computational Fluid Dynamics

approccio diventa più complesso da applicare e potenzialmente non robusto⁴³ nelle applicazioni pratiche dove l'urto può interagire con altre discontinuità. Per questa ragione è una tecnica poco usata oggigiorno.

Le equazioni di Eulero in forma integrale e conservativa in campo instazionario possono essere discretizzate in accordo all'approccio ai volumi finiti dove una cella computazionale rappresenta un volume di controllo finito.

$$\frac{\Delta \overrightarrow{W}_{N,M}}{\Delta t} \Delta V_{N,M} + \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{n_i} \Delta S_i = 0$$

Espandendo il vettore \vec{W} e il tensore \vec{F} :



FIGURA 2.29.2: DISCRETIZZAZIONE IN CELLE 2D

L'integrale di superficie che appare nella forma integrale delle equazioni è stato qui sostituito dalla sommatoria che coinvolge i quattro lati, per un caso 2D, del volume di controllo. Per il caso riportato nella figura i 4 indici i-esimi hanno il seguente significato:

- 1→N-1/2,M
- 2→N,M+1/2
- 3→N+1/2,M
- 4→N,M-1/2

Ad ogni passo temporale⁴⁴, il valore aggiornato di ogni variabile conservativa è ottenuto estraendo il vettore delle variabili conservative dalle equazioni di bilancio discretizzate.

$$\overrightarrow{W}_{N,M}^{k+1} = \overrightarrow{W}_{N,M}^{k} + \Delta \overrightarrow{W}_{N,M} = \overrightarrow{W}_{N,M}^{k} - \frac{\Delta t}{\Delta V_{N,M}} \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{F}_{i} \cdot \overrightarrow{n_{i}} \Delta S_{i}$$

Il punto chiave del processo di integrazione è la valutazione dei flussi.

I flussi sono funzioni delle variabili conservative: $\vec{F} = f(\vec{W})$.

⁴³ La robustezza indica quanto le condizioni analitiche siano in grado di influenzare i risultati ottenuti con un certo metodo.

⁴⁴ L'apice k indica il passo temporale.

Ci sono due problemi da risolvere in questo tipo di problemi: il primo è che il valore delle variabili conservative sono note nei centri cella, ma i flussi sono valutati sulle superfici di interfaccia tra le celle. L'altro problema è legato al fatto che si usano i flussi per calcolare le variazioni di \vec{W} dallo *step k* a quello k + 1.

Perciò le domande a cui bisogna dare risposta sono: come calcolare i flussi sulle interfacce e gli *step* temporali quando valutarli.

La risposta al primo problema è legata alla scelta dello schema numerico usato nella tecnica computazionale che va a definire i valori assegnati a tali flussi. Mentre per il secondo è discriminante la scelta di uno schema esplicito o implicito.

Analizzando il problema della determinazione dei flussi sulle interfacce, una soluzione molto semplice e logica è quella di considerare il valor medio tra i flussi nei due centri cella contigui. Come ad esempio:

$$\vec{F}_{N+1/2,M} = \frac{1}{2} \left(\vec{F}_{N,M} + \vec{F}_{N+1,M} \right) = \vec{F} \left(\vec{W}_{N+1/2,M} \right)$$
$$\vec{W}_{N+1/2,M} = \frac{1}{2} \left(\vec{W}_{N,M} + \vec{W}_{N+1,M} \right)$$

Vi sono schemi centrati semplici e con un'accuratezza del secondo ordine, ma che sono incondizionatamente instabili e richiedono l'aggiunta di diffusione artificiale per acquisire stabilità. Non sono particolarmente adatti per i flussi ipersonici, poiché i livelli di stabilità artificiale richiesti in presenza di forti onde d'urto potrebbero essere troppo grandi e avere un effetto collaterale dannoso.

Schemi numerici particolarmente calzanti per l'aerodinamica ipersonica sono gli schemi chiamati *upwind*. Uno di questo metodi è lo schema **FDS**⁴⁵. I flussi inviscidi laterali, \vec{F} , sono valutati attraverso ogni superficie laterale definendo, e risolvendo, un appropriato problema di Riemann. La definizione di quest'ultimo consiste, in primis, nel fissare una direzione X unendo i centroidi di due volumi finiti col-





legati dalla superficie laterale in esame. A questo punto va calcolata, la variazione delle variabili nel campo del flusso lungo X. A seguito della discretizzazione, due distribuzioni costanti a tratti (accuratezza del primo ordine) o lineari a tratti (accuratezza del secondo ordine) delle variabili del campo di flusso sono presenti tra le celle A e B, separate da una discontinuità in corrispondenza delle superfici laterali. Il collasso di queste discontinuità nel tempo genera un modello di onde lungo le quali propaga il segnale. Le onde separano il dominio in prossimità delle discontinuità in un gruppo di regioni uniformi dove i valori delle variabili di campo devono essere

trovati, generando, in questo modo, un problema di Riemann.

Per ottenere le direzioni e i corrispondenti segnali, le equazioni di governo sono riportate in una forma quasi-lineare in un nuovo piano di riferimento globale, caratterizzato dagli assi $\xi \in \eta$ che sono, rispettivamente, normali e tangenziali alla superficie interessata, come si può osservare in figura. Una soluzione approssimata del problema di Riemann può essere cercata. Laddove gli urti possono essere generati dal collasso di discontinuità iniziali queste sono approssimate da onde di compressione, ma le forme conservative delle equazioni assicurano le corrette relazioni di salto e di entropia attraverso le discontinuità. Per di più, il problema di Riemann è risolto, per semplicità, in una sola dimensione spaziale piuttosto

⁴⁵ Flux-Difference Splitting

che in due, così da considerare i gradienti delle variabili di campo nella sola direzione di ξ . Tutti i gradienti in direzione η sono trascurati e le equazioni di Eulero tempo dipendenti, per un flusso unidimensionale, possono essere scritte in forma quasi lineare.

$$p_t + \tilde{u}p_{\xi} + \rho a^2 \tilde{u}_{\xi} = 0$$
$$u_t + u\tilde{u}_{\xi} + \frac{p_{\xi}}{\rho} = 0$$
$$\tilde{v}_t + \tilde{u}\tilde{v}_{\xi} = 0$$
$$h_t - \frac{p_t}{\rho} + \tilde{u}\left(h_{\xi} - \frac{p_{\xi}}{\rho}\right) = 0$$

Data la loro natura iperbolica, le equazioni quasi-lineari possono essere sostitute con le **equazioni di compatibilità** che descrivono la convezione dei segnali. In questo caso, il collasso delle discontinuità tra A e B genera un modello di quattro onde⁴⁶ lungo le quali propagano i segnali⁴⁷ definiti dalle equazioni di compatibilità. Le **invarianti di Riemann** e le **pendenze caratteristiche** corrispondenti sono:



L'integrazione approssimata delle variabili di Riemann attraverso onde di differenti famiglie porta a valutare il campo di flusso nelle regioni sconosciute
$$c \in d$$
 e, quindi, al calcolo dei flussi secondo l'approccio di separazione della differenza di flusso.

 $\lambda_{2,4} = \tilde{u}$

Per avere un'accuratezza del secondo ordine nello spazio e nel tempo si seguono le linee guida delle **tecniche di cattura** degli urti degli schemi **ENO**⁴⁸.

Nello spazio, è assunta una distribuzione lineare a tratti delle variabili primitive $U = \{p, u, v, h\}$ scegliendo le condizioni iniziali del problema di Riemann. Facendo riferimento alle precedenti figure d'esempio:

$$U_{cellaA} = U_{I,J} + s_{I,J}(X - X_{I,J})$$
$$U_{cellaB} = U_{I+1,I} + s_{I+1,I}(X - X_{I+1,I})$$

Le pendenze *s* sono derivate dagli schemi ENO per evitare oscillazioni spurie nelle discontinuità del flusso. In particolare, le pendenze delle invarianti di Riemann⁴⁹ sono calcolate lungo le linee con I e J

⁴⁶ Linee caratteristiche

⁴⁷ Invarianti di Riemann

⁴⁸ Essentially Non Oscillatory

⁴⁹ $\Delta R_i / \Delta X$ con *i* che va da 1 a 4 nel nostro esempio.

costanti⁵⁰, a questo punto si applica un operatore *minmod*⁵¹ per ammorbidire le oscillazioni. Infine, si ricorre alle definizioni delle invarianti di Riemann riportate prima per ottenere i valori di $\Delta U/\Delta X$ dalle pendenze.

L'accuratezza del secondo ordine è raggiunta calcolando delle derivate temporali $U_t = \{p_t, u_t, v_t, h_t\}$ attraverso la forma quasi lineare delle equazioni di Navier-Stokes. Le derivate in $x \in y$ sono ottenute attraverso la rotazione delle derivate spaziali di $I \in J$ già valutate per l'accuratezza spaziale.

Con le correzioni spaziali e temporali del secondo ordine appena descritte, i valori iniziali del problema di Riemann sono forniti dalle seguenti equazioni:



FIGURA 2.29.5: ANDAMENTO DELLA GRAN-DEZZA U NELLE DUE CELLE CON UNA CORRE-ZIONE AL SECONDO ORDINE

2.30 ESTENSIONE DEL PROBLEMA AL CAMPO DI FLUSSI 2D ASSIALSIMMETRICI

L'estensione a flussi bidimensionali assialsimmetrici può essere ottenuta aggiungendo ai termini l'equazione del momento radiale e con un'opportuna modifica nella valutazione delle superfici laterali e nei volumi delle celle.

Un flusso è assialsimmetrico quando non ci sono variazioni azimutali (θ), non si hanno perciò gradienti per le generiche variabili fluido-dinamiche rispetto all'angolo azimutale.

Per ottenere le equazioni per flusso assialsimmetrico, si può immaginare una cella 3D isolata la cui sezione nel piano x-y⁵² è mostrata nell'immagine sotto. Nella terza direzione azimutale θ , la dimensione della cella è arbitrariamente molto piccola.



Le superfici laterali e il volume per la cella tridmensionale:

$$\Delta S_i = s_i y_i d\theta$$

$$\Delta V = A y_c d\theta$$

I flussi convettivi che attraversano le superfici laterali⁵³ sono nulli perchè la convezione non è possibilie attraverso queste superifici in virtù

⁵⁰ I e J sono le coordinate delle celle in accordo alle figure riportate.

⁵¹ Restituisce il più piccolo valore in modulo. Se tutti i termini sono strettamente positivi fornirà il più piccolo tra loro, se sono strettamente negativi il più grande.

⁵² Dove x è la coordinata assiale e y quella radiale.

⁵³ In direzione θ

della simmetria assiale. Tuttavia, la pressione può agire su queste superfici generando una forza risultante in direzione y. Per cui si può prendere in considerazione una forza nella componente y nell'equazione di bilancio del momento.

Le forze agenti sulle superfici laterali con un versore normale alla direzione θ sono:

•
$$x \rightarrow 0$$

• $y \rightarrow -2p \sin \frac{d\theta}{2s} A \approx -p d\theta A$
• $z \rightarrow 0$

Includendo il contributo della forza nell'equazione di bilancio:

$$\frac{\Delta(\rho v)_{N,M}}{\Delta t}A_{N,M}y_{c_{N,M}}d\theta + \sum_{i=1}^{4}(p_{i}n_{xi} + \rho_{i}u_{i}\overrightarrow{v_{i}}\cdot\overrightarrow{n_{i}})\underbrace{s_{i}y_{i}d\theta}_{\Delta S_{i}}\boxed{-pd\theta A} = 0$$

Da cui:

$$\frac{\Delta(\rho v)_{N,M}}{\Delta t}A_{N,M}y_{c_{N,M}} + \sum_{i=1}^{4}(p_i n_{xi} + \rho_i u_i \overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{n_i})s_i y_i - pA = 0$$

Le altre equazioni di bilancio mantengono la loro forma, ma le superfici laterali e i volumi vanno calcolati secondo le equazioni derivate dalla nuova definizione di volume di controllo⁵⁴.

${}^{54}\Delta S_i = s_i y_i d\theta \; ; \; \Delta V = A y_c d\theta$

2.31 AERODINAMICA IPERSONICA VISCOSA

2.31.1 EQUAZIONI DI GOVERNO

Il riscaldamento aerodinamico e l'attrito a parete sono aspetti molto importanti in campo ipersonico.

La comprensione e la predizione di questi fenomeni richiede lo studio degli effetti viscosi. In un primo momento si analizza un flusso freddo ipersonico, così da poter trascurare la combinazione degli effetti viscosi con le alte temperature, nonostante siano frequenti e molto importanti nel campo alto ipersonico.

Le equazioni di governo per i flussi viscosi sono quelle di Navier-Stokes, riportate di seguito sia nella forma integrale che in quella differenziale.

$$Integral N - S \begin{cases} \int_{Vol} \vec{W}_{t} \, dVol + \int_{S} \vec{F}_{I} \cdot \vec{n} dS + \int_{S} \vec{F}_{V} \cdot \vec{n} dS = 0 \\ \vec{W} = \{\rho, \rho \vec{V}, e\}^{T} \\ \vec{F}_{i} = \{\rho \vec{P}, \rho \vec{V}, e\}^{T} \\ \vec{F}_{i} = \{\rho \vec{P}, \rho \vec{V}, e + \rho \vec{V} \vec{V}, (e + p) \vec{V}\}^{T} \\ \vec{F}_{V} = \{0, -\bar{\tau}, -\bar{\tau} \cdot \vec{V} - k \nabla T\}^{T} \end{cases}$$

$$Differential N - S \begin{cases} \rho_{t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \\ (\rho \vec{V})_{t} + \nabla p + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) - \nabla \cdot \bar{\tau} = 0 \\ e_{t} + \nabla \cdot [(e + p) \vec{V}] - \nabla \cdot (\bar{\tau} \cdot \vec{V}) - \nabla \cdot (k \nabla T) = 0 \end{cases}$$

$$\bar{\tau} = \vec{\tau}_{x} \vec{\iota} + \vec{\tau}_{y} \vec{J} + \vec{\tau}_{z} \vec{k}$$

$$\begin{cases} \vec{\tau}_{x} = \tau_{xx} \vec{\iota} + \tau_{xy} \vec{J} + \tau_{xz} \vec{k} \\ \vec{\tau}_{y} = \tau_{yx} \vec{\iota} + \tau_{yy} \vec{J} + \tau_{yz} \vec{k} \\ \vec{\tau}_{z} = \tau_{zx} \vec{\iota} + \tau_{zy} \vec{J} + \tau_{zz} \vec{k} \end{cases}$$

$$\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial v_{j}}{\partial x_{i}} + \frac{\partial v_{i}}{\partial x_{j}} \right) - \frac{3}{2} (\nabla \cdot \vec{V}) \delta_{ij} \right]$$

L'ipotesi di Stokes per cui $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ è stata rafforzata.

Espandendo i sistemi nelle tre coordinate cartesiane:

$$\int_{Vol} \rho_t \, dVol + \int_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0$$

$$\int_{Vol} (\rho u)_t \, dVol + \int_S (pn_x + \rho u \vec{V} \cdot \vec{n}) dS - \int_S (\vec{\tau}_x \cdot \vec{n}) dS = 0$$

$$\int_{Vol} (\rho v)_t \, dVol + \int_S (pn_y + \rho v \vec{V} \cdot \vec{n}) dS - \int_S (\vec{\tau}_y \cdot \vec{n}) dS = 0$$

$$\int_{Vol} (\rho w)_t \, dVol + \int_S (pn_z + \rho w \vec{V} \cdot \vec{n}) dS - \int_S (\vec{\tau}_z \cdot \vec{n}) dS = 0$$

$$\int_{Vol} (e)_t \, dVol + \int_S [(e + p) \vec{V} \cdot \vec{n}] dS - \int_S (\vec{\tau}_x \cdot \vec{V} n_x + \vec{\tau}_y \cdot \vec{V} n_y + \vec{\tau}_z \cdot \vec{V} n_z + k \nabla T \cdot \vec{n}) dS = 0$$

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla \cdot \left(\rho \vec{V}\right) = 0\\ (\rho u)_t + p_x + \nabla \cdot \left(\rho u \vec{V}\right) - \nabla \cdot \vec{\tau}_x = 0\\ (\rho v)_t + p_y + \nabla \cdot \left(\rho v \vec{V}\right) - \nabla \cdot \vec{\tau}_y = 0\\ (\rho w)_t + p_z + \nabla \cdot \left(\rho w \vec{V}\right) - \nabla \cdot \vec{\tau}_z = 0\\ e_t + \nabla \cdot \left[(e+p) \vec{V}\right] - \nabla \cdot \left(\bar{\tau} \cdot \vec{V}\right) - \nabla \cdot (k \nabla T) = 0 \end{cases}$$

La forma differenziale non conservativa:

$$\begin{cases} \rho_t + \rho \nabla \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \nabla \rho = 0 \\ \rho \frac{Du}{Dt} + p_x - \nabla \cdot \vec{\tau}_x = 0 \\ \rho \frac{Dv}{Dt} + p_y - \nabla \cdot \vec{\tau}_y = 0 \\ \rho \frac{Dw}{Dt} + p_z - \nabla \cdot \vec{\tau}_z = 0 \\ \rho \frac{D(e_{int} + V^2/2)}{Dt} + \nabla \cdot \left(p \vec{V} \right) - \nabla \cdot \left(\vec{\tau} \cdot \vec{V} \right) - \nabla \cdot (k \nabla T) = 0 \end{cases}$$

L'equazione di bilancio dell'energia può essere anche scritta usando l'entalpia al posto dell'energia totale.

$$\rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} + \bar{\tau} \cdot \nabla \vec{V} - \nabla \cdot (k \nabla T) = 0$$
$$e_{int} = h - \frac{p}{\rho} \implies \frac{De_{int}}{Dt} = \frac{Dh}{Dt} - \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}$$

2.32 CONDIZIONI AL CONTORNO

La prima condizione al contorno riguarda la velocità, tipicamente si pone la velocità a parete uguale a zero, condizione di aderenza. Questa condizione è valida in buona parte dei flussi ipersonici.

Nel caso di flussi a bassa densità, quando il numero di Knudsen è abbastanza grande da poter assumere un regime di scorrimento, allora la componente di velocità parallela alla parete deve essere considerata non nulla.

Altra condizione è legata alla temperatura a parete.

In flussi viscosi compressibili, la presenza dell'equazione dell'energia necessita di una ulteriore condizione al contorno, tale condizione è generalmente legata alla temperatura a parete o sul flusso di calore a parete.

Se si fissa la temperatura a parete in modo che la $T_w = cost$ o, nel caso in cui vari lungo il corpo, sia costante in ogni punto della superficie.

Imponendo il flusso di calore a parete, si considera noto tale flusso⁵⁵; un caso limite di ciò si ha quando si considera una superficie termicamente isolata, per cui $q_w = 0$. Per poter avere questa condizione significa porre il gradiente di temperatura nullo e una parete perfettamente adiabatica.

⁵⁵ $q_w = k_w (\partial T / \partial n)_w$

In generale, il flusso di calore a parete non è noto e il calcolo della fluidodinamica è accoppiato a quello del trasferimento di calore all'interno del corpo bagnato dal flusso. In questo caso, la condizione al contorno all'interfaccia tra il fluido e il solido è:

$$(q_w)_{solid} = (q_w)_{fluid} \longrightarrow \left[k_w \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_w\right]_{solid} = \left[k_w \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_w\right]_{fluid}$$

In questi ultimi due casi, la temperatura a parete non è nota e rappresenta il risultato del calcolo. Per flussi a bassa densità esiste una condizione di scorrimento anche sulla temperatura.

2.33 PROPRIETÀ DI TRASPORTO (PER UN GAS NON REATTIVO)

2.33.1 VISCOSITÀ DELL'ARIA μ =[kg/ms]

Dalla **teoria di Chapman-Enskog**, valida per particelle monoatomiche pure, ma anche per gas poliatomici; il diametro delle collisioni $\sigma = 3.617 \ 10^{-6} m$, **l'integrale adimensionale della collisione** Ω_{μ} è una funzione del rapporto tra la temperatura e il secondo parametro di Lennard-Jones ϵ/k che, per l'aria, è pari a 97 K.

$$\mu = 2.6693 \cdot 10^{-6} \frac{\sqrt{MT}}{\sigma^2 \Omega_{\mu}}$$

Dalla **legge di Sutherland**: $\mu_{Suth} = 1.458 \cdot 10^{-6} \frac{T^{1.5}}{T+110.4}$.

Si ottengono in questo modo le seguenti approssimazioni delle leggi di potenza⁵⁶:

$$\mu_1 = c_{\mu 1} T^{\omega_{\mu 1}} = 0.702 \cdot 10^{-7} T \qquad per T \le 200 K \qquad c_{\mu 1} \text{ calcolato a } T = 97 K$$
$$\mu_2 = c_{\mu 2} T^{\omega_{\mu 2}} = 0.04644 \cdot 10^{-5} T^{0.65} \qquad per T \ge 400 K \qquad c_{\mu 2} \text{ calcolato a } T = 407.4 K$$

2.33.2 Conduttività termica k=[W/mK]

Ancora dalla teoria di Chapman-Enskog valida per un gas puro mono-atomico (non esiste una simile relazione per gas poliatomici).

$$k = 8.3225 \cdot 10^{-2} \frac{\sqrt{MT}}{\sigma^2 \Omega_k} \qquad \Omega_k = \Omega_\mu$$

Dalla **formula di Euken**, una relazione approssimata che prende in considerazione gli scambi di energia rotazionale e vibrazionale di gas poli-atomici, nel caso mono-atomico si ha $c_p = 5R/2M$

$$k = \left(c_p + \frac{5}{4}\frac{R}{M}\right)\mu$$

Per la legge di Hansen, similmente a quella di Sutherland, funzione della sola temperatura:

$$k_{Han} = 1.993 \cdot 10^{-3} \frac{T^{1.5}}{T + 112.0}$$

⁵⁶ "Una legge di potenza (*power law*) è una qualsiasi relazione del tipo: $(f(x) = ax^k + o(x^k), x \to 0)$ dove a e k sono costanti e $o(x^k)$ è una funzione asintoticamente piccola di x^k . k è di solito chiamato esponente di scala." https://it.wikipedia.org/wiki/Legge di potenza

I valori approssimati delle leggi di potenza:

$$\begin{aligned} k_1 &= c_{k1} T^{\omega_{k1}} = 9.572 \cdot 10^{-5} T & per \ T \leq 200 K & c_{k1} \ calcolato \ a \ T = 100 K \\ k_2 &= c_{k2} T^{\omega_{k2}} = 34.957 \cdot 10^{-5} T^{0.75} & per \ T \geq 400 K & c_{k2} \ calcolato \ a \ T = 300 K \end{aligned}$$

2.33.3 VARIAZIONE DEL NUMERO DI PRANDTL CON LA TEMPERATURA

Se il c_p è stato valutato senza considerare l'eccitazione vibrazionale, che è una buona approssimazione per basse temperature, allora il numero di Prandtl può essere considerato costante.

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k} = \frac{c_p}{c_p + 1.25R/M} = \frac{4\gamma}{9\gamma - 5}$$

Se, diversamente, il c_p è frutto di considerazioni legate anche all'energia vibrazionale:

$$c_p = 3.5R_{air} + y_{O_2}c_{v_{vibr}O_2} + y_{N_2}c_{v_{vibr}N_2}$$

Così facendo il numero di Prandtl diventa funzione della temperatura, assumendo condizioni di energia vibrazionale in equilibrio.

2.34 Equazioni per lo strato limite per flussi compressibili

Il concetto di strato limite, proposto da Ludwig Prandtl nel 1904, ha rivoluzionato la dinamica dei fluidi. L'idea di base è che, per alti *Re*, esista una regione molto sottile dove gli effetti viscosi sono importanti. In questa regione, chiamata strato limite, sono presenti dei gradienti di velocità per cui è nulla a parete e prossima a quella del flusso inviscido sul bordo superiore dello strato limite.

Tra le assunzioni dello strato limite vi è quella che il suo spessore, indicato con δ , sia molto piccolo rispetto alla dimensione globale del corpo, L.

 $\delta \ll L$

Le equazioni dello strato limite sono una forma ridotta di quelle di Navier-Stokes per flusso stazionario. La forma ridotta è ottenuta mediante un'analisi dimensionale dell'equazioni di N-S complessive e sono ragionevolmente valide all'interno dello strato limite.

In confronto alle equazioni per lo strato limite per flussi incompressibili l'equazione dell'energia, qui, è parte di un set di equazioni di governo perché la densità e tutte le proprietà di trasporto non sono costanti.

Il primo passo per la derivazione delle equazioni per lo strato limite in campo compressibile è partire dalle equazioni di Navier-Stokes in forma adimensionale usando $\rho_{ref} = \rho_e$, $p_{ref} = p_e$, $T_{ref} = T_e$, $V_{ref} = V_e$, $h_{ref} = h_e$ come valori di riferimento.

$$(\rho u)_{x} + (\rho v)_{y} = 0$$

$$\rho u u_x + \rho v u_y + \frac{1}{\gamma M_e^2} p_x - \frac{1}{Re_e} \left[(\tau_{xx})_x + (\tau_{xy})_y \right] = 0$$
$$\rho u v_x + \rho v v_y + \frac{1}{\gamma M_e^2} p_y - \frac{1}{Re_e} \left[(\tau_{yx})_x + (\tau_{yy})_y \right] = 0$$

$$\rho u h_x + \rho v h_y - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(u p_x + v p_y \right) - \frac{(\gamma - 1)M_e^2}{Re_e} \left(\tau_{xx} u_x + \tau_{xy} u_y + \tau_{yx} v_x + \tau_{yy} v_y \right)$$
$$- \frac{1}{Re_e P r_e} \left[\left(kT_x \right)_x + \left(kT_y \right)_y \right] = 0$$

Considerando l'equazione di bilancio della massa:

$$\underbrace{(\rho u)_{x}}_{\substack{0(1)0(1)\\0(1)}} + \underbrace{(\rho v)_{y}}_{\substack{0(1)[v]\\0(\delta)}} = 0 \qquad => [v] = O(\delta)$$

La componente di velocità assiale, u, varia dal valore zero a parete fino a V_e , la velocità del flusso esterno, scelta per la normalizzazione delle grandezze.

Considerando, poi, l'equazione di bilancio della quantità di moto, lungo l'asse x, dove sono riportati in maniera esplicita gli sforzi viscosi:

$$\underbrace{\underbrace{\rho u u_x}_{O(1)} + \underbrace{\rho v u_y}_{O(1)} + \underbrace{\frac{1}{\underline{\gamma M_e^2}} p_x}_{\frac{1}{\underline{\gamma M_e^2}} O(1)} - \frac{1}{Re_e} \left[\left(\underbrace{\frac{4}{\underline{3}\mu u_x}}_{O(1)} - \underbrace{\frac{2}{\underline{3}\mu v_y}}_{O(1)} \right)_x + \left(\underbrace{\mu u_y}_{O\left(\frac{1}{\delta^2}\right)} + \underbrace{\mu v_x}_{O(1)} \right)_y \right] = 0$$

L'unica possibilità per mantenere i termini viscosi nell'equazione è fare in modo che il Re sia dello stesso ordine di grandezza di $1/\delta^2$.

$$Re_e = O\left(\frac{1}{\delta^2}\right)$$

In tal caso tutti i termini viscosi, fatta eccezione per μu_y , spariscono e l'equazione per lo strato limite compressibile diviene:

$$\rho u v_x + \rho v v_y + \frac{1}{\gamma M_e^2} p_y - \frac{1}{Re_e} (\mu u_y)_y = 0^{57}$$

in forma dimensionale:

$$uv_x + \rho vv_y + p_y - \left(\mu u_y\right)_y = 0$$

Ripetendo quanto fatto lungo la direzione y dell'equazione della quantità di moto:

$$\underbrace{\underbrace{\rho u v_x}_{o(\delta)} + \underbrace{\rho v v_y}_{o(\delta)} + \underbrace{\frac{1}{\gamma M_e^2} p_y}_{\frac{1}{\gamma M_e^2} o(\frac{1}{\delta})} - \frac{1}{Re_e} \left[\left(\underbrace{\underbrace{\mu u_y}_{o(\frac{1}{\delta})} + \underbrace{\mu v_x}_{o(\delta)}}_{o(\frac{1}{\delta})} \right)_x + \left(\underbrace{\underbrace{\frac{4}{3} \mu v_y}_{o(\frac{1}{\delta})} - \underbrace{\frac{2}{3} \mu u_x}_{o(\frac{1}{\delta})}}_{o(\frac{1}{\delta})} \right)_y \right] = 0$$

In questo caso, salvo che il numero di Mach esterno non sia molto alto, il termine che esprime il gradiente di pressione è predominante rispetto agli altri; così, la considerazione fatta per lo strato limite classico che $p_y = 0$ è valida anche per gli strati limite compressibili. Si tratta di un risultato molto importante che consente la distribuzione di pressione del flusso esterno non viscoso anche all'interno dello strato limite.

$$p_x = (p_e)_x$$

⁵⁷ Un incremento nel valore del numero di Mach comporta una perdita di importanza del gradiente di pressione.

L'equazione può essere usata per valutare il gradiente di pressione nell'equazione della quantità di moto lungo y.

La condizione $p_y = 0$ non è necessariamente vera per elevati Mach. Qualora non fosse più valida questa teoria dello strato limite non sarebbe più applicabile e rendendosi necessario risolvere la versione completa delle equazioni di Navier-Stokes.

In un primo momento della trattazione si considererà valida la relazione secondo cui il gradiente di pressione lungo y è nullo, ma flussi viscosi ipersonici non è vero e verrà modificata la trattazione in seguito.

L'ultima equazione da considerare è quella dell'energia:

,

$$\begin{split} \underbrace{\rho u h_x}_{O(1)} + \underbrace{\rho v h_y}_{O(1)} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(\underbrace{u p_x}_{O(1)} + \underbrace{v p_y}_{O(1)} \right) - \underbrace{\frac{(\gamma - 1)M_e^2}{Re_e}}_{(\gamma - 1)M_e^2O(\delta^2)} \underbrace{[\frac{4}{3}\mu u_x^2}_{O(1)} - \frac{2}{3}\underbrace{\mu v_y u_x}_{O(1)} + \underbrace{\mu u_y^2}_{O(1)} + \underbrace{\mu u_y v_x}_{O(1)} + \underbrace{\mu u_y v_x}_{O(1)} + \underbrace{\mu v_x^2}_{O(\delta^2)} + \underbrace{\frac{4}{3}\mu v_y^2}_{O(1)} - \underbrace{\frac{2}{3}\mu u_x v_y}_{O(1)} - \underbrace{\frac{1}{Re_e Pr_e}}_{\frac{1}{Pr_e}O(\delta^2)} \left[\underbrace{(kT_x)_x}_{O(1)} + \underbrace{(kT_y)_y}_{O(\frac{1}{\delta^2})} \right] = 0 \end{split}$$

La scrittura si semplifica sensibilmente assumendo $p_y = 0$.

$$\rho u h_x + \rho v h_y - \frac{\gamma - 1}{\gamma} (u p_x) - \frac{(\gamma - 1)M_e^2}{Re_e} \mu (u_y)^2 - \frac{1}{Re_e P r_e} (kT_y)_y = 0$$

In forma dimensionale:

$$\rho u h_x + \rho v h_y - u p_x - \mu (u_y)^2 - (kT_y)_y = 0$$

Ricapitolando, la formulazione finale delle equazioni dello strato limite compressibile:

$$\begin{cases} (\rho u)_{x} + (\rho v)_{y} = 0\\ \rho u u_{x} + \rho v u_{y} + (p_{e})_{x} - (\mu u_{y})_{y} = 0\\ \rho u h_{x} + \rho v h_{y} - u(p_{e})_{x} - \mu (u_{y})^{2} - (kT_{y})_{y} = 0 \end{cases}$$

L'equazione della quantità di moto lungo y è considerata all'interno della dicitura $p = p_e(x)$. Dato che la pressione è costante all'interno dello strato limite, la densità può essere calcolata attraverso della legge dei gas perfetti⁵⁸.

Il legame tra la temperatura e l'entalpia arriva da:

$$dh = c_p(T)dT \implies h = h^0 + \int_{T_0}^T c_p(T) dT$$

se il c_p può essere considerato costante si ha:

$$h = c_p T$$

La viscosità e la conduttività termica sono funzioni della temperatura.

A questo punto ciò che si è ottenuto sono sette equazioni in altrettante variabili ρ , u, v, h, T, μ , k.

 $^{58}\rho = \frac{p_e}{BT}$

Per quanto concerne le condizioni al contorno:

$$u_{w} = 0$$

$$T_{w} = 0$$
 per y = 0

$$u = V_{e}$$

$$T = T_{e}$$
 per y $\rightarrow \infty$

2.35 Self-Similar Solution



FIGURA 2.35.1: PROFILI DI VELOCITÀ

Le soluzioni *self-similar* per le equazioni dello strato limite sono soluzioni che, se rappresentate in un sistema trasformato di coordinate appropriato, sono indipendenti dalla loro particolare posizione all'interno del corpo.

2.36 LA TRASFORMATA DI LEES-DORODNISTYN

Per ricercare questa tipologia di soluzioni, si usa una particolare funzione di trasformazione chiamata **trasformata di Lees-Dorodnistyn**. Diversi autori hanno dato il loro contributo proponendo trasformate leggermente diverse.

Il passaggio fondamentale è trasformare le variabili indipendenti x e y in ξ e η :

$$\xi = \int_0^x \rho_e V_e \mu_e \, dx \qquad \xi_x = \rho_e V_e \mu_e \quad , \qquad \xi_y = 0$$
$$\eta = \frac{V_e}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho \, dy \qquad \eta_y = \frac{\rho V_e}{\sqrt{2\xi}}$$

Usando la regola di derivazione per trasformare le derivate rispetto ad x ed y:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta_x$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta_y$$

Il pedice in x o y indica la variabile rispetto a cui avviene la derivazione. I termini spaziali trasformati⁵⁹ possono essere ottenuti dalle definizioni delle coordinate trasformate.

La formula per η_x non è stata riportata perché non necessaria nella successiva trattazione.

Si introducono le funzioni di flusso per il caso compressibile:

$$\begin{cases} \psi_x = -\rho v \\ \psi_y = \rho u \end{cases}$$

A seguito di alcune sostituzioni si trasforma l'equazione della quantità di moto lungo x per lo strato limite in:

$$\frac{\rho V_e}{\sqrt{2\xi}}\psi_{\eta}\left[\rho_e V_e \mu_e u_{\xi} + \eta_x u_{\eta}\right] - \frac{\rho V_e}{\sqrt{2\xi}}u_{\eta}\left[\rho_e V_e \mu_e \psi_{\xi} + \eta_x \psi_{\eta}\right] + \rho_e V_e \mu_e u_{\xi} - \frac{\rho V_e}{\sqrt{2\xi}}\left(\frac{\rho V_e}{\sqrt{2\xi}}\mu u_{\eta}\right)_{\eta}$$

La trasformazione delle variabili dipendenti avviene per mezzo di una funzione $f(\xi, \eta)$ tale che:

$$f' = \frac{u}{V_e} = \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

 V_e è solo funzione di x, ovvero della coordinata assiale lungo il corpo, perciò anche di ξ , per cui si ha $V_e = V_e(\xi)$. La derivata parziale di *u* rispetto a x e y sarà:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \xi} = f' \frac{\partial V_e}{\partial \xi} + V_e \frac{\partial f'}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = f'' \end{cases}$$

In questo modo si è dimostrato che f è una funzione di flusso legata a ψ , infatti:

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \implies \rho V_e f' = \frac{\rho V_e}{\sqrt{2\xi}} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \implies f' \sqrt{2\xi} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}$$

Integrando quest'ultima scrittura dalla parete alla generica posizione η :

$$\psi = \sqrt{2\xi}f + F(\xi)$$

Avendo a parete $\psi = 0$ allora anche $f(\xi, 0) = 0$ e $F(\xi) = 0$, quindi: $\psi = \sqrt{2\xi}f$.

A questo punto è possibile riscrivere l'equazione della quantità di moto come segue:

$$(Cf'')' + ff'' = \frac{2\xi}{V_e} \Big[(f')^2 - \frac{\rho_e}{\rho} \Big] V_{e\xi} + 2\xi \big(f'f_{\xi}' - f_{\xi}f'' \big) \qquad \begin{cases} dp_e = -V_e dV_e \\ C = \frac{\rho u}{\rho_e \mu_e} \end{cases}$$

La trasformata dell'equazione di quantità di moto per lo strato limite diviene:

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0$$

 $^{^{59}\}xi_x,\xi_y,\eta_x,\eta_y$

L'equazione dell'energia trasformata si può ottenere in modo analogo introducendo la variabile indipendente:

$$g(\xi,\eta) = \frac{h}{h_e}$$

Applicando tutte le trasformazioni, la scrittura finale per l'equazione dell'energia diventa:

$$\left(\frac{C}{Pr}g'\right) + fg' = 2\xi \left[f'g_{\xi} - g'f_{\xi} + \frac{\rho_e V_e}{\rho h_e}f'V_{e\xi}V_e\right] - C\frac{V_e^2}{h_e}(f'')^2$$

Le equazioni per lo strato limite possono essere riformulate usando le coordinate trasformate tramite le seguenti identità:

$$\rho_e = \frac{p_e}{RT_e} \xrightarrow{\rho_e} \frac{\rho_e}{\rho} = \frac{T}{T_e} = g$$

$$\rho = \frac{p_e}{RT} \xrightarrow{\gamma} \frac{\rho_e}{\rho} = \frac{T}{T_e} = g$$

$$\frac{V_e^2}{h_e} = \frac{V_e^2}{\frac{\gamma}{\gamma - 1}RT_e} = (\gamma - 1)M_e^2$$

In generale, si ha ancora un sistema di equazioni alle derivate parziali, accoppiato, non lineare dove la dipendenza da ξ è ancora presente. Per tale ragione, la soluzione non risulta essere in forma *self-similar* in genere.

Equazioni trasformate
per lo strato limite in
flusso compressibile
$$\begin{cases}
(Cf'')' + ff'' = \frac{2\xi}{V_e} \left[(f')^2 - \frac{\rho_e}{\rho} \right] V_{e\xi} + 2\xi \left[f'f_{\xi}' - f_{\xi}f'' \right] \\
\left(\frac{C}{Pr}g' \right) + fg' = 2\xi \left[f'g_{\xi} - g'f_{\xi} + (\gamma - 1)M_e^2gf' \frac{V_{e\xi}}{V_e} \right] - (\gamma - 1)M_e^2C(f'')^2
\end{cases}$$

2.37 COEFFICIENTE DI ATTRITO E TRASFERIMENTO DI CALORE

I coefficienti di attrito e di trasferimento di calore possono essere ottenuti a seguito della valutazione delle derivate f'' e di g' a parete, ove sono note. Partendo dalla loro definizione:

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho_e V_e^2}$$
$$Nu = \frac{q_w x}{k_e (T_{aw} - T_w)}$$
$$C_H = \frac{q_w}{\rho_e V_e (h_{aw} - h_w)}$$

Essendo:

$$\tau_{w} = \mu_{w} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{w} = \mu_{w} \frac{\rho_{w} V_{e}^{2}}{\sqrt{2\xi}} f_{w}^{\prime\prime}$$
$$q_{w} = k_{w} \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{w} = \frac{k_{w}}{c_{pw}} h_{e} \frac{\rho_{w} V_{e}^{2}}{\sqrt{2\xi}} g_{w}^{\prime}$$

Manipolando queste scritture:

Equazioni dello strato limite compressibile: caso lamina piana

$$c_f = \frac{2\rho_w \mu_w}{\rho_e \sqrt{2\xi}} f_w''$$
$$C_H = \frac{k_w}{c_{pw}} \frac{\rho_w}{\rho_e} \frac{1}{\sqrt{2\xi}} \frac{h_e}{h_{aw} - h_w} g_w'$$

2.38 EQUAZIONI DELLO STRATO LIMITE COMPRESSIBILE: CASO LAMINA PIANA

Il flusso esterno su una lamina piana è caratterizzato da alcune proprietà che rimangono costanti, ovvero pressione, temperatura e velocità⁶⁰. In tali condizioni si ha gradiente $dV_e/d\xi$ nullo oltre a V_e, p_e, T_e non funzioni della variabile ξ ; per queste ragioni le equazioni trasformate possono essere semplificate:

$$\begin{cases} (Cf'')' + ff'' = 2\xi (f'f_{\xi} - f_{\xi}f'') \\ \left(\frac{C}{Pr}g'\right) + fg' = 2\xi (f'g_{\xi} - g'f_{\xi}) - (\gamma - 1)M_e^2 C(f'')^2 \end{cases}$$

Nonostante la semplificazione, si sono ottenute ancora delle equazioni con derivate parziali che dipendono anche dalla variabile trasformata ξ . Può sembrare impossibile trovare una soluzione *self-similar* per la lamina piana.

In realtà è possibile ideare un esperimento mentale. Immaginando di assumere che f e g siano funzioni della sola η e sfruttando tale considerazione nelle equazioni precedenti, se le equazioni risultanti dal nostro esperimento non dipendessero da ξ allora l'assunzione fatta si rivelerebbe una reale proprietà del flusso.

Il risultato di questo esperimento mentale è:

$$\begin{cases} (Cf'')' + ff'' = 0\\ \left(\frac{C}{Pr}g'\right) + fg' + (\gamma - 1)M_e^2 C(f'')^2 = 0 \end{cases}$$

Ora le equazioni ottenute sono equazioni differenziali ordinarie funzioni della sola η . Esistono, pertanto, delle soluzioni *self-similar* per lo strato limite compressibile se le proprietà del flusso esterno sono costanti. Le due equazioni precedenti, quando scritte insieme alle loro condizioni al contorno, rappresentano i due valori limite per le equazioni differenziali ordinarie accoppiate.

C e *Pr* sono funzioni di η , infatti la variazione di *C* con η è abbastanza marcata da dover essere presa in considerazione, mentre la variazione del *Pr* non è ugualmente importante e perciò spesso trascurato.

Le condizioni al contorno per uno strato limite compressibile su placca piana sono:

A parete, per
$$\eta = 0$$

$$\begin{cases}
f(0) = f'(0) = 0 \\
g(0) = g_w = \frac{h_w}{h_e} & \text{Se } T_w = \text{cost} \\
g'(0) = 0 & \text{Se parete adiabatical}
\end{cases}$$

Fuori dallo strato limite
$$\begin{cases} f'(\eta \to \infty) = 1\\ g(\eta \to \infty) = 1 \end{cases}$$

⁶⁰ $V_e = cost, T_e = cost, p_e = cost$

Le tecniche di integrazione per un sistema di equazioni differenziali parziali accoppiate possono essere differenti.

I coefficienti di attrito e di trasferimento di calore si possono ottenere considerando il fatto che, per una lamina piana, si ha:

$$\xi = \rho_e V_e \mu_e x$$

Cosicché:

$$c_{f} = \sqrt{2} \frac{\rho_{w}\mu_{w}}{\rho_{e}\sqrt{\rho_{e}\mu_{e}V_{e}x}} f_{w}^{\prime\prime} = \sqrt{2} \frac{\rho_{w}\mu_{w}}{\rho_{e}\mu_{e}} \sqrt{\frac{\mu_{e}}{\rho_{e}V_{e}x}} f_{w}^{\prime\prime} = \sqrt{2} \frac{\rho_{w}\mu_{w}}{\rho_{e}\mu_{e}} \frac{1}{\sqrt{Re_{x}}} f_{w}^{\prime\prime}$$
$$c_{H} = \frac{k_{w}}{c_{pw}} \frac{\rho_{w}}{\rho_{e}} \frac{1}{\sqrt{2\xi}} \frac{h_{e}}{h_{aw} - h_{w}} g_{w}^{\prime} = \frac{k_{w}}{c_{pw}} \frac{\rho_{w}}{\rho_{e}\mu_{e}} \frac{1}{\sqrt{2Re_{x}}} \frac{h_{e}}{h_{aw} - h_{w}} g_{w}^{\prime}$$

2.39 Caso lamina piana



singola curva indipendentemente dalla velocità esterna.

Sono qui riportati profili di strato limite nelle condizioni di parete adiabatica⁶¹.

Se viene usata la variabile trasformata, η , per tracciare i profili di velocità e temperatura potrebbe sembrare che lo spessore dello strato limite decresca con il crescere del Mach; tuttavia non è ciò che si vede usando la distanza fisica dalla parete (grafici sotto).

Usando $\frac{y}{x} \cdot \sqrt{RE_x}$ ⁶², per normalizzare la distanza dalla parete, si evidenziano gli effetti del numero di Mach sullo spessore dello strato limite, il quale subisce un incremento al crescere del Mach del flusso esterno.

Nei flussi incompressibili tutti i profili di velocità collasserebbero in una

⁶¹ La condizione di adiabaticità comporta la perpendicolarità delle curve $\frac{T}{T_e}$ in corrispondenza della parete essendo $q_w = 0 =$

 $k(\partial T/\partial y)_w$, si deve anche di conseguenza $(\partial T/\partial y)_w = 0$. ⁶² **Parametro di Van Driest**

2.39.2 EFFETTI DELLA TEMPERATURA DI PARETE

Come per i flussi incompressibili, per numeri di Prandtl minori dell'unità lo spessore dello strato limite termico è maggiore di quello cinetico.



GRAFICO 2.39.2: EFFETTI DELLA TEMPERATURA SUGLI ANDAMENTI

Incrementando la temperatura superficiale si aumenta anche lo spessore dello strato limite. Questo si può spiegare, in maniera qualitativa, pensando al fatto che temperature più elevate producono una riduzione nella densità, pertanto per mantenere il flusso di massa costante è necessario estendere lo strato limite così da aumentare la superficie frontale attraversata dal flusso.

Si noti che l'entalpia totale, proporzionale alla temperatura totale nel caso di un gas perfetto, non è costante nello strato limite (lo sarebbe solo nel caso di Pr = 1). La temperatura totale può essere maggiore di quella del flusso esterno se $\frac{T_w}{T_e} > 1$.

2.39.3 SFORZI DI TAGLIO E COEFFICIENTE DI ATTRITO A PARETE

L'aumento del Mach riduce il coefficiente di attrito a parete, c_f , come si può vedere nel grafico.



GRAFICO 2.39.3: EFFETTI DELLA TEMPERATURA SUGLI ANDAMENTI DEL COEFFICIENTE DI RESISTENZA IN FUNZIONE DEL MACH

Al contrario, gli sforzi di attrito, τ_w , crescono significativamente con il numero di Mach:

$$\tau_w = \frac{1}{2}\rho_e V_e^2 c_f = \frac{1}{2}\gamma p_e M_e^2 c_f$$

Questa indica che la decrescita del c_f con il M_e viene contrastata dall'incremento del τ_w .

Il fatto che, raffreddando la superficie, si incrementi il coefficiente di attrito è dovuto al fatto che una riduzione nella temperatura provoca un assottigliamento nello spessore dello strato limite, a sua volta

ciò provoca un aumento dei gradienti di velocità proporzionali a τ_w ⁶³. L'abbassamento della viscosità a parete con la temperatura mitiga solo parzialmente questo effetto.

Nel caso di parete isolata o di $T_w/T_e = 1$ il valore di $c_f (Re_x)^{1/2}$ tende al valore del caso incompressibile, 0.664.

2.39.4 TRASFERIMENTO DI CALORE A PARETE E NUMERO DI STANTON

Come dimostrazione dell'analogia di Reynolds, l'andamento per il C_H è analogo a quello del c_f .



GRAFICO 2.39.4: EFFETTI DELLA TEMPERATURA SUGLI ANDAMENTI DEL COEFFICIENTE DI CALORE **AERODINAMICO IN FUNZIONE DEL MACH**

2.40 TEMPERATURA DI PARETE ADIABATICA

- - 7

La definizione:

$$C_H = \frac{q_w}{\rho_e V_e (h_{aw} - h_w)} \quad \rightarrow \qquad q_w = \rho_e V_e C_H (h_{aw} - h_w)$$

pone in evidenza il ruolo fondamentale della differenza di entalpia per il calcolo del calore "aerodinamico". Una soluzione esatta per h_{aw}^{64} si può ottenere solo tramite la soluzione delle equazioni dello strato limite accompagnate dalla condizione al contorno $(\partial T/\partial y)_w = 0$. Un modo più pratico per valutare h_{aw} , quindi anche T_{aw} , è quello di definire il **fattore di recupero** r.ù

$$\begin{aligned} h_{aw} &= h_e + r \frac{V_e^2}{2} \\ h^0 &= h_e + \frac{V_e^2}{2} \end{aligned} \rightarrow \quad h_{aw} &= h_e + r(h^0 - h_e) \rightarrow \boxed{r = \frac{h_{aw} - h_e}{h^0 - h_e}} \end{aligned}$$

Nel caso di un gas caloricamente perfetto la definizione del fattore di recupero può essere analogamente scritta come:

$$r = \frac{T_{aw} - T_e}{T^0 - T_e}$$

Per flusso incompressibile, il valore del fattore di recupero è legato al numero di Prandtl: $r = \sqrt{Pr}$.

 $^{{}^{63} \}left(\frac{du}{dy}\right)_{w} = O\left(\frac{V_{e}}{\delta}\right)$ ⁶⁴ Entalpia adiabatica a parete.

In flussi compressibili, il fattore di recupero tende a decrescere a seguito di un aumento nel Mach esterno, ma l'effetto è abbastanza piccolo da poter essere ancora usata la formula per il caso incompressibile per stimare tale fattore.



GRAFICO 2.40.1: ANDAMENTO DEL FATTORE DI RECUPERO IN FUNZIONE DEL MACH

2.41 RADIATION COOLED SURFACES

Nell'introduzione si era menzionato che le superfici dei veicoli ipersonici in determinate fasi di missione possano essere riscaldate per irraggiamento dal gas nello strato limite. Tuttavia, nel rientro atmosferica a terra tali effetti possono essere trascurati per velocità inferiori agli 8 km/s e al di sopra di quote prossime ai 100 km.

D'altra parte, la *radiation cooling*⁶⁵ è il meccanismo di raffreddamento fondamentale per i veicoli supersonici che volano a velocità superiori agli 8 km/s. Si tratta di un meccanismo molto efficace in grado di ridurre la temperatura a parete nelle fasi di rientro entro valori che i moderni materiali per lo scudo termico (TPS⁶⁶) possono tollerare senza la necessità di sistemi di raffreddamento attivi.



FIGURA 2.41.1: FLUSSI DI CALORE A PARETE

Un modo semplice, ma efficace, per analizzare gli effetti della *radiation cooling* si basa sull'assunzione di meccanismi di trasferimento del calore localmente unidimensionali. La conseguenza di questa ipotesi è che le variazioni superficiali di temperatura nelle direzioni tangenziali sono trascurabili.

Guardando la figura si osserva come il bilancio termico locale sia dato da:

$$q_w + q_{aw} + q_{rad} = 0$$

 q_w rappresenta il flusso di calore a parete

 q_{gw} è il flusso di calore dal gas verso la parete

⁶⁵ Raffreddamento da irraggiamento.

⁶⁶ Thermal Protection System

Poiché la parete viene raffreddata dal calore irraggiato, il flusso di calore netto entrante a parete sarà ottenuto sottraendo il calore di radiazione a quello del gas a parete, dato dalla legge di Fourier⁶⁷.

Il calore di radiazione dalla parete verso il gas può essere stimato grazie a:

$$q_{rad} = \epsilon \sigma T_w^4$$

 ϵ rappresenta il coefficiente di emissività, variabile da 0 a 1, e σ è la costante di Stefan-Boltzmann il cui valore è pari a 5.670373 · $10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$.

2.42 Possibili stati termici di una superficie

Ricapitolando, si possono distinguere cinque casi:

1. Parete a radiazione-adiabatica: $q_w = 0 \rightarrow q_{gw} = -q_{rad}$. La temperatura a parete è la temperatura adiabatica di radiazione⁶⁸.

$$k_w \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w - \epsilon \sigma T_w^4 = 0$$

- 2. Temperatura di parete fissata, senza radiation cooling: $q_w = -q_{gw}$.
- 3. Parete adiabatica: $q_{gw} = -q_w = 0$, $q_{rad} = 0$. La temperatura a parete è la temperatura di recupero o di parete adiabatica, T_{aw} .

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w = 0$$

- 4. Temperatura di parete fissata, con *radiation cooling*: $q_w = -q_{gw} q_{rad}$.
- 5. Flusso di calore bloccato: q_w noto e la temperatura è ottenuta del bilancio dei tre flussi di calore:

$$k_w \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w - \epsilon \sigma T_w^4 - q_w = 0$$

2.43 PARETE A RADIAZIONE-ADIABATICA

Le condizioni al contorno per una superficie di questo tipo, come già detto, sono:

$$k_w \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w - \epsilon \sigma T_w^4 = 0$$

Definendo le condizioni al contorno per una parete, a radiazione-adiabatica, usando le variabili trasformate adottate nello studio dello strato limite compressibile, dopo alcuni passaggi si ottiene:

$$\frac{k_e T_e/L}{\epsilon \sigma T_e^4} Re_L Pr_e \frac{\mu_e}{\sqrt{2\xi}} \frac{C_w}{Pr_w} g'_w - g^4_w = 0$$

Per una lamina piana:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_e V_e}{\epsilon \sigma T_e^4}\frac{1}{\sqrt{Re_x}}\frac{C_w}{Pr_w}g'_w - g_w^4 = 0$$

La dipendenza da x (rappresenta dalla ξ o dal Re_x) indica che la temperatura a parete non è costante lungo la superficie e le soluzioni per lo strato limite non sono *self-similar*. Tuttavia, per una lamina

⁶⁷ Per il caso unidimensionale: $q_y = -k \frac{dT}{dy}$ dove k è la conduttività del materiale.

piana, visto che le equazioni dello strato limite sono sempre indipendenti da ξ , è ancora possibile adottarle, a condizione che l'ipotesi utilizzata nella derivazione delle equazioni dello strato limite⁶⁹ sia ancora valida.



x è la distanza misurata lungo la superficie del corpo

• V_e è la velocità nella direzione x al bordo esterno dello strato limite

• *R* è il raggio di curvatura del corpo nel punto di arresto del flusso.

Per verificare se esista una soluzione *self-similar* si considerano $f'_{\xi} = f_{\xi} = g_{\xi} = 0$ e si sostituisce questa ipotesi nelle equazioni trasformate per lo strato limite compressibile.

FIGURA 2.43.1: RAPPRESENTAZIONE DELLE GRANDEZZE GEOMETRICHE DELL'URTO

$$(Cf'')' + ff'' = \frac{2\xi}{V_e} [(f')^2 - g] V_{e\xi} + 2\xi (f'f_{\xi} - f_{\xi}f'')$$
$$\left(\frac{C}{Pr}g'\right)' + fg' = 2\xi \left[f'g_{\xi} - g'f_{\xi} + (\gamma - 1)M_e^2gf'\frac{V_{e\xi}}{V_e}\right] - (\gamma - 1)M_e^2C(f'')^2$$

Quanto ottenuto mostra ancora una dipendenza da ξ e ciò implica che la soluzione per il punto di arresto non è *self-similar*.

$$(Cf'')' + ff'' = \frac{2\xi}{V_e} [(f')^2 - g] V_{e\xi}$$
$$\left(\frac{C}{Pr}g'\right) + fg' = (\gamma - 1)M_e^2 \left[2\xi \frac{V_{e\xi}}{V_e}gf' - C(f'')^2\right]$$

Il sistema può ancora essere modificato osservando che:

- In prossimità del punto di arresto si ha $M_e^2 \approx 0$
- Avendo un Mach prossimo a zero il flusso è incompressibile ed è perciò possibile usare l'approssimazione per cui $V_e \approx \left(\frac{dV_e}{dx}\right)_s x$, valida nei flussi incompressibili nel punto di arresto.

$$\begin{split} \xi &= \int_0^x \rho_e \mu_e V_e \ dx = \int_0^x \rho_e \mu_e \left(\frac{dV_e}{dx}\right)_s x \ dx = \rho_e \mu_e \left(\frac{dV_e}{dx}\right)_s \frac{x^2}{2} \\ \frac{dV_e}{dx} &= \frac{dV_e}{d\xi} \frac{\partial\xi}{\partial x} = \rho_e \mu_e V_e \frac{dV_e}{d\xi} \ \to \ \left(\frac{dV_e}{d\xi}\right)_s = \frac{1}{\rho_e \mu_e V_e} \ \to \ \left(\frac{V_e\xi}{V_e}\right)_s = \frac{1}{\rho_e \mu_e \left(\frac{dV_e}{dx}\right)_s x^2} \end{split}$$

Quindi:

$$2\xi \frac{V_{e\xi}}{V_e} = 1$$

 $^{69} \left(kT_x \right)_x \ll \left(kT_y \right)_y$

Queste assunzioni permettono di eliminare la parte destra dell'equazione dell'energia.

Le equazioni trasformate per lo strato limite compressibile nel punto di arresto sono:

$$(Cf'')' + ff'' = (f')^2 - g$$
$$\left(\frac{C}{Pr}g'\right) + fg' = 0$$

Questo sistema può essere risolto come si era visto per il caso con la lamina piana, con una tecnica di *shooting*.

Un risultato molto importante che può essere ottenuto dal sistema sopra riportato è il flusso di calore a parete:

$$q_{w} = k_{w} \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{w} = k_{w} \frac{\rho_{w} V_{e}}{\sqrt{2\xi}} T_{e} g'_{w} = \frac{k_{w} \rho_{w} (V_{ex})_{s} x}{x \sqrt{\rho_{e} \mu_{e} (V_{ex})_{s}}} T_{e} g'_{w} = \frac{C_{w}}{Pr} h_{e} \sqrt{\rho_{e} \mu_{e}} \sqrt{\left(\frac{dV_{e}}{dx}\right)_{s}} g'_{w}$$

I valori di $\rho_e \in \mu_e$ sono stimati per mezzo di $\rho_e \approx \rho_e^0 \in \mu_e \approx \mu(T_e^0)$ grazie alla condizione $M_e^2 \approx 0$. Ricordando che $\rho_e^0 \in T_e^0$ sono i valori a valle dell'urto, possono essere ricavati per mezzo delle relazioni di Rankine-Hugoniot per l'urto retto partendo dai valori nel flusso libero.

Per poter calcolare il flusso di calore è necessario conoscere g'_w . Una buona stima per q_w è data dalla correlazione di Fay-Riddel.

$$q_w = 0.570Pr^{-0.6}\sqrt{\rho_e\mu_e}\sqrt{\frac{dV_e}{dx}}C_w^{0.1}(h_e - h_w) \quad \text{per un cilindro}$$
$$q_w = 0.763Pr^{-0.6}\sqrt{\rho_e\mu_e}\sqrt{\frac{dV_e}{dx}}C_w^{0.1}(h_e - h_w) \quad \text{per una sfera}$$

Le due equazioni sono uguali, fatta eccezione per il primo coefficiente che, essendo maggiore per la sfera, indica che, a parità delle altre grandezze, il flusso sul cilindro è minore di quello sulla sfera. Questo è nuovamente legato agli effetti tridimensionali che caratterizzano la sfera su cui il flusso è in grado di muoversi in tre direzioni in uno strato limite più sottile. Uno strato limite più sottile implica maggiori gradienti di temperatura normali alla superficie e, di conseguenza, flussi di calore maggiore.

Le formule di Fay-Riddel sono correlazioni sperimentali, ma la loro forma si basa su argomentazioni teoriche. Per scoprire come sono state derivate si consideri l'equazione dell'energia per lo strato limite:

$$(Cg')' + Pr fg' = 0 \qquad Pr = cost$$
$$\frac{(Cg')'}{Cg'} + \frac{Pr f}{C} = 0 \rightarrow Cg' = C_w g'_w e^{-Pr \int_0^{\eta} \frac{f}{C} d\zeta}$$

Le uniche assunzioni fatte finora sono l'approssimazione dello strato limite e il Prandtl costante. Integrando una seconda volta dalla parete fino a infinito:

$$\int_0^\infty Cg'd\eta = C_w g'_w \int_0^\infty e^{-Pr \int_0^\eta \frac{f}{C} d\zeta} d\eta$$

Né $C(\eta)$ né $f(\eta)$ sono noti, ma si possono fare due considerazioni in prossimità della superficie:

$$C \approx C_w = cost \qquad \& \qquad f \approx f''_w \frac{\eta^2}{2} + O(\eta^3)$$
$$C_w(1 - g_w) \approx C_w g'_w \int_0^\infty e^{-\frac{Pr}{C_w} f''_w \frac{\eta^3}{6}} d\eta$$

L'integrale è del tipo:

$$\int_0^\infty e^{-(rx)^m} dx = \frac{1}{mr} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \quad r, m > 0 \qquad \Gamma \text{ è la funzione Gamma}^{70}$$

In questo modo si può risolvere la precedente scrittura:

$$C_{w}(1-g_{w}) \approx C_{w}g'_{w}\left(\frac{6C_{w}}{Prf_{w}''}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = C_{w}g'_{w}\left(\frac{6C_{w}}{Prf_{w}''}\right)^{\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)$$

Mentre, per quanto riguarda g'_w :

$$g'_w \approx 0.66(1-g_w) \left(\frac{Pr}{C_w}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Dopo molti calcoli sulle soluzioni dello strato limite compressibile nel punto di arresto, Fay e Riddel notarono che l'approssimazione era formalmente corretta, ma il coefficiente necessitava di una modifica.

$$\sqrt{C_w}g'_w \approx 0.572(1-g_w) \left(\frac{Pr}{C_w}\right)^{0.4}$$

La correlazione è leggermente diversa da quella data da Fay e Riddel, ma anche la trasformazione presa in considerazione lo è.

Sostituendo quanto ottenuto nella formula di Fourier per il flusso di calore:

$$q_w = k_w \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w = \frac{C_w}{Pr} h_e \sqrt{\rho_e \mu_e} \sqrt{\left(\frac{dV_e}{dx}\right)_s g'_w} = 0.570 Pr^{-0.6} \sqrt{\rho_e \mu_e} \sqrt{\frac{dV_e}{dx}} C_w^{0.1} (h_e - h_w)$$

Che è proprio la formula di Fay-Riddel per il caso 2D.

Per il caso 3D è possibile procedere allo stesso modo, ma la trasformazione e le equazioni risultanti per lo strato limite sono:

$$\xi = \int_0^x \rho_e \mu_e V_e r^2 dx \qquad \eta = \frac{V_e r}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy$$
$$(Cf'')' + ff'' = \frac{1}{2} [(f')^2 - g]$$
$$\left(\frac{C}{Pr} g'\right)' + fg' = 0$$

⁷⁰ $n\Gamma(n) = \Gamma(n+1)$
Dalle precedenti analisi si è potuto osservare come per un calcolo pratico del calore a parete q_w sia necessaria la conoscenza di $(dV_e/dx)_s$. Tale valore può derivare da un calcolo in campo non viscoso o valutato approssimativamente.

Se applicata al bordo dello strato limite l'equazione di Eulero è:

$$\frac{dp_e}{dx} + \rho_e V_e \frac{dV_e}{dx} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dV_e}{dx} = -\frac{1}{\rho_e V_e} \frac{dp_e}{dx}$$

Per quanto riguarda la distribuzione di pressione sul bordo dello strato limite, ora nuova incognita, si può calcolare con la **teoria di Newton** in un flusso ipersonico. In accordo a tale teoria, la distribuzione di pressione su un corpo che si muove ad un elevato numero di mach è data da:

$$C_p = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2}\rho_{\infty}V_{\infty}^2} = 2\sin^2\theta = 2\cos^2\phi$$

Dove l'angolo θ è quella tra il flusso a monte e la tangente al corpo, mentre ϕ quello tra flusso e normale al corpo.

$$p_e = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \cos^2 \phi + p_{\infty}$$
$$\frac{dp_e}{dx} = 2\rho_{\infty} V_{\infty}^2 \cos \phi \sin \phi \frac{d\phi}{dx}$$
$$\frac{dV_e}{dx} = 2\frac{\rho_{\infty} V_{\infty}^2}{\rho_e V_e} \cos \phi \sin \phi \frac{d\phi}{dx}$$

In prossimità del punto di arresto i valori di ϕ sono molto piccoli ed è pertanto possibile linearizzare.

$$\left(\frac{dV_e}{dx}\right)_s = 2\frac{\rho_{\infty}V_{\infty}^2}{\rho_e V_e}\phi\frac{d\phi}{dx}$$

Ricordando inoltre che:

$$\phi = \frac{x}{R} \qquad V_e \approx \left(\frac{dV_e}{dx}\right)_s x$$
$$\left(\frac{dV_e}{dx}\right)_s = 2\frac{\rho_{\infty}V_{\infty}^2}{\rho_e \left(\frac{dV_e}{dx}\right)_s x} \frac{x}{R} \frac{1}{R} = 2\frac{\rho_{\infty}V_{\infty}^2}{\rho_e \left(\frac{dV_e}{dx}\right)_s} \frac{1}{R^2}$$
$$\left(\frac{dV_e}{dx}\right)_s^2 = 2\frac{\rho_{\infty}V_{\infty}^2}{\rho_e} \frac{1}{R^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\frac{dV_e}{dx}\right)_s = \frac{V_{\infty}}{R} \sqrt{2\frac{\rho_{\infty}}{\rho_e}}^{71}$$

Questa scrittura sta a significare come visto che il flusso di calore a parete è proporzionale a $\sqrt{dV_e/dx}$ e inversamente proporzionale alla radice di R⁷². Per ridurre il flusso di calore in prossimità del punto di arresto si può pertanto incrementare il raggio.

⁷¹ Nel caso di aria trattata come gas perfetto con $\gamma = 1.4$ è possibile ottenere una migliore approssimazione del gradiente di velocità moltiplicando, sotto radice, per un fattore 1.85 invece che 2.

⁷² Si ricordi che R è il raggio del bordo d'attacco.



GRAFICO 2.44.1: ANDAMENTO DEL TERMINE $\frac{R}{V_{\infty}} \left(\frac{dV_e}{d_x} \right)$ in funzione del mach, calcolata nei due modi possibili descritti nella nota 71

Per una stima pratica del gradiente di velocità, ρ_e si può assumere molto simile alla densità totale subito a valle dell'urto:

$$\frac{\rho_{\infty}}{\rho_e}\approx \frac{\rho_{\infty}}{\rho^0}$$

Questo rapporto si calcola con le relazioni dell'urto normale.

$$\frac{\rho^0}{\rho_{\infty}} = \frac{(\gamma+1)M_{\infty}^2}{(\gamma-1)M_{\infty}^2+1} \left[1 + \frac{\gamma-1}{2}\frac{(\gamma-1)M_{\infty}^2+1}{2\gamma M_{\infty}^2-\gamma+1}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

2.45 STRATI LIMITE IPERSONICI NON-SIMILAR

Quando non esiste una soluzione *self-similar* si devono risolvere le equazioni complete dello strato limite compressibile.

Una possibilità è quella di usare il metodo della *local similarity*. Il quale si basa sull'uso dei valori locali delle grandezze esterne allo strato limite per il calcolo delle condizioni al bordo dello stesso. Viene considerata una piccola porzione centrata su una determinata stazione x dello strato limite, vengono usati i valori locali di T_w , V_e , h_e , ρ_e , μ_e , $dV_e/d\xi$. In aggiunta, si assumono che tutte le altre derivate parziali rispetto a ξ , come f_{ξ} , $f'_{\xi} \in g_{\xi}$, siano piccole e possano essere trascurate. Sotto queste ipotesi le equazioni dello strato limite diventano:

$$(Cf'')' + ff'' = \frac{2\xi}{V_e} [(f')^2 - g] \frac{dV_e}{d\xi}$$
$$\left(\frac{C}{Pr}g'\right) + fg' = 2\xi \frac{V_e}{h_e} gf' \frac{dV_e}{d\xi} - C \frac{V_e^2}{h_e} (f'')^2$$

Si trovano diversi valori di queste equazioni per diversi valori di ascisse.

Altra possibilità, per risolvere esattamente il sistema completo, è quello di usare un **metodo alle diffe**renze finite, che discretizzi le derivate in $\xi \in \eta$.

2.46 IL METODO DELLA TEMPERATURA DI RIFERIMENTO

Quello della temperatura di riferimento è un metodo di approssimazione che permette di valutare il coefficiente di attrito, il trasferimento di calore e lo spessore dello strato limite. È una tecnica valida sia per flussi laminari che turbolenti in campo ipersonico.

Si utilizzano le formule ottenute per flussi incompressibili anche in regime ipersonico, valutando i parametri che governano lo strato limite⁷³ ad una particolare temperatura di riferimento indicativa della temperatura interna allo strato limite. In questo modo le equazioni incompressibili vengono "corrette" considerando gli effetti legati alla compressibilità.

Le equazioni per lo strato limite laminare incompressibile su una placca piana:

$$c_{f_{ic}} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \qquad C_{H_{ic}} = \frac{0.332}{\sqrt{Re_x}} Pr^{-\frac{2}{3}} \qquad T_{aw_{ic}} = T_e \left(1 + \sqrt{Pr} \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

Questi termini possono essere determinati anche in campo compressibile usando i valori di $Re \ e \ Pr$ valutati, non alla temperatura all'esterno dello strato limite, ma alla temperatura di riferimento T^* .

$$Re_{x}^{*} = \frac{\rho^{*}V_{e}x}{\mu^{*}} \qquad Pr^{*} = \frac{\mu^{*}c_{p}}{k^{*}}$$
$$c_{f_{c}} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_{x}^{*}}} \qquad C_{H_{c}} = \frac{0.332}{\sqrt{Re_{x}^{*}}}Pr^{*-\frac{2}{3}} \qquad T_{aw_{c}} = T_{e}\left(1 + \sqrt{Pr^{*}}\frac{\gamma - 1}{2}M^{2}\right)$$

Assumendo che la pressione p_e sia costante attraverso lo strato limite, si ha $\frac{\rho^*}{\rho_e} = \frac{T_e}{T^*}$ e, quindi, è possibile riformulare le relazioni per i due numeri adimensionali:

$$Re_{x}^{*} = Re_{x_{e}} \left(\frac{T_{e}}{T^{*}}\right)^{1+\omega_{\mu}} \qquad Pr^{*} = Pr_{e} \left(\frac{T^{*}}{T_{e}}\right)^{\omega_{\mu}-\omega_{k}}$$

Le "correzioni" per il flusso compressibile sono:

$$c_{f_c} = c_{f_{ic}} \left(\frac{T^*}{T_e}\right)^{0.5(1+\omega_{\mu})} \quad C_{H_c} = C_{H_{ic}} \left(\frac{T^*}{T_e}\right)^{0.5(1+\omega_{\mu})} \left(\frac{T^*}{T_e}\right)^{\omega_{\mu}-\omega_{k}}$$

In letteratura sono disponibili diverse forme ottenute nel corso degli anni, anche se diverse, tutte restituiscono valori abbastanza simili, qui di seguito se ne riportano alcune a titolo d'esempio:

$$\frac{T^*}{T_e} = 0.42 + 0.032M^2 + 0.58\frac{T_w}{T_e}$$
Young e Janssen
$$\frac{T^*}{T_e} = 0.50 + 0.039M^2 + 0.50\frac{T_w}{T_e}$$
Eckert
$$\frac{T^*}{T_e} = 0.42 + 0.032M^2 + 0.58\frac{T_w}{T_e}$$
Sommer e Short

Queste relazioni vennero ottenute, in un primo momento, in maniera empirica e in seguito dimostrate anche teoricamente mostrando il loro stretto legame con la teoria della *similarity* per flussi ad alta velocità su una lamina piana.

⁷³ Come il numero di Reynolds e il numero di Prandtl.

2.47 Strato limite ipersonico turbolento



Lo strato limite turbolento rappresenta ancora un problema complesso e impegnativo in aerodinamica, problema che, finora, rimane irrisolto.

Una caratteristica tipica dello strato limite turbolento è la generazione di attrito e trasferimento di calore maggiori rispetto al caso laminare. In un flusso turbolento gli scambi di energia sono più efficienti e i profili di velocità e temperatura presentano gradienti maggiori a parete, gli elevati gradienti sono la causa dei superiori sforzi viscosi e scambi di calore. Questa caratteristica

TRA CASO LAMINARE E TURBOLENTO sforzi viscosi e so accomuna sia il campo compressibile che quello incompressibile.

Dato che, per veicoli ipersonici, lo strato limite turbolento produce maggiori livelli di resistenza e di scambi termici, rispetto al laminare, diviene fondamentale valutare la transizione dello strato limite.

Per flussi incompressibili e turbolenti a basso numero di Reynolds, lo spessore dello strato limite è dato da:

$$\delta_{turb} = \frac{0.37x}{Re_{\infty,x}^{0.2}}$$

A parità di *Re* lo spessore dello strato limite turbolento è minore di quello laminare. Quanto appena detto potrebbe apparire in contrasto con il fatto che gli sforzi viscosi e il flusso di calore siano maggiori. Per comprendere questa, apparente, incongruenza bisogna ricordare che nello strato limite turbolento lo spessore realmente rilevante è quello del *viscous sub-layer*⁷⁴. Il *viscous sub-layer* è quella regione dello strato limite in cui:

$$\frac{y\rho u_{\tau}}{\mu} \le 5 \qquad \qquad u_{\tau} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

Per determinare gli sforzi di attrito a parete è possibile usare la seguente relazione:

$$\tau_{w,turb} = 0.0296 \frac{\rho_{\infty} V_{\infty}^2}{R e_{\infty,x}^{0.2}}$$

In tal caso si ha:

$$\delta_{vs} = 29.06 \frac{x}{Re_{\infty,x}}$$

Queste espressioni, valide per flussi turbolenti incompressibili, possono essere estese ai flussi compressibili, almeno in prima approssimazione, usando il metodo della temperatura di riferimento.

Indipendentemente dal fatto che ci si trovi nel caso laminare o turbolento, con il crescere del numero di Reynolds si abbassano i valori di attrito e di scambio termico a parete, ciò che però cambia è la velocità con cui decrescono come si può vedere nel seguente grafico.



Station number as a function of Reynolds and Mach numbers for an insulated flat plate. (From Van Driest, Ref. 92.)

FIGURA 2.47.2: RIDUZIONE DEL C_H in funzione del mach e del Re in una placca piana isolata

2.48 TRANSIZIONE LAMINARE-TURBOLENTO NEI FLUSSI IPERSONICI

Il regime dello strato limite influisce in maniera significativa sullo stato termico della superficie. In particolare, i flussi di calore⁷⁵ sono nettamente maggiori nel caso turbolento che in quello adiabatico. Lo stato termico di una superficie influenza la transizione da laminare a turbolento. Nello strato limite turbolento si ha un incremento degli sforzi di taglio.

I veicoli di rientro (RV) non sono particolarmente afflitti dalla transizione dello strato limite, che sarebbe importante, in questo caso, per i carichi termici sulle superfici. Tipicamente il flusso è laminare per quote tra i 40-60 km e il picco nel flusso di calore si presenta per quote prossime ai 70 km, perciò la turbolenza e le sue cause non sono il principale problema affrontato nella progettazione dei TPS, se si considera la traiettoria standard di rientro⁷⁶.

Altro punto da considerare a proposito dei veicoli tipo RV è che quando avviene transizione questa riguarda flussi subsonici o, al massimo, basso supersonici. Per esempio, durante una tipica missione di rientro dello *Space-Shuttle-Orbiter*, la transizione avveniva al 90% della corda dello *Shuttle* a circa 50 km di quota, dove l'angolo di attacco era prossimo ai 35°, e si spostava intorno al 10% della lunghezza del veicolo sceso a 40 km e con angolo di attacco di 30°.

I veicoli caratterizzati da una velocità di crociera ipersonica (CAV) sono maggiormente sensibili alla transizione dello strato limite che interessa non solo i carichi termici, ma anche la resistenza e i sistemi di integrazione cellula/propulsione. In uno studio per il NASP⁷⁷, si è osservato che l'incertezza della coordinata nella transizione poteva modificare la MTOW⁷⁸ del velivolo di un fattore di due o più. Per questi motivi la transizione dello strato limite è un problema di interesse fondamentale nella progettazione dei veicoli CAV.

Per via della ridotta incidenza lo strato limite di questa tipologia di velivoli è ipersonico e, quindi, la transizione avviene in uno strato limite ipersonico a differenza di quanto detto per i veicoli RV.

Prevedere dove avverrà il passaggio da laminare a turbolento nello strato limite laminare a ipersonico è un problema ancora irrisolto a causa di due limiti fondamentali. Il primo è legato alla ridotta conoscenza dei fenomeni che interessano questo campo di moto, il secondo ai dati limitati ottenibili con le strutture di terra o i test in volo. Nella fattispecie, le condizioni ambientali a terra vincolano il numero di Reynolds

⁷⁵ O la temperatura di irragiamento.

⁷⁶ Potrebbe non essere vero per altre traiettorie.

⁷⁷ National Aero-Space Plane

⁷⁸ Maximum Take-Off Weight

e ostacolano la riproduzione dei disturbi. Inoltre, i test sono effettuati per lo più con superfici fredde, condizione assai lontana da quella reale.

La transizione da laminare a turbolento dipende da un gran numero di fattori per Mach ipersonici.

$$Re_{t} = f\left(M_{e}, \theta_{c}, T_{w}, \dot{m}, \alpha, k, E, \frac{\partial p}{\partial x}, R_{n}, Re^{u}, \frac{x}{R_{n}}, V, C, \frac{\partial w}{\partial z}, T^{0}, L, \tau, Z\right)$$

 Re_t rappresenta il numero di Reynolds di transizione, basato sui parametri del flusso esterno allo strato limite dove la lunghezza di riferimento indica la posizione del punto di transizione.

$$Re_t = \frac{\rho_e V_e x_t}{\mu_e}$$

Fintanto che il valore del Re è minore del Re_t , il flusso è laminare, superata tale condizioni lo si considera turbolento. Nella realtà, ovviamente, il passaggio non è netto e la transizione non interessa un solo punto, ma è graduale e sarebbe più corretto parlare di **regione di transizione**.

Le variabili da cui dipende il numero di Reynolds di transizione:

- M_e è il mach nel bordo esterno dello strato limite
- θ_c rappresenta la forma del corpo
- T_w è la temperatura di parete
- *m* indica la portata aspirata o soffiata a parete
- α è l'angolo di incidenza
- *k* è la rugosità della superficie
- *E* contiene tutti gli effetti legati alle condizioni ambiente (turbolenza del flusso a monte, disturbi acustici, etc.)
- $\frac{\partial p}{\partial x}$ è il gradiente di pressione
- R_n indica il grado di "*bluntness*⁷⁹" del "naso"
- Re^{u} è l'unità del numero di Reynolds
- $\frac{x}{R_n}$ è la posizione dove lo strato entropico viene inglobato dallo strato limite
- *V* considera le vibrazioni del corpo
- *C* rappresenta la curvatura locale del corpo
- $\frac{\partial w}{\partial z}$ è il gradiente di velocità del *cross-flow*
- T^0 indica la temperatura di arresto
- *L* è a dimensione caratteristica del corpo
- τ è il tempo delle reazioni termo-chimiche
- Z indica la grandezza delle velocità di reazione che avvengono nello strato limite.

Questa mole di parametri è un buon indizio della complessità dei fenomeni in gioco.

È possibile effettuare una distinzione tra due tipi di transizioni: **transizione regolare** e **transizione forzata** (o di by-pass).

La transizione regolare è la prima a presentarsi quando lo strato limite inizia a diventare instabile. I piccoli disturbi, che si adattano alle caratteristiche di ricettività dello strato limite instabile, vengono amplificati, inizialmente in maniera lineare e, successivamente, in maniera non lineare. A questo punto si presenta il primo punto turbolento e la transizione dello strato limite è caratterizzata da una turbolenza autosostenuta. Questo potrebbe essere il caso per un veicolo della tipologia CAV, dove le instabilità

⁷⁹ Ovvero quanto possa essere assimilato ad un corpo tozzo

sono convogliate lungo lo strato limite e linearmente amplificate dalle proprietà della superficie e dello strato limite quali i gradienti di pressione, lo stato termico superficiale, la tridimensionalità, piccole imperfezioni superficiali, etc. a queste seguono l'amplificazione non lineare, gli effetti tridimensionali, le variazioni di scala e, infine, le turbolenze. Non è chiaro se forti rumori e vibrazioni prodotti dal sistema propulsivo si possano applicare a questo scenario.

Diversamente, la transizione forzata si verifica se disturbi di grande ampiezza dovuti, ad esempio, a irregolarità sulla superficie, portano alla turbolenza senza una fase di amplificazione nello strato limite. Quello appena descritto è il meccanismo che tipicamente porta alla transizione nei veicoli RV con un TPS, il quale, essendo composto da piastrelle, presenta una superficie con imperfezioni ampie e localizzate. Altra fonte di disturbo possono essere avvallamenti e gradini dovuti a deformazioni termiche o meccaniche nelle giunzioni tra superfici realizzate con materiali differenti. Certamente questa condizione potrebbe interessare anche la tipologia CAV di veicoli ipersonici, ma dovrebbe essere evitata il più possibile perché lo strato limite dovrebbe essere mantenuto laminare ritardandone il più possibile la transizione.

La transizione dello strato limite è un problema anche nei test al suolo. Se il *Re* raggiunto nelle gallerie del vento fosse troppo piccolo per produrre una transizione regolare, si induce la transizione forzata. Dall'altro lato, i disturbi provenienti dalla struttura di test, come, il rumore generato dallo strato limite turbolento sulle pareti della galleria del vento, potrebbero produrre una transizione forzata indesiderata.



FIGURA 2.48.1: ANDAMENTO DELLE au a parete, in prossimità della transizione

Con l'aiuto di una rappresentazione bidimensionale dello sforzo di taglio a parete lungo una lamina piana, è possibile osservare qualitativamente le fasi della transizione. Per una parete a radiazione raffreddante, la situazione è essenzialmente la stessa. Dalle curve riportate nella figura a lato si possono distinguere tre differenti rami: il primo rappresenta il laminare, seguito da quello della transizione e, infine, quello turbolento.

Il ramo laminare termina una volta che x raggiunge il valore critico,

 x_{cr} , questa posizione è quella che sancisce l'inizio dell'instabilità dello strato limite laminare. Inizialmente, continuando a seguire la linea IIa lo strato limite instabile continua a mantenere le caratteristiche di quello laminare. I disturbi innescano le **onde di Tollmien-Schlichting**, la cui ampiezza cresce lentamente. Verso la fine del ramo IIa le onde di Tollmien-Schlichting raggiungono un'ampiezza pari a circa l'1% di V_e e ha inizio la seconda instabilità che porta alla comparsa del primo punto turbolento. Si è, a questo punto, raggiunta la coordinata $x_{tr,l}$ e inizia il ramo chiamato IIb il quale termina in $x_{tr,u}$ dove il flusso è completamente turbolento.

Nel ramo IIa le proprietà del flusso sono le stesse dello strato limite laminare, se si considera il flusso mediato nel tempo; questo fatto è importante poiché indica la possibilità di studiare la stabilità dello strato limite partendo dalla sua condizione di laminarità. Generalmente, la zona IIb è alquanto stretta, ma per elevati mach⁸⁰ può raggiungere una larghezza significativa e l'analisi sulla stabilità e la transizione dello strato limite partendo dalle proprietà di strato limite laminare, può diventare inesatta.

⁸⁰ Superiori a 4 o 5

L'*overshoot* nella curva degli sforzi viscosi a parete che si può osservare al termine della curva IIb, in posizione $x_{tr,u}$, è originato dal fatto che, inizialmente, lo spessore del *viscous sub-layer* è più piccolo di quanto non dovrebbe se partisse turbolento fin dal bordo d'attacco della lamina piana. In caso di parete a radiazione adiabatica, l'*overshoot* sarebbe presente nella distribuzione di temperatura a parete.

Incrementando il livello di disturbo, il ramo di transizione⁸¹ si sposta a monte stringendosi. Livelli di disturbo eccessivi causano una transizione forzata indebolendo i presupposti di strato limite laminare. Un gradiente di pressione avverso accorcia la lunghezza della regione di transizione, mentre la presenza di fenomeni in grado di stabilizzare il flusso presentano la tendenza di "stirare" questa regione.

I primi studi sulla teoria della stabilità di flussi compressibili (Lees e Lin, nel 1946) portarono alla scoperta che una superficie sufficientemente refrigerata fosse in grado di stabilizzare lo strato limite attraverso l'intero spettro dei numeri di Mach. Questo fenomeno sembrerebbe utile per i veicoli della tipologia CAV che possono raffreddare le superfici per mezzo del combustibile criogenico tipicamente usato. Nella realtà per elevati numeri di Mach si presentano dei modi ad alta instabilità⁸²che subiscono un'amplificazione con il raffreddamento. Per lo strato limite su una lamina piana adiabatica, si presenta un secondo modo instabile per valori di mach prossimi a 2.2 o per valori superiori a 4, questo modo ha una frequenza sufficientemente bassa da influenzare le proprietà di stabilità dello strato limite.



GRAFICO 2.48.1: (A SINISTRA) STABILITÀ TEMPORALE DELLO STRATO LIMITE SU UNA LAMINA PIANA ADIABATICA PER DIVERSI VALORI DEL MACH AL LIMITE DELLO STRATO LIMITE. RAPPRESENTAZIONE QUALITATIVA DEI RISULTATI DI MACH SEGUENDO RESHOTKO A) $M_e = 0$ B) $M_e = 4.5$ C) $M_e = 5.8$; (A DESTRA) INFLUENZA DELLA TEMPERATURA DI PARETE SULA VELOCITÀ DI AMPLIFICAZIONE SPAZIALE DEL PRIMO (A) E DEL SECONDO (B) MODO INSTABILE NELLO STRATO LIMITE DI UN CONO SMUSSATO A $M_{\infty} = 8$, $Re_{\infty}^u = 3.28 \cdot 10^6 m^{-1}$, $\alpha = 0^\circ$

Se la parete fosse raffreddata, il secondo modo diverrebbe importante già a velocità subsoniche mentre il primo subirebbe uno smorzamento. Nel grafico, sulla destra, si pongono in evidenza i modi per un flusso ipersonico attorno ad un cono tozzo. Si nota come il raffreddamento della parete riduca il rateo di amplificazione del disturbo del primo modo, schiacciando la curva. Al contrario, si avverta un incremento del secondo modo che viene amplificato e, contemporaneamente, il suo massimo si sposta verso

valori di frequenze più elevati.

2.48.1 CONFRONTO TRA CONO E TRANSIZIONE PLANARE TURBOLENTA

Vi è una significativa differenza tra la transizione in un flusso bidimensionale e quella in uno tridimensionale che deve essere ancora compresa chiaramente. Sperimentalmente si è osservato che la transizione si presenti per valori di Re più alti per un cono piuttosto che per una lamina. I risultati della teoria della stabilità avrebbero suggerito un esito opposto. L'andamento teorico è stato confermato da test svolti nella galleria del vento Langley della NASA a Mach 3.5, e, in seguito, ottenne un'ulteriore conferma per M=8 con una parete raffreddata. La ragione di queste discrepanze è legata a differenti livelli di disturbo durante gli esperimenti come diversi sono anche i fenomeni di instabilità ad interessare un cono e una piastra. Oggi, sembra che il numero di Reynolds di transizione sia più piccolo per il cono

⁸¹ Somma dei rami IIa e IIb.

⁸² Modi di Mack

che per la lamina piana, ma non si è in possesso di una teoria in grado di descrivere un effetto diretto tra le osservazioni sperimentali e la teoria della stabilità lineare.

Per quanto riguarda i disturbi del secondo modo, diventano instabili per strati limite abbastanza sottili. Nel caso del cono, lo spessore dello strato limite è inferiore rispetto a quella di una rampa 2-D e, inoltre, il numero di Mach e di Reynolds sono più piccoli.

2.48.2 EFFETTI DELLA CURVATURA DEL NASO

La presenza dello strato limite entropico pare avere una certa influenza sulla transizione dello strato limite di un corpo con naso curvo. Si è osservato come piccole curvature incrementino il Reynolds di transizione rispetto a geometrie con un naso affilato, ma se la curvatura viene incrementata a sufficienza questo andamento viene invertito e si ha una drastica riduzione del Re_{tr} .

La curvatura riduce localmente il Re spiegando, parzialmente, l'incremento nel Re_{tr} ; d'altra parte l'inversione della transizione non è ancora stata compresa, ma sembra probabile che l'instabilità dello strato entropico ne sia la causa. Considerando la seguente figura, le zone più scure sono state interpretate come regioni di instabilità dello strato limite. Nel momento in cui lo strato limite "inghiotte" quello entropico le sue instabilità vengono trasportate con lo strato limite dove possono interagire con le instabilità di quest'ultimo fino ad innescare la transizione. Questa è una possibile spiegazione del fenomeno, ma non la definitiva.



FIGURA 2.48.2: INSTABILITÀ DELL'*ENTROPY LAYER* NEL FLUSSO ATTRAVERSO UNA LAMINA PIANA CON BORDO D'ATTACCO SMUSSATO, I GRADIENTI DI VELOCITÀ IN DIREZIONE NORMALE A PARETEVI VISUALIZZATI PER MEZZO DELLA TECNICA SCHLIEREN (ZONA SUPERIORE) COMPARTI CON QUELLI OTTENUTI PER VIA NUMERICA (ZON INFERIORE). $M_{\infty} = 2.5$, $Re_{\infty}^{u} = 9.9 \cdot 10^{6} m^{-1}$, $q_{w} = 0$, $\alpha = 0^{\circ}$. Le linee bianche tratteggiate sono le ZONE PER CUI SI SONO CALCOLATI I MASSIMI VALORI DI $\partial \rho'/\partial y$, DOVE ρ' è Autofunzione della densità

2.48.3 INSTABILITÀ DELLA LINEA DI ATTACCO

Un'instabilità in grado di innescare la transizione da laminare a turbolento, si può presentare in corrispondenza della linea di attacco. Si tratta di un aspetto tipico delle linee di riattacco del flusso separato, in cui la transizione può avvenire immediatamente dopo il riattacco di un flusso laminare separato.

2.48.4 CONTAMINAZIONE DELLA LINEA DI ATTACHMENT

La contaminazione della linea di *attachment* venne studiata per un flusso a bassa velocità al bordo d'attacco di un'ala a freccia. Prendendo in considerazione la Figura 2.48.3, se l'ala è senza freccia un disturbo sul bordo d'attacco, dove si presenta la zona di stagnazione, la transizione interessa solo una piccola parte della superficie alare. Al contrario, considerando un'ala a freccia con una condizione analoga sul bordo d'attacco, il cuneo turbolento può diffondersi in una regione molto ampia, "contaminando" (rendendo turbolento) il flusso laminare originario fino al *tip* alare.



FIGURA 2.48.3: SCHEMATIZZAZIONE DELLA CONTAMINAZIONE DELLA LINEA DI *ATTACHMENT*. LA TRANSIZIONE FORZATA DA UN DISTURBO SUPERFICIALE IN P SU A) LAMINA PIANA, B) BORDO D'ATTACCO D UN'ALA A FRECCIA E C) LINEA DI ATTACCO DI ATTACCO PRIMARIOSUL LATO INFERIORE DI UN'ALA A DELTA PIANA CON NASO SMUSSATO (l: FLUSSO LAMINARE, t: FLUSSO TURBOLENTO, S_1 : PUNTO D'ARRESTO O DI STAGNAZIONE, A: LINEA DI *ATTACHMENT* PRIMARIA)

Questo effetto non è tipico del solo bordo d'attacco dell'ala, ma anche di ogni altra linea di attachment.

Un veicolo ipersonico si può trovare nella condizione di avere la linea di *attachment* nella zona inferiore del bordo attacco dell'ala o sul lato inferiore della fusoliera. Il disturbo iniziale potrebbe essere rappresentato da una piastrella disallineata che attraversa la linea di attacco e, a partire da questo punto, la turbolenza si potrebbe espandere su parte della superficie inferiore, modificando i carichi di resistenza e di calore previsti a progetto, ma anche inducendo forze laterali.

Oggi, tutte le capacità di previsione relative a tali effetti vengono affiancate da un *database* di esperimenti al suolo e, qualora fosse possibile, anche in volo.

2.48.5 EFFETTO DELLA TRIDIMENSIONALITÀ DEL FLUSSO: *CROSS FLOW INSTABILITY*

Questo effetto è importante quando lo strato limite è fortemente tridimensionale e le instabilità per l'incrocio tra flussi diviene importante. Ad oggi, le uniche previsioni per questo tipo di fenomeno sono frutto di dati empirici.



Fig. 7.1. Schematic of boundary-layer profiles [3]: a) three-dimensional boundary layer in curvilinear orthogonal external-streamline coordinates, b) two-dimensional boundary layer in Cartesian coordinates. The coordinates x^1 and x^2 are tangential to the body surface, x^3 is straight and normal to the body surface, v^{*1} and v^{-2} are the tangential velocity components. The vorticity vector $\underline{\omega}$ in two-dimensional flow points in x^2 direction throughout the boundary layer, while it changes its direction in three-dimensional flow. The vorticity content vector $\underline{\Omega}$ [3] always lies normal to the external inviscid streamline.

FIGURA 2.48.4: SCHEMATIZZAZIONE PROFILI DELLO STRATO LIMITE

2.48.6 EFFETTO DELLA INTERAZIONE TRA URTO E STRATO LIMITE

Se un'onda d'urto interferisce con lo strato limite, le proprietà di quest'ultimo vengono modificate. Basti pensare che l'unità del numero di Reynolds, Re^u , varia sul bordo dello strato limite dopo l'urto. Un differente valore di Re^u comporta effetti sulla stabilità dello strato limite.

2.48.7 Effetti delle alte temperature con un gas reattivo

Ci sono due meccanismi base importanti. Il primo, l'eccitazione dell'energia interna e le reazioni chimiche che modificano i parametri caratteristi dello strato limite come distribuzioni di velocità, temperatura, densità e viscosità. Pertanto, agiscono indirettamente sulle proprietà di stabilità dello strato limite. Il secondo è legato alla condizione di non equilibrio, sia termico che chimico, che affliggono direttamente la stabilità dello strato limite.

Il rilassamento del non equilibrio termico si è rivelato essere, sia teoricamente che sperimentalmente, un effetto di stabilizzazione del flusso. Per quanto riguarda il rilassamento dell'energia vibrazionale, invece, ha effetti fortemente destabilizzanti.

2.48.8 IRREGOLARITÀ SUPERFICIALI

Con irregolarità si intendono rugosità⁸³, gradini, vuoti, ondulazioni, ecc. Per i veicoli di rientro (RV), le piastrelle del sistema di protezione termico formano una superficie ricca di irregolarità. Tuttavia, un tale effetto non è il più importante per la transizione a quote superiori ai 40-60 km. Per altitudini inferiori diventa importante l'effetto della rugosità superficiale e sarebbe quindi auspicabile prevederne gli effetti in particolar modo per i carichi termici.

Nei veicoli di tipologia CAV il problema della transizione è fondamentale e le irregolarità superficiali hanno un'importanza sostanziale. La conoscenza delle irregolarità superficiali che consentono di avere ancora un flusso laminare è obbligatoria per questa tipologia di veicoli al fine di realizzarli con la più alta tolleranza superficiale e minimizzare i costi.

Anche il Mach esterno allo strato limite gioca un ruolo importante: un incremento del M_e richiederebbe maggiori rugosità perché la transizione continui a verificarsi. Per $M_e \ge 5 - 8$, la transizione forzata con le rugosità superficiali diviene molto difficile se non impossibile. Conseguenza di ciò è che la transizione dovuta a rugosità superficiali è molto probabile nei veicoli RV perché vi sono ampie zone con $M_e \le 2.5$. Importanti sono le irregolarità isolate, come una piastrella disallineata, che possono causare transizioni locali seguite da punti ad elevata temperatura.

2.48.9 INSTABILITÀ DI GÖRTLER

I vortici di Görtler sono coppie controrotanti di vortici a flusso incrociato, con gli assi paralleli alla direzione del flusso, che compaiono negli strati limite nelle concavità del flusso. Questo è tipico del flusso in presenza di concavità superficiale, ma anche nel caso di un flusso in prossimità di una linea di riattacco di una bolla di separazione su un cuneo o una superficie di controllo. Questo tipo di instabilità si possono presentare in ogni tipo di strato limite, laminare, turbolento e anche durante la transizione, e possono produrre elevati carichi termici. Il fenomeno è rappresentato nella figura seguente dove è possibile osservare la perturbazione di *cross-flow* in due differenti sezioni nella regione di ricircolo della rampa; qui il flusso è turbolento e ottenuto numericamente per mezzo di un codice che sfrutta un modello di turbolenza.

⁸³ La rugosità superficiale si può definire tramite il rapporto k/δ^* , dove k è l'altezza delle rugosità e δ^* lo spessore di spostamento dello strato limite. Vi è un valore critico di k per cui la rugosità è sufficiente ad innescare la transizione forzata. Si noti che, poiché δ^* cresce spostandosi dal bordo anteriore nella direzione del flusso, un valore critico di k vicino alla punta del naso potrebbe essere subcritico più a valle. Anche altri fattori, come il numero di Reynolds, lo stato termico della superficie, la spaziatura e la forma delle irregolarità, influenzano l'effetto delle irregolarità superficiali sulla transizione.



Fig. 8.11. Computed Görtler vortices in nominally 2-D flow past a 20° ramp configuration, $M_{\infty} = 3$, $Re = 12 \cdot 10^6$ [61].

FIGURA 2.48.5: VORTICI DI GÖRTLER COMPUTAZIONALI IN UN LUSSO 2D ATTRAVERSO UNA RAMPA DI 20°, $M_{\infty}3$, $Re = 12 \cdot 10^{6}$

2.48.10 RILAMINARIZZAZIONE

I flussi turbolenti possono tornare laminari. In genere, vi possono essere tre cause per cui ciò avviene, la prima è legata ad una caduta locale del Re_e , la seconda si verifica quando il flusso è soggetto alle forze di galleggiabilità o di curvatura, l'ultima riguarda i casi in cui lo strato limite è fortemente accelerato.

Per flussi 2-D, un criterio per valutare la rilaminarizzazione è:

$$K_{crit} = \frac{\nu^2}{V_e} \frac{dV_e}{dx} \ge 2 \cdot 10^6$$

Il primo e l'ultimo effetto possono essere importanti in un flusso ipersonico sebbene non si sappia in quali casi siano sufficientemente forti da riportare lo strato limite ad essere laminare. Gli effetti di rilaminarizzazione possono essere rilevati indirettamente all'interno di un ugello di una galleria del vento ipersonica.

2.48.11 FENOMENI AMBIENTALI

Con questo ci si riferisce sia al reale ambiente di volo che a quello presente nelle gallerie di test al suolo. Per determinare come l'ambiente possa influenzare la stabilità e le caratteristiche di transizione degli strati limite è bene conoscere le differenze tra i due ambienti in cui ci si trova ad operare e studiare. Idealmente, non ci dovrebbero essere differenze tra i disturbi nel volo reale e quelli in galleria del vento, ma la realtà è molto diversa.

L'atmosfera è un disturbo ambientale. Le caratteristiche dei disturbi nella troposfera sono in parte noti, ma si hanno meno informazioni relativamente alla stratosfera.

Al contrario, le nostre competenze riguardo i disturbi presenti nelle gallerie di test sono vaste. Il maggiore problema sono i disturbi acustici emessi dallo strato limite turbolento a parete nelle gallerie, per eliminarlo si sono introdotte delle camere di tranquillizzazione nel circuito del flusso prima della camera di test. Al loro interno sono stati installati dei dispositivi in grado di rimuovere lo strato limite a parete e la camera di test è isolata acusticamente. I disturbi nel flusso libero possono essere legati a fluttuazioni di velocità, temperatura, vorticità e di pressione. In aerodinamica, un tipico parametro che misura le fluttuazioni di velocità è il livello di turbolenza del flusso libero⁸⁴, valori tipici per una buona galleria del vento sono prossimi allo 0.1%.

In un flusso ipersonico il passaggio attraverso urti forti può cambiare la natura delle fluttuazioni, per esempio, le fluttuazioni di temperatura possono diventare fluttuazioni di vorticità e rumore acustico.

2.49 Predizione della stabilità e della transizione di flussi turbolenti

Si riporta di seguito una breve lista con i metodi usati per studiare questo tipo di condizioni.

Per la stabilità/instabilità si ricorre:

- Teoria lineare e stabilità locale
- Teoria non lineare e stabilità non locale

I modelli e i criteri di transizioni:

- I metodi di stabilità non lineare e non locale potrebbero essere efficacemente usati nel prossimo futuro. Altre possibilità sono date da DNS⁸⁵ e LES⁸⁶, ma la loro applicazione su configurazioni di veicoli reali non sembra disponibile a breve
- Un metodo semi-empirico si basa su osservazioni di tipo sia teorico che empirico
- L'ultima possibilità è quella di basarsi su misure ottenute con prove a terra e in volo, il grosso limite di questo metodo è la necessità di realizzare ampi *database* ripetendo molte prove e questo è particolarmente problematico per i test in volo. Una tale raccolta dati è inoltre molto onerosa.

2.50 INTERAZIONI IPERSONICHE VISCOSE

2.50.1 INTERAZIONI DI PRESSIONE

Ponendo una piastra immersa in un flusso ipersonico senza incidenza, nel caso ideale di un flusso inviscido si può asserire che il flusso non subisca gli effetti della presenza di tale lamina. Contrariamente, se si prendesse in considerazione la viscosità del gas, lo strato limite che si forma sulla lamina crescerebbe lungo il proprio percorso sulla superficie e questo strato limite rappresenta, in qualche modo, un ostacolo per il flusso in arrivo con una forma "virtuale" descritta dallo spessore di spostamento dello strato limite, δ^* . Perciò il flusso a monte viene influenzato dalla presenza della piastra perché la condizione di non perfetto scivolamento a parete genera la formazione dello strato limite. Il flusso è ipersonico già a monte, la deflessione del flusso, provocata dalla presenza di uno strato limite, si presenterà come un'onda d'urto obliqua. La presenza dell'urto andrà a modificare le proprietà del flusso esterno allo strato limite e perciò anche lo stesso strato limite subisce l'influenza dell'onda d'urto. Esiste una mutua interazione tra il flusso esterno inviscido e lo strato limite, questo fenomeno prende il nome di **interazione ipersonica viscosa**.

La distribuzione di pressione a parete sarà maggiore di quella flusso libero a monte in particolare nella zona vicina al bordo d'attacco della lamina e tenderà a decrescere spostandosi a valle fino a raggiungere

⁸⁴ T u = $\sqrt{\frac{u'^2 + v'^2 + w'^2}{3V_{\infty}^2}}$

⁸⁵ Direct Numerical Simulation

⁸⁶ Large Eddy Simulation

il valore che aveva all'infinito a monte. Per questa ragione l'interazione viscosa viene anche chiamata interazione di pressione.



FIGURA 2.50.1: DISTRIBUZIONI DI PRESSIONE LUNGO DEI CORPI NEL CASO INVISCIDO (A) E VISCOSO (B)

Vicino al bordo d'attacco la pressione non è costante attraverso lo strato limite, in questa regione lo strato limite e l'urto sono praticamente indistinguibili. Questa regione prende il nome di *merged layer*. Spostandosi lungo il flusso le due entità si separano diventando due fenomeni distinti, nonostante l'interazione tra i due sia ancora molto forte⁸⁷. Andando ulteriormente a valle, l'interazione diviene ancora più debole⁸⁸, qui i metodi di risoluzione dello strato limite risultano appropriati.

Molto vicino al bordo d'attacco si incontrano effetti di bassa densità, qui il valore locale del numero di Knudsen basato sullo spessore dello strato limite può essere abbastanza grande e l'ipotesi di mezzo continuo può non essere più accettabile.

I parametri di governo per l'interazione viscosa ipersonica sono:

$$\bar{\chi} = \frac{M_{\infty}^3}{\sqrt{Re_{\chi_{\infty}}}} \sqrt{C} \qquad \text{dove} \quad C = \sqrt{\frac{\rho_w \mu_w}{\rho_e \mu_e}}$$

Una teoria approssimata sviluppata negli anni '50 compara le assunzioni fatte durante l'analisi con la soluzione numerica delle equazioni complete di Navier-Stokes, si ottengono dei risultati in grado di fornire delle informazioni affidabili in breve tempo e senza la necessità di ricorrere ad un codice di calcolo.

Come detto lo spessore di spostamento ha un forte impatto sul flusso a monte, diventa perciò fondamentale determinare il δ^* . Partendo dalla soluzione di Blasius per flussi incompressibili:

$$\delta_{ic}^* = c \frac{x}{\sqrt{Re_{\infty,x}}}$$
 $c = 1.7208$ per strato limite laminare di Blasius

È possibile ottenere un valore per δ^* nel caso compressibile ricorrendo al metodo della temperatura di riferimento.

$$\delta^* = c \frac{x}{\sqrt{\frac{\rho^* V_{\infty} x}{\mu^*}}} = c \frac{x}{\sqrt{Re_{\infty,x}}} \frac{\rho_{\infty}}{\rho^*} \frac{\mu^*}{\mu_{\infty}}$$

⁸⁷ Regione di interazione forte.

⁸⁸ Regione di interazione debole

Applicando la legge dei gas perfetti e supponendo che la pressione rimanga costante attraverso lo strato limite (come detto questa assunzione non sarebbe accettabile troppo vicino al bordo d'attacco).

$$\frac{\rho_{\infty}}{\rho^*} = \frac{p_{\infty}}{p_e} \frac{T^*}{T_{\infty}} \qquad p^* \approx p_e$$

Si ottiene:

$$\delta^* = c \frac{x}{\sqrt{Re_{\infty,x}}} \sqrt{\frac{p_{\infty}}{p_e} \frac{T^*}{T_{\infty}} \frac{\mu^*}{\mu_{\infty}}}$$

A questo punto, nella teoria classica si assume che, nel *range* di temperature in gioco, la dipendenza della viscosità dalla temperatura possa essere approssimata con una relazione lineare.

$$\frac{\mu^*}{\mu_{\infty}} = C \frac{T^*}{T_{\infty}} \qquad \qquad \frac{\mu_w}{\mu_e} = C \frac{T_w}{T_e} \approx C \frac{\rho_e}{\rho_w} \implies C = \frac{\rho_w \mu_w}{\rho_e \mu_e}$$

Da ciò è possibile riscrivere lo spessore di spostamento come:

$$\delta^* = c \frac{x}{\sqrt{Re_{\infty,x}}} \frac{T^*}{T_{\infty}} \sqrt{C} \sqrt{\frac{p_{\infty}}{p_e}}$$

Assumendo:

$$T_e \approx T_\infty$$
 e $M_e \approx M_\infty$ => $\frac{T^*}{T_\infty} \approx \frac{T^*}{T_e} \propto M_e^2 \approx M_\infty^2$

Si può esprimere l'andamento della finale del rapporto di spostamento senza la dipendenza dal rapporto in temperature in favore del mach a monte:

$$\delta^* \propto \frac{x}{\sqrt{Re_{\infty,x}}} M_\infty^2 \sqrt{C} \sqrt{\frac{p_\infty}{p_e}}$$

Questa relazione di proporzionalità è valida anche per lo spessore dello strato limite δ . Rispetto al caso incompressibile, la dipendenza dal mach, del flusso libero, è al quadrato inoltre si ha la comparsa del parametro di Chapman-Rubesin sotto radice e del rapporto di pressione tra monte e valle dell'urto.

Nella teoria classica, il rapporto p_{∞}/p_e viene assunto approssimativamente uguale al salto di pressione attraverso l'urto, il quale può essere ottenuto per mezzo delle relazioni dell'urto obliquo. Per elevati valori di Mach e per piccoli angoli di deflessione si ha:

$$\frac{p_2}{p_{\infty}} = 1 + \frac{2\gamma (M_{\infty}^2 \sin^2 \beta - 1)}{\gamma + 1} \approx 1 + \frac{2\gamma (M_{\infty}^2 \beta^2 - 1)}{\gamma + 1}$$
$$\frac{p_e}{p_{\infty}} \approx \frac{p_2}{p_{\infty}} = 1 + \frac{2\gamma (M_{\infty}^2 \sin^2 \beta - 1)}{\gamma + 1}$$

Inoltre, in queste condizioni:

$$\tan \theta = 2 \cot \beta \left[\frac{M_{\infty}^2 \sin^2 \beta - 1}{M_{\infty}^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \right] \approx \frac{M_{\infty}^2 \beta^2 - 1}{\frac{\gamma + 1}{2} M_{\infty}^2 \beta}$$

L'ultima scrittura può essere trasformata in una equazione di secondo grado in β/θ .

$$\left(\frac{\beta}{\theta}\right)^2 - \frac{\gamma+1}{2}\left(\frac{\beta}{\theta}\right) - \frac{1}{M_{\infty}^2\theta^2} = 0$$

La cui soluzione positiva è:

$$\frac{\beta}{\theta} = \frac{\gamma+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 + \frac{1}{K^2}}$$

Dove *K*⁸⁹ è il **parametro di similarità ipersonica**. Risostituendo:

$$\begin{split} M_{\infty}^{2}\beta^{2} &= \frac{\gamma+1}{2}M_{\infty}^{2}\beta\theta + 1 = \frac{\gamma+1}{2}K^{2}\left[\frac{\gamma+1}{4} + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^{2} + \frac{1}{K^{2}}}\right] + 1\\ &\frac{p_{e}}{p_{\infty}} \approx 1 + \gamma K^{2}\left[\frac{\gamma+1}{4} + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^{2} + \frac{1}{K^{2}}}\right] \end{split}$$

Si noti che K e, in particolare, θ sono collegati allo spessore di spostamento.

$$\tan \theta = \frac{d\delta^*}{dx}(x)$$

Che, per piccoli angoli di deflessione:

$$\theta = \frac{d\delta^*}{dx}(x)$$

Quindi:

$$K = M_{\infty}\theta \approx M_{\infty}\frac{d\delta^*}{dx}(x)$$



FIGURA 2.50.2: RAPPRESENTAZIONE DELL'ITERAZIONE VISCOSA FORTE E DEBOLE

⁸⁹ $K = M_{\infty}\theta$

È possibile definire due situazioni limite per l'interazione viscosa ipersonica. Considerando la prima, quella chiamata interazione viscosa ipersonica, si ha un elevato valore del gradiente $d\delta^*/dx$ ed è quindi possibile assumere che $K \gg 1$. Il rapporto di pressione può essere approssimato:

$$\frac{p_e}{p_{\infty}} = \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} K^2 = \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} M_{\infty}^2 \left(\frac{d\delta^*}{dx}\right)^2$$

Sostituendo questa scritta nell'equazione che forniva l'andamento dello spessore di spostamento:

$$\delta^* \propto \frac{x}{\sqrt{Re_{\infty,x}}} M_{\infty}^2 \sqrt{C} \frac{1}{M_{\infty} \frac{d\delta^*}{dx}}$$

Integrando:

$$\delta^* d\delta^* \propto \frac{M_\infty}{\sqrt{Re^u}} \sqrt{C} \sqrt{x} \, dx \quad \rightarrow \quad \delta^* \propto \left(\frac{C}{Re^u_\infty}\right)^{1/4} \sqrt{M_\infty} x^{3/4}$$

Ciò che si è ottenuto è che lo spessore di spostamento cresce di $x^{3/4}$.

In aggiunta si può trovare che:

$$\frac{d\delta^*}{dx} \propto \left(\frac{C}{Re_{\infty}^u}\right)^{1/4} \sqrt{M_{\infty}} x^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{C}{Re_{x,\infty}}\right)^{1/4} \sqrt{M_{\infty}}$$
$$\frac{p_e}{p_{\infty}} \approx \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} M_{\infty}^2 \left(\frac{d\delta^*}{dx}\right)^2 \propto \frac{M_{\infty}^3}{\sqrt{Re_{\infty}^u}} \sqrt{C} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{M_{\infty}^3}{\sqrt{Re_{x,\infty}}} \sqrt{C} = \bar{\chi}$$

Ricapitolando:

$$\frac{p_e}{p_{\infty}} \propto x^{-\frac{1}{2}} \qquad \frac{p_e}{p_{\infty}} \propto \bar{\chi} \qquad K^2 = M_{\infty}^2 \left(\frac{d\delta^*}{dx}\right)^2 \propto \frac{M_{\infty}^3}{\sqrt{Re_{x,\infty}}} \sqrt{C} = \bar{\chi}$$

Nella regione di interazione forte vale la seguente relazione in funzione di $\bar{\chi}$:

$$\frac{p_e}{p_{\infty}} \approx 1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} K^2 = 1 + \alpha_1 \bar{\chi}$$

L'altra situazione limite è quella di interazione debole in cui il gradiente $d\delta^*/dx$ è piccolo, per cui si assume $K \ll 1$. Il rapporto di pressione, in questo caso, si può approssimare come:

$$\frac{p_e}{p_{\infty}} \approx 1 + \gamma K + \left[\frac{\gamma(\gamma+1)}{4}K^2\right] \approx 1$$

Analogamente a prima, sostituendo ed integrando:

$$\delta^* \propto \frac{x}{\sqrt{Re_{\infty,x}}} M_{\infty}^2 \sqrt{C} = \frac{M_{\infty}^2}{\sqrt{Re_{\infty}^u}} \sqrt{C} x^{1/2}$$
$$\frac{d\delta^*}{dx} \propto \frac{M_{\infty}^2}{\sqrt{Re_{\infty}^u}} \sqrt{C} x^{-1/2} = \frac{M_{\infty}^2}{\sqrt{Re_{x,\infty}^u}} \sqrt{C}$$

Anche in questo caso si trova che il parametro di similarità ipersonica è direttamente proporzionale al parametro $\bar{\chi}$.

$$K = M_{\infty} \frac{d\delta^*}{dx} \propto \frac{M_{\infty}^3}{\sqrt{Re_{x,\infty}}} \sqrt{C} = \bar{\chi}$$

Ricapitolando, nella regione di bassa interazione si ha:

$$\frac{p_e}{p_{\infty}} \approx 1 + b_1 \bar{\chi} + b_2 \bar{\chi}^2 \quad \text{se } K \text{ fosse sufficientemente piccola:} \quad \frac{p_e}{p_{\infty}} \approx 1 + b_1 \bar{\chi}$$

Di seguito si riportano le tipiche approssimazioni delle correlazioni ottenute con delle analisi più dettagliate.

interazione forte, per lamina isolata
$$\rightarrow \frac{p_w}{p_{\infty}} = 0.759 + 0.514\bar{\chi}$$

interazione debole, per lamina isolata $\rightarrow \frac{p_w}{p_{\infty}} = 1 + 0.31\bar{\chi} + 0.05\bar{\chi}^2$
interazione forte, per lamina raffredata ($T_w < T_{\infty}$) $\rightarrow \frac{p_w}{p_{\infty}} = 1 + 0.5\bar{\chi}$
interazione debole, per lamina raffredata ($T_w < T_{\infty}$) $\rightarrow \frac{p_w}{p_{\infty}} = 1 + 0.078\bar{\chi}$

Se la parete è fredda, gli effetti dell'interazione viscosa ipersonica sono mitigati. Questo si può spiegare notando che la temperatura media all'interno dello strato limite è inferiore, quindi la densità è maggiore e lo spessore di spostamento, che è la principale causa dell'interazione, è minore.

Per applicazioni pratiche è possibile considerare $\bar{\chi} > 3$ per interazioni forti e $\bar{\chi} < 3$ per quelle deboli.

2.50.2 INTERAZIONE TRA URTO E STRATO LIMITE

Un altro tipo di interazione viscosa ipersonica si verifica quando un'onda d'urto forte ha effetti significativi sullo strato limite, pertanto si parla di **interazione onda d'urto – strato limite**. Questo tipo di interazione è particolarmente importante per i veicoli ipersonici poiché possono produrre dei carichi termici localizzati in grado di superare, anche di diversi ordini di grandezza, quelli previsti in fase di design.

L'interazione urto-strato limite può essere presente in diverse parti del veicolo ipersonico, come ali o stabilizzatori, superfici di controllo, il labbro di una presa d'aria o all'interno della stessa e così via.

Un tipico esempio di un evento molto pericoloso causato da questa interazione è quello che ha riguardato uno degli ultimi voli del veicolo sperimentale X-15 nel 1967. Durante questo volo, un finto ramjet era stato collegato sotto la fusoliera tramite una gondola, l'aereo stava volando alla massima velocità raggiungendo M = 6.72. Durante il volo, l'onda d'urto, originata dalla presenza del finto ramjet nella congiunzione con il pilone che lo collegava alla fusoliera, creò delle temperature tali da forare la superficie. Il modello di ramjet venne completamente bruciato via e i gas caldi penetrando dal foro nella gondola riuscirono ad entrare nella struttura interna del X-15 indebolendola. In aggiunta, l'onda d'urto del pilone danneggio anche la parte inferiore della fusoliera. Fortunatamente il volo non ebbe conseguenze mortali e il pilota riuscì a riportare il velivolo alla base.

In generale, l'interazione urto-strato limite è classificata come **interazione Edney-***type* prendendo il nome da colui che condusse un lavoro sia teorico che sperimentale identificando e studiando sei tipi di

interazioni. A seguire vedremo due casi tipici: l'interazione $ramp-type^{90}$ e quella nose/leading-edge-type⁹¹.

Per studiare la prima si considera una configurazione a placca piana con cuneo, qui l'interazione si verifica nel momento in cui l'onda d'urto generata dalla rampa interagisce con lo strato limite. Il forte gradiente di pressione avverso causato dalla presenza del cuneo, che in un flusso inviscido genererebbe un urto obliquo attaccato, provoca la separazione dello strato limite. Di conseguenza, oltre all'urto sul bordo d'attacco si presentano anche altri tre urti: un urto di separazione prima della regione di separazione, un urto interno di riattacco dovuto alla forte deflessione del flusso a seguito del riattaccamento dello stesso e un urto di riattacco esterno più forte generato dall'interazione tra la separazione e gli urti di riattacco interno nel punto triplo.



Figure 2: RUN 8 - Log10 of non-dimensionalized pressure (top) and Mach number (bottom) contours.

FIGURA 2.50.3: TEST CFD SU UNA RAMPA

Nel punto triplo (di cui è riportata una rappresentazione di seguito), l'interazione dei due urti appartenenti alla stessa famiglia generano un ventaglio di espansione e una superficie di scorrimento. A parete sono presenti valori di pressione e flussi di calore molto elevati nella regione al di sotto del punto triplo. In particolare, gli elevati livelli del flusso di calore devono essere valutati per poter proteggere adeguatamente la superficie.

⁹⁰ Edney-*type* V e VI

⁹¹ Edney-type III e IV



FIGURA 2.50.4: DETTAGLIO DEL TEST CFD SU RAMPA

L'influenza del flusso superiore sulla rampa e l'estensione della separazione, dipendenti dal numero di Reynolds, debolmente nei flussi turbolenti, subiscono un incremento con l'aumentare dell'angolo di rampa e decrescono se il numero di Mach. Gli andamenti del campo di flusso sono sempre gli stessi, indipendentemente dal fatto che il flusso sia laminare o turbolento, ma poiché le regioni di separazione sono meno estese nei flussi turbolenti, l'effetto dell'interazione è meno pronunciato in quest'ultimo caso. Anche la temperatura a parete ha il suo peso sebbene non esista ancora una correlazione definitiva. Tuttavia sembrerebbe che basse temperature riducano l'estensione della zona di separazione e l'interazione.



L'altra tipo di interazione, quella nose/leadingedge-type, è critica per il labbro della presa, il pilone retto, etc. poiché comportano regioni altamente localizzate, a valle dell'interazione, di pressione superficiale e velocità di trasferimento di calore sul corpo. L'interazione Edney-type IV è più intenza della III, di seguito verrà commentata la prima delle due. Le interazioni Edney-type si presentano, tipicamente, quando un urto obliquo incontra un urto curvo e staccato che si forma davanti ad un corpo tozzo. A seconda della forza di entrambi gli urti, dell'interazione e sulla loro posizione relativa, si possono verificare vari schemi di interferenza. Il tipo III e IV sono presenti quando l'urto incidente incontra l'urto curvo dove è più forte, ovvero tra la linea sonica superiore e quella inferiore. A causa della differente intensità che caratterizza i due urti si genera una "linea" che separa una regione con flusso subsonico da una ove è supersonico. A seconda dell'angolo tra lo shear layer e la tangente al corpo, se il numero di Mach è sufficiente alto, è possibile che lo shear layer riattac-

chi sull'ostacolo, questa situazione corrisponde a quella dell'interferenza di III tipo. Qualora l'angolo fosse eccessivo si genera un getto supersonico circondato da una regione subsonica. Talvolta, il getto supersonico è troppo curvo e rasente la superficie del corpo, ma di solito è diretto verso il corpo. In

questi casi, il flusso subisce una forte compressione attraverso un urto retto vicino a parete; questa situazione è quella delle interferenze del IV tipo e produce i più elevati livelli di pressione e di calore sulla superficie del corpo.

Il getto supersonico cattura una parte notevole dell'entalpia totale del flusso, la quale è parzialmente riversata in una piccola regione superficiale. Quindi, il flusso di entalpia totale è concentrato e dovuto alla ridotta distanza dalla zona finale dell'urto retto dalla parete, sono presenti picchi di pressione e di flusso di calore a parete.



FIGURA 2.50.6: CONFRONTO TRA DATI NUMERICI E SPERIMENTALI

3 CAPITOLO 2: ANASTASIA

3.1 INTRODUZIONE ANASTASIA

Per la validazione di un nuovo codice di calcolo CFD è necessario confrontare i dati ottenuti dall'analisi numerica su corpi più o meno complessi con quelli ottenuti su corpi dalla medesima geometria per via sperimentale. Il codice validato nella presente tesi si chiama Anastasia ed è stato realizzato da una collaborazione tra Thales-Alenia e Optimad.

Anastasia è nato dalla decisione di raccogliere anni di codici sviluppati dalla Thales-Alenia per lo studio del campo ipersonico. Il linguaggio di programmazione usato all'interno dell'azienda era il Fortran. Il nuovo codice si basa, invece, sul più moderno linguaggio di C++ sfruttando le librerie di **DUNE project**.

DUNE⁹² è un toolbox modulare per la risoluzione di equazioni differenziali parziali con metodi di griglia, per questa ragione può essere facilmente implementato con metodi quali le differenze finite, i volumi finiti e gli elementi finiti. DUNE consente di essere impiegato in ambienti molto diversi usando una comune interfaccia a bassissimo costo. In questo modo DUNE consente di svolgere calcoli scientifici in maniera efficiente e supportando applicazioni di calcolo ad alte performance.

Per la validazione di un nuovo codice di calcolo occorre realizzare un database di dati sperimentali raccolti su geometrie più o meno semplici in un campo compatibile con quello modellizzato dal software. Anastasia è in grado di risolvere le equazioni di Eulero⁹³ e di Navier-Stokes per gas perfetti e reali in un dominio 3D e in un finto 2D usando un risolutore esplicito e un FAS-MG⁹⁴ al primo o al secondo ordine nel tempo e nello spazio. I campi di moto che possono essere analizzati per mezzo di questo codice sono flussi inviscidi o viscosi per valori di mach supersonici e alto-ipersonici laminari. Per i primi test si sono studiate delle geometrie semplici in flussi con numero di mach quanto più elevati e valori di Reynolds quanto più contenuti possibile.

Scelte le geometrie da analizzare, si realizzano i database con i valori che si vogliono confrontare e le griglie dei volumi attorno ai corpi in analisi. Per la raccolta dei dati si è scelto di usare Excel per la semplicità e l'immediatezza di visualizzazione dei dati. Per la costruzione delle griglie strutturate si sono usati due software, molto simili e intercambiabili, Gridgen e PointWise. Realizzate le griglie, è possibile esportare i file con le condizioni al contorno⁹⁵. Entrambi i software sono in grado di esportare questi file in una grande varietà di formati così da poter lavorare con tutti i principali software di analisi CFD e FEM; tra questi formati quello riconosciuto da Anastasia è il PRO-STAR.

Realizzati i file delle condizioni al contorno sulle facce è possibile passare all'analisi vera è propria. Si devono inserire i parametri inerenti le condizioni del campo di moto attraverso i file .dat necessari al software per procedere nell'analisi.

Una volta che Anastasia avrà raggiunto il valore desiderato dei residui interromperà il calcolo iterativo. Nella cartella in cui vengono salvati i file generati durante la risoluzione, si troveranno i file con le soluzioni nei passi temporali per i quali si era richiesta l'estrazione⁹⁶, oltre a quello finale. Per la visualizzazione e l'analisi delle soluzioni è stato usato TecPlot 360, e in piccola parte anche Paraview, che

⁹² Distributed and Unified Numerics Environment. Si tratta di un software gratuito fornito con licenza GPL (General Public License)

⁹³ Solamente nella condizione di equilibrio chimico.

⁹⁴ Full Approximation Scheme – MultiGrid. È uno schema molto usato per la risoluzione di problemi non lineari

⁹⁵ Ad esempio quali sono le superfici attraverso cui entra o esce il flusso, o quali siano quelle che rappresentano le pareti del corpo e pertanto impermeabili al flusso. Più avanti verranno trattate in dettaglio tutte le tipologie di condizioni al contorno riconosciute dal codice.

⁹⁶ Attraverso due parametri all'interno del file di Input, uno per l'intero volume ed uno per la soluzione a parete.

sono degli ambienti di visualizzazione e di analisi *post-processing* in grado di elaborare grandi moli di dati e di eseguire visualizzazioni parametriche sia in 2D che in 3D.

3.2 INTRODUZIONE ALLE TECNICHE MULTIGRID

L'idea multigrid si basa su due principi: lo smoothing dell'errore e la correzione della griglia coarse.

La **tecnica multigriglia** è molto usata nei risolutori CFD⁹⁷ perché offre il vantaggio di velocizzare il rateo di convergenza delle soluzioni. Il rateo di convergenza dei metodi iterativi espliciti tende ad arrestarsi, o quantomeno ridursi, dopo poche iterazioni. Questo problema si acuisce operando su griglie particolarmente grosse e fitte. Inoltre, i metodi iterativi applicati a griglie molto fini non sono in grado di smorzare efficacemente gli errori a bassa frequenza, a differenza di *mesh* realizzate con celle più grandi. Per accelerare lo smorzamento di questo tipo di errori sono, pertanto, più funzionali delle griglie *coarse* con un minore infittimento. Per contro, questa tipologia di griglie non offre una buona discretizzazione spaziale del campo. Da quanto detto deriva l'idea di usare entrambe le tipologie di griglie per poter ottenere i vantaggi di ambedue le discretizzazioni.

L'algoritmo multigriglia sfrutta una gerarchia di discretizzazioni per accelerare la convergenza dei metodi iterativi standard per mezzo di una correzione globale dell'approssimazione della soluzione della griglia fine, compiuta risolvendo un problema più semplice perché risolto su una griglia *coarse*.

Per comprendere nel dettaglio il funzionamento dei metodi multigriglia a seguire verrà proposta una trattazione che è quella riportata nella REF (1).

Prendendo come esempio la formula iterativa del metodo di Gauss-Seidel classico per l'equazione di Poisson dice:

$$u_{h}^{m+1}(x_{i}, y_{j}) = \frac{1}{4} \left[h^{2} f_{h}(x_{i}, y_{j}) + u_{h}^{m+1}(x_{i}, y_{j}) + u_{h}^{m}(x_{i+h}, y_{j}) + u_{h}^{m+1}(x_{i}, y_{j-h}) + u_{h}^{m}(x_{i}, y_{j+h}) \right]$$

 $(x_i, y_j) \in \Omega_h; u_h^m \in u_h^{m+1}$ sono le approssimazioni di $u_h(x_i, y_j)$ prima e dopo l'iterazione.

Se applichiamo questo metodo all'equazione di Poisson possiamo riconoscere il seguente fenomeno. Dopo alcuni *step* l'errore dell'approssimazione diventa *smooth*, ma non necessariamente piccolo.

Considerando l'errore:

$$v_h^m(x_i, y_j) = u_h(x_i, y_j) - u_h^m(x_i, y_j)$$

La formula precedente ottiene la forma.

$$v_h^{m+1}(x_i, y_j) = \frac{1}{4} \left[v_h^{m+1}(x_i - h, y_j) + v_h^m(x_i + h, y_j) + v_h^{m+1}(x_i, y_j - h) + v_h^m(x_i, y_j + h) \right]$$

⁹⁷ I software commerciali fanno uso dei metodi AMG (*Algebraic MultiGrid*) per la risoluzione dei sistemi lineari che compaiono nella formulazione dei metodi risolutivi. Anastasia, invece, usa una tecnica *multigrid* di tipo geometrico.



FIGURA 3.2.1: INFLUENZA DELLE ITERAZIONI GS-LEX⁹⁸ SULL'ERRORE

La formula dell'iterazione può essere interpretata come un processo di mediazione dell'errore. L'errore di *smoothing* è uno dei due principi di base dell'approccio multigriglia.

Il **principio di** *smoothing* dice che molti metodi iterativi classici, se applicati correttamente a problemi ellittici discreti, hanno un forte effetto di *smoothing* sull'errore di qualsiasi approssimazione.

Il **principio del trasferimento della soluzione** è legato alla possibilità di approssimare una soluzione *smooth* da una griglia su di un'altra *coarse*⁹⁹ senza avere necessariamente una perdita di informazioni.

Se si è certi che l'errore dell'approssimazione sia diventato *smooth* dopo un certo numero di iterazioni, lo si può approssimare con una procedura adatta su una griglia molto più *coarse*. Il principio dell'approssimazione: un termine di un errore *smooth* è ben approssimato su una griglia *coarse*. Una procedura della griglia *coarse* è fondamentalmente meno costosa di quella su una griglia fine. Per quantità di errori o correzioni, si parla anche di principio *coarse grid correction* (CGC).

Per illustrare queste considerazioni è possibile prendere come esempio l'espansione dell'errore di Fourier. Prendendo come problema esemplificativo quello dell'errore $u_h = u_h^m(x, y)$ considerato come una funzione delle variabili discrete x e y può essere scritto come:

$$v_h(x,y) = \sum_{k,l=1}^{n-1} a_{k,l} \sin k\pi x \sin l\pi y$$

Per $(x, y) \in \Omega_h$ le funzioni:

$$\varphi_h^{k,l}(x, y) = \sin k\pi x \sin l\pi y$$
 $(k, l = 1, ..., n-1)$

Sono le autofunzioni discrete dell'operatore discreto Δ_h . Il fatto che questo errori diventi smooth dopo alcuni *step* significa che le componenti ad alta frequenza:

 $\alpha_{h,l} \sin k\pi x \sin l\pi y$ k e l grandi

Diventano piccoli dopo alcune iterazioni, mentre quelle di bassa frequenza:

 $\alpha_{h,l} \sin k\pi x \sin l\pi y$ k e l piccoli

Non subiscono quasi nessuna variazione.

La distinzione tra frequenza alte e basse è importante nei metodi multigriglia.

Considerando di avere due griglie Ω_h e Ω_H discretizzate con celle di dimensione differente tali per cui la prima sia più fine della seconda, in particolare si ha che la dimensione della *mesh* H sia doppia di quella di h = 1/n. La scelta di una griglia *coarse* è, pertanto, chiamata *standard coarsening*.

⁹⁸ Gauss-Seidel lessicografico.

⁹⁹ Generalmente una griglia con celle di dimensione doppia rispetto all'altra.

Per la definizione di alte e basse frequenze, ritornando alle autofunzioni $\varphi^{k,l} = \varphi_h^{k,l}$ m dati k,l si condiderano le quattro autofunzioni:

$$arphi^{k,l} \quad arphi^{n-k,n-l} \quad arphi^{n-k,l} \quad arphi^{k,n-l}$$

Si osserva che coincidono su Ω_H :

$$\varphi^{k,l}(x,y) = -\varphi^{n-k,l}(x,y) = -\varphi^{k,n-l}(x,y) = \varphi^{n-k,n-l}(x,y) \qquad (x,y) \in \Omega_H$$

Questo vuol dire che queste autofunzioni sono indistinguibili su Ω_H . Per k o l = n/2, $\varphi^{k,l}$ scompaiono su Ω_H .

Secondo l'esempio precedente, per $k, l \in \{1, ..., n-1\}$ si nota che $\varphi^{k,l}$ sia un'autofunzione (oppure una componente) di:

- Bassa frequenza se max(k, l) < n/2
- Alta frequenza se $n/2 \le \max(k, l) < n$

Solo le basse frequenze sono visibili su Ω_H siccome tutte le alte frequenza coincidono con una bassa frequenza su Ω_H (oppure scompaiono). Il fenomeno che porta le alte frequenze a coincidere con quelle basse prende il nome di *aliasing* di frequenza.



FIGURA 3.2.2: COMPONENTI DI BASSA E ALTA FREQUENZA PER UN ESEMPIO UNIDIMENSIONALE CON N=8

Le componenti di bassa frequenza rappresentano funzioni di griglia su Ω_H , la cui dimensione della *mesh* era doppia, mentre quelle di alta frequenza non lo sono.

Se si applica questa distinzione tra frequenze alla rappresentazione di $v_h(x, y)$, si può scomporre la sommatoria:

$$\sum_{k,l=1}^{n-1} \alpha_{k,l} \varphi^{k,l} = \sum_{high} \alpha_{k,l} \varphi^{k,l} + \sum_{low} \alpha_{k,l} \varphi^{k,l}$$
$$\sum_{high} \alpha_{k,l} \varphi^{k,l} = \sum_{k,l=1}^{n/2-1} \alpha_{k,l} \varphi^{k,l}$$
$$\sum_{low} \alpha_{k,l} \varphi^{k,l} = \sum_{\frac{n-1}{2} \le \max(k,l)}^{n-1} \alpha_{k,l} \varphi^{k,l}$$

I termini bassa e alta frequenza sono relativi alla griglia fine Ω_h e a quella *coarse* Ω_H , si parla di (h,H)bassa su Ω_h e (h,H)-alta frequenza su Ω_H .

È possibile continuare nella trattazione, passando dalle due griglie di livello Ω_h e Ω_H , ad una sequenza di livelli per spiegare l'idea di *multigrid*, e non soltanto quella *two-grid*.

Assumendo inoltre che *n* sia una potenza di 2, il ché significa che $h = 2^{-p}$, si può formare la sequenze di griglie:

$$\Omega_h, \Omega_{2h}, \dots, \Omega_{h_0}$$



FIGURA 3.2.3: SEQUENZA DI GRIGLIE DOVE QUELLA DI PARTENZA HA h=1/16

Raddoppiando da una griglia all'altra la dimensione della *mesh*, e assumendo che la sequenza finisca con la griglia caratterizzata dalla *mesh* meno fine di tutte, in genere indicata con Ω_{h_0} (il livello zero).

Prendendo in considerazione una scomposizione dell'errore in sommatorie parziali, analogamente a quanto fatto nel caso delle griglie $\Omega_h \in \Omega_{H=2h}$, per le quali si erano distinte le alte e le basse frequenze rispetto a questa coppia di griglie, si esegue una distinzione aggiuntiva tra frequenze rispetto alle altre coppie: $\Omega_{2h} \in \Omega_{4h}$, $\Omega_{4h} \in \Omega_{8h}$ e così via.

Utilizzando iterazioni del metodo Gauss-Seidel sulla griglia originare Ω_h , si rimpiccioliscono rapidamente le componenti dell'errore di (h, 2h)-alta frequenza. Le componenti rimanenti dell'errore di bassa frequenza sono visibili e si possono approssimare su Ω_{2h} . Svolgendo iterazioni di questo tipo non solo sulla griglia di partenza Ω_h , ma anche sulle successive si causa una rapida decrescita nelle componenti di alta frequenza di queste.

Iterazioni di Gauss-Seidel su diversi livelli della griglia portano ad una repentina riduzione delle componenti corrispettive di alta frequenza e siccome questo processo copre tutte le frequenze si ha una riduzione dell'errore complessivo.

Considerando iterazioni di tipo puntuale è possibile comparare le proprietà di *smoothing* e le caratteristiche di calcolo parallelo dei metodi ω -JAC¹⁰⁰, GS-LEX e GS-RB¹⁰¹. ω -JAC è *fully* Ω_h *parallel*, quindi l'operatore può essere applicato contemporaneamente su ogni nodo della griglia: i nuovi valori non dipendono gli uni dagli altri. Il grado di parallelismo di questo metodo è:

par-deg(
$$\omega$$
-JAC) =# Ω_h

Nel caso dei GS-LEX si vuole usare il più recente valore di u_h dove possibile, i punti che "poggiano" su una diagonale di Ω_h sono indipendenti e possono essere trattati in parallelo. Il grado di parallelismo, in questo caso, varia da una diagonale all'altra ed è limitato da:

par-deg(GS-LEX) $\leq (\#\Omega_h)^2$

¹⁰⁰ Per raggiungere un ragionevole livello di *smoothing* viene introdotto un parametro $\omega \neq 1$, per maggiori dettagli vedere pagine [30-31] REF (1) ¹⁰¹ Gauss-Seidel red-black usa una differente disposizione dei punti della griglia chiamata anche "pari-dispari". per maggiori

¹⁰¹ Gauss-Seidel red-black usa una differente disposizione dei punti della griglia chiamata anche "pari-dispari". per maggiori dettagli vedere pagine [31-33] REF (1)



FIGURA 3.2.4: PUNTI LUNGO LA DIAGONALE CHE POSSONO ESSERE TRATTATI IN PARALLELO CON GS-LEX

Infine, nel caso del GS-RB ogni *step* del rilassamento è formato da due "mezzi-*step*": durante il primo vengono trattati simultaneamente e indipendentemente tutti i nodi rossi, nel secondo si "passa" a quelli neri usando i valori aggiornati dei nodi rossi. Il grado di parallelismo è:



FIGURA 3.2.5: DISTRIBUZIONE RED-BLACK DEI PUNTI DELLA GRIGLIA Ω_h

Relaxation	Smoothing factor	Smoothing	Parallel Degree
ω-JAC, ω=1	1	No	Full
ω-JAC, ω=0.5	0.75	Unsatisfactory	Full
ω-JAC, ω=0.8	0.6	Accetable	Full
GS-LEX, $\omega = 1$	0.5	Good	Square root
GS-RB, $\omega = 1$	0.25	Very good	Half
TARELLA 2 2 1. EATTOR DI SMOOTHING DER DIVERSI SCHEMI			

TABELLA 3.2.1: FATTORI DI SMOOTHING PER DIVERSI SCHEMI

Dalla Tabella 3.2.1¹⁰² si osserva come ω -JAC sia l'unico *fully parallel*, purtroppo però non si rivela un buono *smoother*; diversamente, il GS-LEX presenta delle buone proprietà di *smoothing*, ma debolmente "parallelo". Infine, il GS-RB rivela delle buone proprietà di smoothing e anche di calcolo parallelo.

¹⁰² Estrapolata direttamente dalla tabella 2.1 riportata a pagina 34 REF (1)

3.2.1 Multigrid features

L'idea fondamentale del *multigrid* è applicabile in svariati contesti, diversi aspetti del *multigrid* possono essere messi in rilievo a seconda delle caratteristiche ritenute più significative.

3.2.1.1 Multigrid come risolutore lineare iterativo

Il modo più semplice di utilizzare un multigriglia è quello di consideralo come un risolutore lineare iterativo per problemi ellittici discreti. Qui si assumono il problema, la griglia e la discretizzazione fissati e da risolvere. L'approccio iterativo *multigrid* sfrutta il fatto che la velocità di convergenza della multigriglia sia indipendente dalla dimensione della discretizzazione della *mesh h* e che il numero delle operazioni aritmetiche per passo di iterazione sia proporzionale al numero dei punti della griglia. Il principio della multigriglia consente di costruire solutori lineari molto efficienti ed è perciò che l'approccio iterativo è fondamentale.

3.2.1.2 Multigrid come risolutore per problemi differenziali

Il *multigrid* si può ritenere un metodo di soluzione per il problema differenziale. In questo senso non è appropriato separare la discretizzazione e la soluzione dal problema discreto, al contrario si ritengono tutti e due i processi come interdipendenti.

Un modo semplice di vedere il multigrid come un solutore differenziale è quello del *full multigrid method* (FMG). Il metodo è orientato a minimizzare l'errore differenziale piuttosto che quello algebrico. Raffinamenti auto-adattativi della multigriglia e gli approcci relativi, che sono normali nel contesto della multigriglia appartengono anche alla visualizzazione differenziale della multigriglia.

3.2.1.3 Efficienza

I metodi multigriglia sono altamente efficienti. Il termine efficienza è legato sia ad aspetti pratici che teorici. I metodi multigrid sono ottimali, nel senso che il numero di operazioni necessarie a risolvere un problema discreto è proporzionale al numero N di incognite del problema in analisi. L'efficienza, nel senso pratico, indica che le costanti di proporzionalità in questo O(N) sono piccole o contenute. Questo è infatti il caso per il multigrid: se scelto opportunamente, i fattori di convergenza h-indipendenti si possono rendere molto piccoli e il peso dell'operazione per ogni incognita e ogni step è molto piccolo. Se un algoritmo multigriglia ha questa proprietà si parla di *typical multigrid efficiency*.

3.2.1.4 Generalità

La seconda proprietà fondante è la sua generalità. Questi metodi sono tanto efficienti quanto i solutori ellittici, ma sono meno limitati nel loro *range* di applicazione. Possono essere applicati con maggiore efficienza:

- A equazioni ellittiche generali con coefficienti variabili
- In domini generali
- Per condizioni al contorno generali
- Per problemi 1D, 2D, 3D e dimensioni maggiori
- A equazioni scalari e sistemi di equazioni.

Il multigrid si può applicare direttamente, senza linearizzazione globale, a problemi ellittici non lineari.

Inoltre, non è vincolato ad un unico approccio di discretizzazione e può essere utilizzato con qualsiasi tipo di discretizzazione: differenze finite, volumi finiti e elementi finiti.

3.2.1.5 Ottimizzazione vs robustezza

I metodi multigriglia sono caratterizzati da quelle che prendono il nome di **componenti**: la procedura di *smoothing*, la strategia di *coarsening*, gli operatori gli griglia *coarse*, gli operatori di trasferimento dalla griglia fine a quella *coarse* e viceversa e il tipo di ciclo. Nonostante siano note le componenti adatte per una gran varietà di problemi, può essere molto difficile definirne di adatti per nuove tipologie di applicazioni complesse, richiedendo conoscenze teoriche, esperienza a test numerici. Vi sono due tendenze rispetto alla scelta delle componenti multigriglia.

Negli algoritmi multigriglia ottimizzati si cerca di adattare le componenti al problema in esame, al fine di ottenere l'efficienza più alta possibile nel processo risolutivo.

L'idea di algoritmi robusti multigriglia è di scegliere le componenti indipendentemente dal problema, uniformemente per il maggior numero di problemi possibili. L'approccio robusto viene spesso utilizzato in pacchetti software dove l'efficienza più alta per un singolo problema non è fondamentale. Il metodo AMG è un esempio di metodo multigriglia robusto.

L'ottimizzazione della multigriglia è, in molti casi, limitato dalla pratica. Per esempio, esistono diversi pacchetti software basati su determinate strutture di griglie, tecniche di discretizzazione e metodi di soluzione che non sono orientati ai requisiti di questo genere di tecniche. Utenti e sviluppatori potrebbero essere interessati ad accelerare il programma introducendo alcune qualità *multigrid*. Una semplice modifica del programma potrebbe favore una significativa riduzione del tempo computazionale.

3.2.1.6 Adattività

Definire una griglia globale per la discretizzazione di un dato problema, indipendentemente dal processo della soluzione spesso è insufficiente. Solo durante il processo della soluzione alcune caratteristiche della soluzione potrebbero essere riconosciute come: urti, singolarità, comportamenti turbolenti e simili. L'errore locale di discretizzazione è di dimensione diversa in zone diverse del dominio e pertanto sarebbe normale adattare le griglie al comportamento della soluzione. Questa è una delle ragioni principali per le quali si utilizzano le griglie adattive che sono costruite dinamicamente all'interno dello stesso processo risolutivo, questo è particolarmente necessario per una griglia che è localmente tanto fine quanto necessario nelle zone cruciali.

Per queste ragioni, l'adattività delle griglie è una delle tendenze maggiori in simulazioni numeriche e di calcolo scientifico odierne.

L'adattività si può combinare con il principio multigrid. Il raffinamento della griglia viene realizzato in quelle zone del dominio dove l'errore corrente di discretizzazione è significativo, essenzialmente tutte le altre componenti *multigrid* vengono mantenute come al solito.

3.2.1.7 Caratteristiche parallele

Una tendenza nelle simulazioni numeriche e calcolo scientifico è quella di utilizzare il parallelismo negli algoritmi numerici. La causa risiede nelle elevate performance di calcolo parallelo dei calcolatori moderni.

L'aspetto pratico del multigrid parallelo si focalizza sull'approccio di partizionamento della griglia nel quale viene suddivisa in un certo numero di sottogriglie¹⁰³. Ogni processore lavora sulla propria sottogriglia, ma deve anche comunicare con gli altri processori qualora interrogato, ad esempio per valutare le grandezze di interfaccia tra le celle di sottogriglie differenti. In questo approccio tutte le componenti multigriglia dovrebbero essere, quanto più possibile, parallele, ma allo stesso tempo anche efficienti.

Si è osservato che il metodo di Gauss-Seidel abbia degli ottimi effetti di *smoothing* sull'errore v_h^m di una approssimazione u_h^m , proprietà fondamentale essendo alla base del primo principio. Sia le iterazioni

¹⁰³ In genere, pari al numero dei processori utilizzati nel calcolo.

del tipo di Gauss-Seidel che di Jacobi sono adatti allo *smoothing* dell'errore, tuttavia le proprietà di *smoothing* dei due metodi sono dipendenti dalle scelta dei parametri di rilassamento e, nel caso di Gauss-Seidel, anche dall' ordine di grandezza della griglia¹⁰⁴. Se questi due metodi vengono usati come *smoothers* spesso prendono il nome di metodi di rilassamento.

3.2.2 Multigrid method

Il trasferimento della soluzione dalla griglia fine a quella *coarse* prende il nome di **restrizione**. Questa procedura viene reiterata fino a giungere ad una griglia dove il costo computazionale della soluzione diretta è minore rispetto a quello della pulizia per la restrizione della griglia fine. Questo ciclo, tipicamente, riduce tutte le componenti di errore di un valore fissato indipendente dalla dimensione della mesh. Raggiunto il livello più profondo di griglia la soluzione viene riportata sulla griglia del livello superiore fino a tornare alla griglia da cui si era partiti, questo trasferimento della soluzione prende il nome di prolungamento o interpolazione. I prolungamenti, le restrizioni e le minori iterazioni della griglia raffinata comportano una velocità di convergenza maggiore e soluzioni più rapide dei normali metodi iterativi. La maggiore velocità nel calcolo della soluzione si può vedere chiaramente nella Figura 3.5.1, i tratti successivi al primo sono molto più corti e raggiungono la convergenza in meno cicli rispetto al metodo iterativo iniziale. Quello che si viene a determinare in un ciclo è una specie di andamento a V¹⁰⁵ in cui si parte da una griglia fine in cui si fanno un certo numero di iterazioni, poi si passa ad una più grezza in cui si rieseguono altre iterazioni per poi tornare alla risoluzione sulla griglia più fine. Esistono anche altre due tipologie di tecniche multigriglia con logiche analoghe che prendono il nome di F-cycle e di W-cycle. Il primo è più lento del V-cycle, ma più veloce in convergenza; mentre il secondo in degli specifici casi presenta un rateo di convergenza superiore.

Il caso più semplice da cui partire è quello di una iterazione con due sole griglie. Ogni passo di un metodo a due griglie¹⁰⁶ è composto da un *presmoothing*, una *coarse grid correction* e un *postsmoothing*. Una iterazione di questo tipo è realizzato come segue:

$$u_h^{m+1} = TGCYC(u_h^m, L_h, f_h, v_1, v_2)$$

1. Presmoothing

Determina \bar{u}_h^m applicando v_1 passi di una certa procedura di *smoothing* su $\bar{u}_h^m = SMOOTH^{v_1}(u_h^m, L_h, f_h)$

- 2. Coarse grid correction (CGC) Calcola il defect Applica una restrizione¹⁰⁷ al defect Risolve su Ω_H Interpola¹⁰⁸ la correzione Calcola l'approssimazione della correzione $u_h^{m,after \ CGC} = \bar{u}_h^m + \hat{v}_h^m$
- 3. Postsmoothing Valuta u_h^{m+1} per mezzo di v_2 passi di una procedura di smoothing su $u_h^{m,after CGC}$:

$$u_h^{m+1} = SMOOTH^{\nu_2}(u_h^{m,after CGC}, L_h, f_h)$$

 u_h^m :

¹⁰⁴ Iterazione di GS realizzano, in genere, un migliore *smoothers* rispetto a quelle di JAC.

¹⁰⁵ Si parla infatti di V-cycle.

¹⁰⁶ TGCYC

¹⁰⁷ Trasferimento da griglia fine a griglia *coarse*.

¹⁰⁸ Trasferimento da griglia *coarse* a griglia fine.

Una sua possibile rappresentazione schematica:



FIGURA 3.2.6: SCHEMA TWO-GRID CYCLE

Secondo la notazione usata, che è la stessa riportata nel REF (1), la SMOOTH^{v_1}(u_h^m , L_h , f_h) è la procedura di smoothing scelta, v_1 e v_2 sono le iterazioni dello smoothing, Ω_H è la griglia coarse, I_h^H è l'operatore di restrizione, L_H l'operatore di griglia *coarse*¹⁰⁹ e I_H^h è l'operatore di interpolazione. Questi appena elencati sono i termini la cui scelta ha importanti effetti sull'efficienza e il risultato dell'algoritmo.

Nella pratica, l'uso di tecniche con due sole griglie, non trova molte applicazioni, ma sono fondamentali nei metodi a multigriglia poiché si basano sulle medesime logiche.

In un metodo a due griglie ben convergente non è né utile né necessario risolvere esattamente l'equazione del defect¹¹⁰ sulla griglia coarse. Al contrario, senza un'eccessiva perdita della velocità di convergenza, è possibile sostituire \hat{v}_{H}^{m} con un'adeguata approssimazione. Un modo naturale per ottenere questa approssimazione è quella di riapplicare la formulazione del defect ristretto¹¹¹ ad una griglia ancora meno "fitta" della precedente. Questo è possibile perché l'equazione del defect ristretto rimane la stessa potendola così applicare in maniera ricorsiva.

Sulla griglia più profonda, quindi quella con meno celle, è possibile applicare dei metodi di rilassamento in grado di ridurre l'errore alle frequenze tipiche della discretizzazione della griglia molto velocemente.

¹⁰⁹Un tipo di operatore per la griglia coarse è quello di Galerkin (cap.7 REF (1)Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.) definito come: $L_H = I_h^H L_h I_H^h$, dove I_h^H e I_H^h sono degli opportuni operatori di trasferimento. ${}^{110} \bar{d}_{h}^{m} = f_{h} - L_{h} \bar{u}_{h}^{m}$ ${}^{111} \bar{d}_{H}^{m} = I_{h}^{H} \bar{d}_{h}^{m}$



FIGURA 3.2.7: STRUTTURA DI UN CICLO MULTIGRIGLIA PER DIVERSI NUMERI DI GRIGLIA E DIVERSI VALORI DI INDICI DI CICLO γ (•, SMOOTHING; °, ESTRAZIONE DELLA SOLUZIONE; \, TRASFERIMENTO FINE-COARSE; /, TRASFERIMENTO COARSE-FINE)

Il γ , riportato negli schemi in Figura 3.2.7, viene spesso chiamato **indice di ciclo**; nei casi in cui il suo valore sia pari a 1 vengono indicati come *V*-cycle, quando vale 2 *W*-cycle.

Quando si lavora con metodi di questo tipo si lavora con una sequenza di griglie via via meno discretizzate del tipo:

$$\Omega_{h_l}, \Omega_{h_{l-1}}, \dots, \Omega_{h_0}$$

La griglia più grezza è caratterizzata dalla *mesh* di dimensione h_0 , mentre con h_l si indica quella più fine.

Per ogni Ω_k si assume che gli operatori lineari siano assegnati.

$$L_k: G(\Omega_k) \to G(\Omega_k) \qquad S_k: G(\Omega_k) \to G(\Omega_k)$$
$$I_k^{k-1}: G(\Omega_k) \to G(\Omega_{k-1}) \qquad I_{k-1}^k: G(\Omega_{k-1}) \to G(\Omega_k)$$

Dove L_k sono le discretizzazioni di L su Ω_k per k = l, ..., 0 e dove l'equazione da risolvere del problema discreto è:

$$L_l u_l = f_l \quad (\Omega_l)$$

 S_k indica il metodo di *smoothing* usato come operatore di iterazione lineare sulla griglia Ω_k . Analogamente alla descrizione dei cicli a due griglie, vengono svolte ν iterazioni di *smoothing*, sul problema discreto, con una approssimazione iniziale w_k . L'approssimazione risultante \overline{w}_k può essere indicata da:

$$\overline{w}_k = SMOOTH^{\nu}(w_k, L_k, f_k)$$

così da indicare i parametri da cui dipende.

Di seguito si riporta un ciclo multigriglia, usando gli operatori L_k , S_k , I_k^{k-1} , I_{k-1}^k (k = l, l - 1, ..., 0), assumendo valori fissati per $v_1, v_2 \in \gamma$ e partendo dalla griglia più raffinata (k = l). Il calcolo della nuova iterata u_k^{m+1} da una data approssimazione u_k^m fino alla soluzione u_k avviene come segue:

$u_k^{m+1} = MGCYC(k, \gamma, u_k^m, L_k, f_k, \nu_1, \nu_2)$ Multigrid cycle

1. Presmoothing Calcola \bar{u}_k^m applicando v_1 passi di *smoothing* su u_k^m

$$\bar{u}_k^m = SMOOTH^{\nu_1}(u_k^m, L_k, f_k)$$

2. Correzione griglia *coarse* Calcola il defect

Restringimento del defect

Calcola una soluzione approssimata \hat{v}_{k-1}^m all'equazione del defect su Ω_{k-1} $L_{k-1}\hat{v}_{k-1}^m = \bar{d}_{k-1}^m$

 $\bar{d}_{k-1}^m = I_k^{k-1} \bar{d}_k^m$

 $\bar{d}_k^m = f_k - L_k \bar{u}_k^m$

Se k = 1 usa un solutore iterativo diretto o veloce

Se k > 1 risolve eseguendo cicli $\gamma(<1)$ cicli sulla griglia k usando il valore della funzione della 0 griglia zero in prima approssimazione

$$\hat{v}_{k-1}^{m} = MGCYC^{\gamma}(k-1,\gamma,0,L_{k-1},\bar{d}_{k-1}^{m},\nu_{1},\nu_{2})^{112}$$

Interpola la correzione $\hat{v}_k^m = l_{k-1}^k \hat{v}_{k-1}^m$ Calcola l'approssimazione corretta su Ω_k $u_k^{m, after CGC} = \bar{u}_k^m + \hat{v}_k^m$ Interpola la correzione

3. Postsmoothing

Calcola u_k^{m+1} applicando v_1 passi di *smoothing* su $u_k^{m, after CGC}$

$$u_k^{m+1} = SMOOTH^{\nu_2}(u_k^{m, after CGC}, L_k, f_k)$$

L'operatore dell'iterazione multigriglia M_l è definito dalla seguente ricorsione:

$$M_0 = 0$$

$$M_k = S_k^{\nu_2} (I_k - I_{k-1}^k (I_{k-1} - (M_{k-1})^{\gamma} (L_{k-1})^{-1}) I_k^{k-1} L_k) S_k^{\nu_1} \quad (k = 1, \dots, l)$$

Vedremo che potremo ottenere un fatto re di convergenza multigriglia indipendente dalla dimensione della mesh: la velocità di convergenza non dipende dalla dimensione della mesh più fitta. Ma il fatto che un metodo converga indipendentemente da h non fornisce indicazioni sull'efficienza del metodo fintanto che non viene preso in considerazione il lavoro computazionale necessario.

Dalla definizione di M_l segue che il lavoro computazionale W_l per ciclo multigriglia su Ω_l sia:

$$W_1 = W_1^0 + W_0$$
 $W_{k+1} = W_{k+1}^k + \gamma_k W_k$ $(k = 1, ..., l - 1)$

Qui W_{k+1}^k indica il lavoro computazionale di un two-grid cycle (h_{k+1}, h_k) escludendo il lavoro necessario a risolvere le equazioni del defect su Ω_k , mentre con W_0 si definisce il lavoro richiesto per calcolare la soluzione esatta sulla griglia Ω_0 . Il lavoro computazione viene spesso indicato con un parametro facilmente misurabile, tipicamente il numero di operazione matematiche necessarie. Se γ è indipendente da k, dalla precedente scrittura si trova:

$$W_{l} = \sum_{k=1}^{l} \gamma^{l-k} W_{k}^{k-1} + \gamma^{l-1} W_{0}$$

¹¹² Qui il parametro y compare due volte: come argomento del *multigrid cycle* per indicare il tipo di ciclo impiegato sulla griglia *coarse*, come potenza per specificare il numero di iterazioni sul corrente livello di griglia.

Immaginando un caso 2D con γ non in funzione di k, per semplicità, e indicando con N_k il numero di celle che costituiscono la griglia Ω_k per effetto dell'addensamento della griglia si ha:

$$N_k := 4N_{k-1}$$
 $(k = 1, ..., l)$

È stato usato il simbolo := perché indica uguaglianza fino a termini di ordine inferiore (effetti al contorno). Inoltre, si assume che le operazione che compongono i metodi multigriglia¹¹³ richiedono un numero di operazioni aritmetiche per ogni punto della griglia in esame che è delimitato da una piccola costante *C* indipendente da *k*:

$$W_k^{k-1} \le C N_k \qquad (k = 1, \dots, l)$$

Dove : \leq indica anche in questo caso minore o uguale a termini di ordine inferiore.

Sotto queste assunzioni si ottiene la seguente stima per il lavoro computazionale totale W_l di un completo ciclo multigriglia 2D:

$$W_{l} \le \begin{cases} \frac{4}{3}C N_{l} & \gamma = 1\\ 2C N_{l} & \gamma = 2\\ 4C N_{l} & \gamma = 3\\ O(N_{l} \log N_{l}) & \gamma = 4 \end{cases}$$

Per $\gamma = 4 W_l$ ad ogni livello è essenzialmente costante (fino ai termini di ordine inferiore) e il numero dei livelli di griglia è $O(\log N_l)$.

La stima del W_l mostra come il numero di operazioni aritmetiche necessarie in un ciclo multigriglia 2D sia proporzionale al numero di punti costituenti la griglia più fine, fino a quanto γ non supera il valore di 3. Se a quanto detto si aggiunge che la convergenza è indipendente da *h*, si ha che i metodi multigriglia raggiungono una fissata riduzione dell'errore in O(N) operazioni. La costante di proporzionalità dipende dal tipo di ciclo¹¹⁴, di *coarsening*¹¹⁵ e gli altri componenti multigriglia; se questi termini vengono scelti adeguatamente le costanti di proporzionalità sono piccole.

Al lavoro computazionale è legata anche la scelta della discretizzazione della griglia Ω_0 sulla quale il lavoro W_0 deve essere trascurabile.

Riprendendo la scrittura precedente per W_k^{k-1} , la costante *C* è determinata dal lavoro computazionale necessario per le singole componenti multigriglia del metodo *two-grid* (h_k , h_{k-1}):

$$W_k^{k-1} = (\nu w_0 + w_1 + w_2)N_k \qquad \nu = \nu_1 + \nu_2$$

 w_0, w_1, w_2 sono misurazioni del lavoro computazionale svolto sui punti della griglia Ω_k necessari alle singole componenti.

- w_0 : uno step di *smoothing* su Ω_k
- w_1 : calcolo del *defect* e suo trasferimento su Ω_{k-1}
- w_2 : interpolazione della correzione su Ω_k e sua addizione alla precedente approssimazione

¹¹³ I rilassamenti, il calcolo dei *defect*, i trasferimenti da griglie fini a griglie *coarse* e viceversa.

¹¹⁴ Dettato dal valore di γ .

¹¹⁵ Ovvero come viene effettuato dalla griglia k alla griglia k - 1.

Nella scelta dei valori di $v_1 e v_2$ si può dimostrare¹¹⁶, sia empiricamente che teoricamente, come non sia conveniente scegliere valori troppo grandi per questo numero di iterazioni. Sebbene il fattore di convergenza migliori al crescere del loro valore è più efficiente non appianare troppo l'errore, ma piuttosto eseguire un altro ciclo *multigrid*.

In genere, partire dalla soluzione sulla griglia meno fitta, interpolare l'approssimazione da questa griglia del livello k-esimo su quella k + 1-esima, applicare uno *smooth* alle componenti di errore visibili e ripetere questo processo fino a raggiungere la griglia più fine non è sufficiente. L'interpolazione della soluzione comporta degli errori non trascurabili con componenti sia di alta che di bassa frequenza sulla griglia fine. Questi errori possono essere efficientemente smorzati solamente applicando uno *smoothing* dell'errore alle griglie di ogni livello.

I **problemi multigriglia tridimensionali** hanno sostanzialmente le stesse proprietà e complessità di quelli 2D. Per il lavoro computazionale W_l di un ciclo multigriglia tridimensionale sulla Ω_l si può fare uno discorso molto simile a quello fatto nel caso bi-dimensionale. In un caso 3D, con un *coarsening* standard e un fissato γ si ha:

$$N_k \coloneqq 8N_{k-1} \qquad (k = 1, \dots, l)$$

Maggiore del caso 2D data la terza dimensione. Basti immaginare un cubo: se lo si suddivide in cubi caratterizzati da un lato che è la metà di quello del cubo padre, se ne ottengono 8 a pari volume. Analogamente al caso visto in precedenza è possibile scrivere una relazione diretta tra lavoro computazionale e numero di celle della griglia più fine, N_l .

$$W_l \leq \begin{cases} \frac{8}{7}C N_l & \gamma = 1\\ \frac{4}{3}C N_l & \gamma = 2\\ \frac{8}{5}C N_l & \gamma = 3 \end{cases}$$

Finora sono stati considerati problemi lineari. I metodi multigriglia possono essere applicati anche per risolvere **problemi non lineari**, come nel nostro caso. Esistono principalmente due approcci.

Il primo è quello di applicare un metodo di linearizzazione globale come il metodo iterativo di Newton ad un problema non lineare. Ad ogni passo si trova a dover risolvere un problema lineare. Nelle giuste condizioni, il *multigrid* può essere usato per risolvere ognuno di questi problemi lineari.

La seconda via è quella di applicare direttamente il *multigrid* al problema non lineare. L'idea è che lo *smoothing* dell'errore e la correzione della griglia *coarse* non vengano ristretti sul problema lineare, ma che vengano immediatamente usati per il problema non lineare stesso. Questo porta a quello che viene chiamato FAS¹¹⁷. Per problemi lineari il FAS è equivalente al multigriglia lineare.

Per il trattamento numerico delle PDE¹¹⁸ non lineari si hanno diverse strade tra cui è possibile scegliere. Usando la notazione generale:

$$Nu = f^{\Omega}$$
$$Bu = f^{\Gamma}$$

¹¹⁶ Tabella 2.4 REFErrore. L'origine riferimento non è stata trovata. a pagina 56. In questa tabella si può osservare come gli schemi giunti a convergenza in meno secondi fossero anche quelli con il minor numero di interazioni $v_1 e v_2$.

¹¹⁷ Full Approximation Scheme

¹¹⁸ Partial Differential Equation

N è **l'operatore differenziale ellittico non lineare** e *B* è l'operatore di contorno¹¹⁹. Assumendo che queste due scritture siano discretizzate su una data griglia Ω_h , si può indicare un sistema non lineare di equazioni discrete:

$$N_h u_h = f_h \quad (\Omega_h)$$

Con operatore non lineare $N_h: G(\Omega_h) \to G(\Omega_h)$. Per comodità di presentazione si assume che le condizioni al contorno siano state eliminate e siano implicitamente contenute nel termine a destra f_h .

I problemi lineari che derivano dal contesto di una linearizzazione globale possono essere risolti efficientemente per mezzo di una *linear multigrid*. In questo modo, non di deve risolvere solo un problema lineare, ma la linearizzazione globale porta ad una sequenza di problemi lineari strettamente legati. Usando cicli multigriglia si combinano iterazioni esterne (la linearizzazione globale) con altre interne (*linear multigrid*).

Si possono trovare alcuni esempi di problemi non lineari svolti dalla pagina 148 della REF (1) e a seguire il capitolo relativo la linearizzazione locale.

Metodo I

Un modo per combinare il metodo di Newton con un metodo multigriglia lineare iterativo per $K_h^m v_h^m = d_h^m$ è scegliere un numero di iterazioni multigriglia per ogni passo del metodo di Newton tale che la velocità di tale metodo sia sfruttata appieno. Questo significa che il numero di iterazioni multigriglia dovrebbe essere approssimativamente raddoppiato da un passo di Newton al successivo non appena il metodo di Newton converge quadraticamente. Il problema di questo tipo di metodo sta nello stabilire un meccanismo di controllo appropriato per ottenere le informazioni richieste sulla convergenza del metodo di Newton.

Metodo II

Altra possibilità è quella di fissare il numero di iterazioni multigriglia per passo di Newton. Per esempio, eseguendo una sola iterazione multigriglia per ogni passo di Newton, senza un meccanismo di controllo. La conseguenza di questo è che il metodo di Newton viene certamente troncato in un metodo linearmente convergente. Lo svantaggio è però la necessità di calcolare la Jacobiana più spesso.

Nella REF (1) vengono applicati questi due metodi ad un medesimo problema per poterli comparare. È possibile notare come la convergenza quadratica sia sfruttata pienamente nel metodo I che raggiunge la convergenza di 10^{-8} in 3 passi di Newton. La convergenza lineare del metodo II richiede 7 passi per raggiungere la medesima accuratezza. Tuttavia, se si comparano gli errori dopo lo stesso numero di iterazioni multigriglia l'accuratezza è circa la stessa in entrambi i metodi. Inoltre il lavoro e i requisiti di archiviazione dei due metodi sono molto simili, a questo riguardo l'efficienza dei due metodi è essenzialmente uguale.

¹¹⁹ Buondary Operator
3.3 FAS

Analogamente al caso lineare, il FAS *Multigrid* non lineare può essere definito ricorsivamente sulla base del metodo *two-grid*. Si descriverà a seguire un ciclo iterativo di un metodo *two-grid* (h, H) non lineare per il calcolo di u_h^{m+1} da u_h^m . L'idea fondamentale della multigriglia non lineare è la stessa del caso lineare. Dapprima, gli errori della soluzione devono essere smorzati cosicché la si possa approssimare sulla griglia inferiore. Un'equazione per il *defect* analoga a quella lineare è trasferita alla griglia *coarse*. Le correzioni sulla griglia più grossolana vengono riportate, per mezzo di interpolazione, sulla griglia fine dove si fa ciclare nuovamente lo *smoother* sull'errore. Formalmente non si lavora con l'errore, ma con le approssimazioni sulla soluzione discreta della griglia *coarse*.

Nel caso non lineare l'equazione "esatta" del *defect* su Ω_h è:

$$N_h(\bar{u}_h^m + v_h^m) - N_h\bar{u}_h^m = \bar{d}_h^m$$

La cui approssimazione su Ω_H :

$$N_H(\bar{u}_H^m + v_H^m) - N_H\bar{u}_H^m = \bar{d}_H^m$$

 N_H è un operatore discreto su Ω_H .





In questa descrizione, SMOOTH indica una procedura di rilassamento non lineare con adatte proprietà di *smoothing*. Come nel caso lineare si hanno v_1 iterazioni prima della correzione della griglia *coarse* e v_2 dopo.

La differenza dal caso lineare è che il *defect* d_h^m viene trasferito sulla griglia *coarse* insieme all'approssimazione rilassata \bar{u}_h^m . Sono stati indicati diversi operatori di restrizione per $d_h^m \in \bar{u}_h^m$ perché nel caso più generale potrebbero essere differenti.

Sulla griglia Ω_H il problema da risolvere è della forma $N_H w_H = f_H$, dove $w_H = \bar{u}_H^m + \hat{v}_H^m$. Per quanto riguarda f_H è definito da:

$$f_H = I_h^H (f_h - N_h \bar{u}_h^m) + N_H \hat{I}_h^H \bar{u}_h^m$$

Il trasferimento della approssimazione corrente sulla griglia *coarse* è usata per poter ottenere $\bar{u}_{H}^{m} = \hat{l}_{h}^{H}\bar{u}_{h}^{m}$ la scelta più comune per \hat{l}_{h}^{H} è l'iniezione.

Come già accennato in precedenza se N_h e N_H fossero operatori lineari si tornerebbe allo schema lineare.

Il metodo FAS trasferisce la correzione \hat{v}_H^m sulla griglia fine Ω_h come nel caso lineare. Questo è importante perché solo le funzioni di correzione di griglia subiscono uno *smoothing* per mezzo del processo di rilassamento e possono quindi essere approssimate bene sulle griglie inferiori. \hat{v}_H^m viene calcolato come differenza tra $\hat{l}_h^H \bar{u}_h^m$ e w_H dopo la soluzione sulla griglia *coarse*.

L'equazione non lineare sulla griglia coarse non è risolta esattamente, ma da uno o più cicli multigriglia usando griglie sempre più *coarse*. Nella seguente descrizione di un cicli FAS si userà una notazione

simile alle precedenti in cui si assumono una successione di griglie Ω_k e di operatori di griglia $N_k, I_k^{k-1}, \hat{I}_k^{k-1}, I_{k-1}^k$, etc. Un ciclo FAS multigriglia parte dal livello di griglia più raffinato¹²⁰ per la soluzione di:

$$N_l u_l = f_l \qquad (l \ge 1)$$

Nel caso generale di k = 1, ..., l.

$$u_k^{m+1} = FASCYC(k, \gamma, u_k^m, N_k, f_k, \nu_1, \nu_2)$$

1. Presmoothing Calcola \bar{u}_k^m svolgendo v_1 passi di smoothing a u_k^m

$$\bar{u}_k^m = SMOOTH^{\nu_1}(u_k^m, N_k, f_k)$$

- 2. Correzione griglia coarse Calcola il defect $\bar{d}_k^m = f_k - N_k \bar{u}_k^m$ Restringe il defect $\bar{d}_k^{m-1} = I_k^{k-1} \bar{d}_k^m$ Restringe \bar{u}_k^m $\bar{u}_{k-1}^m = \hat{l}_k^{k-1} \bar{u}_k^m$ Calcola il termine f_{k-1} $f_{k-1} = \bar{d}_{k-1}^m + N_{k-1} \bar{u}_{k-1}^m$ Calcola l'approssimazione della soluzione \hat{u}_{k-1}^m dell'equazione della griglia coarse su Ω_{k-1} $N_{k-1} w_{k-1}^m = f_{k-1}$
 - Se k = 1 si ricorre ad un risolutore veloce per questo scopo
 - Se k > 1 si eseguono γ cicli di FAS su k griglie usando \bar{u}_{k-1}^m come approximazione iniziale $\hat{u}_{k-1}^m = FASCYC^{\gamma}(k-1,\gamma,\bar{u}_{k-1}^m,N_{k-1},f_{k-1},\nu_1,\nu_2)$

Calcola la correzione
Interpola la correzione

$$\begin{aligned}
u_{k-1} &= I \text{ Aber C} \quad (k = 1, \gamma, u_{k-1}, N) \\
\hat{v}_{k-1}^m &= \widehat{w}_{k-1}^m - \bar{u}_{k-1}^m \\
\hat{v}_k^m &= I_{k-1}^k \widehat{v}_{k-1}^m
\end{aligned}$$

Calcola l'approssimazione della correzione sulla griglia Ω_k $u_k^{m, after CGC} = \bar{u}_k^m + \hat{v}_k^m$

3. Postsmoothing

Calcola u_k^{m+1} attraverso v_2 step di *smoothing* a $u_k^{m, after CGC}$

$$u_k^{m+1} = SMOOTH^{\nu_2}(u_k^{m, after CGC}, N_k, f_k)$$

Si può osservare come non siano state eseguite linearizzazioni globali nel processo FAS *multigrid*, fatta accezione che sulla griglia zero.

La combinazione del FAS con un FMG¹²¹, ad esempio partendo con il FAS sulla griglia del livello zero, è un metodo preferito in molti casi per la sua semplicità.

Per ottenere un'approssimazione iniziale ragionevole sulla griglia fine si può incorporare un processo con una iterazione tra FMG e FAS. L'idea di questo tipo di approccio deve iniziare con un problema debolmente non lineare o lineare sulla griglia meno fine e, passo dopo passo, si incrementa la robustezza della non linearità quando si passa in livelli più fini nel FMG.

Sebbene il FAS e i metodi indiretti multigriglia I e II, visti in precedenza, siano apparentemente abbastanza differenti, spesso mostrano fattori di convergenza simili. Infatti, se si esegue un passo di iterazione del metodo II e I di FAS, la differenza principale sta nel processo di soluzione sulla griglia Ω_0 e nel processo di rilassamento. Il FAS, rispetto al I e II metodo, presenta un minore requisito di memoria, non essendo necessario calcolare e conservare la Jacobiana della griglia fine.

 $^{^{120}} k = l$. Nel caso in cui k = 1 si avrebbe un metodo a due griglie descritto con Ω_0 e Ω_l anziché Ω_H e Ω_h .

¹²¹ Full Multigrid

Una proposta per un metodo non lineare più generale è il metodo NLMG¹²² di Hackbusch. La differenza principale tra questo metodo e il FAS è la scelta dell'approssimazione iniziale sulla griglia *coarse*¹²³. Inizialmente, qualsiasi funzione di griglia può essere usata come supposizione iniziale su una griglia *coarse*. NLMG usa, per esempio, un'approssimazione di griglia *coarse* dal processo FMG in prima approssimazione sulla griglia *coarse* perciò è una soluzione di un'equazione non lineare su questa griglia, mentre, nel FAS, viene impiegata la restrizione della soluzione della griglia fine corrente u_h^m .

Il NLMG introduce un fattore di scala *s*, che moltiplica il *defect* ristretto nella parte destra dell'equazione della griglia *coarse*, e un coefficiente 1/*s* davanti alla correzione \hat{v}_h^m . Questo parametro serve a garantire la risolvibilità dell'equazione di griglia *coarse*.

Un esempio di applicazione del FAS lo si può trovare nel capitolo 5.3.6 della REF (1) per l'equazione del potenziale completa.

3.4 LIMITER

Nei metodi ai volumi finiti a cella centrata le variabili di interfaccia $q_{i,j}$ sono estrapolate dai valori di centro cella q_i , dai loro gradienti ∇q_i^{124} , dalla distanza tra il centro della cella e dalla superficie di interfaccia $(r_{i,j} - r_i)$ e dallo *slope limiter* (indicato dalla funzione ϕ).

Lo schema di riferimento è quello di Barth e Jespensen:

$$q_{i,j} = q_i + \phi \nabla q_i \cdot (r_{i,j} - r_i)$$

La funzione del *limiter* è quello di stabilizzare la soluzione. Il suo uso diventa necessario in molti metodi alle differenze o ai volumi finiti e presenta dei pro e dei contro. Il vantaggio sta nella soppressione delle oscillazioni e del mantenimento della monotonia della soluzione, lo svantaggio è legato alla riduzione dell'accuratezza e al fatto che potrebbe opporsi alla convergenza, in particolare nel caso di griglie non strutturate.

Il limiter usato all'interno di Anastasia è quello sviluppato da Venkatakrishnan:

$$\phi_{1-V} = \frac{1}{\Delta_{-}} \begin{bmatrix} (\Delta_{-}^{2} + \epsilon^{2})\Delta_{-} + 2\Delta_{-}^{2}\Delta_{+} \\ \Delta_{+}^{2} + 2\Delta_{-}^{2} + \Delta_{+}\Delta_{-} + \epsilon^{2} \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \Delta_{-} = q_{i,j} - q_{i} \\ \Delta_{+} = \begin{cases} q_{max} - q_{i} & se \ \Delta_{-} > 0 \\ q_{min} - q_{i} & se \ \Delta_{-} < 0 \end{cases}$$

 q_{max} e q_{min} indicano il valore massimo della grandezza interessata tra la cella i-esima e la vicina cella j-esima.

$$\epsilon^2 = (K\Delta x)^3$$

Dove K è una costante¹²⁵ e Δx è la dimensione della *mesh*. K è un parametro molto importante e indica un valore di soglia, le oscillazioni al di sotto di tale valore rimangono nella soluzione. Per questa ragione se si imponesse il valore nullo il *limiter* interverrebbe anche nelle regioni quasi costanti, mentre un valore di K eccessivamente grande non imporrebbe di fatto nessun limite. Valori di K grandi sono accettabili per flussi subcritici, qualora, invece, il flusso dovesse presentare discontinuità questo porterebbe ad una instabilità nella procedura di ricerca della soluzione.

¹²² Non Linear MultiGrid

¹²³ Precedentemente indicato con \bar{u}_{H}^{m}

¹²⁴ Calcolato tramite i minimi quadrati.

¹²⁵ Nel file di Input.dat viene indicata come "VENKATAKRISHNAN.K" ed è stato usato il valore 0.3 in accordo a quado osservato nella REF (14)

Il *limiter* di Venkatakrishnan permette di ottenere soluzioni convergenti per problemi stazionari su griglie strutturate attraverso un *limiter* differenziabile.

3.5 SCHEMA RISOLUTIVO

La peculiarità di questo codice CFD è quella di poter raffinare la griglia, in maniera completamente automatica, laddove la soluzione ottenuta determina forti gradienti. Questo consente di realizzare delle griglie più semplici da cui il software dovrà partire semplificando il lavoro della realizzazione delle *mesh* si parla, pertanto, di *adapative multigrid*.

Nella Figura 3.5.1 è riportato un esempio dell'andamento dei residui con il procedere dei passi temporali.



FIGURA 3.5.1: ANDAMENTO RESIDUI DEL TEST 1, M=2

Nella prima fase il codice usa uno schema risolutivo di tipo esplicito per il calcolo della soluzione senza effettuare alcuna modifica sulla griglia di partenza¹²⁶. Una volta che i residui delle grandezze desiderate sono scesi al di sotto del valore imposto il metodo esplicito si interrompe. A questo punto si realizza il primo adattamento della griglia. Il programma individua le zone con i maggiori gradienti all'interno del volume di controllo e suddivide a metà i lati delle celle¹²⁷ all'interno di queste zone, così da aumentare la discretizzazione spaziale locale. Successivamente vengono eseguite un numero di iterazioni fissate¹²⁸ dello schema esplicito. Dopo questo istante inizia il V-*cycle*, di cui si parlerà a breve. Quando viene raggiunto il valore di soglia della variazione della soluzione¹²⁹ ha inizio l'adattamento della griglia. Mentre, nel momento in cui il valore dei residui raggiunge un valore minore del massimo indicato¹³⁰, la simulazione si interrompe e si considera raggiunta la soluzione finale. Il programma salva automaticamente i file della griglia prima e dopo ogni adattamento così da poter eseguire delle analisi in un secondo

¹²⁶ Realizzata per mezzo dei programmi GridGen e PointWise ed estratta nel formato STAR-CD.

¹²⁷ Il fatto che realizzi celle con il lato che è metà della cella madre significa che in una visione tridimensionale un singolo volumetto viene suddiviso in otto nuovi volumi più piccoli. La complessità e la dimensione della griglia aumentano enormemente ad ogni raffinamento.

¹²⁸ Nel caso riportato in Figura 3.5.1 erano 50.

¹²⁹ Indicato nel file di Input sotto la voce ADAPATATION.RES.MAX.

¹³⁰ Indicato nel file di Input sotto la voce RES.TOLL.MAX.

momento e visualizzare l'evoluzione della griglia con il procedere delle iterazioni. Inoltre, avere i file con le geometrie e i dati di griglia prima e dopo ogni adattamento consente di effettuare delle ripartenze nell'analisi, con la possibilità di variare i parametri che influenzano il rateo di convergenza.

I risultati delle iterazioni sono raccolti in tre tipologie file: i file di output VTK, quello indicato con CFD_LOG.log e il PLOT_RES.dat. Quest'ultimo raccoglie i residui con la possibilità di plottare i residui di tutte le grandezze calcolate o di quella interessata, è grazie a questo file che si realizzano i grafici come quello in Figura 3.5.1. Le altre due tipologie di file verranno discusse nei paragrafi successivi.



FIGURA 3.5.2: ESEMPIO RISOLUZIONE CON TECNICA V-CYCLE MULTIGRIGLIA

3.6 GRIGLIA

All'interno del DUNE project sono stati adottati due importanti strumenti legati direttamente al lavoro sulle griglie: *alugrid* e *subgrid*. Alugrid è una implementazione dell'interfaccia della griglia di DUNE che supporta sia griglie costituite da simplessi¹³¹ che da cubi. La scelta di questa libreria risiede nelle sue ottime performance di calcolo parallelo che richiedono adattamenti locali e logiche di *dynamic load balance*¹³². Subgrid consente di marchiare un sottogruppo di elementi di una data griglia: questo sottogruppo può essere trattato con una gerarchia di griglia. DUNE-subgrid offre l'accesso alla griglia completa, incluso il raffinamento della *mesh* adattativa.

¹³¹ "In matematica, il simplesso n-dimensionale è il politopo n-dimensionale col minor numero di vertici. Il simplesso di dimensione zero è un singolo punto, il simplesso bidimensionale un triangolo e quello tridimensionale un tetraedro. Il simplesso n-dimensionale ha n + 1 vertici. Come tutti i politopi, il simplesso ha facce di ogni dimensione: queste sono tutte a loro volta simplessi. Per la sua semplicità, il simplesso è generalmente ritenuto il "blocco base" con cui costruire spazi n-dimensionali più complicati tramite un processo detto triangolazione." Tratto da https://it.wikipedia.org/wiki/Simplesso.

¹³² Anastasia segue proprio questo tipo di logica per la quale, al termine di ogni adattamento, il volume di controllo viene risuddiviso su tutti i processori in gioco così da evitare che ve ne siano alcuni che si trovano a lavorare con un numero molto maggiore di celle rispetto ad altri. Basti pensare a quei processori a cui viene assegnato il volume a parete, qui è devo è logico aspettarsi i maggiori gradienti e di conseguenza dove l'adattamento creerà più celle.

Nella realizzazione dei restringimenti e delle interpolazioni della griglia è necessario porre attenzione ad alcuni accorgimenti necessari alla corretta risoluzione del problema. Innanzitutto durante la realizzazione della griglia è necessario non creare delle celle che non siano contornate da un numero di lati diverso da 4, inoltre non sono possibili delle variazioni di dimensione di cella troppo grandi tra celle contigue. Il problema nell'avere elevati salti nella dimensione di celle continue risiede nel degradamento della soluzione legato al calcolo dei flussi tra una cella e l'altra. Per non incrementare eccessivamente l'errore numerico, in particolar modo laddove sono presenti elevati gradienti è bene avere celle di dimensione molto simile e una griglia molto fitta. Per fare un esempio pratico, nel caso di una parete investita da flusso viscoso e quindi con strato limite è bene avere una discretizzazione molto fine a parete che diventa più grossolana man mano che ci si allontana dalla parete e dove il flusso inviscido non presenta quasi più variazioni delle sue proprietà.

Il fatto di non poter avere celle di dimensioni troppo diverse affiancate comporta anche che, durante il raffinamento della griglia, se una cella dovesse subire un secondo adattamento quelle contigue dovranno subirne almeno uno così da non creare due salti da una cella all'altra che sarebbe grande solo un quarto. Nella Figura 3.6.1 si riporta un esempio che dovrebbe rendere più immediato il concetto. Ogni raffinamento comporta la realizzazione di numerose nuove celle che rendono sempre più pesante la mesh con cui Anastasia si trova a lavorare, aumentando esponenzialmente la mole di dati da elaborare e il tempo necessario. Ma un ulteriore problema della suddivisione delle celle è il potenziale degradamento della geometria di partenza. Immaginando di realizzare una mesh partendo da una spline che segue perfettamente la forma del corpo attraverso un certo numero di punti, nel momento in cui l'adattamento porta alla definizione di nuovi punti la spline potrebbe variare. Questo diventa ancor più importante in presenza di punti angolosi che potrebbero venire "smussati" con il susseguirsi degli adattamenti distorcendo il risultato finale dell'analisi. Per queste ragioni bisogna prestare attenzione alla progettazione della griglia e della dichiarazione delle condizioni al contorno, come si vedrà in alcuni dei test eseguiti. Per ridurre questo problema DUNE permette di fissare i vertici della griglia realizzata dal "meshatore" così da non poter variare eccessivamente la geometria durante gli adattamenti, inoltre in Anastasia sono state implementate delle logiche di creazione di spline mirate a seguire il più possibile le curve di partenza.



FIGURA 3.6.1: ESEMPI DI ADATTAMENTO DI GRIGLIA

Nel capitolo successivo saranno riportati gli esempi di griglie usate nelle analisi delle geometrie prese in esame.

3.7 FILE INPUT.DAT

In questo file oltre alle grandezze al contorno sono riportati anche quei parametri che l'utente può variare per migliorare la stabilità del calcolo, come il valore del CFL¹³³. Il suo valore non viene definito direttamente, ma attraverso due parametri: STAB e STIN. STAB indica il valore del CFL sulla griglia più fine, STIN è il rapporto tra il valore del CFL finale e iniziale sempre sulla griglia più fine. Per la sottogriglia del FAS-MG ci sono due parametri analoghi sotto il nome di SUBSTAB e SUBSTIN.

Inoltre, l'utente deve indicare il numero di livelli di profondità, ovvero il numero di **agglomerazioni**¹³⁴ all'interno di ogni V-*cycle*, e le iterazioni desiderate per ognuno di questi livelli. I valori che sono stati usati ottenendo ottimi risultati nei nostri test sono stati 3 livelli di profondità con 32 cicli in quella più fine, 64 in quella intermedia e 128 in quella più grezza. Nella Figura 3.7.1 è riportata una rappresentazione schematica.



FIGURA 3.7.1: V-CYCLE ANASTASIA

L'effetto di questa successione di iterazioni di metodi di *smoothing*, come già detto nei paragrafi è quello di rendere, per l'appunto, l'errore più *smooth* come si può vedere qualitativamente nella Figura 3.7.2: *smoothing* V-cycleFigura 3.7.2.



FIGURA 3.7.2: SMOOTHING V-CYCLE

Nel file di Input sono anche presenti le *directory* delle cartelle contenenti i file con le griglie e le *boundary conditions* e quelle in cui destinare i file contenenti le soluzioni.

¹³³ La condizione di Courant-Friedrichs-Lewy, parametro fondamentale per la convergenza numerica della soluzione poiché il passo temporale dipende da questo termine. Nel caso unidimensionale vale $C = u \cdot \Delta t / \Delta x$.

¹³⁴ È il processo che trasforma una griglia fine in una con meno celle raggruppando, o agglomerando per l'appunto, celle contigue.

Per avere una guida al significato delle singole variabili si può fare riferimento alla REF (2), a seguire verranno riportati i significati solo dei principali parametri con i quali sono stati operati i test.

IS.VISCOUS serve per indicare se il test in corso è da considerarsi viscoso o inviscido, e tramite SWIT-CHAT si può imporre al programma lo *step* al quale iniziare a considerare gli effetti viscosi se si è partiti senza considerarli o viceversa. REF.Yi raccoglie le percentuali delle specie chimiche che compongono il fluido. ADAPTATION.MAX.NUMBER indica il numero di adattamenti massimi che la griglia è in grado di eseguire autonomamente. Con ADAPTATION.RES.MAX si decide il valore dei residui al quale eseguire un adattamento di griglia. ADAPTATION.REFINEMENT.THRESHOLD e ADAPTA-TION.COARSENING.THRESHOLD identificano i valori di soglia a cui eseguire un raffinamento o un ingrossamento della dimensione della cella.

3.8 FILE BC.DAT

Questo file contiene le *boundary condition*. Quando si realizza una griglia è necessario informare il programma di quali tipologie fanno parte le superfici che compongono il volume: ad esempio quali sono delle pareti, e che tipo di pareti (adiabatiche, isoterme, etc), quali delle superfici di simmetria e di ingresso del flusso e, infine quali quelle da cui il flusso uscirà. Oltre alla tipologia occorre anche andare a definire le grandezze caratteristiche associate a ciascuna superficie: pressione, temperatura, mach, proprietà termiche, chimiche, adiabatiche e così via. Il file bc.dat esprimono così le grandezze delle superfici precedentemente create e infine esportate per mezzo di GridGen, o PointWise, nel formato PRO-STAR.

Anastasia lavora con 5 tipi di condizioni al contorno sui domini (# deve essere sostituito con un numero a discrezione dell'utente):

- SYMP indica che è una faccia di simmetria e non richiede parametri di *input*
- PI## va associato alle facce dove si ha l'ingresso del flusso supersonico. I suoi parametri di input sono quelli riferiti alle proprietà del flusso quindi il mach, gli angoli della direzione, la pressione e la temperatura
- PO## è la superficie attraverso cui il flusso supersonico esce, non richiede la dichiarazione di parametri di *input* essendo questi frutto della simulazione
- MP## è riferito alle superfici attraverso cui l'operatore non è certo se il flusso vi passerà attraverso in ingresso o in uscita. Anastasia verificherà il verso delle velocità così da commutare questo parametro in PI o PO a seconda del risultato
- WA## è la parete del corpo, pertanto impermeabile al flusso. I suoi parametri di *input* sono la sua temperatura e l'eventuale emissività, altra cosa da dichiarare qui è se si deve considerare un caso isotermo, adiabatico o adiabatico alla radiazione¹³⁵.

Il valore di IWBC segnala al programma se la parete è da considerarsi isoterma, adiabatica o irraggiata. Lavorando con gas reali si opera con IOPT1 per considerare se si è in condizioni di equilibrio chimico o no, nel caso in cui non vi sia equilibrio chimico occorro indicare le concentrazioni delle specie chimiche a monte. IOPT2 determina, invece, se il flusso è in condizioni di equilibrio vibrazionale. IWCAT serve a indicare il livello di catalizzazione della parete da non a completamente catalitica.

¹³⁵ IWBC uguale rispettivamente a 1, 2 o 3

3.9 FILE VTK

Data la mole di dati da elaborare per le analisi vengono usati diversi processori che lavorano in parallelo dividendo il volume di controllo in altrettanti volumi più piccoli, uno per ogni processore. Questi volumi, anche se separati, vengono controllati in modo tale che il risultato complessivo sia coerente. I file VTK contengono i valori di pressione, della velocità del suono, delle variabili conservative e dei loro flussi. Per avere accesso alla soluzione all'intero dominio è necessario aprire i file in formato .pvtu che raggruppa i file .vtu relativi ai sottodomini calcolati dai processori coinvolti nell'analisi. Il software automaticamente creerà delle copie di backup prima e dopo ogni adattamento, in più l'utente può impostare un numero di iterazioni alle quali il codice genera un output della soluzione del dominio complessivo e della parete¹³⁶, non devono necessariamente coincidere.

3.10 FILE CFD_LOG

Questo file di output riporta, all'inizio, alcuni dei parametri letti dai file di input.dat e dal bc.dat, a cui seguono informazioni relative ogni step computazionale. Tramite questo file è possibile controllare i valori del CFL, le celle e gli adattamenti durante ogni passo, inoltre si trovano anche i valori dei residui delle equazioni di bilancio. In appendice è stato riportato un esempio di questo file.

¹³⁶ Le due variabili nel file di input.dat sono K.OUT e K.WALL.OUT

4 CAPITOLO 3: TEST E ANALISI DATI

4.1 TEST 1

Come primo test è stato scelto quello descritto nel (3) che riportava i dati inerenti alle prese di pressione su un cilindro con calotta semisferica in un flusso con valori di mach da 2 a 8. In aggiunta, per alcuni valori di mach sono state anche riportate le coordinate dell'urto registrate tramite tecnica *schlieren*¹³⁷ così da poter verificare anche quelle con quelle ottenute per mezzo del codice CFD. La parete della sonda è considerata adiabatica.

La sonda presenta 10 prese di pressione sulla zona semisferica, una ogni 10° partendo dal punto centrale a 0°, più altre 18 lungo il corpo cilindrico a varie distanze.

Di seguito si riporta un'immagine con le dimensioni della sonda:



FIGURA 4.1.1: GEOMETRIA SONDA

Grazie alle quotature è stato possibile disegnare un database fedele alla geometria di riferimento con l'unica accortezza di riscalare la sua dimensione totale per fare in modo che fosse unitaria. Una volta realizzato il database del corpo si è realizzata una griglia attorno ad esso, prestando attenzione a non avere salti di dimensione tra celle contigue troppo grandi e più piccole in prossimità della superficie del corpo. Lavorando con un codice che richiede una griglia strutturata bisogna anche prestare attenzione alla discretizzazione in celle sulla parte semisferica; verrebbe infatti intuitivo realizzare una discretizzazione a "spicchi", ma questa sarebbe errata poiché si avrebbero delle celle con solo 3 lati sul vertice.

¹³⁷ Letteralmente tecnica delle strie, è un metodo di visualizzazione che sfrutta il legame tra l'indice di rifrazione di un fluido e i gradienti di pressione per mostrare le disomogeneità nel campo di moto.



FIGURA 4.1.2: ESEMPI DI DISCRETIZZAZIONE SU UNA SEMISFERA. A SINISTRA SI PUÒ VE-DERE UN ESEMPIO DI DISCRETIZZAZIONE ERRATA PER VIA DELLA PRESENZA DI TRIANGOLI NEL VERTICE

Una volta realizzate le griglie sul database¹³⁸ si sono realizzati i volumi di controllo attorno al nostro corpo. Data la simmetria delle forme è stato sufficiente realizzare solo una parte del volume indicando poi nelle *boundary conditions* quali fossero i piani di simmetria.



FIGURA 4.1.3: GRIGLIA FINALE DEL VOLUME DI CONTROLLO

A questo punto è possibile generare i file delle *boundary conditions* dei domini¹³⁹ che racchiudono il volume di controllo secondo quanto spiegato nel capitolo 4. Una volta estratti i file che vanno a comporre la griglia usata da Anastasia è possibile lavorare con i file di Input del programma andando ad inserire le condizioni al contorno del campo di moto: pressione, temperatura e mach a monte.

A questo punto il codice ha tutto il necessario per avviare l'analisi. Una volta terminata, nella cartella indicata come output si trovano tutti i file generati dal programma durante l'elaborazione. Con i file ottenuti è possibile ricostruire la griglia finale, la quale sarà stata raffinata vantando un maggior numero di celle rispetto a quella iniziale, con la visualizzazione delle grandezze calcolate. Note le coordinate delle prese di pressione si estraggono i valori riferiti a tali coordinate e confrontati con quelli sperimentali per valutare il loro scostamento.

¹³⁸ Con database i software per realizzare le *mesh* indicano le superfici dei corpi.

¹³⁹ Le superfici racchiuse da connettori nella *mesh*.

Ciò che si va a visualizzare sono le distribuzioni delle grandezze nel campo. Di seguito si riporta la distribuzione di pressione nel caso di mach uguale a 2.



FIGURA 4.1.4: TEST A M=2 E INCIDENZA NULLA

A seguire si riportano le tabelle con i dati relativi i test e i grafici frutto di queste analisi.

4.1.1 ANALISI DATI

La prima tabella realizzata è quella con le grandezze di riferimento per le simulazioni con le grandezze necessarie alle analisi.

TEST1									
M_{∞}	p_{tot} [Pa]	$T_{tot}[R]$	$Re/m * 10^{-6}$	p [Pa]	T[K]				
2	558475.34	308.33	6.94	71375.67598	171.2962963				
3	2206322.34	336.11	14.29	60064.22142	120.0396825				
4.03	4957330.50	346.11	17.96	31371.67367	81.47279802				
5.06	10390399.25	363.89	20.82	18315.69663	59.45197442				
6.03	12052035.76	410.00	13.47	7402.7059	49.56371839				
8.1	44815922.45	744.44	8.98	4234.436406	52.71522762				
TARELLA 4.1.1. CONDIZIONI DEL ELUSSO A MONTE NEL TESTI									

TABELLA 4.1.1: CONDIZIONI DEL FLUSSO A MONTE NEL TEST1

Nella Figura 4.1.5: andamento delle pressioni nel primo test al variare del mach sono riportate le distribuzioni di pressione, sia quella sperimentale che quella numerica, per tutti i casi svolti a diversi valori di mach così da poter valutare l'andamento della soluzione anche con il variare della condizione a monte del flusso.



Test 1



FIGURA 4.1.5: ANDAMENTO DELLE PRESSIONI NEL PRIMO TEST AL VARIARE DEL MACH

Come si può osservare, Anastasia ha fornito ottimi risultati nonostante il campo di moto sia contraddistinto da valori di Reynolds abbastanza elevati da poterlo considerare turbolento una vola superato la calotta semisferica, campo che non dovrebbe poter essere analizzato con il codice.

Come accennato in precedenza nel documento da cui sono estrapolati i dati sperimentali usati per questo test erano presenti anche le coordinate x-y dell'urto per i mach da 2 a 6.



FIGURA 4.1.6: GEOMETRIE SPERIMENTALI DEGLI URTI AL VARIARE DEL MACH

L'urto riduce il proprio angolo di apertura attorno al cilindro col crescere del mach. Si è eseguito un confronto tra queste geometrie e quelle ottenute per mezzo della soluzione numerica sovrapponendo queste coordinate alle immagini della soluzione finale ai diversi mach.





FIGURA 4.1.7: CONFRONTO GEOMETRIE URTO M=5

In tutti i casi analizzati le curve ottenute seguono abbastanza fedelmente i punti sperimentali.

4.2 Test 2

Per la seconda campagna di test si è fatto riferimento alla REF (4). In questo documento sono state analizzate diverse geometrie di proiettili per valori di mach supersonici. A differenza del caso precedente, nei test in galleria del vento il corpo è stato posto a diverse incidenze, inoltre le prese sono state fatte ruotare attorno all'asse di assialsimmetria durante tutti i test così da ottenere una maggiore mappatura delle pressioni attorno al proiettile. Anche in questo caso si ha parete adiabatica.

4.2.1 ANALISI DATI

La procedura di costruzione di griglia e di analisi è del tutto simile a quanto fatto in precedenza.



FIGURA 4.2.1: GRIGLIA TEST2

Unica peculiarità rispetto a quanto fatto prima sta nel dover definire due *volume conditions* dividendo a metà il volume di controllo in corrispondenza della punta del proiettile così da evitare che nel raffinamento della griglia la punta venga smussata da una *spline* che ne modifichi sostanzialmente la geometria.

Nei grafici seguenti si riportano nuovamente le distribuzioni di pressione. Sul medesimo grafico sono riportate le pressioni di tutte le prese ruotate da 0° a 180° con intervalli di 30° attorno all'asse di assial-simmetria. Grazie ai dati forniti è stato possibile ricostruire le coordinate a tre assi partendo da quella radiali così da determinare le posizioni delle prese di pressione nel volume della *mesh* al termine della simulazione.

4.2.1.1 Mach=2





Grafico 4.2.1: distribuzione di pressione M=2 e α =0°

4.2.1.1.2 ALFA=2°



Grafico 4.2.2: distribuzione di pressione M=2 e α =2°

Il motivo per cui questo grafico ha un andamento del genere è che si è scelto di riportare in un unico grafico tutti i valori di pressione delle prese attorno al corpo. Per questa ragione ad ogni picco significa che si stanno visualizzando le pressioni su un piano angolato di $\phi = 30^{\circ}$ rispetto al precedente.

4.2.1.1.3 ALFA=6°



Grafico 4.2.3: distribuzione di pressione M=2 e α =6°

4.2.1.1.4 ALFA=10°01





4.2.1.2 Mach=3





GRAFICO 4.2.5: DISTRIBUZIONE DI PRESSIONE M=3 E α =2°





GRAFICO 4.2.6: DISTRIBUZIONE DI PRESSIONE M=3 E $\alpha = 2^{\circ}$

4.2.1.2.3 ALFA=6°



Grafico 4.2.7: distribuzione di pressione M=3 e α =6°

4.2.1.2.4 ALFA=10°





4.2.1.3 Mach=4





Grafico 4.2.9: distribuzione di pressione M=4 e $\alpha = 0^{\circ}$

4.2.1.3.2 ALFA=2°





4.2.1.3.3 ALFA=6°



Grafico 4.2.11: distribuzione di pressione M=4 e $\alpha = 6^{\circ}$

4.2.1.3.4 ALFA=10°



Grafico 4.2.12: distribuzione di pressione M=4 e α =10°

In tutti questi test si è determinata una soluzione numerica molto fedele a quella fornita dalle misure sperimentali. I maggiori errori si hanno per i valori di Mach più bassi e per le incidenze più alte per le quali è più probabile avere distacco dello strato limite.

4.3 Test3

Per questa simulazione è stato valutato un flusso ipersonico bidimensionale su una rampa di compressione, con un angolo $\theta = 12^{\circ}$, il cui *Re* è sufficientemente basso da garantire laminarità del flusso. Il test è stato selezionato dal REF (5), in particolare si tratta della *run* 22 del test indicato come A.2.

TEST3										
M_{∞}	p [Pa]	T [K]	ρ[kg/m^3]	$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{w}}\left[K ight]$						
11.7	26.69988	66	0.00141	293						
TABELLA 4.3.1: CONDIZIONI DEL FLUSSO A MONTE NEL TEST3										

Si tratta di un problema isotermo, per questa ragione sono stati valutati per la prima volta i flussi di calore a parete. Inoltre durante i test sono stati misurati anche gli sforzi viscosi a parete. Entrambe queste grandezze sono dovute alla presenza di gradienti a parete¹⁴⁰ il cui calcolo ha reso necessario un maggior infittimento della griglia in questa zona per poter ottenere dei valori coerenti. Determinare la dimensione di cella necessaria al calcolo è stata l'aspetto cruciale di questo test.

Nei primi testi si sono usate celle che a parete avevano dimensione dell'ordine di 10^{-4} , ma i valori ottenuti dei flussi non erano per nulla soddisfacenti come si vedrà nei grafici dei primi tentativi . Mentre per quanto riguarda la pressione si sono ottenuti fin da subito valori di salto abbastanza buoni, nonostante l'andamento non rispecchiasse molto quello sperimentale presentando un salto più netto. Questo proprio perché i valori di pressione non dipendono dalla presenza di gradienti.

Per ottenere delle buone approssimazioni dei flussi è stato necessario scendere di un ordine di grandezza con le dimensioni di partenza delle celle di partenza. L'importanza dell'altezza della cella sarà evidente una volta una volta visualizzati gli andamenti delle variabili calcolate a parete, saranno riportati 4 test significativi con le rispettive grandezze di cella e le soluzioni ottenute.

I flussi calcolati dal codice CFD sono adimensionalizzati, per poterli confrontare con quelli dimensionali ricavati dall'esperienza, dimensionati col sistema imperiale, è stato, quindi, necessario riportarli tutti alle grandezze del sistema internazionale. Il flusso di calore è adimensionalizzato con il fattore ρRTV dove ρ , $T \in V$ sono le grandezze di riferimento: la densità e la temperatura del flusso a monte, mentre la $V_{rif} = \sqrt{RT}$. Il termine che adimensionalizza gli sforzi viscosi è $\mu V/L_{rif}$: la viscosità dinamica, funzione della temperatura, viene calcolata con la formula di Sutherland¹⁴¹, la velocità di riferimento è la stessa del flusso di calore e L_{rif} è la lunghezza di riferimento della geometria in analisi. Quello fornito dalla sperimentazione è il modulo totale della τ , al contrario, il software fornisce i valori nelle tre dimensioni. Per ottenere il modulo dalle grandezze vettoriali è sufficiente calcolare:

$$|\tau| = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2}$$

Analizzando un caso bidimensionale la dimensione lungo z è fittizia e i valori di τ_z dovrebbero essere nulli, in realtà il codice calcola dei valori molto piccoli, ma diversi da zero che sono stati comunque trascurati nel calcolo degli sforzi viscosi.

¹⁴⁰ Il calcolo dei flussi sono calcolati per mezzo della legge di Fourier, per il calore, $q_w = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}$ e quella di Newton, per gli sforzi viscosi, $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$.

¹⁴¹
$$\mu = S \frac{T^{3/2}}{\chi + T}$$
 dove: $S = 1.46 * 10^{-6} \frac{kg}{msK^{\frac{1}{2}}}$ $\chi_{aria} = 110 \ k$

4.3.1 PRIMA RUN

La prima *run* è stata eseguita con una griglia formata da 47,564 celle e, data la presunta semplicità del test si erano impostati zero adattamenti di griglia così da non andare ad accrescere la complessità del sistema. Nonostante il problema sia bidimensionale la griglia è tridimensionale poiché Anastasia non lavora con griglie 2D. Per questa ragione quando trova forti variazioni nelle celle ciò che va a fare è suddividere i singoli volumetti in 8 volumetti, proprio come fatto nei casi precedenti, prestando però attenzione a fare in modo che la griglia sia uguale in tutte le sezioni lungo la terza dimensione fittizia. Indicando con Δs_1 la dimensione della griglia di partenza, in questo primo caso si aveva:

 $\Delta s_1 \cong 2.95 \cdot 10^{-4}$



FIGURA 4.3.1: GRIGLIA DI PARTENZA



GRAFICO 4.3.1: DISTRIBUZIONE DI PRESSIONE DELLA PRIMA RUN DEL TEST3



GRAFICO 4.3.2: FLUSSI DI CALORE DELLA PRIMA RUN DEL TEST3



GRAFICO 4.3.3: ANDAMENTO DEGLI SFORZI VISCOSI NELLA PRIMA RUN DEL TEST3

La distribuzione di pressione ha determinato un rapporto del salto di pressione simile a quello sperimentale, ma un andamento molto diverso, certamente causato dalla ridotta discretizzazione assiale della griglia che non ha subito adattamenti. I flussi termini, al contrario, non sono comparabili presentando una differenza di ben quattro ordini di grandezza. Per quanto riguarda gli sforzi viscosi, il codice non ha praticamente rilevato alcuna variazione lungo il corpo, invece, i test hanno sottolineato una loro forte decrescita in prossimità dello spigolo dove probabilmente si è presentata una zona di separazione con la conseguente decrescita delle velocità causando, a sua volta, una riduzione del gradiente $\partial u/\partial y$.

4.3.2 Seconda Run

Vista l'insufficienza della sola griglia di partenza nella definizione dei fenomeni che caratterizzano il test, si è rieseguito il test aumentando il numero massimo di adattamenti a 3. Così facendo l'altezza delle celle a parete si è ridotto considerevolmente e il numero delle celle è cresciuto di molto raggiungendo il valore di 683,276. Lo spessore è indicato con il pedice 3 poiché effetto di 3 adattamenti.

$$\Delta s_3 \cong 3.88 \cdot 10^{-5}$$

La riduzione nello spessore delle prime celle ha comportato un significativo miglioramento nei valori di flusso ottenuti, ma ancora non sufficiente. Di seguito si riportano i grafici analogamente a quanto fatto prima.



GRAFICO 4.3.4: DISTRIBUZIONE DI PRESSIONE NELLA SECONDA RUN DEL TEST3





GRAFICO 4.3.5: FLUSSI DI CALORE NELLA SECONDA RUN DEL TEST3



GRAFICO 4.3.6: ANDAMENTO DEGLI SFORZI VISCOSI NELLA SECONDA RUN DEL TEST3



FIGURA 4.3.2: GRIGLIA ADATTATA NELLA ZONA DELLO SPIGOLO

Come si può notare gli andamenti sono notevolmente migliorati rispetto al precedente caso senza adattamento. La maggiore discretizzazione ha permesso al codice di calcolare dei flussi dello stesso ordine di grandezza di quelli sperimentali, ma il loro andamento è ancora molto lontano da quello reale in particolar modo quello del calore. Il codice non si rivela in grado, in questo caso, di determinare il picco di calore a valle dell'urto.

4.3.3 TERZA RUN

Dopo aver notato che gran parte della griglia non subiva praticamente alcun disturbo per l'eccessiva dimensione lungo y si è deciso di realizzare una nuova griglia con meno celle lungo tale direzione.



FIGURA 4.3.3: GRIGLIA DELLA TERZA RUN DEL TEST3

Con questa nuova griglia il numero totale delle celle iniziali è sceso a 38,000, mentre $\Delta s_1 \cong 6.56 \cdot 10^{-4}$. Nella nuova griglia si è andata anche a migliorare l'estrusione del dominio che aveva portato a quella curvatura nella parte bassa della superficie d'ingresso del flusso. Il numero di adattamenti massimi è stato lasciato pari a 3 anche in questo caso, però sono state variate le soglie a cui far eseguire i raffinamenti o i *coarsening* portandoli rispettivamente a 0.01 e 0.001, nei casi precedenti i loro valori erano 0.05 e 0.005. A causa di questa scelta e alle rapide variazioni presenti in questo test il livello di dettaglio e di complessità della griglia è cresciuto enormemente raggiungo il valore di 2,550,223 celle nel volume di controllo e portando ad un $\Delta s_3 \cong 8.5 \cdot 10^{-5}$.



GRAFICO 4.3.7: DISTRIBUZIONE DI PRESSIONE NELLA TERZA RUN DEL TEST3



GRAFICO 4.3.8: FLUSSI DI CALORE NELLA TERZA RUN DEL TEST3



GRAFICO 4.3.9: FLUSSI VISCOSI NELLA TERZA RUN DEL TEST3



FIGURA 4.3.4: GRIGLIA AL TERMINE DEI 3 ADATTAMENTI

Da questi grafici si osserva che gli andamenti ottenuti sono peggiori di quelli ottenuti in precedenza, a dimostrazione del fatto che come griglie molto fitte non diano necessariamente risultati migliori di altre.

4.3.4 QUARTA RUN

Per la quarta, e ultima, *run* si è realizzata una griglia partendo da zero prendendo spunto dai test precedenti per la sua realizzazione. Si è così scelto di realizzare una griglia con un buon livello di discretizzazione fin dal principio e che non si sviluppasse eccessivamente lungo la direzione normale alla parete. Il risultato è stata un volume formato da 57,000 celle la cui dimensione a parete è $\Delta s_1 \cong 1.3 \cdot 10^{-4}$. Si sono riportati i valori di soglia a 0.05 e 0.005 per evitare di ottenere, come nella terza run, un numero di celle nell'ordine dei milioni. Il grande numero di celle e la loro ridotta dimensione ha avuto come effetto negativo quello di richiedere un numero di iterazioni superiori alle prime due run che non avevano mai superato le 8,000, qui, invece, si è arrivati quasi a 26,000.



FIGURA 4.3.5: GRIGLIA DI PARTENZA DELLA QUARTA RUN DEL TEST3

Al termine dei 3 adattamenti la griglia finale presenta 517,000 celle e $\Delta s_3 \cong 3.4 \cdot 10^{-5}$.



FIGURA 4.3.6: GRIGLIA FINALE DELLA QUARTA RUN DEL TEST3

Con questo test Anastasia ha proseguito negli infittimenti solo nella zona vicina a parete. Gli adattamenti si sono concentrati nelle zone in cui si sono generati urti e zone di ristagno ben descrivendo il fenomeno.



FIGURA 4.3.7: DETTAGLIO GRIGLIA IN PROSSIMITÀ DELLO SPIGOLO DELLA QUARTA RUN DEL TEST3



GRAFICO 4.3.10: DISTRIBUZIONE DI PRESSONE NELLA QUARTA RUN DEL TEST3



GRAFICO 4.3.11: FLUSSI DI CALORE DELLA QUARTA RUN DEL TEST3



GRAFICO 4.3.12: SFORZI VISCOSI NELLA QUARTA RUN DEL TEST3

I risultati mostrano una maggiore affinità tra dati sperimentali e numerici. La distribuzione di pressione e il flusso di calore approssimano abbastanza bene, e certamente meglio dei casi precedenti, gli andamenti misurati con le sonde in galleria del vento. Il software ha rivelato ancora dei limiti per quanto riguarda il calcolo del crollo nelle τ , nonostante i minimi delle due funzioni siano collocati, all'incirca nello stesso punto.

4.4 TEST 4

Per questo test si è fatto riferimento ad un esperimento riportato nelle REF (6), (7) e (8) ovvero quello riguardante due rampe con medesimo angolo θ poste a 90° l'una rispetto all'altra.

In campo supersonico e ipersonico, onde d'urto generate da differenti sorgenti possono interferire e la conoscenza del modo e dell'intensità con cui ciò avviene è fondamentale per il corretto funzionamento dell'apparato. Basti pensare allo studio della presa d'aria di un motore che deve operare in tali regimi di mach.



FIGURA 4.4.1: CONFIGURAZIONE FLUSSI DEL TEST4

Come si può osservare dalla Figura 4.4.1, lo schema del fenomeno riporta la presenza di cinque urti. Due di questi urti, quelli che separano la zona I dalla II sono generati dalla presenza del cuneo, gli altri tre sono dovuti alla presenza del Mach *disk*¹⁴² nella regione dove i due precedenti convergono. Le superfici di contatto dirette verso il piano di simmetria si generano nel punto in cui i tre urti interagiscono a causa dei differenti livelli di entropia prodotti dalle onde d'urto presenti su entrambi i lati dell'interazione. L'onda d'urto che separa la zona II e la IV impatta sullo strato limite ed è riflessa sotto forma di onde di espansione che, una volta incontrata la *slipsurface*¹⁴³, vengono trasformate in onde di compressione. L'influenza reciproca tra l'onda d'urto e lo strato limite provoca la separazione di quest'ultimo nella direzione trasversale. Di conseguenza, si sviluppa un vortice delle linee di flusso che ostacola il *crossflow* generando una compressione analoga a quella tipica di un flusso supersonico bidimensionale su una rampa.

Le proprietà a monte del flusso sono note così come gli angoli di rampa, il flusso di calore e la pressione a parete in una sezione specifica e la pressione totale.

		TES	ST 4		
M_{∞}	$\delta_1 = \delta_2$	Re_{∞}/m	T_{∞} [K]	<i>T_w</i> [K]	p_{∞} [Pa]
12.3	8°	$5 \cdot 10^{6}$	45.3	300	111.84
	TABELLA 4.4	.1: GRANDEZZE CA	RATTERISTICHE FI	lusso test 4	

¹⁴² Riflessione irregolare.

¹⁴³ Superficie che separa due zone ad entropia differente in cui la pressione statica e la stessa, ma non lo sono le velocità.

Negli articoli presi come riferimento per il test¹⁴⁴ viene confrontata una soluzione computazionale ottenuta risolvendo le equazioni di Navier-Stokes parabolizzate¹⁴⁵. La discretizzazione usata nelle *reference* era di 100x100 celle nel piano di sezione. Le principali criticità di questo test sono legate alla complessità dei fenomeni in gioco, per via della geometria, come viso, si verificano 5 urti che interagiscono tra loro e con lo strato limite.

Come nel caso precedente si è dovuto cercare la dimensione di ottimo per la realizzazione delle celle parete per consentire ad Anastasia di calcolare correttamente i flussi a parete. Per questo scopo sono state realizzate tre griglie da cui far partire le analisi; le prime due di lunghezza unitaria lungo l'asse x, la lunghezza dell'ultima è stata, invece, dimezzata. Nella Figura 4.4.2 è stata riportata la struttura della griglia degli ultimi due test che era la stessa, solo scalata di un fattore 0.5.



FIGURA 4.4.2: GRIGLIA DEL TEST4

Oltre alle distribuzioni di pressione e di calore a parete, le *reference* riportano anche le isobare della pressione totale in una sezione del volume, la sezione con coordinata x=0.09m.

Per il calcolo della pressione totale, in questo caso non è possibile applicare la classica equazione:

$$p^0 = p \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Questo perché essendo in campo supersonico la pressione totale misurata la tubo di Pitot è quella a valle di un urto che si verifica a causa dell'incontro tra il flusso e la sonda stessa. Per questa ragione è stato necessario scrivere una macro per calcolare la pressione totale tenendo in considerazione questo fenomeno. Le grandezze 1 e 2 sono riferito a prima e dopo l'urto rispettivamente.

$$\frac{p_2^0}{p} = \left(\frac{(\gamma+1)^2 M_1^2}{4\gamma M_1^2 - 2(\gamma-1)}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{1-\gamma+2\gamma M_1^2}{\gamma+1}\right)$$

¹⁴⁴ REF (5), (6), (7)

¹⁴⁵ Si tratta di una forma approssimata delle equazioni complete di Navier-Stokes che può essere applicata nel caso di flussi supersonici stazionari.

I valori riportati nelle *reference* sono riferiti al rapporto tra la pressione totale nel locale e quella a valle così da lavorare con valori adimensionalizzati.

$$\frac{p_{\infty}^{0}}{p_{\infty}} = \left(\frac{(\gamma+1)^{2}M_{\infty}^{2}}{4\gamma M_{\infty}^{2} - 2(\gamma-1)}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{1-\gamma+2\gamma M_{\infty}^{2}}{\gamma+1}\right)$$
$$\frac{p_{2}^{0}}{p_{\infty}^{0}} = \frac{p_{2}^{0}}{p}\frac{p_{\infty}}{p_{\infty}^{0}}$$

Il termine p/p_{∞} è il termine di pressione calcolato da Anastasia pertanto tutti i termini sono noti.

Gli assi della sezione sono stati adimensionati rispetto alla coordinata x e in modo che l'origine fosse sullo spigolo tra le due rampe. $\bar{Y} = \frac{y - x \tan \theta}{x}$; $\bar{Z} = \frac{z - x \tan \theta}{x}$



Fig. 4: Pitot pressure contours for test case #1: (a)experiment, (b)computation.



Fig. 5: Pressure (a), heat transfer (b) and flow direction (c) at the wall for test case #1: experiment and computation.

FIGURA 4.4.3: DATI DI RIFERIMENTO PER IL TEST 4 PROVENIENTI DALLE REFERENCE

4.4.1 PRIMA RUN

4.4.1.1 Griglia A



FIGURA 4.4.4: p^0/p_{∞}^0 nella sezione per x=0.09 della griglia A



GRAFICO 4.4.1: PRESSIONE E FLUSSO DI CALORE A PARETE NELLA SEZIONE X=0.09 DELLA GRIGLIA A
4.4.1.2 Griglia B

È una ripartenza della griglia A.



FIGURA 4.4.5: p^0/p_{∞}^0 nella sezione per x=0.09 della griglia B



GRAFICO 4.4.2: PRESSIONE E FLUSSO DI CALORE A PARETE NELLA SEZIONE X=0.09 DELLA GRIGLIA B



GRAFICO 4.4.3: CONFRONTO TRA IL FLUSSO DI CALORE NELLA SEZIONE X=1 DELLE GRIGLIE A E B

Test 4

4.4.1.3 Griglia C

È una ripartenza della griglia B.



FIGURA 4.4.6: p^0/p_{∞}^0 nella sezione per x=0.09 della griglia C



GRAFICO 4.4.4: PRESSIONE E FLUSSO DI CALORE A PARETE NELLA SEZIONE X=0.09 DELLA GRIGLIA B

4.4.1.4 Griglia D

È una ripartenza della griglia C.



FIGURA 4.4.7: p^0/p^0_{∞} nella sezione per x=0.09 della griglia D



GRAFICO 4.4.5: PRESSIONE E FLUSSO DI CALORE A PARETE NELLA SEZIONE X=0.09 DELLA GRIGLIA D

4.4.2 Seconda Run

4.4.2.1 Griglia A2

Adaptation max number	8
Adaptation wall constant	1
Δs_{in}	$5.7 \cdot 10^{-5}$
Δs_{fin}	$2.8 \cdot 10^{-5}$
Adaptation refinement threshold	0.01
Adaptation coarsening threshold	0.001
TABELLA 4.4.6: INPUT GRIGI	JIA A2



FIGURA 4.4.8: p^0/p^0_{∞} nella sezione per x=0.09 della griglia A2



GRAFICO 4.4.6: PRESSIONE E FLUSSO DI CALORE A PARETE NELLA SEZIONE X=0.09 DELLA GRIGLIA A2

4.4.2.2 Griglia B2

Ripartenza della griglia A2.



FIGURA 4.4.9: p^0/p_{∞}^0 nella sezione per x=0.09 della griglia B2



GRAFICO 4.4.7: PRESSIONE E FLUSSO DI CALORE A PARETE NELLA SEZIONE X=0.09 DELLA GRIGLIA B2

Il risultato di questa seconda *run* ha fornito degli andamenti migliori, rispetto ai precedenti, delle isobare che sono più simili a quelle di riferimento nella Figura 4.4.3. Nonostante questo risultato positivo gli andamenti del flusso di calore e di pressione a parete non sono quelli rilevati sperimentalmente.

Il software ha rilevato due picchi di calore, uno nello spigolo e l'altro nella zona cui avviene l'interazione tra l'urto e lo strato limite. In realtà avrebbe dovuto rilevare un flusso di calore pressoché nullo nello spigolo a cui avrebbe dovuto seguire un picco di calore spostandosi lungo la direzione z.



FIGURA 4.4.10: TEMPERATURA NELLA SEZIONE A x=0.09 della griglia B2

4.4.3 TERZA RUN

Per la terza *run* è stata presa la griglia della seconda e scalata secondo un fattore 0.5, inoltre sono stati aumentati i nodi lungo la direzione x così da descrivere meglio l'evoluzione del flusso lungo la direzione assiale. Si è imposto fin da subito un numero di adattamenti massimi pari a 10 e un elevato numero di iterazioni massime prima dell'arresto dell'iterazione.

Nonostante queste modifiche i risultati sono stati in linea con i precedenti e perciò non soddisfacenti se paragonati con quelli sperimentali e numerici riportati nelle *reference*.

4.5 Test 5

Per l'ultima campagna di test si è deciso di svolgere una simulazione riguardante IXV¹⁴⁶ e un caso non catalitico, ovvero senza ricombinazioni delle specie chimiche a parete¹⁴⁷.

Le condizioni al contorno del test sono:

TEST 5							
M_{∞}	α	p_{∞} [Pa]	T_{∞} [K]	T _{vibr} [K]	% 0 2	%N ₂	ε
20	45°	5.532	226.984	226.984	0.233	0.767	0.8
TABELLA 4.5.1: CONDIZIONI AL CONTORNO TEST 5							

Si sono innalzati i valori dei residui a cui interrompere la simulazione, non potendo ambire all'ordine ricercato nei test precedenti, portandoli a 10^{-3} .

La griglia è stata sviluppata sulla geometria più semplice possibile di IXV, ovvero quella senza i flap estesi.



FIGURA 4.5.1: GRIGLIA ATTORNO ALL'IXV PER IL TEST 5

Come primo tentativo si è lanciata una *run* con irraggiamento a parete (IWBC=3) e il parametro IOPT=2 che richiede la dichiarazione dell'energia vibrazionale. Tutto ciò rendeva il test instabile sin dal principio e, dato che questa parte di codice è ancora in fase di sviluppo si è provato a semplificare il test.

Nella Tabella 4.5.2 sono riportati i parametri di input usati nei tentativi svolti per questo test.

¹⁴⁶ Intermediate eXperimental Vehicle

¹⁴⁷ Per maggiori dettagli rivedere il paragrafo 2.15.

TEST 5				
	I run	II run	III run	
File	e bc.dat			
IOPT1	1	1	1	
IOPT2	0	0	0	
YINF	0 0 0 0.233 0.767	0 0 0 0.233 0.767	0 0 0 0.233 0.767	
IWBC	2	2	2	
EPSIL	0.8	0.8	0.8	
IWCAT	1	1	1	
File Input.dat				
STAB	0.3	0.3	0.2	
STIN	10	10	12	
SUBSTAB	0.2	0.3	0.2	
STIN	10	10	12	
IS.VISCOUS	1	0	1	
SWITCHAT	0	3000	0	
ADAPTATION.MAX.NUMBER	3	3	3	
ADAPTATION.WALL.CONSTANT	0	0	0	
ADAPTATION.REFINEMENT.THRESHOLD	0.05	0.05	0.05	
ADAPTATION.COARSENING.THRESHOLD	0.005	0.005	0.005	
TABELLA 4.5.2: VALORI DI INPUT NELLE <i>RUN</i> PER IL TEST 5				

Nessuno di questi test ha portato ad una soluzione attendibile poiché dopo circa 3000 iterazioni in cui la simulazione sembrava andare a convergenza il valore dei residui esplodeva e la interrompendo la simulazione fornendo soluzioni NaN¹⁴⁸.

Di seguito si riportano le soluzioni delle tre run.



FIGURA 4.5.2: PRESSIONE I RUN

Dalla Figura 4.5.2 si può vedere come il software stesse iniziando a visualizzare l'urto e come i valori maggiori più alti si concentrino nella zona inferiore del *nose* del veicolo, proprio come ci aspetterebbe visto l'elevato angolo di attacco con cui il flusso investe IXV.

¹⁴⁸ Not a Number



FIGURA 4.5.3: PRESSIONE II RUN

In questo secondo caso si è fatto uso del comando SWITCHAT per semplificare il calcolo partendo con un flusso inviscido. Solo dall'iterazione indicata il codice inizia a considerare il flusso come viscoso, questo dovrebbe garantire al codice la possibilità di meglio giungere a convergenza partendo da una "bozza" semplificata della soluzione che è quella rappresentata da un caso senza viscosità. Nonostante ciò sembrerebbe che il codice abbia solo valutato le grandezze a parete, ancora non viene visualizzato la comparsa dell'urto.



FIGURA 4.5.4: PRESSIONE III RUN

In questo terzo tentativo si sono solo variati i parametri che determinano il CFL rispetto alla prima *run*, infatti la soluzione ottenuta è simile alla prima, ma anche in questo caso dopo poco più di 3000 iterazioni il programma non è stato più in grado di determinare soluzioni numeriche.

5 CAPITOLO 4

5.1 CONCLUSIONI

Le principali criticità riscontrate nell'uso del codice sono relative al calcolo dei flussi che richiedono una griglia molto più fitta. Se si usano griglie con molte celle fin dal principio si corre, però, il rischio di far esplodere i residui della soluzione. Saranno necessarie ulteriori prove sul test 4 per trovare la condizione di ottimo e, una volta trovate, da testare in altri casi simili così da poterle prendere come riferimento pe futuri test 3D allo stesso modo in cui il test 3 può essere usato per quelli bidimensionali. Per la determinazione dei flussi sarà necessario rivedere le logiche di infittimento automatico a parete, quelle legate al comando ADAPTATION.WALL.CONSTANT che non sempre hanno dato i risultati desiderati.

Per quanto riguarda le pressioni si è invece rilevato come la loro misura sia molto robusta e non richieda particolari infittimenti e che quelli realizzati autonomamente da Anastasia seguano molto bene le zone con maggiori gradienti. A questo proposito basta pensare agli infittimenti rilevati in corrispondenza degli urti.

Bisognerà controllare e modificare alcuni output dei file VTK a parete. Il programma, quando i residui della soluzione raggiungono la soglia ricercata arrestando la simulazione genera due file: FinalSolution.pvtu e un wall_bndctc.pvtu. Il primo di questi file contiene la soluzione di tutto il dominio con le grandezze quali il mach, la pressione, la temperatura e le soluzioni alle equazioni di bilancio (W(0), W(1),...); il secondo contiene la sola soluzione a parete con le relative grandezze e quindi anche i flussi. Si è riscontrata un'incongruenza tra i valori riportati nella soluzione finale a parete, ad esempio il flusso di calore che era sempre nulla. Il codice estrae in automatico la soluzione del volume prima e dopo ogni adattamento, ma non fa lo stesso per la soluzione a parete e, nel caso in cui l'unica soluzione a parete sia troppo lontana dall'iterazione in cui è avvenuto questo adattamento, l'utente è costretto a eseguire un *Restart* della soluzione per poterla visualizzare anche a parete. Si consiglia, pertanto di implementare un backup automatico dei file VTK a parete.

Durante i *Restart* si è osservato come non sia possibile eseguirli con un numero di processori inferiore rispetto a quelli usati nel primo lancio, è, invece, possibile usarne un numero maggiore. Questo significa che il software è in grado di eseguire una nuova suddivisione del volume di partenza, in delle sottogriglie per i singoli processori. Sarebbe bene verificare se è possibile correggere questo limite.

5.2 Ringraziamenti

Al termine del mio percorso universitario voglio ringraziare tutti coloro che mi hanno supportato e aiutato sia dalle prime fasi che nella sua conclusione.

Tengo a ringraziare la ditta Thales-Alenia per la possibilità che mi ha concesso permettendomi di applicare alcune di quelle nozioni apprese durante i corsi frequentati al Politecnico di Torino. In particolare ringrazio l'Ing. Vincenzo Mareschi che mi ha seguito durante il periodo di tesi in azienda e l'Ing. Cosimo Chiarelli per avermi accolto nel suo ufficio facendomi sentire parte del gruppo e alla pari con gli altri impiegati.

Ringrazio anche il Dott. Marco Cisternino per l'aiuto offertomi per meglio comprendere le tecniche multigriglia e le logiche di funzionamento, per la parte da lui scritta, del codice Anastasia.

Sono riconoscente al mio relatore, il Prof. Domenic D'Ambrosio, per avermi dato la possibilità di svolgere il mio periodo di tesi in azienda.

Sono particolarmente grato ai miei famigliari e amici che mi sono stati di aiuto e di conforto durante tutto il percorso di studio. È proprio a loro che dedico tutto il mio lavoro per renderli fieri e orgogliosi di me e poterli ripagare del loro supporto.

6 APPENDICI

I seguenti file di esempio sono tratti dal primo test.

6.1 ESEMPIO DI FILE DI INPUT.DAT

```
! Any comment in a new line in this file has to start with the exclamation
mark and it has to end with equal mark. =
! If a field is multivalued a newline is needed before next field =
ABSOLUTE.INPUT.PATH = /cfd/riccardomaria.milano/TEST/Test1
ABSOLUTE.OUTPUT.PATH = /cfd/riccardomaria.milano/TEST/Test1
OUTPUTS.FOLDER = Outputs
RUN.OUTPUTS.FOLDER = Result 1
INPUT.GRID.FOLDER = Griglia
RESTART.FOLDER = Outputs/Result 1
K.START = 0
K.END = 20000
K.OUT = 500
K.WALL.OUT = 20000
RES.OUT = 1
REGULAR.BACKUP = 1
POST.BACKUP = 1
EXIT.ON.NEGATIVE.PRESSURE = 0
QUADRATURE.ORDER = 3
VENKATAKRISHNAN.GLOBAL.DELTA.X = 0 ! 0 or 1
VENKATAKRISHNAN.K = 0.3
SYMM.FIRST = 1
ALL.BOUND.FIRST = 0
STAB
          = 0.3
                   STABILITY!
STIN
          = 2.0
RES.KSTART = 3000
RES.KEND = 4000
STAB.SHOCK = 0
SUBSTAB = 0.2
SUBSTIN = 2.0
SUBRES.KSTART = 1000
SUBRES.KEND = 2000
SUBK.OUT = 1000000
RES.TOLL.AVE = 1.E-6
RES.TOLL.MAX = 1.E-6
FILE.THERMOCHEM = ./mix_earth_Park_01_5s.dat
FILE.OUTPUT = ./adapt/tq.neu
FILE.GRID
                = hemisphere final-STAR-CD
FILE.BOUND = bc hemysphere M4.dat
FILE.RESTART.GRID = postBackupGridFile 2153
FILE.RESTART.DATA = Data
FILE.RESTART.BNDID = idBndToStringVector.dat
FILE.RESTART.PARA = Parametrizations
FILE.RESTART.EX = Extremes
FILE.RESTART.CACHE = VertexCache
```

```
FILE.RESTART.VOL = ElementVolumesDimensions
FILE.RESTART.CEN = ElementCentroids
FILE.RESTART.DIR = ElementDirections
FILE.RESTART.AN = FaceAreasNormalsCentroids
BACKUP.FOLDER = defaultBackupFolder
BACKUP.FILENAME = defaultBackupGrid
IS.VISCOUS
            = 1
             = 0
SWITCHAT
GAMMA = 1.4
REF.T = 171.29
REF.P = 71375.68
REF.L = 1.
REF.Yi = 0.0 0.0 0.0 0.233 0.767
! REF.R =
! REF.PR =
INIT.T = 171.29
INIT.P = 71375.68
INIT.Yi = 0.0 0.0 0.0 0.233 0.767
INIT.V.TYPE = MACH
                                  !MACH/VEL
INIT.MACH = 2
                                1
INIT.ALFA = 0.0
INIT.BETA = 0.0
! INIT.U = 11
! INIT.V = 0
! INIT.W = 12
LOADBALANCE.ELEMENT.RATIO = 0.01
ADAPTATION.MAX.NUMBER
                       = 3
ADAPTATION.MAX.ITER = 250000
                                          !dall'eventuale restart
                        = 5e-6
ADAPTATION.RES.MAX
ADAPTATION.RES_KSTART = 70
ADAPTATION.RES_KEND = 90
ADAPTATION.SPLIT.FRACTION = 1.0
ADAPTATION.MERGE.FRACTION = 2.0
ADAPTATION.CELL.L.MIN = .00001
ADAPTATION.N.BOUND.LAYER = 2
ADAPTATION.N.PATCH = 0
ADAPTATION.WALL.CONSTANT = 0
ADAPTATION.FIXED.THRESHOLD = 1
ADAPTATION.REFINEMENT.THRESHOLD = 0.05
ADAPTATION.COARSENING.THRESHOLD = 0.005
! Choose the indicators you want to use in refinement process
! The NUMBER.OF.INDICATORS and the number of INDICATOR.LABELS must be co-
herent, otherwise an exception is thrown.
! At the moment the available indicators are: density xvelocity yvelocity
zvelocity temperature =
NUMBER.OF.INDICATORS = 5
```

INDICATOR.LABELS = density xvelocity yvelocity zvelocity temperature MULTIGRID.VCYCLES.DEPTH = 2 MULTIGRID.PRESMOOTHING.CYCLES = 32 64 128 MULTIGRID.POSTSMOOTHING.CYCLES = 32 64 MULTIGRID.HOST.RES.OUT = 1 MULTIGRID.SUB.RES.OUT = 1 FAS.EXPLICIT.STEPS = 50 FAS.CFL.INIT = 5.0 FAS.CFL.SLOPE = 10.0 FAS.CFL.SLOPE = 10.0 FAS.CFL.START = 1 FAS.CFL.END = 10000 FAS.PHYSICAL.DT = 1.0e18 FAS.DTAU.DT.RATIO = 1.0 MULTIGRID.NOF.VCYCLES = 1

6.2 ESEMPIO DI FILE BC.DAT

MULTIGRID.RES.TOLL = 0.1

\$Supersonic inflow or Mixed supersonic #PI01 ACHINF = 2AINCINF = 0.0BINCINF = 0.0PINF = 71375.68TINF = 171.29\$AMITINF = \$IOPT1 = \$YINF = \$IOPT2 = \$EVINF = \$NUTURB = \$END \$Wall #WA01 IWBC = 2TWALL = 300.0\$EPSIL = 0.8\$IWCAT = 1\$YINF = 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 \$GAM = 9.0 10.0 11.0 12.0 13.0 14.0 \$END

6.3 ESEMPIO DI FILE CFD_LOG.DAT

Executable = /cfd/vmaresch/ANASTASIA/Anastasia PG Init No-Restart (start from macrogrid) RESTART Geometry are imported in case of restart REINITGEOM FAS Solver 3-D Geometry Navier-Stokes Analysis Second Order Second Runge-kutta order in smoothing. Same value as IORD for explicit scheme First Order at WALL Perfect Gas Laminar Regime Local Time-Step MODVENKATAKRISHNAN Limiter 1 SUBRKORD: SUBIORD: 1 LIMITER: 0 INTERPOLATION: 1 BARYCENTRIC: 0 1 NOCORRECTIONSHOCK: DEFORMATION: 1 CHECKELEMENTDIVERGENCE: 1 0 DEBUG: ALLRES: 1 PLOTALLRES: 1 0 IMPROVERECTVOLUME: FLUXCURE: 0 MGPLOTALL: 0 COARSEMAXLEVEL: 0 DEEPERMG: 0 ZSUPERPOSITION: 0 0 UNIFORMZ: NOSMOOTH: 0 0 ANALYTIC: 1 ONLYFIRSTLIMITER: STOPATNAN: 0 1 SHOWMEALLNAN: K.START 0 = 20000 K.END = 500 K.OUT = 999999 DT.OUT = RES.OUT = 1 STAB 0.3 = STIN = 2 RES.TOLL.AVE = 1e-06 RES.TOLL.MAX = 1e-06

GAMMA = 1.4 NPROCS 36 = ******** INPUT/OUTPUT FILES OUTPUT.FOLDER =/cfd/riccardomaria.milano/TEST/Test1/Outputs/Result 2 INPUT.GRID.FOLDER Griglia = = hemisphere final-STAR-CD FILE.GRID FILE.BOUND bc hemysphere M4.dat = CFD LOG.log FILE.LOG = ******* REFERENCE VARIABLES REF.T 120.04 = REF.P 60064.2 = REF.L = 1 REF.R = 288 0.72 REF.PR = 120.04 INIT.T = 60064.2 INIT.P = ******** INITIAL VARIABLES INIT.V.TYPE MACH = 3 INIT.MACH = 0 INIT.ALPHA = INIT.BETA = 0 0 INIT.U = 0 INIT.V _ INIT.W 0 ******* END INPUT DATA ******** STARTING ANALYSIS NS nofAdaptations/maxLevel = 0/0 nofElements = 14080 IORD = 2 K = 0 STAB = 0.3 EFFECTIVE CFL = 0.15 dt = 0.000950608RTMAX(0) = 0.0501074012 in P =-0.177491822 0.00717860333 0.0519573774 RTMS = 0.00633246616RTMAX(1) = 0.177243864 in P =-0.177491822 0.00717860333 0.0519573774 RTMS = 0.0224105732RTMAX(2) = 0.000745484515 in P =-0.142459942 0.0388888221 _ 0.0639956427 RTMS = 5.43300131e-05 RTMAX(3) = 0.000879531183 in P =-0.143814546 0.00177450067 _ 0.0743165786 RTMS = 5.61204247e-050.490631875 in P = -0.177491822 0.00717860333RTMAX(4) =_ 0.0519573774 RTMS = 0.0620175809 NS nofAdaptations/maxLevel = 0/0 nofElements = 14080 IORD = 2 K = 1 STAB = 0.3 EFFECTIVE CFL = 0.15 dt = 0.000950607818 RTMAX(0) = 0.0493957441 in P =-0.177491822 0.00717860333 0.0519573774 RTMS = 0.00625798297 0.173489522 in P = -0.177491822 0.00717860333 RTMAX(1) =_ 0.0519573774 RTMS = 0.0220127154RTMAX(2) = 0.00221709012 in P =-0.142459942 0.0388888221 0.0639956427 RTMS = 0.000162501416RTMAX(3) = 0.00261802443 in P = -0.143814546 0.00177450067 _ 0.0743165786 RTMS = 0.000167563315RTMAX(4) = 0.482823756 in P = -0.177491822 0.007178603330.0519573774 RTMS = 0.0612079379

... continua

7 INDICI FIGURE, GRAFICI E TABELLE

7.1 INDICE DELLE FIGURE

Figura 1.2.1: fenomeni fisici caratteristici del flusso ipersonico	7
Figura 2.1.1: entropy layer	7
Figura 2.2.1: profilo di temperatura in uno strato limite ipersonico	8
Figura 2.3.1: shock layer ad alta temperatura	9
Figura 2.3.2: (a sinistra) grafico con l'andamento della temperatura nello shock layer, 1	10
Figura 2.4.1: numero di $Kn \infty$ in funzione dell'altitudine per a) il Sänger <i>lower stage</i> $L \approx 80m$, b)	lo
Space shuttle $L \approx 30m$, c) l'X-38 $L \approx 8m$, d) un naso conico $D \approx 0.3m$, e) una presa di Pitot D	\approx
0.01 <i>m</i> , f) un foro per le misurazioni $D \approx 0.001m$	11
Figura 3.9.1: schematizzazione dei livelli di energia per i modi energetici molecolari 1	15
Figura 3.12.1: nomenclatura urto	27
Figura 3.16.1: geometria urti	34
Figura 3.17.1: schema veicolo RV	35
Figura 3.17.2: schema veicolo CAV	35
Figura 3.17.3: schematizzazione dell'interazione forte di tra l'urto tra l'arco dell'urto sul naso del veico	lo
CAV e la seconda apertura a delta dell'ala	35
Figura 3.17.4: schematizzazione di una tripla rampa di una presa per ramjet	36
Figura 3.19.1: schema urto obliquo	37
Figura 3.19.2: diagramma $\theta - \beta - M$	38
Figura 3.22.1: schematizzazione del flusso attraverso a) una rampa 2D e	39
Figura 3.23.1: diagramma $\theta - \beta - M$	40
Figura 3.23.2: geometria dell'urto e delle streamiline, insieme ad una rappresentazione della deflession	ne
e del mach lungo queste ultime	10
Figura 3.24.1: generica linea sonica e comportamento della linea caratteristiche al crescere del numer	ro
di mach	1 1
Figura 3.24.2: stagnazione ed entropia massima streamline	1 2
Figura 3.25.1: coordinate della geometria dell'arco dell'urto	1 2
Figura 3.29.1: zone urto	17
Figura 3.29.2: discretizzazione in celle 2D	18
Figura 3.29.3: andamento della generica grandezza U attraverso le celle A e B	19
Figura 3.29.4: linee caratteristiche	50
Figura 3.29.5: andamento della grandezza U nelle due celle con una correzione al secondo ordine 5	51
Figura 3.30.1: rappresentazione di una	51
Figura 2.35.1: profili di velocità	59
Figura 3.41.1: flussi di calore a parete	56
Figura 3.43.1: rappresentazione delle grandezze geometriche dell'urto	58
Figura 3.47.1: confronto profili velocità tra caso laminare e turbolento	74
Figura 2.47.2: riduzione del CH in funzione del mach e del Re in una placca piana isolata	75
Figura 3.48.1: andamento delle τ a parete, in prossimità della transizione	17
Figura 2.48.2: instabilità dell'entropy layer nel flusso attraverso una lamina piana con bordo d'attaco	20
smussato, i gradienti di velocità in direzione normale a paretevi visualizzati per mezzo della tecni	ca
Schlieren (zona superiore) comparti con quelli ottenuti per via numerica (zon inferiore). $M \infty$	=
2.5, $Re \propto u = 9.9 \cdot 106 m - 1$, $qw = 0$, $\alpha = 0^{\circ}$. le linee bianche tratteggiate sono le zone per cui	si
sono calcolati i massimi valori di $\partial \rho' / \partial y$, dove ρ' è autofunzione della densità	79
Figura 2.48.3: schematizzazione della contaminazione della linea di attachment. la transizione forza	ta
da un disturbo superficiale in P su a) lamina piana, b) bordo d'attacco d un'ala a freccia e c) linea	di
10	60

attacco di attacco primariosul lato inferiore di un'ala a delta piana con naso smussato (l: flusso lan	ninare,
t: flusso turbolento, S1: punto d'arresto o di stagnazione, A: linea di attachment primaria)	80
Figura 2.48.4: schematizzazione profili dello strato limite	80
Figura 2.48.5: vortici di Görtler computazionali in un lusso 2D attraverso una rampa d	i 20°,
$M \propto 3$, $Re = 12 \cdot 10^{6}$	82
Figura 2.50.1: distribuzioni di pressione lungo dei corpi nel caso inviscido (a) e viscoso (b)	84
Figura 2.50.2: rappresentazione dell'iterazione viscosa forte e debole	86
Figura 2.50.3: test CFD su una rampa	89
Figura 2.50.4: dettaglio del test CFD su rampa	90
Figura 3.50.5: interazioni del III e del IV	90
Figura 2.50.6: confronto tra dati numerici e sperimentali	
Figura 3.2.1: influenza delle iterazioni GS-LEX sull'errore	94
Figura 3.2.2: componenti di bassa e alta frequenza per un esempio unidimensionale con n=8	95
Figure 3.2.3: componenti di oussa e dita frequenza per un esempto antamensionale con fr 0 Figure 3.2.3: sequenza di griglie dove quella di partenza ha $h = 1/16$	96
Figure 3.2.5. sequenza di grigne de le quena di partenza na re in 17 reministrati in parallelo con GS-I FX	97
Figura 3.2.5: distribuzione red black dei punti della griglia Ob	
Figure 2.2.6. Sahama two grid avala	101
Figura 3.2.0. Schenha two-glid cycle	101 diai di
rigura 5.2.7. Struttura di un cicio multigriglia per diversi numeri di griglia e diversi valori di in	
ciclo γ (•, smoothing; \circ , estrazione della soluzione; , trasferimento fine-coarse; /, trasferimento c	oarse-
$\overline{\text{Iine}} = 221 \text{ g } 1 \text{ g } 1$	102
Figura 3.3.1: Schema multigriglia	107
Figura 3.5.1: andamento residui del Test 1, M=2	110
Figura 3.5.2: esempio risoluzione con tecnica V-cycle multigriglia	111
Figura 3.6.1: esempi di adattamento di griglia	112
Figura 3.7.1: V-cycle Anastasia	113
Figura 3.7.2: <i>smoothing</i> V-cycle	113
Figura 4.1.1: Geometria sonda	116
Figura 5.1.2: esempi di discretizzazione su una semisfera. A sinistra si può vedere un esem	pio di
discretizzazione errata per via della presenza di triangoli nel vertice	117
Figura 4.1.3: Griglia finale del volume di controllo	117
Figura 4.1.4: test a M=2 e incidenza nulla	118
Figura 4.1.5: andamento delle pressioni nel primo test al variare del mach	119
Figura 4.1.6: geometrie sperimentali degli urti al variare del mach	120
Figura 4.1.7: confronto geometrie urto M=5	120
Figura 4.2.1: griglia test2	121
Figura 4.3.1: griglia di partenza	129
Figura 4.3.2: griglia adattata nella zona dello spigolo	133
Figura 4.3.3: griglia della terza run del test3	133
Figura 4.3.4: griglia al termine dei 3 adattamenti	135
Figura 4.3.5: griglia di partenza della quarta run del test3	136
Figura 4.3.6: griglia finale della quarta run del test3	136
Figura 4.3.7: dettaglio griglia in prossimità dello spigolo della quarta run del test3	137
Figura 4.4.1: configurazione flussi del test4	139
Figura 4.4.2: griglia del test4	140
Figura 4.4.3: dati di riferimento per il test 4 provenienti dalle <i>reference</i> .	141
Figure 4.4.4: $n0/n \approx 0$ nella sezione per x=0.09 della origina A	142
Figure 4.4.5: $n0/n \approx 0$ nella sezione per x=0.09 della origina R	143
Figure 4.4.6: $\mathbf{p}_{0}/\mathbf{p}_{0}$ nella sezione per x=0.09 della griglia C	145
Figure $1.1.0$, $p_0/p_{\infty 0}$ note sectore per x=0.09 della griglia D.	1/16
Figure $4.4.8$: n0 / n \approx 0 nelle serione per x=0.00 delle griglie A2	1/7
Figura 4.4.0. $\mu v / \mu \sim v$ tiena sezione per x=0.09 dena grigna A2	14/

Figura 4.4.9: $p0/p \propto 0$ nella sezione per x=0.09 della griglia B2	18
Figura 4.4.10: temperatura nella sezione a x=0.09 della griglia B214	19
Figura 5.5.1: griglia attorno all'IXV per il test 5	50
Figura 4.5.2: pressione I <i>run</i>	51
Figura 4.5.3: pressione II <i>run</i>	52
Figura 4.5.4: pressione III <i>run</i>	52

7.2 INDICE DEI GRAFICI

Grafico 2.11.1: andamenti delle energiae vibrazionali e delle temperature in funzione del t	empo in
Grafica 2.12.1; (a ginistra) influenza della pressione gulla temperatura di un urta ratta con	1'aria in
oralizioni di aquilibria (a dastro) variaziona della temperatura in funziona della valogità a del	la quota
ranga di velocità inferiore a quella orbitale	1a quota,
Grafico 2.12.2: variazione della densità con un urte normale in funzione della valogità e della	
ranga di velocità inferiore a quella orbitale	1a quota,
Grafica 2.201: andamenta B a dal mach a valla in funzione dell'angolo di rompo a dal mach	
ratio 2.20.1. and amento p e del mach a vane in funzione den angolo di fampa e del mach	a monte 30
Grafico 2.26.1: andamenti dei Re, prime e dopo l'urto in funzione di $\boldsymbol{\theta}$ e $\boldsymbol{\beta}$	
Grafico 3.28.1: rappresentazione dell'indipendenza dal mach del coefficiente di attrito per un	a sfera a
un cono-cilindro da misure in <i>range</i> balistico	
Grafico 3.39.1: effetti del numero di mach	63
Grafico 3.39.2: effetti della temperatura sugli andamenti	
Grafico 2.39.3: effetti della temperatura sugli andamenti del coefficiente di resistenza	
Grafico 2.39.4: effetti della temperatura sugli andamenti del coefficiente di calore	65
Grafico 2.40.1: andamento del fattore di recupero in funzione del mach	66
Grafico 2.44.1: andamento del termine $RV \circ dVedx$ in funzione del mach, calcolata nei d	ue modi
possibili descritti nella nota 71	
Grafico 2.48.1: (a sinistra) stabilità temporale dello strato limite su una lamina piana adiaba	atica per
diversi valori del mach al limite dello strato limite. rappresentazione qualitativa dei risultati	di mach
seguendo Reshotko a) $Me = 0$ b) $Me = 4.5$ c) $Me = 5.8$;	
Grafico 4.2.1: distribuzione di pressione M=2 e α =0°	122
Grafico 4.2.2: distribuzione di pressione M=2 e α =2°	122
Grafico 4.2.3: distribuzione di pressione M=2 e α =6°	123
Grafico 4.2.4: distribuzione di pressione M=2 e α =10°	123
Grafico 4.2.5: distribuzione di pressione M=3 e α =2°	124
Grafico 4.2.6: distribuzione di pressione M=3 e α =2°	124
Grafico 4.2.7: distribuzione di pressione M=3 e α =6°	125
Grafico 4.2.8: distribuzione di pressione M=3 e α =10°	125
Grafico 4.2.9: distribuzione di pressione M=4 e $\alpha = 0^{\circ}$	126
Grafico 4.2.10: distribuzione di pressione M=4 e α =2°	126
Grafico 4.2.11: distribuzione di pressione M=4 e α =6°	127
Grafico 4.2.12: distribuzione di pressione M=4 e α =10°	127
Grafico 4.3.1: distribuzione di pressione della prima run del test3	129
Grafico 4.3.2: flussi di calore della prima run del test3	130
Grafico 4.3.3: andamento degli sforzi viscosi nella prima run del test3	130
Grafico 4.3.4: distribuzione di pressione nella seconda run del test3	131
Grafico 4.3.5: flussi di calore nella seconda run del test3	132
Grafico 4.3.6: andamento degli sforzi viscosi nella seconda run del test3	132
Grafico 4.3.7: distribuzione di pressione nella terza <i>run</i> del test3	134
	162

Grafico 4.3.8: flussi di calore nella terza run del test3	134
Grafico 4.3.9: flussi viscosi nella terza run del test3	135
Grafico 4.3.10: distribuzione di pressone nella quarta run del test3	137
Grafico 4.3.11: flussi di calore della quarta run del test3	138
Grafico 4.3.12: sforzi viscosi nella quarta run del test3	138
Grafico 5.4.1: pressione e flusso di calore a parete nella sezione x=0.09 della griglia A	142
Grafico 5.4.2: pressione e flusso di calore a parete nella sezione x=0.09 della griglia B	143
Grafico 4.4.3: confronto tra il flusso di calore nella sezione x=1 delle griglie A e B	144
Grafico 5.4.4: pressione e flusso di calore a parete nella sezione x=0.09 della griglia B	145
Grafico 5.4.5: pressione e flusso di calore a parete nella sezione x=0.09 della griglia D	146
Grafico 5.4.6: pressione e flusso di calore a parete nella sezione x=0.09 della griglia A2	147
Grafico 5.4.7: pressione e flusso di calore a parete nella sezione x=0.09 della griglia B2	148

7.3 INDICE DELLE TABELLE

Tabella 2.11.1: reazioni chimiche nell'aria	
Tabella 3.2.1: fattori di smoothing per diversi schemi	
Tabella 4.1.1: condizioni del flusso a monte nel test1	
Tabella 4.3.1: condizioni del flusso a monte nel test3	
Tabella 4.4.1: grandezze caratteristiche flusso test 4	
Tabella 4.4.2: input griglia A	
Tabella 4.4.3: input griglia B	
Tabella 4.4.4: input griglia C	
Tabella 4.4.5: input griglia D	
Tabella 4.4.6: input griglia A2	
Tabella 4.4.7: input griglia B2	
Tabella 4.5.1: condizioni al contorno test 5	
Tabella 4.5.2: valori di input nelle run per il test 5	

8 BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

8.1 BIBLIOGRAFIA

1. Trottenberg, Oosterlee, Schüller. "Multigrid". s.l. : Academic Press, 2001.

2. Cisternino, Marco. "Anastasia User Guide". s.l. : Optimad, 2014.

3. Baer, A. L. "Pressure distribution on a hemisphere cylinder at supersonic and hypersonic mach numbers" - AD261501. s.l. : Arnorld Engineering Development Center, 1961.

4. Reklis, Robert P. e Sturek, Walter B. "Surface pressure measurements on slender bodies at angle of attack in supersonic flow". s.l.: U.S. Army Armament Aesearch and Development Command, November 1978.

5. Marvin, Joseph G., Brown, James L. e Gnoffo, Peter A. "Experimental Database with Baseline CFD Solutions: 2-D and Axisymmetric Hypersonic Shock-Wave/Turbulent-Boundary-Layer Interactions". s.l.: NASA, 2013. Vol. TM-2013-216604.

6. **D'Ambrosio**, **D. e Marsilio**, **R.** "*High velocity flows over symmetric and asymmetric intake-type configurations*", *ESA SP-367*. 1995.

7. **D'Ambrosio, D. e Marsilio, R.** "A numerical method for solving the three-dimensional parabolized Navier-Stokes equations". *Computer & Fluids Vol. 26, No. 6, pp. 587-611.* s.l. : Pergamon, 1997.

8. **Hummel, Dietrich.** *"Experimental investigations on blunt bodies and corner configurations in hypersonic flow".* s.l. : Institut für strömungsmechanik technische universität braunschweig.

9. D'Ambrosio, Domenic. Slide del corso "Hypersonic Aerodynamic".

10. Reklis R. P., Sturek W. B. "Surface pressure measurements on slender bodies at angle of attack in supersonic flow". 1978.

11. Blatt, Burchardt, Dedner, Engwer, Fahlke, Flemisch, Gersbacher, Gräser, Gruber, Grüninger, Kempf, Klöfkorn, Malkmus, Müthing, Nolte, Piatkowski, Sander. "The Distributed and Unified Numerics Environment, Version 2.4. Archive of Numerical Software", 4(100), pp 13 – 29, DOI: 10.11588/ans.2016.100.26526. 2016.

12. Alkämper, Dedner, Klöfkorn, Nolte. "The DUNE-ALUGrid Module, Archive of Numerical Software 4(1)". 2016.

13. Gräser, Sander. "The dune-subgrid Module and Some Applications, Computing 8 (4)", pp. 269-290. 2009.

14. Berger, Aftosmis, Murman. "Analysis of Slope Limiters on Irregular Grids". NAS-05-007.

15. Venkatakrishnan. "On the accuracy of limiters and convergence to steady state solutions". 1993, AIAA 93-0880.

16. **Maslov, A A.** "Experimental and Theoretical studies of hypersonic laminar flow control using ultrasonically absorptive coatings (UAC)". s.l. : Russian Academy of Science, 2003.

17. Anderson Jr., John D. "Computational Fluid Dynamics". s.l. : McGraw-Hill Education.

18. Michalak, Ollivier-Gooch. "Limiters for Unstructured Higher-Order Accurate Solutions of the Euler Equations". s.l. : Advanced Numerical Simulation Laboratory University of British Columbia.

19. Jameson. "Solution Of The Euler Equations For Two Dimensional Transonic Flow By A Multigrid Method". s.l. : Princeton University.

20. Anderson Jr., John D. "Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics". Second. s.l. : AIAA Education Series.

21. **Kitamura, Shima.** "Simple and Parameter-Free Second Slope Limiter for Unstructured Grid Aerodynamic Simulations". s.l. : Japan Aerospace Exploration Agency (JAXA), Sagamihara, Kanagawa 252-5210.

22. Falgout, Robert D. "An Algebraic Multigrid Tutorial". s.l.: Lawrence Livermore National Laboratory, 2010.

23. **Rennie, Nicola.** *"Subsonic and supersonic flow through pitot tubes".* s.l. : School of mathematics & statistics, University of St Andrews.

24. Griffith, B. J. e Lewis, Clark H. "A study of laminar heat transfer to spherically blunted cones and hemishere-cylinders at hypersonic conditions". s.l. : ARO Project no. VT2149, Giugno 1963.

25. **Inger, George R.** "Viscous effects on cooled pitot tubes in hypersonic low reynolds number flows". s.l. : Department of Aerospace Engineering Iowa State University , 2004.

26. Holden, et al. "Comparisons between Measurements in Regions of Laminar Shock Wave Boundary Layer Interaction in Hypersonic Flows with Navier-Stokes and DSMC Solutions".

27. Hollis, Brian R. e Borrelli, Salvatore. "Chapter 3 - Aerodynamics of blunt body entry vehicle".

28. Spearman, M. Leroy e Braswell, Dorothy O. "Aerodynamics of sphere and an oblate spheroid for mach numbers from 0.6 to 10.5 including some effects of test conditions". s.l.: NASA Technical Memorandum, Agosto 1993.

29. Holden, M. S. e Moselle, J. R. "A Database of Aerothermal Measurements in Hypersonic Flow for CFD Validation" AIAA 92-4023. s.l. : University at Buffalo Research Center, 1992.

8.2 SITOGRAFIA

- 1. https://summerofhpc.prace-ri.eu/magic-behind-the-most-of-the-cfd-solvers-for-hpc/
- 2. https://www.cfd-online.com/
- 3. https://en.wikipedia.org/wiki/Multigrid_method
- 4. https://www.cfd-online.com/Wiki/Multigrid_methods