POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Civile
Indirizzo: Strutture

Tesi di Laurea Magistrale

Analisi della fessurazione di strutture in c.a. soggette a stati piani di tensione

Relatori
Prof. Gabriele Bertagnoli

(firma del relatore)

Prof. Luca Giordano

(firma del relatore)

Candidato
Francesco Busso

(firma del candidato)

A.A. 2018-2019

Sommario

Una delle peculiarità del calcestruzzo, e conseguentemente del cemento armato, è il processo di fessurazione che può intervenire durante la vita di un elemento o di una struttura realizzata con tale materiale. La fessurazione nel cemento armato non è solo un aspetto spesso sgradevole e antiestetico ma anche una delle principali cause di degrado strutturale: l'apertura di una fessura deteriora lo strato di copriferro, permettendo la veicolazione di ossigeno e di agenti aggressivi nell'intorno dell'armatura. A tal riguardo, nel corso degli anni, sono stati compiuti numerosi studi per comprendere il meccanismo che innesca e controlla la fessurazione nel cemento armato; la maggior parte delle energie è stata spesa per apprendere tale processo in elementi monodimensionali mentre pochi studi si sono soffermati sugli elementi bidimensionali. Per tali motivi lo scopo principale che si prefigge questa Tesi è quello di studiare la fessurazione di elementi in cemento armato soggetti a stati piani di tensione, indotti tramite l'applicazione di una trazione alle barre di armatura. I risultati ottenuti tramite le simulazioni numeriche f.e.m. verranno discussi e confrontati con le formulazioni proposte dalla Normativa.

Indice generale

Introduzione

Il lavoro di Tesi che segue si pone l'obiettivo di studiare la fessurazione in elementi di calcestruzzo armato soggetti a stati piani di tensione. Per comprendere il comportamento fessurativo di tali elementi risulta inevitabile lo studio del fenomeno fisico dell'aderenza. A tal proposito nel Capitolo 1 vengono messi in risalto i principali modelli, teorici e normativi che descrivono l'interazione dei due materiali (acciaio e calcestruzzo). Si prosegue nel Capitolo 2 in cui viene ripresa la teoria del tirante monodimensionale; essa viene trattata analiticamente e viene risolta l'equazione differenziale che regge il problema. Parallelamente si riassumono le principali formulazioni normative che permettono il calcolo della distanza tra le fessure. Nel capitolo 3 sono descritte, in termini generali, le caratteristiche dei modelli che si realizzeranno nel software DIANA, in termini di geometria, di materiali e di elementi utilizzati per la modellazione f.e.m.

I capitoli 4, e 5 riportano infine i risultati sperimentali ottenuti analizzando due diversi modelli: *"Armature ortogonali e parallele ai lati"* e *"Armature ortogonali inclinate di 45° rispetto ai lati"*.

Il Capitolo 6 riporta invece il concetto di *Anomalia di momento*, ossia una perturbazione locale che si genera nel calcestruzzo in particolari casi di carico e causata dalla diffusione graduale delle tensioni. Il Capitolo 7 mostra invece come, la posizione dell'armatura rispetto al bordo, possa influenzare i campi tensionali e deformativi nel calcestruzzo.

Capitolo 1.

Descrizione dell'aderenza acciaio - calcestruzzo

In questo capitolo di intendono riportare alcune considerazioni teoriche tratte dalla letteratura scientifica riguardanti il legame di aderenza che si instaura tra l'armatura di acciaio e la circostante matrice di calcestruzzo. Tale legame è, insieme alla similitudine dei coefficenti termici dei due materiali, la chiave che ha permesso lo sviluppo della tecnologia del cemento armato. Una buona aderenza tra armatura e matrice permette infatti ad una struttura realizzata con tale tecnologia di esprimere al meglio le sue potenzialità, sia in fase di esercizio che in fase di collasso ultimo. Se si immagina di inserire un tondo d'armatura in una colata di calcestruzzo e di attendere il tempo necessario al completamento del fenomeno di indurimento, tale barra risulterà "ancorata" alla matrice. Se si cerca di estrarre l'armatura facendo contrasto con il blocco di calcestruzzo, questa si opporrà esplicando delle reazioni che dipendono dal fenomeno fisico di *aderenza*. Dopo questa semplice riflessione risulta ora necessario introdurre il concetto di *"bond" ("legame")*, termine utilizzato generalmente per indicare il trasferimento di una forza tra l'armatura e il calcestruzzo; in particolare esso descrive il cambiamento di forza lungo una barra diviso per l'area nominale della superficie della barra sulla quale si manifesta la variazione stessa. Sebbene tale definizione sia alla base delle considerazioni attuali in tema di aderenza acciaio calcestruzzo, essa costituisce una grande semplificazione della realtà fisica. Il trasferimento di sforzi dall'acciaio al calcestruzzo è un fenomeno fisico molto complesso ed influenzato da diversi fattori, tra i quali per esempio, le caratteristiche della superficie della barra, la composizione chimico fisica della matrice di calcestruzzo, il ricoprimento dell'armatura stessa, eccetera; molti di questi verranno ripresi e trattati con dettaglio maggiore in seguito. Nonostante la forte dipendenza da diversi parametri locali, il legame di aderenza oggi viene tipicamente studiato ad un livello *macroscopico*. Tale approccio permette infatti di sviluppare una legge $\sigma - \varepsilon$ (tensioni – deformazioni) che mette in relazione le tensioni che si sviluppano all'interfaccia (*tensioni di aderenza* τ_b) con gli scorrimenti relativi tra la matrice di calcestruzzo e la barra di acciaio (*slip* s). Tale macro-legame non lineare deve quindi tenere in conto dell'influenza che i diversi parametri hanno sul trasferimento delle tensioni acciaio calcestruzzo, oltre che prendere in conto eventuali meccanismi locali di trasferimento, i quali influenzano a livello locale l'interazione tra armatura e matrice. Per quanto detto fino ad ora risulta definita pertanto l'espressione [1.1] seguente, facilmente derivabile dalla scrittura dell'equazione di equilibrio in direzione x del concio di [Figura 1]:

$$\tau_b = \frac{\Delta\sigma_s A_s}{\pi\phi l_b} \qquad [1.1]$$

dove $\Delta\sigma_s$ indica la variazione di tensione all'interno della barra nel tratto considerato, supposto di lunghezza l_b. A_s è l'area della sezione della barra d'armatura, avente diametro nominale pari a ϕ.

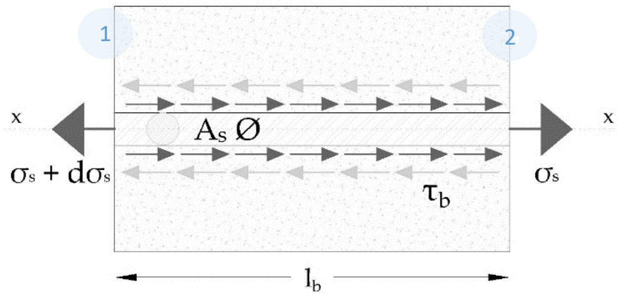


Figura 1: Equilibrio di un concio con armatura tesa e sviluppo tensioni di aderenza. Le tensioni in colore chiaro rappresentano l'effetto della barra sulla matrice di calcestruzzo, viceversa le tensioni in colore scuro rappresentano l'effetto del calcestruzzo sull'armatura.

La semplicità dell'equazione [1.1] potrebbe essere fuorviante: la valutazione delle tensioni di aderenza infatti è un aspetto molto delicato. Infatti, mentre esiste un accordo quasi generale sui parametri responsabili del meccanismo di aderenza, il peso che ciascuno riveste nell'influenzare tale legame risulta ancora argomento dibattuto nel mondo scientifico. Per comprendere l'influenza che ciascun fattore ha sulla legge $\tau_b - s$ si deve preliminarmente introdurre un *modello fisico* valido che sia in grado di cogliere tutti i meccanismi che avvengono all'interfaccia acciaio calcestruzzo. Tale modellazione deve essere al contempo in grado di fornire successivamente una legge analitica di facile impiego. Dopo aver compreso il modo in cui agisce l'aderenza si procederà alla presentazione del *modello teorico* oggi più utilizzato presente in letteratura scientifica. Queste considerazioni verranno svolte nei paragrafi successivi.

1. Modello fisico dell'aderenza

Il fenomeno di aderenza acciaio calcestruzzo trae la sua origine non da un unico meccanismo resistente, ma dalla compartecipazione di diversi meccanismi che possono attivarsi o affievolirsi a seconda del livello tensionale raggiunto. Per evidenziarli si immagini di realizzare una prova di pull-out, dalla quale si registrano i valori della forza F applicata all'armatura e gli scorrimenti relativi s. Inoltre, nota la forza nella barra è possibile, tramite l'equazione [1.1], ricavare il valore della tensione di aderenza supponendo che essa sia distribuita in modo uniforme sulla superficie $\phi\pi l_b$. Dalle prove sperimentali eseguite durante gli anni '70 e i primi anni '80 è emerso un comportamento ben definito del legame $\tau_b - s$ e la letteratura scientifica è in accordo nel suddividere in quattro fasi principali l'evoluzione dell'interazione tra calcestruzzo e barra in una prova di pull-out. Le fasi sono riassunte nella [Figura 2] e di seguito commentate.

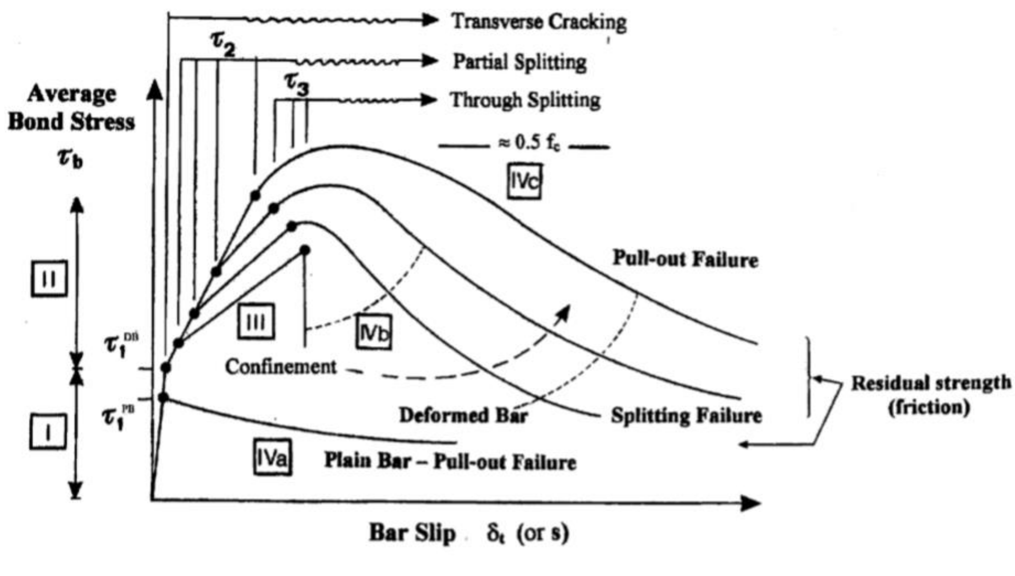


Figura 2: Legame costitutivo dell'aderenza ricavato da prove sperimentali di pull-out, proposto da Tassios nel 1979. PB = Plain Bar, (barre lisce); DB = Deformed Bar, (barre nervate); [Tratta da: "Bond of reinforcement in concrete, CEB-FIP Bullettin n.10, August 2000, pag. 4"]

- Fase I – Calcestruzzo non fessurato – Si evidenzia che per bassi valori del carico ($\tau < \tau_1 = 0.2 - 0.8\, f_{ct}$) la barra di armatura e il calcestruzzo saranno in condizione di *perfetta aderenza*: questo significa che non vi saranno scorrimenti relativi acciaio calcestruzzo e si formeranno stress (comportamento elastico) molto elevati in prossimità della nervatura, come mostrato in [Figura 5 (a)]. Nella realtà la [Figura 2] mostra degli scorrimenti relativi di piccola entità anche per tensioni di aderenza prossime allo zero. Essi sono dovuti alla modalità di misura dello scorrimento stesso; esso viene misurato rispetto ad una zona indisturbata di calcestruzzo ed è composto da due contributi: scorrimento relativo all'interfaccia e deformazione a taglio del calcestruzzo circostante. In questo modo anche se non si registrano scorrimenti relativi all'interfaccia, un piccolo spostamento relativo si verifica a causa della deformabilità a taglio della matrice circostante la barra, come mostrato in [Figura 3].

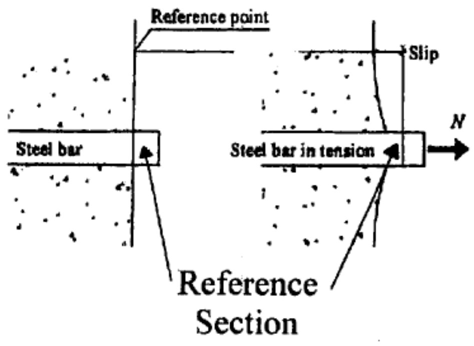


Figura 3: Convenzione seguita nella misurazione degli scorrimenti relativi per il tracciamento del grafico di [Figura 2]. In particolare, viene messo in evidenza il contributo della deformazione a taglio della matrice di calcestruzzo: essa è presente anche in assenza di scorrimenti relativi acciaio - cls; [Tratta da: "Bond of reinforcement in concrete, CEB-FIP Bullettin n.10, August 2000, pag. 4"]

In questa prima fase il legame tra acciaio e calcestruzzo è garantito principalmente dall'adesione chimica. L'adesione è un processo chimico-fisico che consiste nell'attrazione molecolare tra due differenti materiali, pertanto tale forza è di natura elettrostatica. Accanto all'adesione il legame acciaio calcestruzzo è garantito anche, in questa prima fase, dall'interazione all'interfaccia acciaio calcestruzzo dovuta alla micro-rugosità della barra. Queste tipologie di aderenza (adesione chimica e micro-rugosità) tuttavia giocano un ruolo giocano un ruolo molto modesto, come confermato dal comportamento di una barra liscia (Stage IV/a) di [Figura 2]: bassi valori di tensione sono infatti sufficienti a rompere il legame di adesione e permettere grandi scorrimenti relativi alla barra. Una tensione tangenziale residua del ramo (Stage IV/a) è dovuta all'aderenza per attrito che si manifesta durante lo scorrimento in presenza di pressioni trasversali. Tali pressioni che agiscono in direzione trasversale possono essere causate dai carichi, dal rigonfiamento o dal ritiro del calcestruzzo.

- Fase II – Inizio della fessurazione – Per valori della tensione superiori a τ_1 il meccanismo dell'adesione viene meno. Nel caso di barre ad aderenza migliorata, la nervatura genera una componente tensionale inclinata sul calcestruzzo, p^*, ortogonale alla direzione α di inclinazione della sagoma della nervatura [Figura 5 (b)]. La componente orizzontale di p^* promuove la formazione di *fessure trasversali* a partire dall'estremità di ogni nervatura come mostrato nella stessa figura. In corrispondenza di queste si ha lo sfilamento locale della barra rispetto al calcestruzzo, il quale risulta di entità modesta come emerge dalla [Figura 2]. In questa fase l'azione di incuneamento della nervatura rimane limitata e non si presentano fenomeni di splitting.

- Fase III – Avanzamento fessurazione – Per valori di tensione di aderenza più elevati $\tau > 1 \div 3\ f_{ct}$ oltre alla microfessurazione trasversale già descritta nella Fase II si formano delle *fessure longitudinali da spacco* (splitting cracks) che si diffondono molto rapidamente. Esse sono dovute al fatto che all'aumentare della forza nella barra cresce anche la componente verticale di p^* la quale sollecita un anello virtuale di calcestruzzo attorno alla nervatura con una pressione radiale interna via via crescente. Tale pressione induce uno stato di trazione circonferenziale il quale porta, data l'esigua resistenza a trazione della matrice, alla formazione di fessure radiali in ciascun anello. Da un punto di vista globale l'insieme delle fessure radiali in ciascun anello si traduce in una fessura longitudinale che corre nella direzione della barra, come mostrato in [Figura 4]:

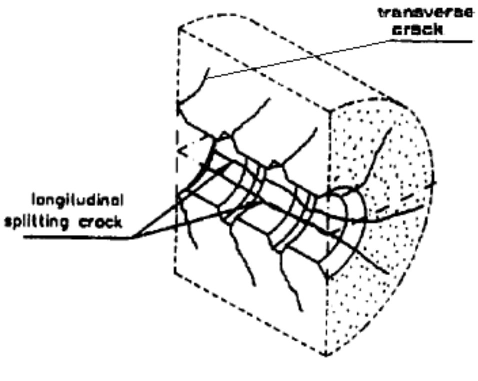


Figura 4: Fessure trasversali e longitudinali da spacco (splitting); [Tratta da: "Bond of reinforcement in concrete, CEB-FIP Bullettin n.10, August 2000, pag. 4"]

Tali fessure longitudinali si espandono radialmente all’aumentare del carico, anche grazie alla crescente azione di incuneamento del calcestruzzo disgregato che preme sulla nervatura. Risulta infatti evidente che per carichi via via maggiori il cuneo di calcestruzzo definito dall’angolo α^* tenda a frantumarsi, facendo venir meno la continuità con la matrice di calcestruzzo circostante. In questo modo le forze inclinate che la nervatura prima trasmetteva sul piano α, vengono ora trasmesse ortogonalmente al piano α^*, determinando un incremento della componente verticale della forza p^{**} trasmessa al calcestruzzo [Figura 5 (b)]. Conseguentemente si ha un incremento delle tensioni circonferenziali di trazione negli anelli di calcestruzzo, la quale porta alla rapida diffusione delle predette fessure da spacco. Si evidenzia come un ruolo non trascurabile sul legame di aderenza sia svolto dal confinamento del calcestruzzo, per esempio, attraverso la presenza di staffe. La componente verticale della forza p^{**} viene infatti contrastata dalla resistenza offerta dalla staffatura circostante; conseguentemente il calcestruzzo che circonda la barra esercita un’azione di confinamento su di essa e l’aderenza viene in questo modo garantita dall’interlocking inerti calcestruzzo nervatura e dalle bielle compresse che contrastano sui denti delle nervature stesse e sul calcestruzzo non fessurato circostante. L’entità di tale azione di confinamento influenza il tipo di rottura a cui si sopraggiunge: nel caso di staffatura scarsa o assente la Fase III termina non appena una fessura di splitting, propagandosi radialmente, raggiunge la superficie esterna della membratura (τ_3); successivamente si verifica una rottura più o meno improvvisa a seconda del grado di confinamento trasversale, seguendo circa il comportamento (Stage IV/b, rottura per splitting). Nel caso in cui sia presente un ricoprimento elevato e un’alta percentuale di armatura di confinamento, la rottura per splitting è evitata proprio grazie a tale azione di confinamento; in questo caso la fessurazione rimarrà confinata nelle zone attorno alla barra e la crisi sopraggiungerà per pull-out (Stage IV/c). Nel caso di medie percentuali di staffatura presente si verifica un meccanismo di rottura intermedio definito in letteratura come “splitting-induced pull-out failure”: la crisi per pull-out sopraggiunge dopo che le fessura di splitting sono propagate (curve comprese tra Stage IV/b e IV/c).

- Fase IV/a – Rottura barre lisce – Questa fase, presente nel caso in cui la barra sia liscia, si verifica immediatamente dopo il raggiungimento della massima adesione chimica acciaio calcestruzzo. In questo caso durante lo sfilamento della barra l’unico meccanismo presente è quello attritivo, il quale sarà profondamente influenzato da pressioni trasversali. La scabrezza della superficie della barra liscia favorisce l'attrito, rendendo più complesso lo sfilamento dell'armatura; viceversa il movimento stesso dell'acciaio sull'interfaccia di calcestruzzo riduce le asperità di quest'ultimo, influenzando negativamente il legame di aderenza.

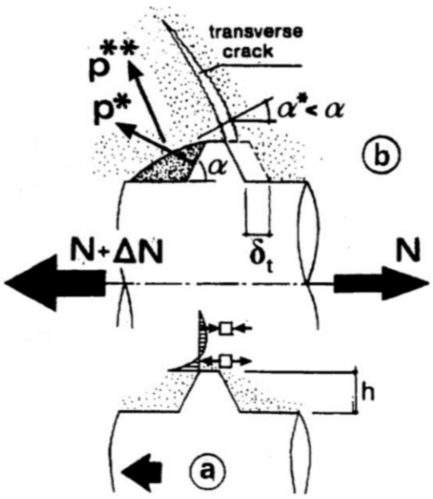


Figura 5: (a) – Campo tensionale elastico generato nella matrice di calcestruzzo nell'intorno della nervatura; (b) – Forze di compressione trasmesse alla matrice di calcestruzzo prima (*) e dopo (**) la rottura dei cunei di calcestruzzo definiti attraverso l'angolo α*; [Tratta da: "Bond of reinforcement in concrete, CEB-FIP Bullettin n.10, August 2000, pag. 5"]

- Fase IV/b – Rottura barre aderenza migliorata, scarso confinamento – Come già precedentemente esposto in questo caso potrebbe formarsi una rottura da spacco affiorante in superficie, che corre longitudinalmente nella direzione della barra. Raggiunto il picco (in alcuni casi si può arrivare a $0.3 \div 0.5\ f_c$), la tensione di aderenza decresce mantenendo comunque valori piuttosto elevati ($0.15 \div 0.3\ f_c$) e scorrimenti relativi incompatibili con la funzione di esercizio. Sulla coda il legame $\tau_b - s$ è diventato puramente attritivo.

- Fase IV/c – Rottura barre aderenza migliorata, elevato confinamento – In questo caso le rotture da spacco risulteranno estremamente limitate alle zone circostanti la nervatura e la crisi avverrà per pull-out. La resistenza delle code risulterà influenzata dall'attrito tra le mensole di calcestruzzo tranciate tra le nervature stesse e la matrice circostante indisturbata.

Quindi in definitiva è possibile riassumere tre differenti comportamenti a rottura nel caso di barre ad aderenza migliorata a seconda del grado di confinamento presente sull'armatura, come mostrato in [Figura 6] e brevemente descritto:

1. Crisi per splitting innescata dalla completa perdita del copriferro o da uno scarso confinamento: in questo caso gli scorrimenti relativi avvengono praticamente in assenza di danneggiamento dei denti di calcestruzzo interposti tra le nervature.

2. Crisi per pull-out indotta da splitting in presenza di modesto copriferro o confinamento: presenza di medie fessure longitudinali con parziale tranciamento dei risalti di calcestruzzo tra le nervature.

3. Crisi per pull-out in presenza di copriferro o confinamento adeguato: gli scorrimenti avvengono dopo il completo tranciamento dei denti di calcestruzzo

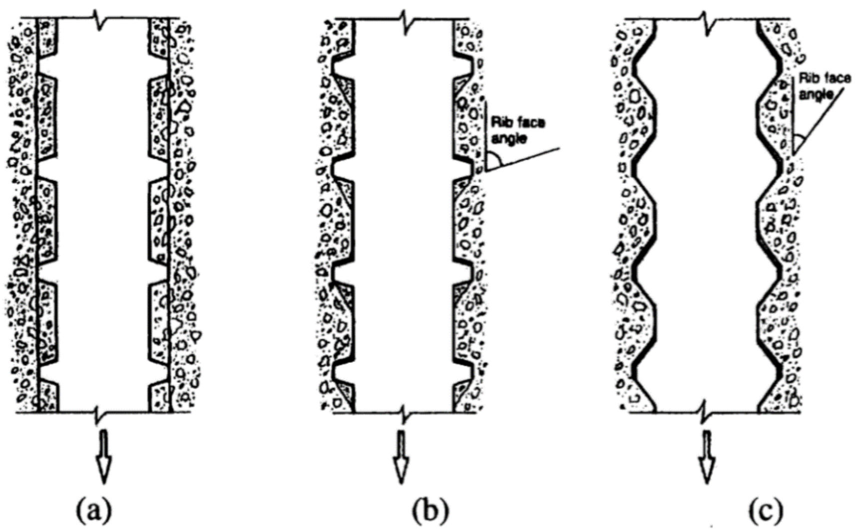


Figura 6: Modalità di rottura del legame di aderenza acciaio calcestruzzo. (a) – Pull-out con rottura completa delle mensole di calcestruzzo; (b) – Crisi intermedia tra splitting e pull-out; (c) – Crisi per splitting; [Tratta da: “Bond of reinforcement in concrete, CEB-FIP Bullettin n.10, August 2000, pag. 6”]

2. Parametri che influenzano il legame di aderenza

Come già accennato nel precedente paragrafo il legame fisico di aderenza tra l’acciaio e il calcestruzzo risulta estremamente complesso da indagare e da controllare pienamente in virtù della sua dipendenza da numerosi fattori. Di seguito si vogliono brevemente descrivere quali siano i parametri che maggiormente ne influenzano il comportamento, come evidenziato sperimentalmente. Tra i parametri più rilevanti vi sono sicuramente le caratteristiche fisico-meccaniche dell’armatura e del calcestruzzo circostante, oltre che il livello tensionale raggiunto da entrambi. Non di minore importanza sono altri parametri tra i quali, per esempio, lo spessore di calcestruzzo del copriferro, la spaziatura tra le barre e la direzione della colata di getto rispetto all’orientamento della barra stessa. Come evidenziato in [*Bazant Z.P., Sener S.: “Size effects in pull out tests”, ACI Materials Journal, pagg. 347-351,1988*] sussiste altresì la dipendenza del legame di aderenza dal diametro dell’armatura, in particolare per quanto riguarda le barre lisce; non sono particolarmente evidenti effetti di scala per barre ad aderenza migliorata. Si commentano in dettaglio i principali risultati:

1. Qualità del calcestruzzo e stato tensionale

Con il termine “qualità di calcestruzzo” non si vuole soltanto fare riferimento alla mera resistenza a trazione f_{ct} del materiale ma bensì si intendono anche tutti quegli aspetti legati alle modalità del getto di calcestruzzo, i quali rivesto spesso un ruolo di maggiore importanza. A corredo di quanto detto si rimanda alla [Figura 7], la quale si riferisce a prove di pull-out eseguite su barre in differenti posizioni rispetto alla direzione del getto.

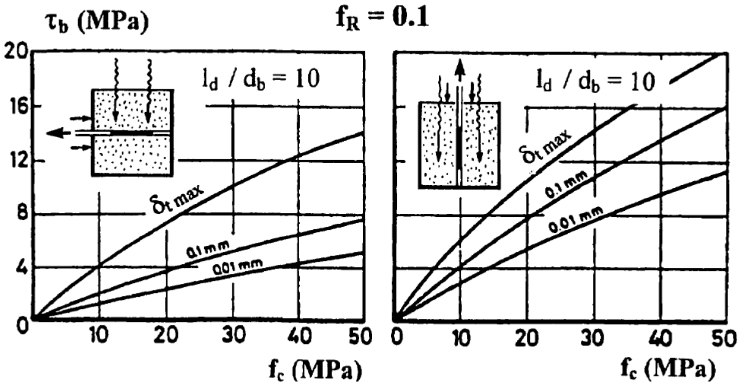


Figura 7: Prove di pull-out eseguite per differenti direzioni del getto di calcestruzzo in riferimento alla posizione della barra (Martin e Noakowski, 1981: bond stress versus concrete strength for different slip values at the bar unloaded end); [Tratta da: “Bond of reinforcement in concrete, CEB-FIP Bullettin n.10, August 2000, pag. 10”]

Le condizioni di migliore aderenza si ottengono per barre orizzontalmente disposte rispetto alla direzione del getto e poste vicino alla parte inferiore del cassero, oppure per barre verticalmente disposte e caricate contro la direzione del getto. In entrambi questi casi infatti le nervature della barra si troveranno a contrastare una matrice di calcestruzzo dalle migliori caratteristiche (grado di porosità ridotto). Dall’esame della [Figura 7] si evidenzia anche il fatto che sul legame di aderenza è molto più influente la posizione della barra rispetto alla classe del calcestruzzo: si noti che per $f_c = 30\ Mpa$ e scorrimenti di $\delta_t = 0.01\ mm$, se la barra è disposta in verticale e sollecitata contrariamente alla direzione del getto è in grado di sviluppare tensioni di aderenza più che doppie rispetto al caso di barra disposta in orizzontale.

Anche lo stato tensionale della matrice circostante la barra è di significativa rilevanza. Si evidenzia come la presenza di stress di trazione produca un decremento delle prestazioni di aderenza, in quanto tale stato tensionale favorisce la rottura per splitting. Viceversa, in generale, stati tensionali di compressione nell'intorno dell'interfaccia acciaio calcestruzzo risulterebbero benefici al legame di aderenza. In particolare, si possono distinguere due tipologie di confinamento: attivo e passivo. Si parla di *confinamento attivo* quando esso esplica il suo effetto indipendentemente dal grado di scorrimento o *slip* già subito dalla armatura: esso è tipico delle zone di appoggio o di continuità dei nodi trave-colonna). Tale tipologia di confinamento risulta sempre benefica e vantaggiosa nei riguardi dell'aderenza. Diverso è il caso del *confinamento passivo*, ossia quel meccanismo promosso dalla presenza di un adeguato copriferro e dalle staffe. In questo caso le tensioni di compressione si originano dalla dilatazione del calcestruzzo, a seguito della formazione delle prime fessure di splitting e dei primi scorrimenti.

2. Tipologia barre e stato tensionale

Di maggior impiego risultano oggi le cosiddette "*barre ad aderenza migliorata*" rispetto alle ormai desuete "*barre lisce*". Lo stesso nome suggerisce la profonda influenza che hanno sul legame di aderenza le nervature, ossia quelle particolari costolature delle barre. In particolare, il giudizio sull'efficacia di una nervatura può essere racchiuso in un unico parametro che riassume la geometria della stessa ed è definito "*bond index*":

$$f_r = \frac{A_r}{\pi \cdot d_b \cdot s_r} \qquad [1.2]$$

Dove A_r è l'area della proiezione della singola costolatura sulla sezione della barra, d_b il diametro nominale dell'armatura e s_r l'interasse tra due nervature contigue. Un buon compromesso (buone performance del legame allo SLU e SLE, requisiti fabbricazione industriale, ecc.…) viene raggiunto per valori f_r compresi tra $0.05 - 0.10$. Secondo l'esperienza condotta da [*Rhem G.: "Evaluation Criteria for high-bond rebars (in German)", Festschrift Rüsch, 1969*] vi sarebbe una dipendenza lineare dell'aderenza dal "*bond index*", come mostrato in [Figura 8]. Tale risultato non sarebbe però in grado di descrivere in modo corretto il comportamento di travi in calcestruzzo debolmente armate: in questi casi l'area della costolatura non influenzerebbe il meccanismo di aderenza, non avendo alcun effetto sulla capacità rotazionale delle cerniere plastiche.

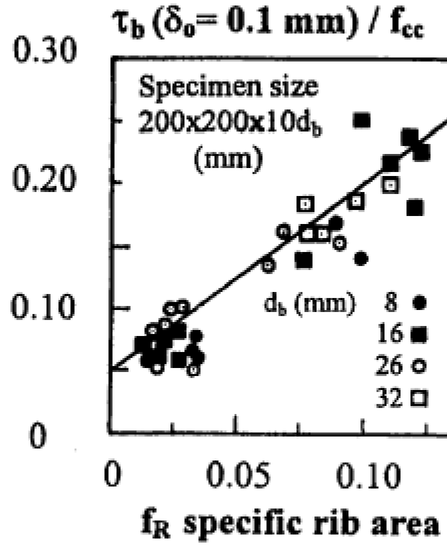


Figura 8: Influenza del "bond index" sulla tensione di aderenza (Rhems,1969); [Tratta da: "Bond of reinforcement in concrete, CEB-FIP Bullettin n.10, August 2000, pag. 10"]

Per quanto riguarda l'influenza della tensione nell'armatura si può dire che essa sia praticamente trascurabile fintanto che l'acciaio non risulti snervato. Nel momento in cui si raggiunge e si supera il valore f_y si registra un brusco deterioramento del legame di aderenza. L'influenza dello snervamento sul legame non è ancora completamente compresa, anche se è possibile formulare una giustificazione teorica a tale decadimento; nel momento in cui la barra tesa raggiunge il suo limite di snervamento subisce una contrazione, la quale determina una minor pressione sui denti di calcestruzzo determinando una diminuzione delle pressioni radiali e quindi una perdita della forza resistente di attrito. Inoltre, la contrazione trasversale della barra sembrerebbe diminuire l'area proiettata A_r con la conseguente diminuzione di f_r. In certa misura il Model Code 90 tiene conto dell'influenza dello snervamento dell'armatura in prossimità dell'apertura della fessura, proponendo una legge *stress-slip* variabile lungo la lunghezza di trasferimento, come meglio evidenziato nel paragrafo successivo. Infine, si evidenzia come non soltanto la non linearità dell'acciaio possa influenzare il legame di aderenza ma anche il comportamento non lineare del calcestruzzo (softening) riveste un ruolo non trascurabile. Esso è dovuto principalmente allo stato fessurativo che si genera nelle zone circostanti alla barra di armatura.

3. Effetti ambientali

Alcuni parametri legati a fattori chimico-fisici (ossido-riduzioni) oppure alla temperatura possono sensibilmente migliorare o degradare il legame di aderenza. Brevemente si riportano i principali:

- Ossidazione dell'armatura (ruggine): lo strato di ossido che riveste la barra potrebbe sviluppare un legame di aderenza migliore rispetto a barre "nuove" in quanto inibitore di future corrosioni.

- Corrosione barre: essa determina una diminuzione delle tensioni di aderenza all'interfaccia a causa

3. Modello teorico dell'aderenza

La formulazione di una legge analitica del legame di aderenza acciaio calcestruzzo è argomento molto diffuso nella letteratura scientifica anche se il legame oggi più utilizzato, sia per il dettaglio con cui sono state eseguite le prove di calibrazione sia per l'elevata variabilità di parametri indagati, risulta essere quello proposto da *Bertero – Eligehausen – Popov*. Analogo ad esso è il legame riportato nel Model Code 90 e di seguito introdotto per un carico di tipo monotono [Figura 9].

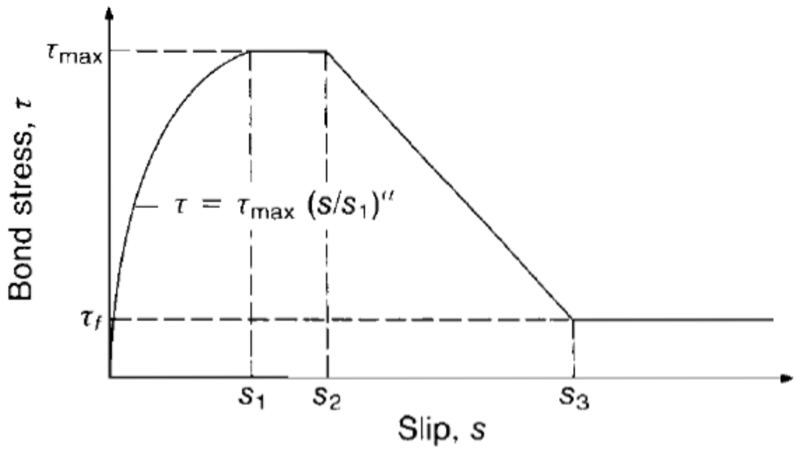


Figura 9: Legame analitico dell'aderenza acciaio calcestruzzo per un carico monotono; [Tratta da: "Model Code 90, CEB-FIP, Thomas Telford, pag. 83"]

L'espressione del bond stress può essere formulata in funzione dello scorrimento ed esplicitata come una funzione definita a tratti, nel seguente modo:

$$\tau = \tau_{max} \cdot \left(\frac{s}{s_1}\right)^{\alpha} \qquad \text{per} \qquad 0 \leq s \leq s_1$$

$$\tau = \tau_{max} \qquad \text{per} \qquad s_1 < s \leq s_2 \qquad [1.3]$$

$$\tau = \tau_{max} - \left(\tau_{max} - \tau_f\right) \cdot \left(\frac{s - s_2}{s_3 - s_2}\right) \qquad \text{per} \qquad s_2 < s \leq s_3$$

$$\tau = \tau_f \qquad \text{per} \qquad s_3 < s$$

In cui i parametri s_1, s_2, s_3, α, τ_{max} e τ_f sono definiti in funzione delle condizioni di aderenza e in funzione della tipologia di confinamento offerto dalla matrice di calcestruzzo circostante. Di seguito si riportano i parametri relativi alla curva bond – slip relativa ad una barra nervata.

	Colonna 2	Colonna 3	Colonna 4	Colonna 5
	Calcestruzzo NON confinato*		**Calcestruzzo confinato****	
	Buone condizioni aderenza	Altre condizioni aderenza	Buone condizioni aderenza	Altre condizioni aderenza
s_1	0.6 [mm]	0.6 [mm]	1.0 [mm]	1.0 [mm]
s_2	0.6 [mm]	0.6 [mm]	3.0 [mm]	3.0 [mm]
s_3	1.0 [mm]	2.5 [mm]	Clear rib spacing	Clear rib spacing
α	0.4 [−]	0.4 [−]	0.4 [−]	0.4 [−]
τ_{max}	$2.0 \cdot \sqrt{f_{ck}}$	$1.0 \cdot \sqrt{f_{ck}}$	$2.5 \cdot \sqrt{f_{ck}}$	$1.25 \cdot \sqrt{f_{ck}}$
τ_f	$0.15 \cdot \tau_{max}$	$0.15 \cdot \tau_{max}$	$0.40 \cdot \tau_{max}$	$0.40 \cdot \tau_{max}$

Tabella 1: Valori dei parametri del legame di aderenza secondo il Model Code 90 per barre ad aderenza migliorata [(*) Rottura per splitting – (**) Rottura a taglio del calcestruzzo tra le nervature]

I valori riportati in [Tabella 1], colonna 2 e 3, sono validi per uno spessore del copriferro pari a $c = 1\phi_s$ ed una quantità di armatura trasversale pari a:

$$A_{st,min} = 0.25 \cdot n \cdot A_s$$

dove:

- A_{st} rappresenta l’area delle staffe (2 bracci) distribuite su una lunghezza pari a quella di ancoraggio;
- n rappresenta il numero di barre racchiuso dalle staffe;
- A_s rappresenta l’area di una barra;

Per quanto riguarda invece la colonna 4 e 5, i risultati di [Tabella 1] sono validi nel caso in cui il calcestruzzo sia ben confinato ossia per uno spessore del copriferro pari a $c = 5\phi_s$ e interasse tra le barre maggiore o uguale a $10\phi_s$ oppure in presenza di armatura trasversale in quantità pari a $A_{st} = n \cdot A_s$ oppure in presenza di pressioni trasversali maggiori o uguali a 7.5 MPa. Nel caso in cui uno di questi requisiti non venga soddisfatto i valori dei parametri si dovranno ricavare interpolando tra i valori relativi al calcestruzzo confinato e quelli relativi al calcestruzzo non confinato.

Nonostante il Model Code 2010 segua la stessa impostazione nella formulazione del modello analitico di aderenza (stesse equazioni), i parametri da utilizzare variano rispetto a quelli indicati dal Model Code 90, come mostrato nella tabella

	1	2	3	4	5	6
	Pull-out (PO)		**Splitting (SP)**			
	$\varepsilon_s \leq \varepsilon_{s,y}$		$\varepsilon_s \leq \varepsilon_{s,y}$			
	Buone condizioni aderenza	Altre condizioni aderenza	Buone condizioni aderenza		Altre condizioni aderenza	
			Non confinato	Presenza di staffe	Non confinato	Presenza di staffe
s_1	1.0 [mm]	1.8 [mm]	$s(\tau_{max})$	$s(\tau_{max})$	$s(\tau_{max})$	$s(\tau_{max})$
s_2	2.0 [mm]	3.6 [mm]	s_1	s_1	s_1	s_1
s_3	c_{clear}^*	c_{clear}^*	$1.2 \cdot s_1$	$0.5 \cdot c_{clear}$	$1.2 \cdot s_1$	$0.5 \cdot c_{clear}$
α	0.4 [−]	0.4 [−]	0.4 [−]	0.4 [−]	0.4 [−]	0.4 [−]
τ_{max}	$2.5 \cdot \sqrt{f_{cm}}$	$1.25 \cdot \sqrt{f_{cm}}$	$7 \cdot \xi$	$8 \cdot \xi$	$5 \cdot \xi$	$5.5 \cdot \xi$
τ_f	$0.4 \cdot \tau_{max}$	$0.4 \cdot \tau_{max}$	0	$0.4 \cdot \tau_{max}$	0	$0.4 \cdot \tau_{max}$

Tabella 2: Valori dei parametri del legame di aderenza secondo il Model Code 2010 per barre ad aderenza migliorata. Il parametro ξ risulta essere uguale a $(f_{cm}/25)^{0.25}$. (*) c_{clear} rappresenta la distanza tra le nervature della barra ad aderenza migliorata.

Il Model Code 2010 inoltre ribadisce l'influenza di alcuni parametri sul legame di aderenza acciaio calcestruzzo (snervamento dell'acciaio, pressioni trasversali, fessurazione attorno all'armatura e presenza di eventuali cicli di carico), come già evidenziato in parte nel paragrafo precedente. Per ciascuno dei casi sopra citati vengono forniti dei coefficenti correttivi da applicare alle curve $\tau_b - slip$.

I risultati esposti in [Tabella 2] nella colonna 1 e 2, le quali si riferiscono alla crisi per pull out, sono validi per le seguenti condizioni: copriferro di almeno 5ϕ e distanza tra le barre di almeno 10ϕ. Per quanto riguarda i parametri relativi al sopraggiungimento della rottura per splitting, il Model Code 2010 considera opportune condizioni e ipotesi semplificate al fine di garantirne l'applicabilità.

Capitolo 2.

Meccanismo di fessurazione nel cemento armato. Formulazioni analitiche e normative

Il conglomerato cementizio armato, comunemente noto come cemento armato, è stato il materiale che ha rivoluzionato, più fra tutti, lo sviluppo dell'edilizia a partire dalla fine del XIX secolo. La sua grande diffusione è dovuta sostanzialmente alla perfetta collaborazione che si viene a creare tra i due materiali costituenti, il calcestruzzo e l'acciaio, se fatti opportunamente lavorare insieme. Infatti:

- Tra l'acciaio e il calcestruzzo si manifesta un legame di aderenza (vedere il Capitolo 1) che permette il trasferimento delle tensioni dalla matrice cementizia all'armatura. L'acciaio è preposto all'assorbimento degli sforzi di trazione, viceversa il calcestruzzo sopporta le tensioni di compressione.

- I coefficenti di espansine termica di acciaio e calcestruzzo sono simili. Inoltre, da un punto di vista chimico la matrice cementizia, creando un ambiente basico, protegge l'armatura dalla corrosione.

Alle qualità positive, in termini di comportamento strutturale, di questo materiale occorre però ricordare il suo principale difetto, ossia la scarsa resistenza a trazione. Per questo motivo una delle problematiche più insidiose del cemento armato è proprio la fessurazione. Scopo di tale Tesi è infatti quello di indagare il comportamento di un elemento di calcestruzzo armato, sollecitato da uno stato piano di tensione, nei confronti della fessurazione. Nel corso degli anni diversi studi hanno permesso di individuare delle leggi analitiche, suffragate da test di calibrazione sperimentali, che descrivono il fenomeno della fessurazione in elementi tesi di cemento armato; in particolare le espressioni che si sono ottenute possono prevedere la distanza alla quale si formeranno le fessure e l'apertura delle stesse. Le diverse normative forniscono diverse formulazioni le quali vengono riportate nei seguenti paragrafi e fanno riferimento sia ad un campo di sollecitazione monodimensionale (modello "a tirante") che ad un campo di sollecitazione bidimensionale (oggetto del seguente studio).

1. Approccio analitico del modello a tirante

Prima di riportare in dettaglio le diverse formulazioni tecnico-pratiche seguite dalle diverse normative, si intende esporre la teoria matematica che descrive il problema della fessurazione nel tirante monodimensionale e la distanza di trasmissione, ossia la spaziatura minima alla quale possono formarsi due fessure contigue. Si seguiranno due diverse ipotesi sulla distribuzione delle tensioni tangenziali; in particolare il primo modello considera che le τ di aderenza siano costanti sull'interfaccia acciaio-calcestruzzo, mentre il secondo modello – più complesso – si basa sulla soluzione dell'equazione differenziale che governa il problema monodimensionale. Intuitivamente si evince che il secondo metodo, descrivendo in modo più realistico il problema, dia dei risultati più attendibili e veritieri. Di seguito si percorreranno le due strade pocanzi menzionate.

1. Ipotesi (a): distribuzione τ costante

Come già osservato in precedenza, supponendo le tensioni di aderenza scambiate tra la matrice di calcestruzzo e l'acciaio costanti, è possibile ricavare una stima circa la distanza minima alla quale si potrà formare una nuova fessura in un elemento monodimensionale teso. A tale scopo si consideri nuovamente la [Figura 1] immaginando di assumere che:

- nella sezione-1 lo sforzo sia applicato esclusivamente all'armatura e sia pari a $\sigma_s + d\sigma_s$ per una forza complessiva esercitata sulla barra F_s pari a $A_s \cdot (\sigma_s + d\sigma_s)$;
- La lunghezza l_b rappresenti esattamente la distanza minima alla quale si può formare una nuova fessure, ossia la distanza per cui nel calcestruzzo si passi da una tensione nulla (sezione-1) ad una tensione pari a f_{ctm} (sezione-2);

Da quanto sopra riportato si desume che la perdita di forza nella barra di acciaio risulti uguali alla forza trasferita al calcestruzzo ed in grado di fessurare la sezione-2 ossia:

$$[A_s \cdot (\sigma_s + d\sigma_s) - A_s \cdot \sigma_s] = A_c \cdot f_{ctm}$$

$$A_s \cdot d\sigma_s = A_c \cdot f_{ctm}$$

sostituendo nell'espressione ottenuta l'equazione [1.1] si ricava:

$$A_s \cdot \left(\frac{\tau_b \cdot \pi \cdot \phi \cdot l_b}{A_s}\right) = A_c \cdot f_{ctm}$$

da cui è possibile ricavare l_b che rappresenta, in virtù delle ipotesi assunte, la distanza minima tra due successive fessure:

$$l_b = \frac{A_c \cdot f_{ctm}}{\tau_b \cdot \pi \cdot \phi}$$

ed indicando con k il rapporto f_{ctm}/τ_b e con ρ la percentuale di armatura ossia A_s/A_c si può riscrivere il tutto come:

$$s_{r,min} = \frac{1}{4} \cdot k \cdot \frac{\phi}{\rho_{eff}} \qquad [2.1]$$

L'espressione [2.1] rappresenta la distanza minima tra due possibili fessure e quindi si osserva come essa non sia altro che la definizione della *lunghezza di trasferimento*. Tenendo in mente tali risultati si procede allo studio più approfondito dei modelli di fessurazione in campo monodimensionale.

2. Ipotesi (b): soluzione dell'equazione differenziale

Il problema monodimensionale può essere studiato anche da un punto di vista analitico, ottenendo un'espressione più accurata rispetto alla [2.1] per la stima della lunghezza di trasferimento l_b. In particolare, si assuma che lo scorrimento s tra acciaio e calcestruzzo sia esprimibile come:

$$s(x) = u_s(x) - u_c(x)$$

Dove $u_s(x)$ e $u_c(x)$ sono rispettivamente gli spostamenti dell'acciaio e del calcestruzzo rispetto ad un sistema di riferimento avente la direzione x coassiale alla barra di acciaio. Mediante una semplice operazione di derivazione, e ricordando le equazioni cinematiche che legano il campo di spostamenti con il campo deformativo, si ricava:

$$\frac{\boldsymbol{ds(x)}}{\boldsymbol{dx}} = \frac{\boldsymbol{du_s(x)}}{\boldsymbol{dx}} - \frac{\boldsymbol{du_{c(x)}}}{\boldsymbol{dx}} = \boldsymbol{\varepsilon_s(x) - \varepsilon_c(x)} \qquad [\mathbf{2.2}]$$

Inoltre, dall'equilibrio di un concio infinitesimo (rivedere il Capitolo 1 – pag.13), si ottiene la definizione della tensione di aderenza nella sezione x, ossia:

$$\tau(x) = \frac{\phi}{4} \cdot \frac{d\sigma_s(x)}{dx} \qquad [2.3]$$

dove σ_s indica la tensione nella barra di acciaio nella sezione x. Infine, occorre considerare che, sezione per sezione, la risultante complessiva nell'acciaio e nel calcestruzzo, risulta essere sempre pari a N_0 ossia pari allo sforzo normale con cui viene tesa l'armatura; quindi:

$$A_s \cdot \sigma_s(x) + A_c \cdot \sigma_c(x) = N_0 \qquad [2.4]$$

Combinando le equazioni [2.2], [2.3] e [2.4] e introducendo la legge di aderenza $\tau - s$ proposta dal Model Code 2010, si ottiene un'equazione differenziale di second'ordine non lineare risolubile analiticamente. Infatti, assumendo un comportamento elastico lineare dell'acciaio e del calcestruzzo, ossia:

$$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s$$

$$\sigma_c = E_c \cdot \varepsilon_c$$

sostituendo tali espressioni nella [2.2], sfruttando la [2.4] e indicando con n il coefficiente di omogeneizzazione rispetto al calcestruzzo, si ha:

$$\frac{ds(x)}{dx} = \frac{\sigma_s(x)}{E_s} - \frac{\sigma_c(x)}{E_c} = \frac{\sigma_s(x)}{E_s} \cdot [1 + n \cdot \rho] - \frac{N_0}{E_c A_c}$$

Derivando ulteriormente e sostituendo la [2.3] si ottiene:

$$\frac{d^2 s(x)}{dx^2} = \frac{4 \cdot \tau(s(x))}{\phi \cdot E_s} \cdot [1 + n \cdot \rho]$$

Introducendo la legge di aderenza (per il tratto $s \leq s_1$) si ottiene l'espressione finale dell'equazione differenziale:

$$\frac{d^2 s(x)}{dx^2} = \beta \cdot s(x)^\alpha \qquad [2.5]$$

dove β è un coefficiente funzione dei parametri de materiali e vale:

$$\beta = \frac{4 \cdot [1 + n \cdot \rho] \cdot \tau_{max}}{\phi \cdot E_s \cdot s_1^\alpha}$$

Per poter esplicitare l'integrale generale della [2.5] risulta necessario formulare due condizioni al contorno tali da rendere il problema di Cauchy ben posto. Per prima cosa si osserva che la diminuzione delle tensioni di trazione nella barra di armatura corrisponde all' aumento delle tensioni di trazione nella matrice di calcestruzzo; pertanto a mano a mano che la deformazione dell'acciaio diminuisce, quella nel calcestruzzo aumenta, fino al punto denominato O in cui le due deformazioni raggiungono lo stesso valore (sempre nell'ipotesi che il tirante abbia una lunghezza sufficiente): tale punto si assume come origine del sistema di riferimento (vedere la [Figura 10]), pertanto si deduce, ricordando la [2.2] che:

$$\left.\frac{ds(x)}{dx}\right|_{x=0} = 0$$

dove con il simbolo ' si è indicata l'operazione di derivazione rispetto alla variabile x. Inoltre, poiché le tensioni non subiscono ulteriori variazioni raggiunto il punto O, si comprende come esso rappresenti anche il primo punto del tirante in cui le tensioni tangenziali di aderenza sono nulle e quindi gli scorrimenti sono nulli, ossia:

$$s(x)|_{x=0} = 0$$

In questo modo si sono determinate le due condizioni al contorno che permettono di risolvere il problema differenziale, che può essere in definitiva formulato come di seguito:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 s(x)}{dx^2} = \beta \cdot s(x)^\alpha \\ \dfrac{ds(x)}{dx} = 0 \quad\quad x = 0 \\ s(x) = 0 \quad\quad x = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Di seguito si riportano i risultati grafici qualitativi riportati in [Figura 10]:

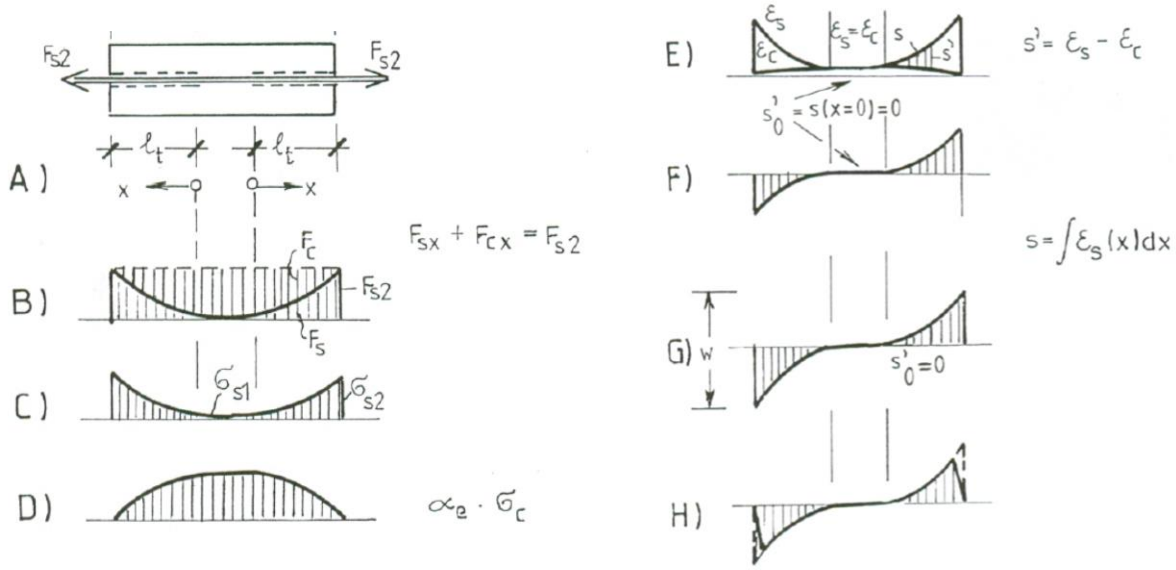


Figura 10: Risultati qualitativi relativi alla fase di formazione delle fessure; (A): sistema di riferimento; (B): forza nell'acciaio e nel calcestruzzo; (C): tensione nell'acciaio; (D): tensione nel calcestruzzo; (E): deformazioni; (F): derivata prima dello scorrimento; (G): scorrimento; (H): tensione di aderenza; [Tratta da: "Structural Concrete – Textbook on behaviour, design and performnce , CEB-FIP, fib Bulletin n. 52, pag. 105"]

La soluzione del sistema [2.6] si ricava moltiplicando ambo i membri dell'equazione [2.5] per $ds(x)/dx$ e successivamente integrando per x che va da 0 ad una generica sezione z, ottenendo:

$$\left(\frac{ds(x)}{dx}\right)^2 = 2\beta \cdot \int_0^z s(x)^\alpha \cdot \frac{ds(x)}{dx} dx$$

la quale, dopo aver calcolato e valutato l'integrale porta alla seguente formulazione:

$$\frac{ds(x)}{dx} = \left(s(x)\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \cdot \left(\frac{2\beta}{1+\alpha}\right)^{1/2}$$

In questo modo si è trasformato il problema di partenza (equazione del secondo ordine non lineare) in un problema del primo ordine non lineare, risolubile tramite la tecnica di separazione delle variabili. Procedendo in tal senso si isola a primo membro l'incognita $s(x)$ e la sua derivata procedendo ad una nuova integrazione per x che va da 0 ad una generica sezione z; eseguendo delle semplici manipolazioni algebriche è possibile ottenere l'espressione finale dello scorrimento:

$$s(x) = \left\{\frac{(1-\alpha)^2 \cdot (1+n\rho) \cdot \tau_{max} \cdot 2}{\phi \cdot E_s \cdot s_1^{\alpha} \cdot (1+\alpha)} \cdot x^2\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Nota l'espressione analitica dello scorrimento è possibile, sfruttando il legame di aderenza $\tau - s$, valutare la tensione di aderenza $\tau_b(x) = f[s(x)]$ e nota quest'ultima, attraverso l'espressione [2.3] ricavare la tensione nell'armatura:

$$\sigma_s(x) = \sigma_{s_1} + K\left\{\frac{x^{1+\alpha}}{\phi \cdot s_{!}^{\alpha}}\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad [2.7]$$

dove σ_{s_1} rappresenta la tensione di trazione applicata al tirante una volta avvenuta la diffusione (si veda la [Figura 10]) e K è una costante moltiplicativa espressa da:

$$K = \frac{4(1-\alpha)}{(1+\alpha)} \cdot \tau_{max} \cdot \left\{\frac{2(1-\alpha)^2 \cdot (1+n\rho) \cdot \tau_{max}}{E_s(1+\alpha)}\right\}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

Per valutare la lunghezza di trasmissione occorre ricordare che a partire dall'origine del sistema di riferimento si ha l'uguaglianza delle deformazioni (della matrice di calcestruzzo e della barra di acciaio) pertanto vale la seguente relazione, facilmente dimostrabile:

$$\sigma_{s_1} = n \cdot \sigma_{c_1}$$

In condizioni di avvenuta diffusione delle τ è nota la tensione in O e quindi si può applicare in modo inverso l'espressione [2.7] ricavando il valore di x che rappresenta quindi la lunghezza di trasmissione ricercata. Quindi vale la seguente uguaglianza, indicando con σ_{s_2} la tensione nella sezione di estremità:

$$\sigma_{s_2} = \sigma_{s_1} + K\left\{\frac{l_{tr}^{1+\alpha}}{\phi \cdot s_1^{\alpha}}\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

da cui, sfruttando l'uguaglianza:

$$\sigma_{s_1} = \frac{\sigma_{s_2} n\rho}{1 + n\rho}$$

si ricava l'espressione finale della lunghezza di trasmissione:

$$l_{tr} = \left\{\frac{\sigma_{s_2}}{(1+n\rho)K} \cdot [\phi \cdot s_1^{\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$$

2. Approccio normativo del modello a tirante

In questo paragrafo si intendono riassumere le espressioni per il calcolo della distanza tra le fessure proposte dalle diverse normative per il caso monodimensionale. In particolare, si sono prese in considerazioni le seguenti norme europee e nazionali:

- EN 1992-1-1:2004 - "Progettazione di strutture in calcestruzzo – Regole generali e regole per gli edifici";
- ENV 1992-1-1:1991 - "Progettazione di strutture in calcestruzzo – Regole generali e regole per gli edifici" – Versione provvisoria Eurocodice 2;
- CEB FIP Model Code 1990;
- CEB FIP Model Code 2010;
- D.M. 09/01/1996 (integrato con la Circolare n. 252 del 15/10/1996);
- D.M. 14/01/2008 (integrato con la Circolare n. 617 del 02/02/2009);

Si sono inoltre considerate le seguenti normative extra-europee:

- ECP 203-2007 - "Egyptian code for design and construction of concrete structures";
- CAN - CSA 474-2004 - "Concrete structures" (Normativa Canadese);

- SN - NS 3473 E - “Concrete stuctures – Design and detailing rules” (Normativa Norvegese);
- JSCE-2007 - “Standard specifications for concrete structures: Design” (Normativa Giapponese)

Di seguito varranno brevemente riportate le espressioni per il calcolo della distanza tra le fessure proposte dalle diverse formulazioni normative. Si evidenzia fin da subito come alcuni codici specifichino la distanza media tra le fessure, altri invece il valore massimo di spaziatura a cui possono presentarsi due fessure consecutive.

1. EN 1992-1-1:2004

$$s_{r,max} = k_3 c + \frac{k_1 k_2 k_4 \phi}{\rho_{p,eff}} \qquad [2.8]$$

con il seguente significato dei simboli:

$s_{r,max}$	distanza massima tra le fessure
ϕ	dimetro della barra di armatura
c	ricoprimento dell’armatura
k_1	coefficiente che tiene conto delle proprietà di aderenza dell’armatura (0.8 per barre ad aderenza migliorata, 1.6 per barre lisce)
k_2	coefficiente che tiene conto della distribuzione delle deformazioni (0.5 per flessione, 1.0 per trazione)
k_3, k_4	valori consigliati, rispettivamente 3.4 e 0.425
$\rho_{p,eff}$	rapporto percentuale di armatura valutato come $A_s/A_{c,eff}$
A_s	area dell’armatura
$A_{c,eff}$	si ipotizza di considerare l’area efficace pari all’area del tirante

2. ENV 1992-1-1:1991 (versione provvisoria)

$$s_{rm} = 50[mm] + k_1 k_2 \frac{\phi}{\rho_{p,eff}} \qquad [2.9]$$

con il seguente significato dei simboli:

s_{rm}	distanza media fessure in fase di fessurazione stabilizzata
ϕ	dimetro della barra di armatura
k_1	coefficiente che tiene conto delle proprietà di aderenza dell'armatura (0.8 per barre ad aderenza migliorata, 1.6 per barre lisce)
k_2	coefficiente che tiene conto della distribuzione delle deformazioni (0.5 per flessione, 1.0 per trazione)
$\rho_{p,eff}$	rapporto percentuale di armatura valutato come $A_s/A_{c,eff}$
A_s	area dell'armatura
$A_{c,eff}$	si ipotizza di considerare l'area efficace pari all'area del tirante

3. Model Code 1990 – for stabilized cracking

$$l_{s,max} = \frac{\phi_s}{\rho_{s,ef}} \qquad [2.10]$$

con il seguente significato dei simboli:

$l_{s,max}$	distanza interessata dagli scorrimenti acciaio – cls [Figura 11]
ϕ_s	dimetro della barra di armatura
$\rho_{s,ef}$	rapporto percentuale di armatura valutato come $A_s/A_{c,eff}$

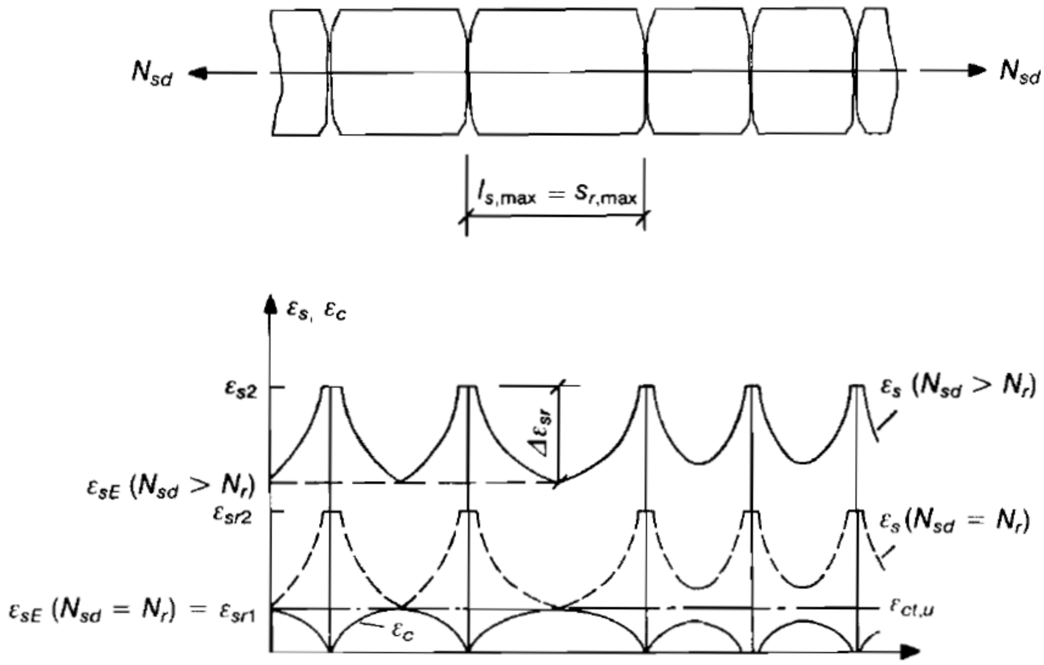


Figura 11: Definizione della lunghezza $l_{s,max}$ e andamento delle deformazioni nell'acciaio e nel calcestruzzo in fase di fessurazione stabilizzata; [Tratta da: "CEB-FIP Model Code 1990 – Design Code, Thomas Telford, pag. 249"]

Lo stesso Model Code 1990 suggerisce di adottare la seguente espressione per il calcolo della distanza media tra le fessure in fase stabilizzata:

$$s_{r,m} = \frac{2}{3}\, l_{s,max}$$

4. Model Code 2010

$$l_{s,max} = kc + \frac{1}{4}\frac{f_{ctm}}{\tau_{bms}}\frac{\phi_s}{\rho_{s,ef}} \qquad [2.11]$$

con il seguente significato dei simboli:

$l_{s,max}$ distanza interessata dagli scorrimenti acciaio – cls []

ϕ_s dimetro della barra di armatura

$\rho_{s,ef}$	rapporto percentuale di armatura valutato come $A_s/A_{c,eff}$
k	coefficiente empirico che può essere assunto pari a 1
c	copriferro
f_{ctm}	resistenza a trazione media del calcestruzzo
τ_{bms}	tensione di aderenza media acciaio-calcestruzzo

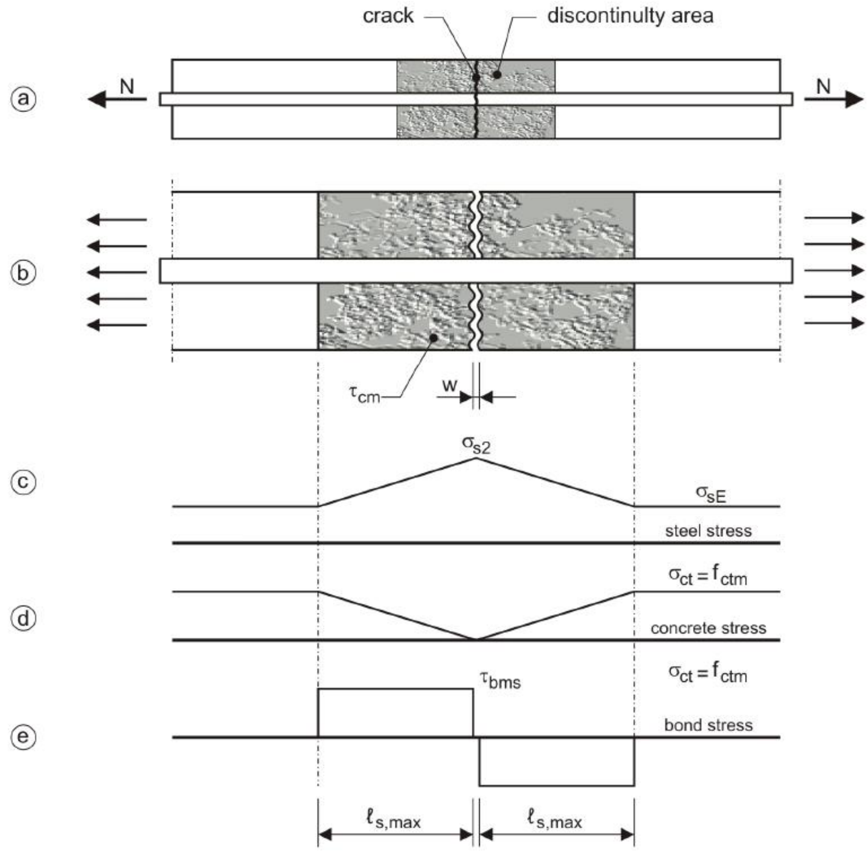


Figura 12: Definizione della lunghezza $l_{s,max}$ e andamento delle deformazioni nell'acciaio e nel calcestruzzo; [Tratta da: "CEB-FIP Model Code 2010 – Final Draft Volume 2, Bullettin 66, pag. 164"]

Inoltre, per la determinazione di f_{ctm} e τ_{bms} si suggeriscono le seguenti espressioni tratte dallo stesso Model Code 2010.

$$\tau_{bms} = 1.8\, f_{ctm}$$

$$f_{ctm} = 0.3 \cdot (f_{ck})^{2/3}$$

5. D.M. 09/01/1996 + Circolare n. 252 del 15/10/1996

$$s_{rm} = 2\left(c + \frac{s}{10}\right) + k_2 k_3 \frac{\phi}{\rho_r} \qquad [2.12]$$

con il seguente significato dei simboli:

s_{rm}	distanza media fessure in fase di fessurazione stabilizzata
ϕ	dimetro della barra di armatura
c	copriferro
s	distanza tra le barre ($s \leq 14\phi$)
k_2	coefficiente di aderenza tra la barra di armatura e il calcestruzzo. Si assume pari a 0.4 per barre ad aderenza migliorata e 0.8 per barre lisce
k_3	coefficiente che tiene conto dell'andamento delle tensioni nella sezione. Per trazione pura si assume pari a 0.25
ρ_r	rapporto percentuale di armatura valutato come $A_s/A_{c,eff}$

6. D.M. 14/01/2008 + Circolare n. 617 del 02/02/2009

$$s_{rm} = \frac{\left(k_3 c + \frac{k_1 k_2 k_4 \phi}{\rho_{p,eff}}\right)}{1.7} \qquad [2.13]$$

con il seguente significato dei simboli:

s_{rm}	distanza media tra le fessure
ϕ	dimetro della barra di armatura
c	ricoprimento dell'armatura

k_1	coefficiente che tiene conto delle proprietà di aderenza dell'armatura (0.8 per barre ad aderenza migliorata, 1.6 per barre lisce)
k_2	coefficiente che tiene conto della distribuzione delle deformazioni (0.5 per flessione, 1.0 per trazione)
k_3, k_4	valori consigliati, rispettivamente 3.4 e 0.425
$\rho_{p,eff}$	rapporto percentuale di armatura valutato come $A_s/A_{c,eff}$
A_s	area dell'armatura
$A_{c,eff}$	si ipotizza di considerare l'area efficace pari all'area del tirante

7. ECP 203-2007

$$s_{rm} = 50 + 0.25\, k_1 k_2 \frac{\phi}{\rho_r} \qquad [2.14]$$

con il seguente significato dei simboli:

s_{rm}	distanza media tra le fessure in condizione stabilizzata
ϕ	dimetro della barra di armatura
k_1	coefficiente che tiene conto delle proprietà di aderenza dell'armatura (0.8 per barre ad aderenza migliorata, 1.6 per barre lisce)
k_2	coefficiente che tiene conto della distribuzione delle deformazioni (0.5 per flessione, 1.0 per trazione)
k_3, k_4	valori consigliati, rispettivamente 3.4 e 0.425
$\rho_{p,eff}$	rapporto percentuale di armatura valutato come $A_s/A_{c,eff}$
A_s	area dell'armatura
$A_{c,eff}$	si ipotizza di considerare l'area efficace pari all'area del tirante

8. CAN - CSA S474-2004 e SN - NS 3473 E

$$s_{rm} = 2\left(c + \frac{s}{10}\right) + k_1 k_2 \frac{d'_{be}\, h_{ef}\, b}{A_s} \qquad [2.15]$$

con il seguente significato dei simboli:

s_{rm}	distanza media fessure in fase di fessurazione stabilizzata
d'_{be}	diametro della barra di armatura
c	copriferro
s	distanza tra le barre
k_1	coefficiente di aderenza tra la barra di armatura e il calcestruzzo. Si assume pari a 0.4 per barre ad aderenza migliorata e 0.8 per barre lisce
k_2	coefficiente che tiene conto dell'andamento delle tensioni nella sezione. Per trazione pura si assume pari a 0.25
h_{ef}	altezza della sezione efficace
b	base della sezione efficace
A_s	area dell'armatura compresa nella sezione efficace

9. JSCE-2007

$$s_{cr} = 1.1\, k_1 k_2 k_3 (4c + 0.7(c_s - \phi)) \qquad [2.16]$$

con il seguente significato dei simboli:

s_{cr}	distanza media fessure

k_1	coefficiente di aderenza tra la barra di armatura e il calcestruzzo. Si assume pari a 1 per barre ad aderenza migliorata e 1.3 per barre lisce
k_2	coefficiente che tiene conto della resistenza del calcestruzzo, valutato come: $$\frac{15}{f_c' + 20} + 0.7$$
f_c'	resistenza a compressione del calcestruzzo
k_3	coefficiente dipendente dal numero di strati di barre, valutato come: $$\frac{5(n+2)}{7n+8}$$
n	numero di strati di armatura
c	copriferro
c_s	distanza tra i centri di due barre contigue (interferro più diametro armatura)
ϕ	diametro armatura

Nel capitolo successivo verranno applicate tali formulazioni al caso studio di interesse, riportando le osservazioni relative ai risultati forniti dalle sopra citate formulazioni normative.

3. Approccio normativo del modello 2D

Nei diversi codici normativi viene proposta anche una formulazione per determinare la distanza tra le fessure in elementi bidimensionali armati secondo due direzioni ortogonali. In particolare, le normative interessate sono:

- EN 1992-1-1:2004
- ENV 1992-1-1:1991 (versione provvisoria)

- Model Code 1990
- Model Code 2010
- ECP 203-2007

In modo uniforme le diverse normative sopra citate stabiliscono che, se l'angolo compreso tra gli assi delle tensioni principali e la direzione dell'armatura, in elementi armati secondo due direzioni ortogonali, è significativo (>15°), la distanza tra le fessure s_r può essere calcolata con l'espressione seguente:

$$s_r = \frac{1}{\frac{cos\theta}{s_{r,y}} + \frac{sin\theta}{s_{r,x}}} \qquad [2.17]$$

in cui θ è l'angolo tra l'armatura in direzione y e la direzione della tensione principale di trazione, mentre $s_{r,x}$ e $s_{r,y}$ sono le distanze tra le fessure calcolate rispettivamente in direzione x e y, secondo le espressioni riportate nel paragrafo [2] ossia secondo il modello monodimensionale.

Capitolo 3.

Caso studio: fessurazione di elementi in c.a. soggetti a stato piano di tensione

Si evince dal capitolo precedente come i dettami normativi in materia di fessurazione in elementi armati secondo due direzioni siano unicamente contenuti nella formulazione [2.17] precedentemente proposta. La stessa letteratura scientifica è piuttosto limitata per quanto riguarda la modellazione del fenomeno fessurativo in due dimensioni. In particolare, si rimanda alla teoria sviluppata da *Vecchio* & *Collins* nota in letteratura con il nome di "Compression Field Model" (1986), oppure alle elaborazioni successive, quale la cosiddetta "Cracked Membrane Model" proposta da *Kaufmann* & *Marti* (1998). Entrambi i modelli si pongono come obiettivo quello di studiare e prevedere il comportamento deformativo di un elemento di calcestruzzo armato fessurato soggetto a stato piano di tensione, ipotizzando che l'elemento abbia già raggiunto la condizione di *fessurazione stabilizzata*, ossia abbia raggiunto il suo quadro fessurativo finale. L'obiettivo di questo lavoro di Tesi è invece quello di prendere in considerazione il comportamento dell'elemento di calcestruzzo armato prima che raggiunga la sua condizione di fessure stabili, cercando quindi di studiare la fase di *formazione delle fessure*.

In questo capitolo verrà introdotto e analizzato il modello che si è costruito al fine di studiare la distribuzione tensionale, quindi la distanza di fessurazione, di un elemento bidimensionale di calcestruzzo armato. Si ipotizza che, in virtù delle condizioni di carico, la matrice di calcestruzzo sia soggetta ad uno stato piano di tensione, indotto dal trasferimento di forze dall'armatura metallica alla matrice stessa attraverso il meccanismo di aderenza già descritto nel Capitolo 1.

La simulazione numerica è stata svolta con il software *DIANA (DIsplacement ANAlyser)* versione 10.2. Si tratta di un codice di calcolo impiegato per le analisi agli elementi finiti (FEA – Finite Element Analysis) sviluppato e distribuito da DIANA FEA BV ed in uso al Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Edile e Geotecnica del Politecnico di Torino. Nei paragrafi a seguire si descriverà in modo dettagliato la geometria del modello utilizzato nelle analisi e la tipologia di elementi, scelti dalla libreria DIANA, impiegati per le analisi svolte.

1. Geometria del modello

Come già accennato in precedenza l'obiettivo di questa Tesi è quello di cercare di comprendere il meccanismo fessurativo in elementi di calcestruzzo armato bidimensionali. È possibile considerare il problema fisico della fessurazione, che nella realtà riguarda un elemento tridimensionale di calcestruzzo, come bidimensionale assumendo per esempio che due dimensioni, denominate nel seguito come x_{dim} e y_{dim} siano prevalenti rispetto alla terza dimensione (spessore) denominata come z_{dim}. La riduzione del modello da 3D a 2D è considerata un'approssimazione accettabile se lo spessore dell'elemento risulta almeno un ordine di grandezza inferiore rispetto alle altre due dimensioni. Nella [Figura 13] si mostra il modello tridimensionale che rappresenta il problema fisico oggetto di studio.

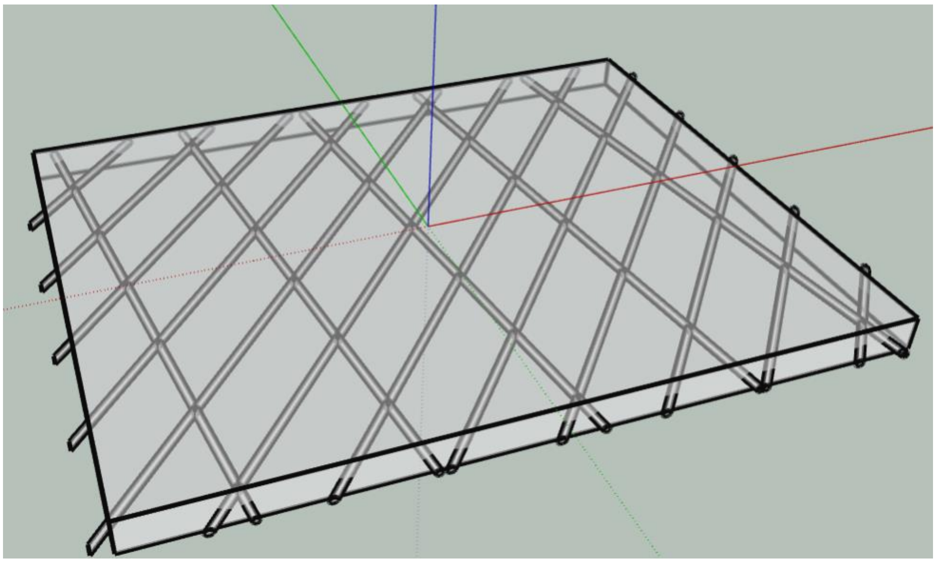


Figura 13: Geometria del modello tridimensionale che descrive il problema fisico. In essa viene messa in evidenza la matrice di calcestruzzo e il doppio ordine di armatura. Gli assi x, y e z sono indicati in figura rispettivamente dai colori rosso, verde e blu. A tale geometria, applicando l'ipotesi di spessore (dimensione lungo l'asse blu) ridotto, si perviene al modello approssimato bidimensionale.

Da questo punto in poi, assumendo z_{dim} inferiore rispetto agli altri due lati dell'elemento di [Figura 13], si tratterà il problema della fessurazione come bidimensionale e pertanto il modello a cui si farà riferimento è mostrato in [Figura 14]. Tale figura mostra l'elemento di calcestruzzo armato, di forma rettangolare $ABCD$, al quale viene associato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con origine nel baricentro della sagoma rettangolare stessa. Gli assi x e y permettono quindi di individuare le due direzioni di posizionamento dell'armatura individuate dagli angoli α e β, come indicato in figura sottostante.

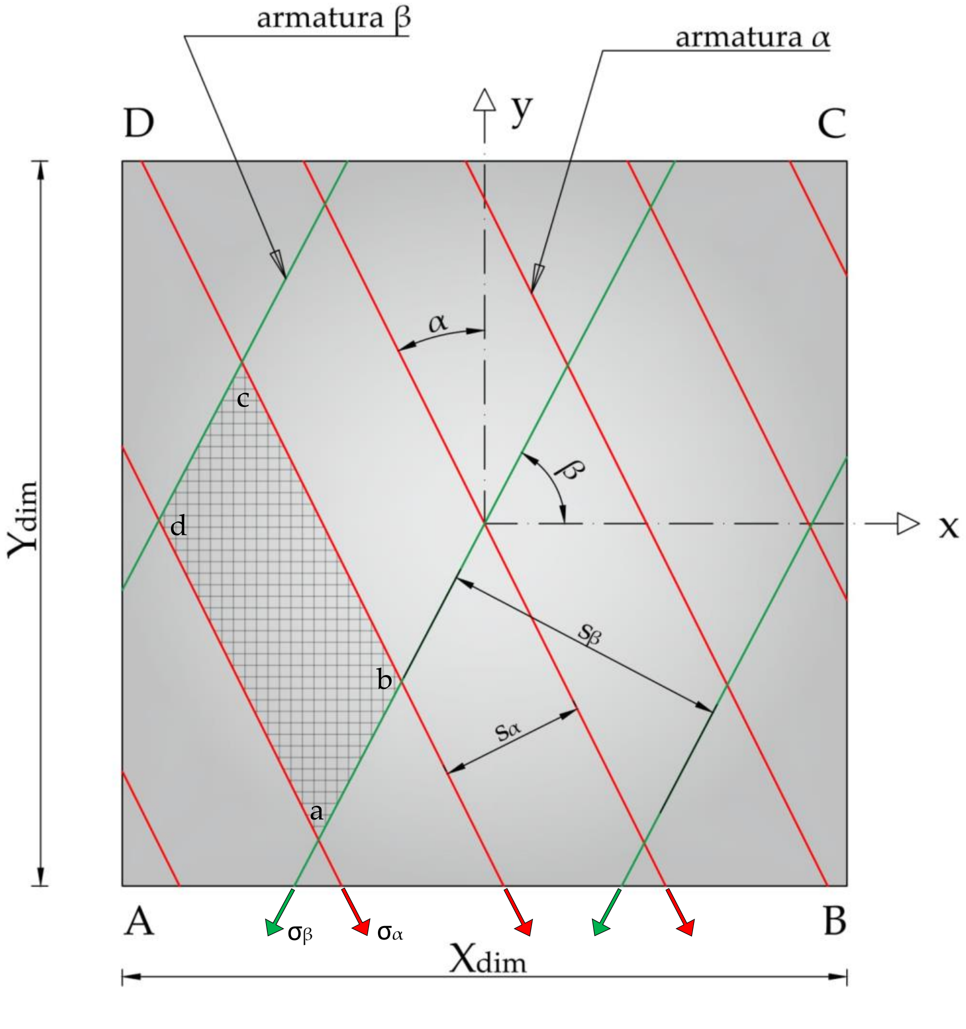


Figura 14: Geometria del modello bidimensionale che si intende utilizzare per lo studio della fessurazione, in cui viene messa in evidenza la matrice di calcestruzzo e le barre di armatura nelle due direzioni individuate dagli angoli α e β

Le armature in direzione α e β sono posizionate ad un interferro costante per ciascuna direzione indicato rispettivamente come s_α e s_β. Dall' intersezione della maglia di armature si individuano delle porzioni di calcestruzzo definite nel seguito come *campi* ed evidenziate nella [Figura 14] attraverso una retinatura (campo *abcd*). Il meccanismo dell'aderenza permette, come già accennato in precedenza, il trasferimento di sollecitazioni dalle armature a tali *campi* di calcestruzzo. In particolar modo i carichi del modello verranno applicati in generale soltanto ai nodi di estremità delle armature in direzione α e β giacenti sul lato $\overline{AB}$, come mostrato in [Figura 14]. In particolare, si ipotizza di applicare la medesima tensione di trazione a tutte le armature in direzione α, altrettanto per quelle in direzione β: tali valori tensionali sono definiti, rispettivamente, come σ_α e σ_β. Le armature nelle due direzioni potranno avere dei diametri, quindi delle aree, differenti: esse sono indicate come $A_{s,\alpha}$ e $A_{s,\beta}$. Nel caso in cui la risultante delle forze orizzontali R_H calcolata come

$$R_H = F_\alpha - F_\beta = N_\alpha\, \sigma_\alpha\, A_{s,\alpha} - N_\beta\, \sigma_\beta\, A_{s,\beta} \qquad [3.1]$$

non sia nulla, si rende necessario applicare anche delle tensioni tangenziali τ_{AB} sul lato $\overline{AB}$ in modo da garantire l'equilibrio orizzontale. Per convenzione si ipotizza che esse siano costantemente distribuite e quindi il loro valore risulti

$$\tau_{AB} = \frac{F_\alpha - F_\beta}{x_{dim} \cdot z_{dim}} \qquad [3.2]$$

dove nella [3.1] i parametri N_α e N_β indicano il numero di barre rispettivamente in direzione α e β a cui è applicato un carico tensionale.

Il modello della [Figura 14] vuole rappresentare una porzione del problema fisico oggetto di studio e quindi occorre discutere in modo specifico le condizioni di vincolo da applicare sui bordi dell'elemento rettangolare ossia AB, BC, CD e DA. Indicando gli spostamenti in direzione x e in direzione y rispettivamente come u e v si possono fare le seguenti considerazioni:

- In particolare, si immagina che il modello lungo la direzione x possa continuare indefinitamente; per questo motivo occorre applicare sui lati BC e DA dei vincoli che rappresentino tale condizione, ossia impediscano gli spostamenti u (evito lacerazioni di materia) mentre consentano eventuali spostamenti v; pertanto si applicano dei carrelli con piano di scorrimento verticale, come mostrato in [Figura 15]. I carrelli vengono applicati sia ai nodi degli elementi di calcestruzzo di bordo che ai nodi finali delle armature giacenti sui lati BC e DA.

- Per quanto riguarda il lato CD si assume che esso rappresenti un asse di simmetria della struttura e quindi in questo caso risulta necessario impedire gli spostamenti v, mentre sono permessi spostamenti u. Anche in questo caso si applica un vincolo di tipo carrello con piano di scorrimento orizzontale. I nodi vincolati sono sia degli elementi di calcestruzzo che delle barre di armatura affioranti sul lato CD. Si veda la [Figura 15].

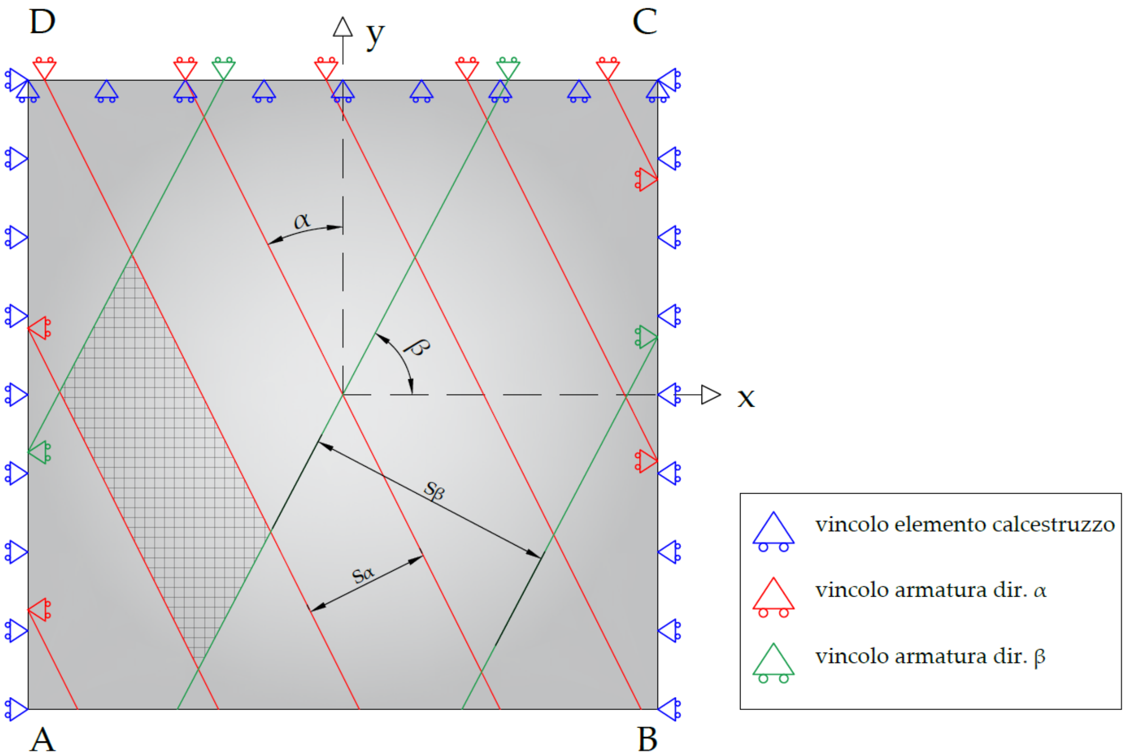


Figura 15: Applicazione delle condizioni di vincolo all'elemento oggetto di studio. Nella figura sono messi in evidenza i vincoli di tipo carrello applicati al bordo di calcestruzzo (blu) alle armature in direzione α (rosso) e β (blu).

Arrivati a questo punto si è introdotta la geometria del modello, i carichi ad esso applicati e le condizioni di vincolo. Risulta a questo punto utile descrivere come è avvenuta la modellazione relativa agli elementi di calcestruzzo e di acciaio e relativa ai materiali. Prima di procedere si richiama brevemente il modello teorico relativo allo stato piano di tensione.

2. Stato piano di tensione: richiami teorici

Come già anticipato l'elemento di calcestruzzo, denominata anche *matrice* di calcestruzzo, viene modellata come un elemento del tipo *stato piano di tensione*. Le ipotesi per le quali è possibile definire *piano* un problema sono le seguenti:

1. Il continuo elastico che si intende modellare ha uno spessore z_{dim} e una sezione trasversale disposta secondo il piano xy.

2. Le forze esterne di volume F_V e quelle di superficie f_S sono parallele al piano xy ed indipendenti da z.

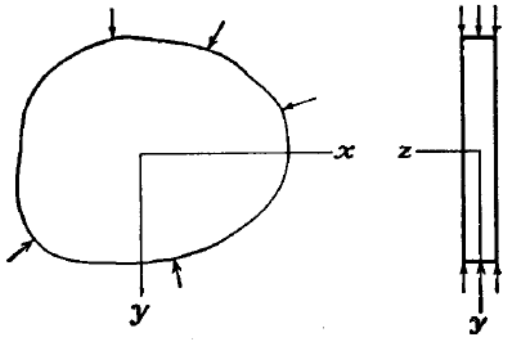


Figura 16: rappresentazione grafica delle ipotesi di stato piano di tensione [Tratta da: "Theory of Elasticity, di S. Timoshenko e J.N. Goodier, pag.11"]

Lo stato piano di tensione non esiste nella realtà in quanto è un'astrazione matematica che si ottiene semplificando il legame tensioni-deformazioni di un materiale elastico lineare isotropo e omogeneo di seguito riportato.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

dove E e ν indicano rispettivamente Modulo di Young e coefficiente di Poisson del materiale. Nell'ipotesi di considerare $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ la matrice $[D]$ di elasticità si riduce ad una 3x3 ossia:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Come si può osservare dalle relazioni inverse uno stato tensionale piano non implica uno stato deformativo piano; infatti nascerà una ε_z pari a

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

Si osserva quindi come, essendo ragionevole l'applicazione delle ipotesi 1. e 2. al problema oggetto di studio in questa Tesi, il calcestruzzo verrà modellato con un elemento del tipo stato piano di tensione. Essendo lo stato piano per definizione una modellazione di tipo bidimensionale, si considera il vettore degli spostamenti composto dalle sole componenti *u* e *v*, ossia in direzione x e y rispettivamente. A questo punto è possibile esplicitare le relazioni cinematiche, ossia le equazioni che legano le componenti dello spostamento con le componenti deformative

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix}$$

3. Asta reticolare: richiami teorici

L'elemento asta reticolare, denominato anche *truss*, appartiene alla famiglia degli elementi di tipo *simplex* ossia quegli elementi che si ottengono unendo $n+1$ nodi in uno spazio *n-dimensionale*. In questo caso esaminando il problema come monodimensionale si ha che $n = 1$ e quindi i nodi dell'asta sono 2, come mostrato in [Figura 17] di seguito. Tale elemento opportunamente modificato (arricchito di g.d.l.), verrà impiegato nella modellazione delle armature metalliche nelle due direzioni.

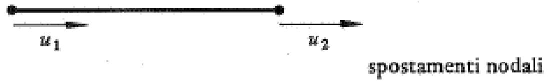


Figura 17: Elemento asta reticolare [Tratta da: "Il metodo degli elementi finiti nella progettazione meccanica, G. Belingardi, pag. 103"]

Essendo l'elemento monodimensionale (asse x), il legame costitutivo a cui fare riferimento risulta una relazione scalare del tipo

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$$

La relazione cinematica tra sposamento e deformazione diventa invece

$$\varepsilon_x = du/dx$$

4. Libreria elementi DIANA

Nel seguente paragrafo si tratteranno in dettaglio gli elementi della libreria del software DIANA che sono stati impiegati nella costruzione del modello, in particolar modo per quanto riguarda la matrice di calcestruzzo e l'armatura metallica. Successivamente verrà anche descritto l'elemento utilizzato per realizzare il trasferimento delle tensioni di aderenza dall'acciaio alla matrice di calcestruzzo, il cosiddetto elemento di *interfaccia*.

1. T6MEM – triangle 3 nodes

Questo elemento appartenente alla famiglia *Plane Stress – Regular Elements* è stato utilizzato per la discretizzazione della matrice di calcestruzzo. Esso è un elemento isoparametrico a 3 nodi avente 2 gradi di libertà per nodo (spostamento u e v), il cui polinomio interpolante è espresso, in riferimento alla notazione di [Figura 18], come:

$$u = a_0 + a_1\xi + a_2\eta$$
$$v = b_0 + b_1\xi + b_2\eta$$

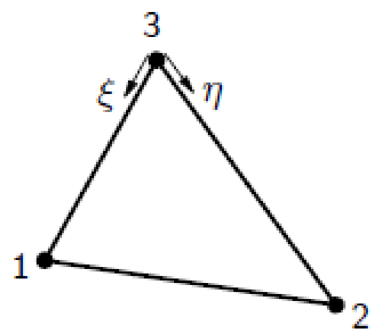


Figura 18: Elemento T6MEM. Definizione del sistema di riferimento. [Tratta da "Element Library – Manuale Diana fea v. 10.2, pag. 94"]

Tipicamente questo polinomio conduce ad uno stato di deformazione costante sull'elemento e di default DIANA applica uno schema di integrazione su 1 punto. La sintassi per la definizione della geometria è riportata in [Figura 19] sottostante in cui $no1_n$, $no2_n$ e $no3_n$ sono i nodi che costituiscono i vertici dell'elemento triangolare, nella sequenza riportata in [Figura 18]

Connectivity *syntax*

'ELEMEN'
CONNEC

1 5	6 12	13 80
	T6MEM	$no1_n$ $no2_n$ $no3_n$

Figura 19: Definizione dei vertici dell'elemento - sintassi DIANA [Tratta da " Element Library – Manuale Diana fea v. 10.2, pag. 95"]

Di interesse risulta la definizione dello spessore dell'elemento, attraverso la seguente sintassi DIANA [Figura 20] in cui tn_r rappresenta lo spessore nel generico nodo n. Nel caso in cui sia specificato soltanto $t1_r$ di default DIANA considera uniforme lo spessore.

syntax

'GEOMET'

1 5	6 12	13 80
	THICK	$t1_r$ [$t2_r$ ... tn_r]

Figura 20: Definizione dello spessore dell'elemento - sintassi DIANA [Tratta da " Element Library – Manuale Diana fea v. 10.2, pag. 88"]

Come già accennato in precedenza a volte si rende necessario applicare delle tensioni tangenziali sui lati di bordo della matrice di calcestruzzo al fine di ristabilire l'equilibrio in direzione orizzontale. A tal fine di seguito si riporta la sintassi impiegata nella definizione di carichi sul bordo dell'elemento (*Edge Load*). Nella [Figura 21] $edgnam_w$ indica il nome del lato che si intende caricare ($L1$, $L2$ o $L3$ rispettivamente se opposto al nodo 1,2 o 3) mentre fk_r rappresenta il valore del carico (espresso come forza per unità di lunghezza) da applicare nel nodo. L'opzione DIRELM permette di specificare la direzione di applicazione del carico (NORMAL o SHEAR) a seconda che il carico sia ortogonale o tangente al bordo. Se fk_r risulta positivo si intende, per convenzione, rivolto verso l'esterno dell'elemento nel caso di carico ortogonale al bordo, oppure rivolto nella direzione della sequenza di numerazione dei nodi nel caso di carico tangente. L'opzione DIRECT permette, in modo analogo, di definire la direzione del carico tramite lungo una specifica direzione definita dall'utente.

```
Direct input                                                    syntax
'LOADS'
ELEMEN
1    5 6      12 13                                                 80
          EDGE      edgnam_w
          FORCE     f1_r [ ... fk_r ]

          DIRELM    dirnam_w
          DIRECT    dirnr_n
```

Figura 21: Definizione di carichi sul bordo - sintassi DIANA [Tratta da " Element Library – Manuale Diana fea v. 10.2, pag. 90"]

2. L4TRU – straight, 2 nodes, 2-D

Questo elemento appartenente alla famiglia *Truss – Enanched Elements* è stato utilizzato per la discretizzazione della dell'armatura metallica. Il termine *enanched* indica il fatto che a differenza di un elemento truss classico presenta, in aggiunta, un ulteriore grado di libertà ortogonale all'asse; per questo motivo questo elemento si adatta bene alle analisi bidimensionali.

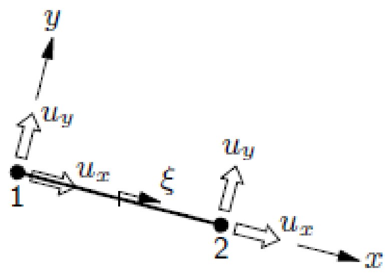


Figura 22: Elemento L4TRU. Definizione del sistema di riferimento. [Tratta da "Element Library – Manuale Diana fea v. 10.2, pag. 94"]

Esso è un elemento a 2 nodi avente 2 gradi di libertà per nodo (spostamento u e v), il cui polinomio interpolante è espresso, in riferimento alla notazione di [Figura 22], come:

$$u = a_0 + a_1\xi$$
$$v = b_0 + b_1\xi$$

L’elemento, per come è stato formulato, conduce ad uno stato deformativo ε_x costante lungo l’elemento, mentre inizialmente l’elemento avrà rigidezza nulla nei confronti dello spostamento in direzione ortogonale a ξ; tale rigidezza nascerà nel caso in cui si tenga conto delle non linearità geometriche.

La sintassi per la definizione della geometria è riportata in [Figura 23] sottostante in cui $no1_n$ e $no2_n$ sono i nodi che costituiscono i vertici dell’elemento, nella sequenza riportata in [Figura 22]

Connectivity *syntax*

'ELEMEN'
CONNEC

1 5	6 12	13 80
	L4TRU	$no1_n$ $no2_n$

Figura 23: Definizione dei vertici dell'elemento - sintassi DIANA [Tratta da " Element Library – Manuale Diana fea v. 10.2, pag. 29"]

Di interesse risulta la definizione della sezione trasversale dell’elemento, attraverso la seguente sintassi DIANA [Figura 24] in cui *area* rappresenta l’area della sezione.

syntax

'GEOMET'

1 5	6 12	13 80
	CROSSE	$area_r$

Figura 24: Definizione della sezione trasversale dell'elemento - sintassi DIANA [Tratta da " Element Library – Manuale Diana fea v. 10.2, pag. 24"]

3. L8IF – line, 2+2 nodes, 2-D

Il presente elemento, appartenente alla famiglia *Interface Elements – Structural Interface*, rappresenta un’interfaccia che collega due linee rette in una configurazione bidimensionale, come mostrato nella sua rappresentazione di [Figura 25]. Tale elemento viene impiegato per la modellazione fisica dell’aderenza tra l’armatura e la matrice di calcestruzzo e quindi come collegamento tra l’elemento L4TRU ed un lato dell’elemento triangolare T6MEM. Come mostrato in figura il sistema di riferimento xy è centrato sul nodo 1, con asse positivo delle ascisse rivolto verso il nodo 2. Di default DIANA applica uno schema di integrazione su 2 punti di Newton-Cotes.

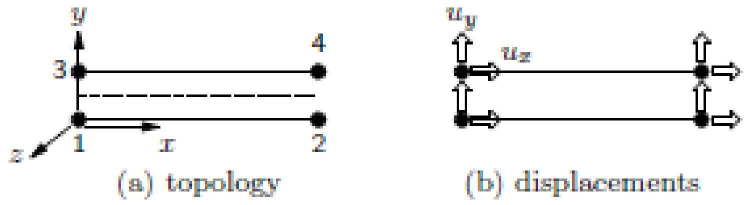


Figura 25: Elemento L4TRU. Definizione del sistema di riferimento. [Tratta da "Element Library – Manuale Diana fea v. 10.2, pag. 323"]

La geometria dell'elemento è definita secondo la seguente sintassi DIANA, mostrata in [Figura 26], dove $no1_n \ldots no4_n$ rappresentano i 4 nodi che l'elemento collega. In particolare, $no1_n$ e $no2_n$ possono appartenere all'elemento triangolare di calcestruzzo, mentre $no3_n$ e $no4_n$ possono appartenere all'elemento di armatura o il viceversa. Inoltre, è possibile che i nodi 1 e 3, come i nodi 2 e 4 siano sovrapposti geometricamente.

Connectivity *syntax*

```
'ELEMEN'
CONNEC
1   5 6     12 13                                   80
      L8IF     no1n no2n no3n no4n
```

Figura 26: Definizione dei vertici di collegamento dell'elemento interfaccia L8IF - sintassi DIANA [Tratta da " Element Library – Manuale Diana fea v. 10.2, pag. 323"]

5. Libreria Materiali DIANA

In questo paragrafo si prenderanno in considerazioni le diverse leggi costitutive e i diversi parametri richiesti dal software DIANA per la descrizione dei materiali da impiegare nell'analisi del problema oggetto di studio. Verranno esaminati quindi i modelli impiegati per il calcestruzzo, per 'acciaio e infine verrà richiamato il legame di aderenza acciaio-calcestruzzo.

1. Calcestruzzo

Ricordando l'obiettivo della presente Tesi, ossia quello di affrontare la fase di incipiente fessurazione di un elemento di calcestruzzo armato, è ragionevole supporre il legame costitutivo di tale materiale come elastico lineare, sia in trazione che in compressione. Pertanto, si farà riferimento ad un legame elastico lineare isotropo e omogeneo, per il quale occorre specificare i seguenti parametri secondo la sintassi DIANA riportata di seguito. Nella [Figura 27] YOUNG, POISON e THERMX indicano, rispettivamente, il modulo elastico del materiale, il coefficiente di Poisson e il coefficiente di espansione termica.

Linear elasticity *syntax*

```
'MATERI'
1      5 6      12 13                                            80
          YOUNG    e_r
          POISON   nu_r
          THERMX   alpha_r
          CONCEX   gamma_r
```

Figura 27: Definizione di un materiale elastico lineare isotropo - sintassi DIANA [Tratta da " Material Library – Manuale Diana fea v. 10.2, pag. 40"]

2. Acciaio

Il materiale delle armature metalliche in acciaio, per quanto detto in precedenza per il calcestruzzo, potrebbe essere modellato anch'esso tramite un legame costitutivo di tipo elastico lineare, in quanto non si prevede il superamento del limite di snervamento dell'acciaio. In ogni caso si è scelto che l'implementazione nel software DIANA del materiale seguisse una legge plastica con snervamento alla Von Mises. La sintassi prevista in DIANA risulta espressa di seguito in [Figura 28]. Si osserva come i parametri necessari a definire la relazione siano i seguenti:

- YOUNG: Modulo di elasticità di Young e_r
- THERMX: Coefficiente di espansione termica $alpha_r$
- YIELD: VMISES
- YLDSTR: tensione di snervamento dell'acciaio sy_r
- EPSSIG: specifica il diagramma di hardening per punti $epsn_r$ $sign_r$
- HARDEN [WORK]: la scelta della tipologia di hardening

In aggiunta è possibile anche specificare il modulo di Poisson del materiale con la medesima opzione vista in precedenza, ossia POISON nu_r

syntax

```
'MATERI'
1      5 6       12 13                                              80
          YOUNG      e_r
          THERMX     alpha_r
          YIELD      VMISES

          YLDSTR     sy_r
          KAPSIG     k1_r sy1_r [k2_r sy2_r ...] kn_r syn_r
          EPSRAT     eps1_r r1r [eps2_r r2_r ...] epsn_r rn_r
          EPSSIG     eps1_r sig1r [eps2_r sig2_r ...] epsn_r sign_r
          REJSCE     sy_r su_r epssh_r
          AVJSCE     sy_r su_r epssh_r p_r ft_r
         [HARDEN     ________]
                     WORK
                     STRAIN
         [ISOHAR     gamma_r ]
```

Figura 28: Definizione di un materiale plastico con criterio di snervamento alla Von Mises - sintassi DIANA [Tratta da " Material Library – Manuale Diana fea v. 10.2, pag. 195"]

3. Bond slip

Di seguito si riporteranno brevemente alcune considerazioni in merito alla modellazione del legame di aderenza impiegato nel presente studio. Il software DIANA permette di considerare diversi modelli di *bond-slip* per descrivere il comportamento delle interfacce tra armature e calcestruzzo [Figura 30]. Preliminarmente si osserva che la scelta dell'elemento L8IF come interfaccia permette di rappresentare il modello di bond-slip, come mostrato in [Figura 29].

Type	Linear elasticity	Nonlin. elasticity	Discrete cracking	Crack dilatancy	Bond-slip	Friction	Crack-shear-crush	Janssen model	User-supplied
L8IF	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	no	yes
CL12I	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	no	yes
CL20I	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	no	yes

Figura 29: Tabella delle compatibilità tra gli elementi di interfaccia e il modello fisico che si intende studiare con esse [Tratta da " Material Library – Manuale Diana fea v. 10.2, pag. 167"]

Il legame di aderenza che si intende implementare è quello già descritto nel [Capitolo 1] e riportato nella [Figura 9]: la costruzione di tale curva avviene "per punti" sfruttando il modello denominato BONDSL 3 riportato di seguito [Figura 30]. Nell'immagine l'asse delle ascisse è indicato come Δu_t e indica lo scorrimento tangenziale all'interfaccia, mentre t_t indica la tensione tangenziale di scorrimento. Per quanto riguarda invece il legame tra le tensioni e gli scorrimenti in direzione normale all'elemento di interfaccia il software DIANA assume implicitamente un modello di tipo lineare, attraverso la definizione del parametro DSNY come evidenziato successivamente.

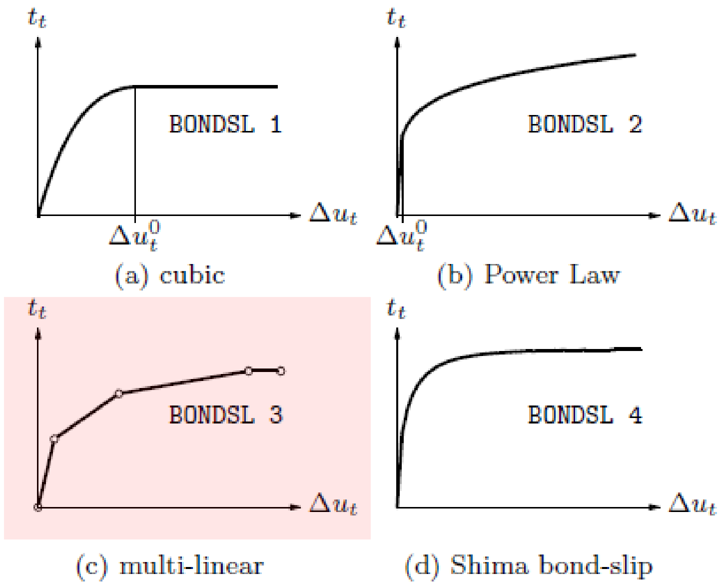


Figura 30: Curve Bond shear tractions [Tratta da " Material Library – Manuale Diana fea v. 10.2, pag. 182"]

La sintassi richiesta da DIANA per l'implementazione di tale modello risulta riportata nella [Figura 31] di seguito.

Multilinear *syntax*

```
'MATERI'
1      5 6      12 13                                    80
         BONDSL     3
         DISTAU     ut0r tt0r [ut1r tt1r ...] utnr ttnr
        [RESETU]
```

Figura 31: Definizione del legame bond-slip di tipo multilineare - sintassi DIANA [Tratta da "Material Library – Manuale Diana fea v. 10.2, pag. 183"]

In cui BONDSL 3 indica proprio il modello multilineare scelto e DISTAU permette di specificare la curva *bond slip* tramite i punti del tipo utn_r e ttn_r che rappresentano rispettivamente lo scorrimento Δu_t e la trazione all'interfaccia t_t. Inoltre, si possono specificare i parametri DSSX e DSNY ovvero le rigidezze iniziali delle curve di *bond.*

A questo punto, concluse le considerazioni relative all'implementazione in DIANA dei materiali, è possibile passare ad un breve richiamo circa il caricamento dei dati nel software.

6. DIANA FEA – Batch User Interface

Il software DIANA dispone, relativamente alla fase di *pre-processing* del modello agli elementi finiti, di una specifica interfaccia grafica (*Graphical User Interfaces*) che permette la creazione di geometrie, di mesh, dell'assegnazione di vincoli e di carichi al modello. In questo lavoro di Tesi si è preferito non procedere al caricamento dei dati tramite tale via, bensì di sfruttare quella comunemente definita come *Batch User Interface*, ossia la "scrittura" del modello all'interno di file di testo e il loro caricamento nel solutore di DIANA. Lo schema di lavoro seguendo questa seconda via può essere riassunto nell'immagine seguente.

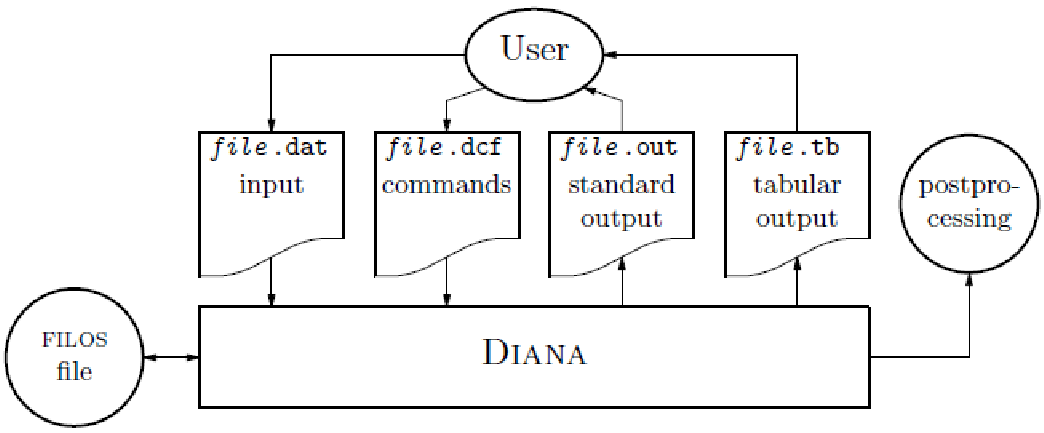


Figura 32: Batch User Interface in DIANA [Tratta da "Getting Started – Manuale Diana fea v. 10.2, pag. 55"]

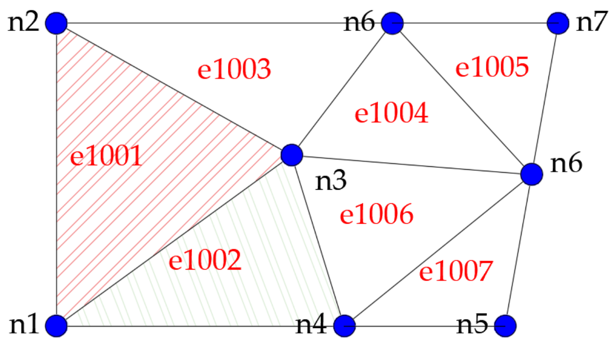
Dall' immagine sopra riportata si evince che l'utente deve caricare, per potere eseguire un'analisi, due file: il primo è il file di *input* avente estensione *.dat*, mentre il secondo è il file *commands* con estensione *.dcf*; entrambi questi file vengono scritti dall'utente in un semplice editor di testo e caricati in DIANA come file *.txt*.

Il file *input* contiene la geometria, la mesh del modello i materiali utilizzati, i carichi applicati etc., mentre il file *commands* contiene le istruzioni circa la tipologia di analisi da eseguire. Terminato il processo DIANA restituisce i risultati in formato testuale con i file *standard output* e *tabular output*. Di seguito si riporteranno in dettaglio le procedure adottate per la scrittura del *.dat* e del *.dcf*.

4. *.dat* file

La creazione del file *.dat* è realizzata mediante un algoritmo scritto in MATLAB, il quale permette, una volta introdotti i parametri di interesse, di generare un file di testo formattato secondo la sintassi richiesta dal software DIANA. Di seguito si descriveranno brevemente le principali operazioni svolte dall'algoritmo.

Preliminarmente si ricorda che la matrice di calcestruzzo è realizzata con elementi del tipo T6MEM che discretizzeranno l'intero dominio. È possibile immaginare che gli elementi adiacenti abbiano i vertici in comune: questo permette di definire un unico nodo che costituirà il vertice condiviso tra più elementi triangolari confinanti; la [Figura 33] sottostante chiarisce il concetto.



e1001	$(x,y)_{n1}$	$(x,y)_{n2}$	$(x,y)_{n3}$
e1002	$(x,y)_{n1}$	$(x,y)_{n3}$	$(x,y)_{n4}$
e1003	$(x,y)_{n2}$	$(x,y)_{n6}$	$(x,y)_{n3}$
...	...	...	...
e100x	$(x,y)_{nx1}$	$(x,y)_{nx2}$	$(x,y)_{nx3}$

Figura 33: Mesh di elementi di calcestruzzo tipo *T6MEM*. Sono evidenziati due elementi con campitura retinata rossa e verde. Essi hanno in comune i due nodi *n1* e *n3*, pertanto questi saranno in comune ai due elementi come mostrato nella tabella di definizione degli elementi riportata sotto alla figura. Si evince quindi che è sufficiente definire una sola volta, nella tabella delle coordinate nodali, ciascun nodo anche se in comune a più elementi.

Analizzando la [Figura 34] si osserva come i nodi dell'armatura metallica siano anch'essi sovrapposti ai nodi degli elementi di calcestruzzo, ma per chiarezza grafica, essi sono stati rappresentati traslati (segmento verde) dalla loro posizione reale.

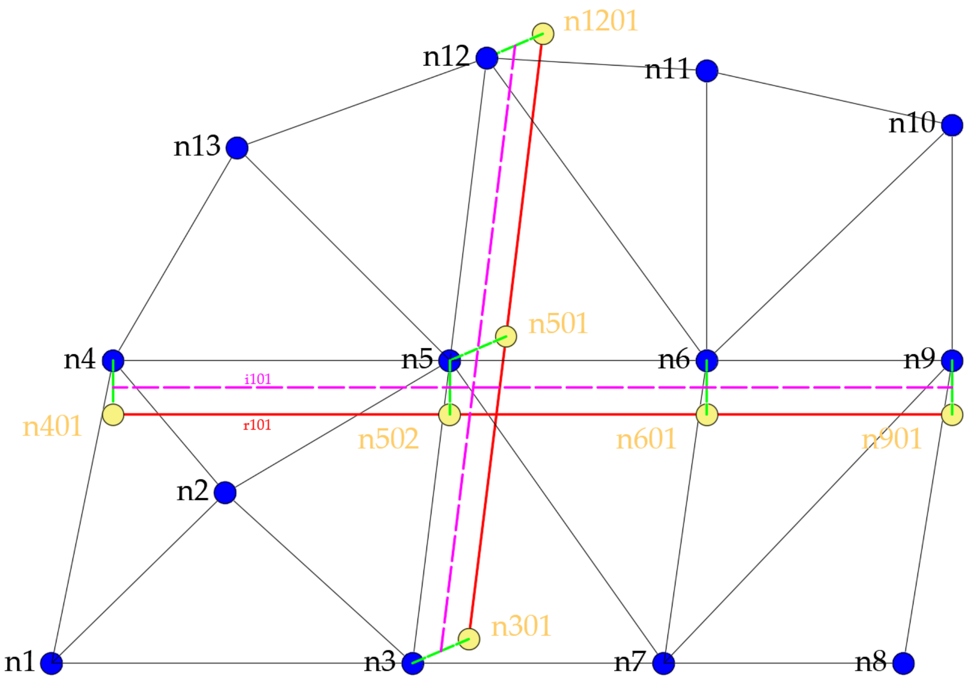


Figura 34: Vista di una porzione completa del modello in cui si distinguono gli elementi triangolari di calcestruzzo aventi i nodi dei vertici in blu e gli elementi truss (rossi) che rappresentano l'armatura (es. *r101*). I nodi di quest'ultima sono rappresentati, soltanto per comodità grafica, non coincidenti con i nodi della matrice di calcestruzzo: il collegamento in verde rimanda alla loro esatta posizione (es. il nodo *n401* giace sul nodo *n4* e il nodo *n502* giace sul nodo *n5*). Infine, si distinguono gli elementi di interfaccia (es. *i101*) che mettono in collegamento 2 nodi dell'elemento T6MEM con i 2 nodi dell'elemento L4TRU adiacente.

Di seguito si riportano i parametri che l'utente deve inserire nell'algoritmo Matlab per generare il file *.dat* mettendo in evidenza i passi fondamentali; lo script di MATLAB completo risulta disponibile negli allegati finali. Per prima cosa si definisce la geometria rettangolare, le direzioni e il passo dell'armatura; è possibile anche specificare l'opzione *opt* per tenere conto della simmetria strutturale rispetto a x o y.

```
%% Geometric plate and reinforcement data
xp=800; %[mm] x base dimension
yp=700; %[mm] y base dimension (it change if 'crn'=1)
alpha=45; %[deg] inclination of alpha-reinforcement -> MUST BE INTEGER
beta=45; %[deg] inclination of beta-reinforcement -> MUST BE INTEGER
s_alpha=130; %[mm] alpha-reinforcement spacing
s_beta=130; %[mm] beta-reinforcement spacing
opt=1; % The number is the chosen option for the geometry. You can choose
```

È possibile scegliere un numero compreso tra *0* e *9* a seconda dei parametri precedentemente introdotti, ossia:

- Se $\{\alpha = \beta = 45°\} \cap \{s_\alpha = s_\beta\}$ allora è possibile scegliere *0,1,2,3*;
- Se $\{\alpha = \beta = 90°\} \cup \{\alpha = \beta = 0°\}$ allora è possibile scegliere *0,4,5,6,7,8,9*;
- Se non si è ino dei casi sopra riportati sarà necessario utilizzare il valore *0.*

Ciascun numero corrisponde ad una precisa condizione di simmetria che si intende ottenere. Se si utilizza il valore *0* le dimensioni x_{dim} e y_{dim} rimarranno invariante, il che corrisponde al non richiedere simmetrie strutturali. Gli altri numeri hanno il seguente significato:

- Il valore *1* richiede la simmetria dei campi di calcestruzzo rispetto all'asse delle y, forzando l'intersezione delle armature a giacere sul lato BC e DA. La dimensione x_{dim} varierà*.
- Il valore *2* richiede la simmetria dei campi di calcestruzzo rispetto all'asse delle x, forzando l'intersezione delle armature a giacere sul lato AB e CD. La dimensione y_{dim} varierà*.
- Il valore *3* equivale ad applicare simultaneamente *1* e *2*.
- Il valore *4* richiede la simmetria dei campi di calcestruzzo rispetto all'asse delle y. La dimensione x_{dim} varierà*.
- Il valore *5* richiede la simmetria dei campi di calcestruzzo rispetto all'asse delle x. La dimensione y_{dim} varierà*.
- Il valore *6* richiede la simmetria dei campi di calcestruzzo rispetto all'asse delle y, forzando l'intersezione delle armature a giacere sul lato AB e CD. Le dimensioni x_{dim} e y_{dim} varieranno*.
- Il valore *7* richiede la simmetria dei campi di calcestruzzo rispetto all'asse delle x, forzando l'intersezione delle armature a giacere sul lato BC e DA. Le dimensioni x_{dim} e y_{dim} varieranno*.

* La modifica della geometria è fatta scegliendo il nuovo valore più vicino alla dimensione impostata dall'utente.

- Il valore *8* forza l'intersezione delle armature a giacere sul lato AB e CD. La dimensione y_{dim} varierà*.

- Il valore 9 forza l'intersezione delle armature a giacere sul lato BC e DA. La dimensione x_{dim} varierà*.

Successivamente si procede alla definizione dei vincoli di bordo come mostrato nell'immagine sottostante. I valori della matrice dei vincoli possono essere *1* o *0*, a seconda che il vincolo, nella direzione specificata e sul lato indicato, sia effettivamente attivo oppure no. Le istruzioni dettagliate sono riportate nel commento allo script.

```
%% Support of plate and reinforcement
% In this section you can specify which edges nodes of concrete or
% reinforcement you want to restrain
%
% Traslation constraints of Concrete CTX, CTY and Reinforcement RTX, RTY in
% X or Y directions. They are rows vectors (1x4) tahat identify if the
% restrain in this direction work. If work {1}, if do not work {0}. The
% start (first column) is from inf. edge (base) and round counterclockwise.
%
%   edge:  1°    2°    3°    4°
%           ?     ?     ?     ?
%         |CTX,1 CTX,2 CTX,3 CTX,4| % constrain concrete to X translation
% SUPP = |CTY,1 CTY,2 CTY,3 CTY,4| % constrain concrete to X translation
%         |RTX,1 RTX,2 RTX,3 RTX,4| % constrain reinf. to X translation
%         |RTY,1 RTY,2 RTY,3 RTY,4| % constrain reinf. to Y translation
%
SUPP=[0 1 0 1
      0 0 1 0
      0 1 0 1
      0 0 0 0];
```

A questo punto si può procedere alla definizione dei carichi sui nodi delle armature giacenti sui lati di bordo, specificando il diametro delle armature. Le tensioni tangenziali, se necessarie all'equilibrio, verranno calcolate automaticamente dall'algoritmo. Le convenzioni seguite sono riportate nello script sottostante.

```
%% Reinforcement applied forces
% In this section you can specify which edges nodes of reinforcement you
% want to load with a sigma tension
%
% Tension in reinforcement in direction alpha or beta SIGMA1, SIGMA2. Tehy
% are rows vectors (1x4) tahat identify the tension in MPa for each edge.
% (The edge are the columns). The start (first column) is from inf. edge
% (base) and round counterclockwise.
```

```
%   edge:     1°       2°       3°      4°
%             ?        ?        ?       ?
% SIGMA = |SIGMA1,1 SIGMA1,2 SIGMA1,3 SIGMA1,4| % sigma in dir. beta (1)
%         |SIGMA2,1 SIGMA2,2 SIGMA2,3 SIGMA2,4| % sigma in dir. alpha (2)
%
% Positive direction of SIGMA is in positive direction 4 and 5, both
% defined later like cosine director of reinforcement:
%
%       dir4=[cos(beta),sin(beta)];
%       dir5=[sin(alpha),cos(alpha)];
%
%       Exemple: for general direction alpha and beta:
%             - dir (4) is in the first quadrant of xy plane
%             - dir (5) is in the second quadrant of xy plane
% WARNING !!
% If the reinforcement in alpha or beta directions not intersect an edge
% you MUST specify, for that directions and edge, 0 (zero) in the SIGMA
% table, in order to avoid abort of code.
%
 SIGMA=[-100 0 0 0
         -50 0 0 0];
diameter_alpha=14; % [mm] bar diameter of reinforcement [>= 6 mm]
diameter beta=14; % [mm] bar diameter of reinforcement [>= 6 mm]
```

Il successivo step richiesto è quello di specificare i parametri necessari alla creazione della mesh. La discretizzazione del dominio rettangolare si è realizzata grazie all'uso del *toolbox PDE (Partial Differential Equation)* interno al software MATLAB. Esso permette la risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali ed in particolare permette, inserita la geometria, di realizzare una mesh di elementi triangolari, specificando i seguenti parametri:

- δ – ordine di grandezza della dimensione del lato di ciascun elemento triangolare
- H_{grad} – rapporto di crescita della mesh
- H_{max} – valore massimo di δ
- H_{min} – valore minimo di δ
- $Geometric\ order$ – ordine della mesh. Se si considera *lineare* verranno creati soltanto dei nodi ai vertici, mentre se si considera *quadratico* verranno creati dei nodi anche nella mezzeria dei lati.

```
%% Mesh parameters
delta=10; %[mm] triangulation size order
Hgrad=1.3; %[%] mesh Gradation. It has been chosen from > 1 to < 2
Hmax=1*delta; %[mm] min value of edge elements
Hmin=1*delta; %[mm] max value of edge elements
GeometricOrder='linear'; % {'linear'},{'quadratic'}
quality=90; % [%]
```

Si specificano quindi gli elementi della libreria DIANA che vengono utilizzati per costruire il modello come già descritto nei paragrafi precedenti.

```
%% Elemets used in DIANA FEA (see 'Element Library of Diana)
% Concrete Plane stress element
Element='T6MEM';
% Truss element for reinforcement
truss='L4TRU';
% Interface element to connect reinforcement and concrete
interface='L8IF';
```

Per finire occorrerà soltanto più introdurre i parametri relativi ai materiali e alla modellazione delle interfacce. In particolare, per quanto riguarda la definizione dei parametri di geometria della nervatura necessari alla determinazione della curva *bond-slip*, si è fatto riferimento alla normativa ISO 6935-2.

```
%% Reinforcement details for bond - slip curve alpha
type_alpha='crescent'; % {'crescent'},{'uniform'} - type of ribs
rib_spacing_alpha='max'; % {'mean'},{'min'},{'max'} - claer dist
collapse_mode_alpha='PO'; % {PO},{SP} - PullOut, SPlitting
bond_conditions_alpha='good'; % {good},{other}
confined_alpha='yes'; % {yes},{no} - if concrete is confined
% Consider and write on .dat file interface element of alpha dir
interface_alpha=1; % {1}: yes - {0}: no
DSSX_alpha=1.8E4; % [N/mm^3] stifness D22
DSNY_alpha=1.8E4; % [N/mm^3] stifness D11
```

Si applica uno script simile perla costruzione della curva di aderenza delle armature in direzione β. Il calcestruzzo viene definito con i seguenti parametri.

```
%% Concrete details
fck=25; % [MPa] class of concrete
poison_c=0.2; % [-] Poison ratio
term_c=0.00001; % [1/C°] thermal expansion coefficent
thick=200; % [mm] thick of concrete element
```

Mentre per l'acciaio occorre introdurre le seguenti grandezze.

```
%% Steel details
Es=200000; % [MPa] Elastic stifness modulus of steel
poison_s=0.3; % [-] Poison ratio
term_s=0.00001; % [1/C°] thermal expansion coefficent
fy=450; % [MPa] yield tension of B450 steel
ft_s=540; % [MPa] ultimate tension of B450 steel
epsu_s=0.075; % [-] ultimate eps
epssig=[fy/Es fy epsu_s ft_s]; % [eps0-sig0,eps1-sig1,...] hardening curve
```

Dopo aver introdotto tutte le grandezze necessarie alla generazione del file *.dat* è possibile eseguire (comando *run* in MATLAB) lo script. Se la compilazione del codice viene eseguita correttamente senza incontrare errori, nella *Command Window* apparirà una finestra analoga a quella mostrata in [Figura 35] sottostante, la quale informa l'utente circa lo stato di avanzamento raggiunto dal processo.

```
Command Window
********************** start ***************************

Controllo dei parametri eseguito in 0.01 [s] con successo!
Applicazione di options eseguita in 0.02 [s] con successo!
Generazione del modello eseguita in 0.02 [s] con successo!
Nome: 735x700_d14_d14_45x45_130x130_mesh10
Mesh creata Pde-toolbox eseguita in 3.88 [s] con successo!
Carico di sigma1 lato 1 eseguito in 7.35 [s] con successo!
Carico di sigma2 lato 1 eseguito in 7.36 [s] con successo!
Termine script processo eseguito in 8.02 [s] con successo!
Termine generazione dat eseguito in 8.59 [s] con successo!

*********************** end ****************************
fx >>
```

Figura 35: Messaggio di informazione che compare durante l'esecuzione dello script MATLAB per la generazione del file *.dat*. Il messaggio inizia con la verifica sulla corretta introduzione dei parametri, prosegue con l'applicazione delle opzioni sulla simmetria e quindi genera il modello; infine questo viene quindi caricato nel *PDE toolbox* per la creazione della mesh. Successivamente verranno applicate le forze alle armature e il processo terminerà con la generazione (stampa) del file di testo *.dat*.

L'algoritmo MATLAB inoltre, una volta terminata l'analisi, fornisce i seguenti grafici relativi al modello oggetto di studio:

- *Elements and Edge* – In questo grafico viene rappresentata la geometria dei campi di calcestruzzo corredata dalla nomenclatura dei bordi e degli elementi.

- *Mesh triangulation* – Vista della mesh di elementi T6MEM.

- *Mesh quality* – Istogramma in cui è indicata la qualità (in base alla forma) degli elementi triangolari generati, espressa con un numero compreso tra *0* e *1*

- *Elements with shape quality < 90%* – Grafico in cui sono evidenziati in verde gli elementi con una qualità minore del 90%. È possibile modificare tale percentuale, come descritto in precedenza.

- *Bond slip reinforcement concrete* – grafico in cui sono riportate le curve $\tau - s$ costruite in accordo al Model Code 2010.

- *3D* – vista tridimensionale del modello creato in cui sono evidenziati i vincoli, le interfacce e i carichi applicati.

Come ultima osservazione si conclude

5. *.dcf* file

Il file *.dcf* è stato generato manualmente in quanto esso contiene i parametri dell'analisi che si intende condurre sul modello contenuto nel file *.dat*. Tali parametri risultano gli stessi per tutti i casi che verranno studiati in seguito e pertanto è sufficiente generare un unico file *.dcf* . Di seguito si riporta la descrizione delle diverse opzioni scelte per l'analisi.

```
*FILOS
INITIA
*INPUT
READ
*NONLIN
BEGIN TYPE
BEGIN PHYSIC
INTERF
END PHYSIC
END TYPE
```

Si osserva inizialmente come alcuni comandi siano preceduti dal simbolo *. Nella sintassi DIANA questo indica un richiamo ad uno specifico modulo del software stesso. Per esempio, le prime righe del file *.dcf* contengono il richiamo al modulo *FILOS che gestisce l'omonimo file (**FI**le **O**rganisation **S**ystem) che verrà inizializzato per una nuova analisi, tramite l'opzione INITIA. Successivamente si richiama il modulo *INPUT che per default legge (READ) il file di modello caricato in DIANA, ossia il *.dat* file precedentemente descritto. A questo punto si specifica il tipo di analisi richiamando il modulo *NONLIN, che permette di eseguire un'analisi non lineare; occorre specificare in che cosa consista il comportamento non lineare della struttura, specificando il tipo di non linearità. Nel nostro caso si tratta di una non linearità di tipo fisico (BEGIN TYPE, BEGIN PHYSIC), localizzata sulle interfacce (INTERF). I comandi preceduti da END sono la semplice chiusura alle righe precedentemente scritte nel file *.dcf*. Le istruzioni per l'analisi procedono con il seguente codice:

```
BEGIN SOLVE
      PARDIS
END SOLVE
BEGIN OUTPUT TABULA ASCII
BEGIN SELECT
BEGIN ELEMENTS
      ALL
END ELEMENTS
END SELECT
STRESS TOTAL CAUCHY PRINCI
END OUTPUT
BEGIN OUTPUT NDIANA
STRESS TOTAL CAUCHY GLOBAL
STRESS TOTAL CAUCHY PRINCI
STRESS LOCAL
STRESS TOTAL TRACTI LOCAL
DISPLA TOTAL TRANSL GLOBAL
DISPLA TOTAL TRANSL LOCAL
FORCE REACTI TRANSL GLOBAL
STRAIN
STRAIN TOTAL TRACTI LOCAL
END OUTPUT
*END
```

Il comando BEGIN SOLVE viene utilizzato per la risoluzione del sistema di equazioni del modello agli elementi finiti. In questo caso si è specificata l'opzione PARDIS che indica il solutore PARDISO (Parallel Direct Sparse Solver), algoritmo che permette la risoluzione di sistemi di equazioni reali e sistemi simmetrici sparsi. Si chiude con il comando END SOLVE.

Successivamente si sono scelti i risultati da visualizzare e la forma dell'output di visualizzazione. Si è optato sia per una registrazione dei risultati in forma di file di testo (comandi compresi tra BEGIN OUTPUT TABULA ASCII e END OUTPUT) che una visualizzazione grafica, di maggior interesse e quindi descritta di seguito. Per prima cosa si richiama il comando BEGIN OUTPUT NDIANA che permette la visualizzazione e il *post-processing* dei dati in DianaIe. Le righe successive contengono invece le grandezze da rappresentare e sono:

- STRESS TOTAL CAUCHY GLOBAL – tensioni totali (tensore di Cauchy) espresse nel sistema di riferimento globale xy.
- STRESS TOTAL CAUCHY PRINCI – tensioni totali (tensore di Cauchy) espresse nel sistema di riferimento delle direzioni principali della tensione.
- STRESS LOCAL – tensioni espresse nel sistema di riferimento locale dell'elemento.
- STRESS TOTAL TRACTI LOCAL – tensioni di trazione all'interfaccia nel sistema di riferimento locale dell'elemento.
- DISPLA TOTAL TRANSL GLOBAL – spostamento (traslazioni) totali nel sistema di riferimento globale xy.
- DISPLA TOTAL TRANSL LOCAL – spostamento (traslazioni) totali nel sistema di riferimento locale dell'elemento.
- FORCE REACTI TRANSL GLOBAL – forze (relative alla traslazione) reattive nei nodi vincolati nel Sistema di riferimento globale xy.
- STRAIN – deformazione nel sistema globale.
- STRAIN TOTAL TRACTI LOCAL – deformazione delle interfacce nel sistema locale.

Capitolo 4.

Caso studio 1. Armature ortogonali e parallele ai lati

Il primo caso studio di cui si riportano i risultati è la generalizzazione bidimensionale del modello a tirante monodimensionale. Si considera quindi una matrice rettangolare di calcestruzzo avente le armature parallele ai lati e quindi gli angoli α e β sono nulli. Tale geometria viene definiti come un'estensione del tirante monodimensionale poiché è possibile immaginare la struttura come una serie di elementi tirante affiancati che interagiscono tra loro, come mostrato in [Figura 36]. Da questa osservazione si deduce quindi come la spaziatura tra le barre e l'altezza della piastra diventino le "*dimensioni*" fittizie nel modello tirante 1D. Nella stessa figura sono rappresentati anche i vincoli di bordo; la matrice di calcestruzzo è vincolata alla traslazione in direzione x lungo i lati BC e DA mentre risulta vincolata alla traslazione in direzione y lungo il lato CD. Per quanto riguarda le armature metalliche esse sono state vincolate alla sola traslazione in direzione orizzontale lungo i lati BC e DA. Come si può notare non è stato inserito alcun vincolo alla traslazione verticale dei nodi delle armature giacenti sul lato CD in quanto la tensione dell'armatura, massima sul lato AB, viene progressivamente trasferita alla matrice di calcestruzzo lungo la direzione y; per questo motivo è risultato sufficiente vincolare quest'ultimo al fine di garantire l'equilibrio. I carichi saranno applicati ai nodi delle armature sul lato AB.

Si suppone, data la simmetria rispetto all'asse y del modello geometrico descritto e riportato in [Figura 36], di applicare la medesima forza a tutti i nodi delle armature giacenti sul lato AB. In questo modo si garantisce la più completa simmetria strutturale, anche in termini di condizioni di carico. Si vuole applicare un valore di tensione alle armature (indicato come σ_α) che sia in grado, una volta avvenuta la diffusione delle tensioni all'interno della matrice di calcestruzzo, di generare lo stato di incipiente fessurazione. Tale condizione prevede che la tensione nel calcestruzzo raggiunga il valore della resistenza a trazione media di tale materiale. Si pone il problema della determinazione di σ_α. Essa non può essere fatta per via analitica in quanto non sono presenti in letteratura formulazioni teoriche relative al problema bidimensionale. Si procede quindi con un metodo semplificato di seguito descritto.

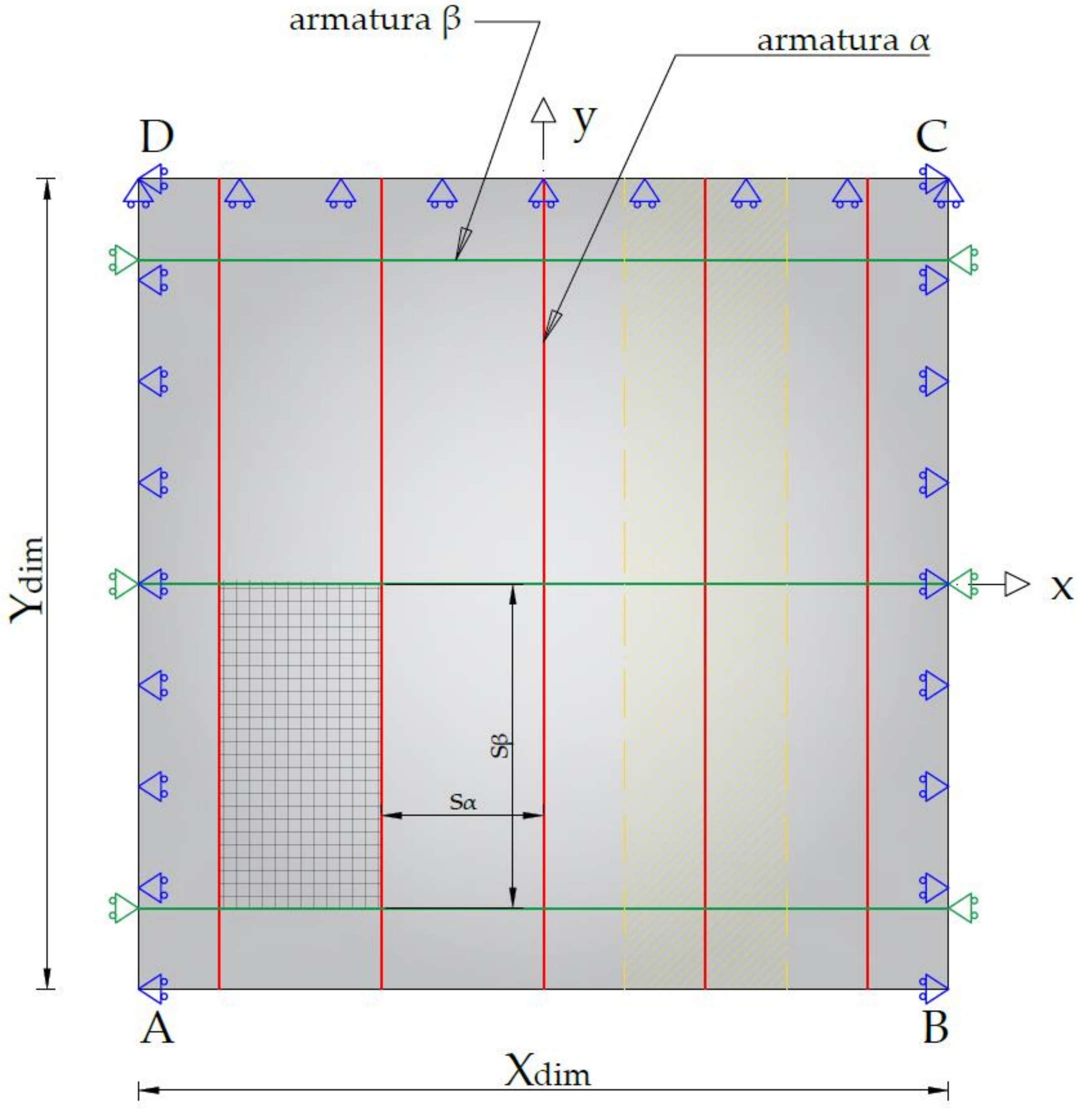


Figura 36: Geometria del caso studio 1. È possibile riconoscere la direzione dell'armatura α e β i cui angoli di inclinazione sono entrambi nulli. Sono mostrate le condizioni di vincolo della matrice di calcestruzzo e dei nodi delle armature giacenti sul bordo. Viene infine messo in evidenza con una campitura gialla il tirante monodimensionale "*fittizio*" che è possibile estrarre dalla geometria 2D: si osserva come la larghezza dell'area tratteggiata risulti proprio pari al passo s_α

Per prima cosa si procede al calcolo della tensione σ_{s0} di incipiente fessurazione di un tirante monodimensionale, che può essere ricavata ricordando la distribuzione delle deformazioni di calcestruzzo e acciaio riportata in [Figura 10 - (E)]. Nell'istante di formazione della fessura le deformazioni dei due materiali risultano ancora identiche e quindi:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_s$$

da cui si ricava che, essendo il modello unidimensionale

$$\frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{\sigma_s}{E_s}$$

Quindi la tensione nell'acciaio vale:

$$\sigma_s = \frac{E_s}{E_c} \cdot \sigma_c = n \cdot \sigma_c \qquad [4.1]$$

Si procede con la scrittura dell'equazione di equilibrio tra due generiche sezioni del tirante monodimensionale, indicate come sezione *0* e sezione *1*.

$$\sigma_{s0} \cdot A_s + \sigma_{c0} \cdot A_c = \sigma_{s1} \cdot A_s + \sigma_{c1} \cdot A_c$$

Che, nel caso in cui la sezione *0* sia la sezione iniziale e la sezione *1* sia quella in incipiente fessurazione, si può riscrivere come segue:

$$\sigma_{s0} \cdot A_s = \sigma_{s1} \cdot A_s + f_{ctm} \cdot A_c$$

Sfruttando la [4.1] si ottiene:

$$\sigma_{s0} \cdot A_s = n \cdot f_{ctm} \cdot A_s + f_{ctm} \cdot A_c$$

ossia:

$$\sigma_{s0} = f_{ctm}\left(\frac{1 + n \cdot \rho}{\rho}\right) \qquad [4.2]$$

In cui il rapporto ρ indica la percentuale di armatura della sezione, ossia A_s/A_c. In questo modo, applicando la σ_{s0} all'armatura, a diffusione avvenuta si otterrà la resistenza media a trazione nella matrice di calcestruzzo.

Tale risultato, valido nell'ipotesi di tirante monodimensionale, viene applicato anche al modello bidimensionale oggetto di studio nel seguente Capitolo, assumendo pertanto $\sigma_\alpha = \sigma_{s0}$.

Lo studio è stato condotto prendendo in esame i diversi modelli esposti nella tabella sottostante [Tabella 3]. Si osserva che in tabella non è stato riportato il diametro dell'armatura in direzione orizzontale, ossia l'armatura β, in quanto essa non influenza l'analisi essendo ortogonale alla direzione caricata. Si è deciso quindi convenzionalmente di assumerla pari a $\Phi_\beta = 6\ [mm]$

Caso	Base [mm]	Altezza [mm]	Φ_α [mm]	ρ_α [%]	σ_α [MPa]
1.1	190	100	12	0.60%	447
1.2	140	100	12	0.81%	333
1.3	90	100	12	1.27%	219
1.4	65	100	12	1.77%	162
1.5	270	125	16	0.60%	446
1.6	200	125	16	0.81%	334
1.7	128	125	16	1.27%	219
1.8	92	125	16	1.78%	161
1.9	350	150	20	0.60%	444
1.10	260	150	20	0.81%	334
1.11	167	150	20	1.27%	219
1.12	120	150	20	1.78%	161

Tabella 3: Esposizione riassuntiva dei casi studio eseguiti per "*Armature ortogonali e parallele ai lati*". Nella tabella sono riportati, per ciascun caso, la base del tirante "*fittizio*" ricavato dal modello 2D come descritto in precedenza [Figura 36], l'altezza ossia lo spessore della piastra, il diametro delle armature in direzione α e il rapporto percentuale di armatura del tirante fittizio monodimensionale infine si è riportata la tensione σ_α con cui caricare i nodi delle armature giacenti su AB.

Si osserva che la tabella sopra riportata è stata suddivisa in tre sottogruppi, ciascuno dei quali ha lo stesso diametro e la stessa altezza della sezione, con gli stessi rapporti percentuali di armatura via via crescenti. Questo permette di comprendere l'influenza che il diametro oppure la percentuale di armatura hanno nella fase di formazione delle fessure ed in particolare sulla distanza alla quale esse compariranno.

Si assumono inoltre i seguenti dati relativi alla matrice di calcestruzzo e all'acciaio delle armature:

E_s	200000 [MPa]		Cls	C25/30

Applicando la tensione espressa in [Tabella 3] si sono risolti, attraverso il software DIANA, i 12 casi oggetto di studio. Per ciascuno di essi è possibile ricavare il campo delle tensioni totali della matrice di calcestruzzo in direzione y, ossia $\sigma_{c,y}$ (definite in DIANA con l'acronimo $Concrete - SYY$), come riportato in [Figura 37]. Si osserva che, una volta avvenuto il trasferimento delle tensioni tramite il meccanismo dell'aderenza, nella matrice di calcestruzzo non si è raggiunto esattamente il valore di f_{ctm}, bensì un valore leggermente inferiore, indice del non raggiungimento della fase di incipiente fessurazione; questo è dovuto al fatto che la tensione applicata ai nodi delle armature a livello del lato AB è ricavata dal modello monodimensionale il quale non tiene conto dell'influenza delle deformazioni e delle tensioni trasversali ($\varepsilon_{c,x}$ e $\sigma_{c,x}$) che nascono nel calcestruzzo. Per questo motivo nasce l'esigenza di dover "riscalare" i valori delle tensioni riportati in [Tabella 3] in modo che, a diffusione avvenuta, si ottenga nel calcestruzzo $\sigma_{c,y} = f_{ctm}$. Si applica quindi il procedimento delineato di seguito:

- Si riportano su un grafico le coppie $(y, \sigma_{c,y})$, come mostrato in [Figura 37]. I valori di tensione nella matrice di calcestruzzo $\sigma_{c,y}$ sono stati ricavati in DIANA, applicando i valori di tensione riportati in [Tabella 3].

- Si interpolano i punti con un polinomio di ordine n, ottenendo la curva rossa in [Figura 37], detta *curva di diffusione.*

- Si valuta il valore di tensione σ_c^* che si è raggiunto nel *plateau* della curva di diffusione

- Si valuta il fattore Δ di scalatura come:

$$\Delta = \frac{f_{ctm}}{\sigma_c^*}$$

- Si risolve nuovamente il caso studiato applicando una tensione alle armature a livello AB pari a

$$\sigma_\alpha^* = \Delta \cdot \sigma_\alpha$$

Operando in questo modo si otterranno dei valori $\sigma_{c,y}$, a diffusione avvenuta, pari alla resistenza media a trazione: si è così individuata correttamente la distribuzione tensionale di incipiente fessurazione.

Di seguito viene proposta, a titolo esemplificativo, la curva di diffusione tensionale ottenuta dal procedimento di interpolazione legata al Caso studio *1.1*.

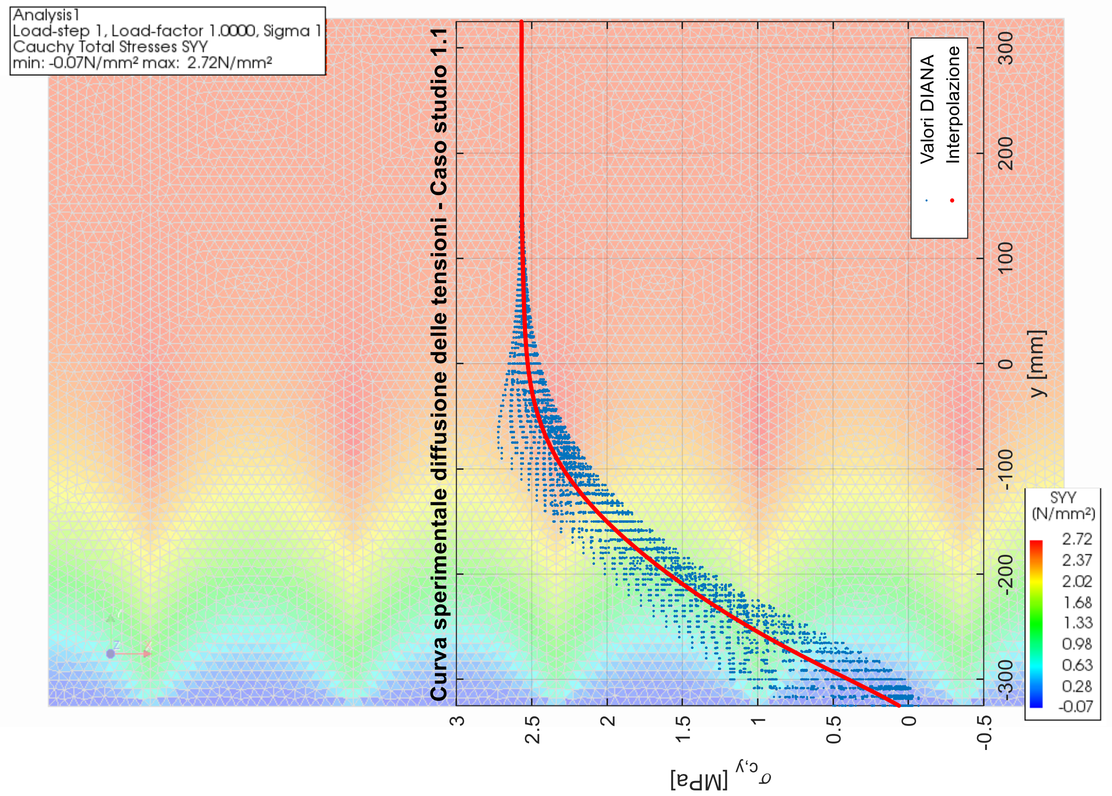


Figura 37: Rappresentazione grafica dell'andamento delle tensioni nel calcestruzzo $\sigma_{c,y}$ sullo sfondo. Sovrapposizione della curva di diffusione tensionale (curva rossa), ricavata come interpolazione dei valori di tensione (punti blu) – valori ottenuti prima di eseguire la scalatura

È possibile, una volta ottenuti i valori delle tensioni $\sigma_{c,y}$ riscalati, determinare la distanza alla quale si ha diffusione e quindi la distanza minima alla quale potrà formarsi una nuova fessura rispetto al lato di base AB. Per fare questo si deve cercare il primo punto della *curva di diffusione* (a partire proprio dal lato AB) che raggiunge la resistenza a trazione f_{ctm}. Si assume una tolleranza di – a % rispetto al valore della f_{ctm}, ossia si considera già fessurata la sezione in cui è raggiunta la tensione

$$\sigma_{cr} = f_{ctm} - a\ \% \cdot f_{ctm} \qquad [4.3]$$

in cui a rappresenta un generico valore scelto a seconda della precisione desiderata.

Una volta determinato il punto in cui si ha il raggiungimento dell'incipiente fessurazione, avente ordinata y_{cr} è necessario verificare anche l'effettiva distribuzione lungo l'asse x delle tensioni del calcestruzzo $\sigma_{c,y}$ per tale ordinata: infatti un valore prossimo alla resistenza a trazione del calcestruzzo potrebbe risultare come media di valori puntuali anche molto distanti tra loro da f_{ctm} derivanti dalla presenza di eventuali concentrazioni di tensioni attorno alle barre di armatura. Per chiarire il concetto si esamini, ad esempio, la distribuzione di tensioni $\sigma_{c,y}$ avente ordinata $y' = -100\ [mm]$ in [Figura 37] e riportata in [Figura 39]. Appare evidente che per tale ordinata risultano presenti porzioni di calcestruzzo (colore rosso scuro) che hanno raggiunto valori molto più grandi della resistenza a trazione f_{ctm} (zone di fessurazione localizzata) e porzioni di calcestruzzo (colore giallo) che hanno raggiunto valori tensionali molto al di sotto di f_{ctm}. Tale ordinata, anche se *mediamente* potrebbe risultare soggetta ad una tensione nel calcestruzzo proprio pari alla resistenza a trazione, è da escludere in quanto non rappresenta la reale distanza alla quale si è completato il processo di diffusione. Le precedenti osservazioni mettono in luce la necessità di introdurre un ulteriore valore di tolleranza da considerare, ossia quella sulla distribuzione di tensione lungo l'ascissa, per un certo valore di y prefissato. Introducendo $\pm\ b\ \%$, si considera accettabile il valore di y_{cr} già ottenuto se:

$$\begin{aligned} \min[\sigma_{c,y}(x, y_{cr})] > \sigma_{cr} - \sigma_{cr} \cdot b\% \\ \max[\sigma_{c,y}(x, y_{cr})] < \sigma_{cr} + \sigma_{cr} \cdot b\% \end{aligned} \qquad \forall\, x \in \left[-\frac{x_{dim}}{2}; +\frac{x_{dim}}{2}\right] \qquad [4.4]$$

In cui, anche in questo caso, b rappresenta un valore di tolleranza scelto a seconda della precisione desiderata. Si osserva che se l'espressione [4.4] non risulta soddisfatta, si deve proseguire ricercando un nuovo punto fino a quando entrambe le espressioni non saranno soddisfatte.

A titolo di esempio vengono riportati i valori che si sono ottenuti per il Caso studio *1.1*, avendo scelto

$$a = 2.5\%\ e\ b = 5\%$$

Le [4.3] e [4.4] sono entrambe soddisfatte per

$$y_{cr} = 2\ [mm] \rightarrow\ \sigma_{cr} = 2.54\ [MPa]$$

$$\sigma_{min,y_{cr}} = 2.46\ [MPa] - \sigma_{max,y_{cr}} = 2.67\ [MPa]$$

Di seguito si riporta la curva di diffusione per il caso 1.1 e la distribuzione delle tensioni lungo l'ascissa, [Figura 38] e [Figura 39]

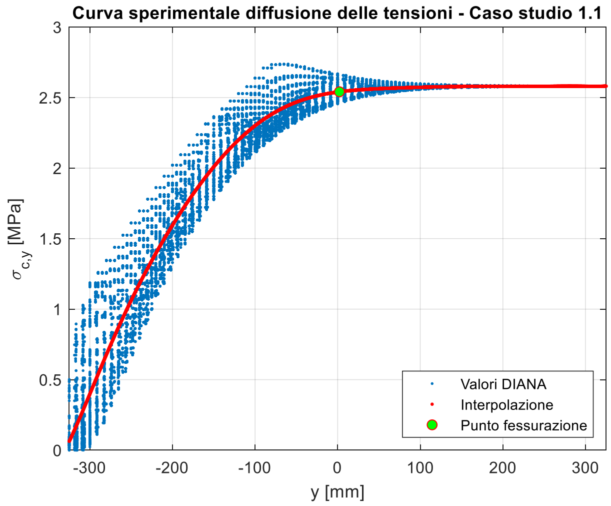


Figura 38: Curva di diffusione del caso 1.1 dopo la scalatura utilizzata per eseguire il procedimento di calcolo della distanza di fessurazione. Il marker di colore verde in figura indica la posizione ottenuta di incipiente fessurazione, nel rispetto delle condizioni [4.3] e [4.4]

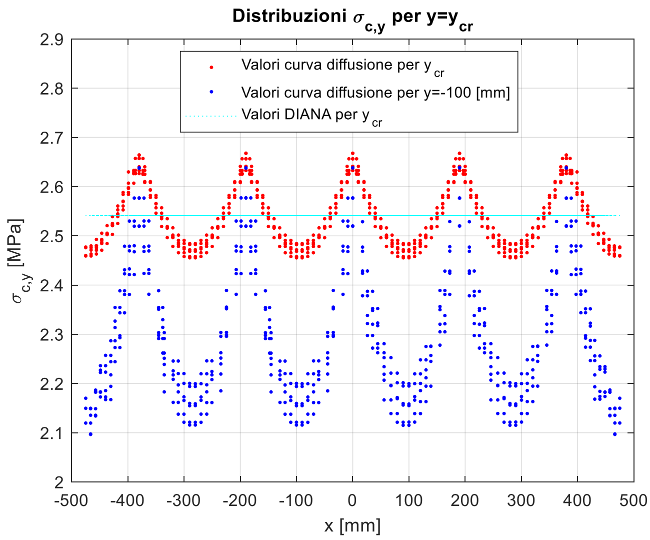


Figura 39: Rappresentazione della distribuzione delle tensioni lungo l'ascissa, per un certo valore prefissato dell'ordinata. Viene riportata sia la curva per y_{cr} che per $y = -100\ [mm]$ per illustrare il concetto richiesto dalla condizione [4.4]

Il procedimento sopra indicato, riportato per tutti 12 i casi studiati, ha permesso di ottenere i seguenti risultati [Tabella 7].

	Distanza MINIMA fessurazione [mm]
Caso	**DIANA – risultati numerici**
1.1	327
1.2	268
1.3	232
1.4	214
1.5	430
1.6	340
1.7	280
1.8	256
1.9	530
1.10	425
1.11	326
1.12	295

Tabella 4: Valori dell'ordinata y_{cr} alla quale si sviluppa la fessurazione. Tali valori rappresentano la distanza minima di fessurazione, cioè la distanza necessaria alla diffusione delle tensioni dall'armatura al calcestruzzo

A questo punto è possibile applicare le formulazioni teoriche trattate nel [Capitolo 2] al fine di valutare la distanza alla quale si potranno formare due fessure consecutive. Risulta necessario un chiarimento in riferimento all'applicazione delle formulazioni di normativa; infatti alcune di esse propongono delle espressioni per il calcolo della distanza media alla quale si presenteranno le fessure una volta raggiunta la fase di *fessurazione stabilizzata*.

Altri approcci invece forniscono la distanza minima o massima alla quale si potranno formare nuove fessure. Risulta chiaro quindi che per eseguire un confronto tra le diverse normative sarà necessario distinguere le grandezze che si stanno raffrontando, secondo la seguente suddivisione:

- EN 1992-1-1:2004, Model Code 1990, Model Code 2010 e D.M. 14/01/2008 forniscono i valori della distanza massima alla quale possono trovarsi due fessure contigue in fessurazione stabilizzata. Si osserva che il D.M. 14/01/2008 assume implicitamente il seguente legame tra distanza media e distanza massima:

$$s_{r,max} = 1.7 \cdot s_{r,mean}$$

In realtà il Model Code 2010 fornisce la distanza minima alla quale si può formare una nuova fessura. La massima si è assunta pari al doppio della minima.

- EN 1992-1-1:2004, Model Code 2010, Model Code 1990 e l'espressione [2.1] dimostrata al Capitolo 2. forniscono i valori minimi della spaziatura tra le fessure. In particolare, i valori minimi per quanto riguarda l'EN 1992-1-1:2004 e il Model Code 1990 sono stati ricavati dimezzando i valori massimi calcolati dalla formulazione analitica normativa.

- ENV 1992-1-1:1991, Model Code 1990, D.M. 09/01/1996, D.M. 14/01/2008, ECP 203-2007, CAN-CSA S474-2004 (e SN-NS 3473 E) e JSCE 2007 forniscono i valori medi tra le fessure raggiunta la fase di fessurazione stabilizzata. In questo caso il valo medio per il Model Code 1990 è stato ricavato come suggerito dalla medesima normativa, ossia:

$$s_{r,mean} = \frac{2}{3} \cdot s_{r,max}$$

Si può quindi ora procedere al calcolo, per i diversi casi riportati in [Tabella 3] alla distanza di formazione delle fessure, secondo i diversi approcci normativi.

Di seguito ci si è limitati a riportare i risultati finali relativi alla distanza di fessurazione minima, media e massima

	Distanza MINIMA tra le fessure [mm]			
Caso	**EN 1992-1-1:2004**	**Model Code 2010**	**Model Code 1990**	**[2.1] (l_{trasm})**
1.1	415	322	278	278
1.2	325	249	205	205
1.3	235	175	131	131
1.4	190	138	94	94
1.5	547	425	371	371
1.6	428	329	274	274
1.7	306	229	175	175
1.8	246	179	125	125
1.9	675	526	461	461
1.10	529	407	342	342
1.11	378	284	219	219
1.12	302	221	156	156

Tabella 5: Confronto delle distanze MINIME tra le fessure valutate secondo i diversi approcci normativi.

	Distanza MEDIA tra le fessure [mm]						
Caso	**ENV 1992-1-1:1991**	**Model Code 1990**	**DM 09/01/1996**	**DM 14/01/2008**	**ECP 203 2007**	**CAN CSA S474**	**JSCE 2007**
1.1	451	371	322	489	451	328	358
1.2	345	273	263	383	345	265	316
1.3	239	175	200	277	239	201	275
1.4	186	125	169	224	186	170	254
1.5	584	494	421	643	584	432	471
1.6	445	365	346	504	445	348	413
1.7	301	233	260	360	301	262	353
1.8	230	167	217	289	230	219	323
1.9	714	615	518	794	714	534	585
1.10	543	456	428	623	543	430	510
1.11	365	292	321	445	365	323	432
1.12	275	209	267	355	275	269	393

Tabella 6: Confronto delle distanze MEDIE tra le fessure valutate secondo i diversi approcci normativi.

	Distanza MASSIMA tra le fessure [mm]			
Caso	**EN 1992-1-1:2004**	**Model Code 1990**	**Model Code 2010**	**DM 14/01/2008**
1.1	831	557	645	831
1.2	651	409	497	651
1.3	470	262	350	470
1.4	380	188	276	380
1.5	1093	742	851	1093
1.6	856	548	657	856
1.7	613	349	458	613
1.8	491	250	359	491
1.9	1351	923	1053	1351
1.10	1058	684	814	1058
1.11	756	437	567	756
1.12	604	313	443	604

Tabella 7: Confronto delle distanze MASSIMA tra le fessure valutate secondo i diversi approcci normativi.

La rappresentazione grafica dei risultati ottenuti nella [Tabella 5], [Tabella 6] e [Tabella 7] è riportata di seguito, in [Figura 40], [Figura 41] e [Figura 42]. Si riportano inoltre, sui grafici della distanza minima, i risultati forniti dal software DIANA.

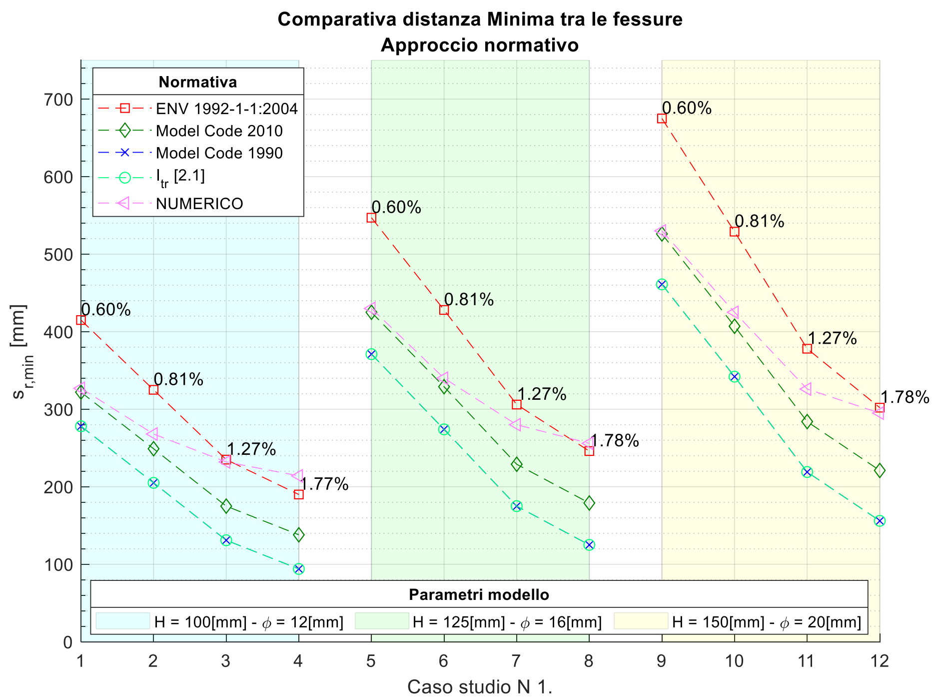


Figura 40: Distanza minima calcolata secondo le normative prese in considerazione. Si riporta anche il risultato fornito da DIANA.

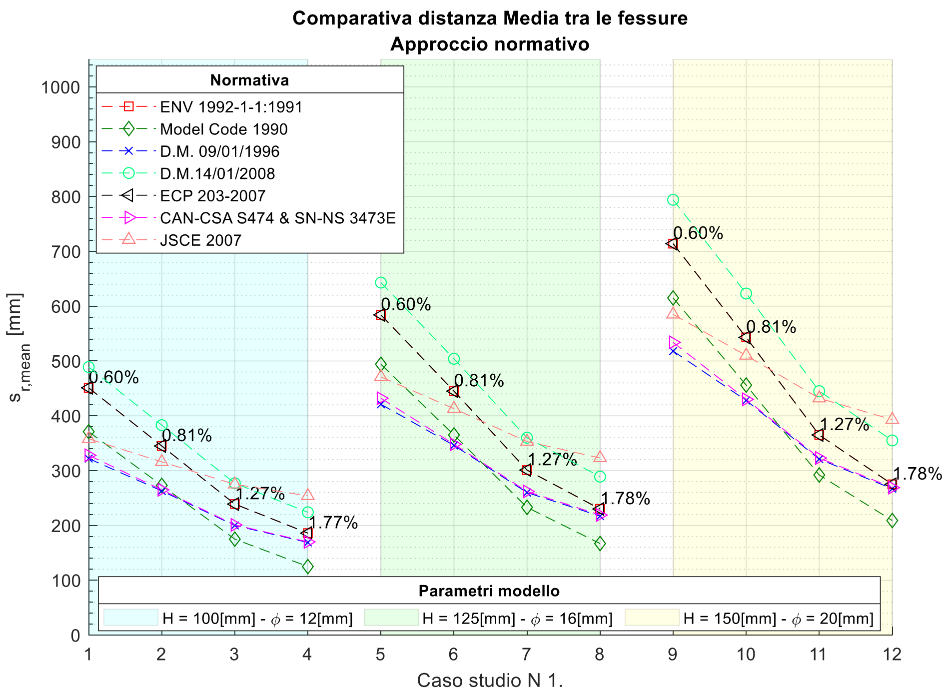


Figura 41:Distanza media calcolata secondo le normative prese in considerazione.

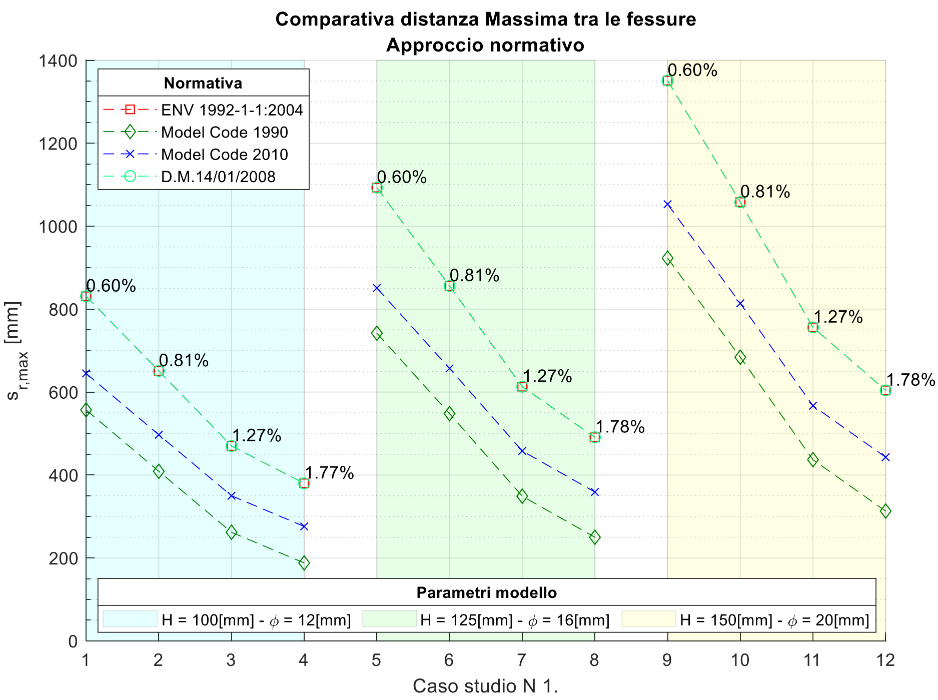


Figura 42: Distanza massima calcolata secondo le normative prese in considerazione.

Dall' analisi delle figure si osserva come la distanza tra le fessure risulta influenzata, come già accennato ad inizio capitolo, dai seguenti due parametri: diametro dell'armatura e rapporto percentuale di armatura. In particolare, si osserva come, a parità di diametro impiegato, all'aumentare del rapporto percentuale di armatura si osserva ad una progressiva riduzione della distanza tra le fessure. Questo significa che mantenendo il diametro invariato ma riducendo la spaziatura tra le barre (o lo spessore della piastra), si induce una fase di fessurazione stabilizzata in cui la diffusione avviene più rapidamente.

D'altra parte, le immagini suggeriscono un'altra lettura interpretativa dei risultati. Se si prende in esame un prefissato rapporto di armatura, si osserva come l'aumentare del diametro porti ad un incremento della spaziatura tra le fessure; quindi, in altre parole, l'inserimento della stessa quantità percentuale di armatura sotto forma di diametro minore, porta ad una riduzione della distanza tra fessure successive.

I risultati normativi sopra esposti per il caso bidimensionale concordano pienamente con le prescrizioni che generalmente si adottano per il controllo della fessurazione degli elementi trave (monodimensionali). In quest'ultimo caso infatti è noto che per ridurre la distanza tra le fessure (e conseguentemente anche l'apertura delle stesse) occorre incrementare la percentuale di armatura della trave e, se possibile, disporre la stessa tramite armature di piccolo diametro.

Nella [Figura 40] viene inoltre riportato il confronto tra l'approccio normativo e i risultati derivanti dal modello f.e.m. risolto nel software DIANA. Risulta di immediata percezione come i risultati numerici siano in completo accordo con la normativa. In dettaglio è possibile rilevare la tendenza che questi hanno ad essere ben approssimati dal modello proposto dal Model Code 2010 nel caso di bassi rapporti d'armatura; nel caso invece di rapporti d'armatura piuttosto elevati si rileva come le curve sperimentali tendano ad avvicinarsi maggiormente ai risultati dell'EN 1992-1-1:2004.

Si osserva infine un trend generale dei diversi approcci normativi. In generale Eurocodice, Model Code e Normativa Italiana (NTC 08) mostrano curve tra loro approssimativamente parallele, costituendo una prima famiglia di curve con il medesimo decadimento. Dall'altra parte invece la normativa giapponese, canadese, norvegese e la vecchia normativa italiana (D.M. 96) mantengono tutte un certo parallelismo tra loro mostrando un medesimo trend di decadimento meno incisivo rispetto al primo gruppo di normative. I risultati di DIANA sembrerebbero adattarsi bene a questo secondo andamento, mostrando anche loro riduzioni meno severe per rapporti percentuali di armatura consistenti.

Per completezza alla trattazione si mostrano infine, limitatamente al solo caso 1.1, alcuni risultati ottenuti nella fase di *post-processing* nell'ambiente Diana Interactive Environment (DianaIE). Vengono riportati, nella notazione DIANA, le seguenti grandezze:

EXX – STRAIN TOTAL GREEN GLOBAL – Deformazione totale nella forma di Green-Lagrange in direzione X globale. EYY, GXY – significato analogo a EXX

SXX – STRESS TOTAL CAUCHY GLOBAL – Tensione totale espresso nella formulazione di Cauchy in direzione X globale. SYY, SXY – significato analogo a SXX

TDtX – DISPLA TOTAL TRANSL GLOBAL – Spostamento totale traslativo in direzione X globale. TDtY – significato analogo a TDtX.

DUSx – STRAIN TOTAL TRACTI LOCAL – Spostamento relative totale lungo la direzione tangente, nel sistema di riferimento x locale dell'interfaccia

STSx - STRESS TOTAL TRACTI LOCAL – Tensione trazione totale lungo la direzione tangente, nel sistema di riferimento x locale dell'interfaccia

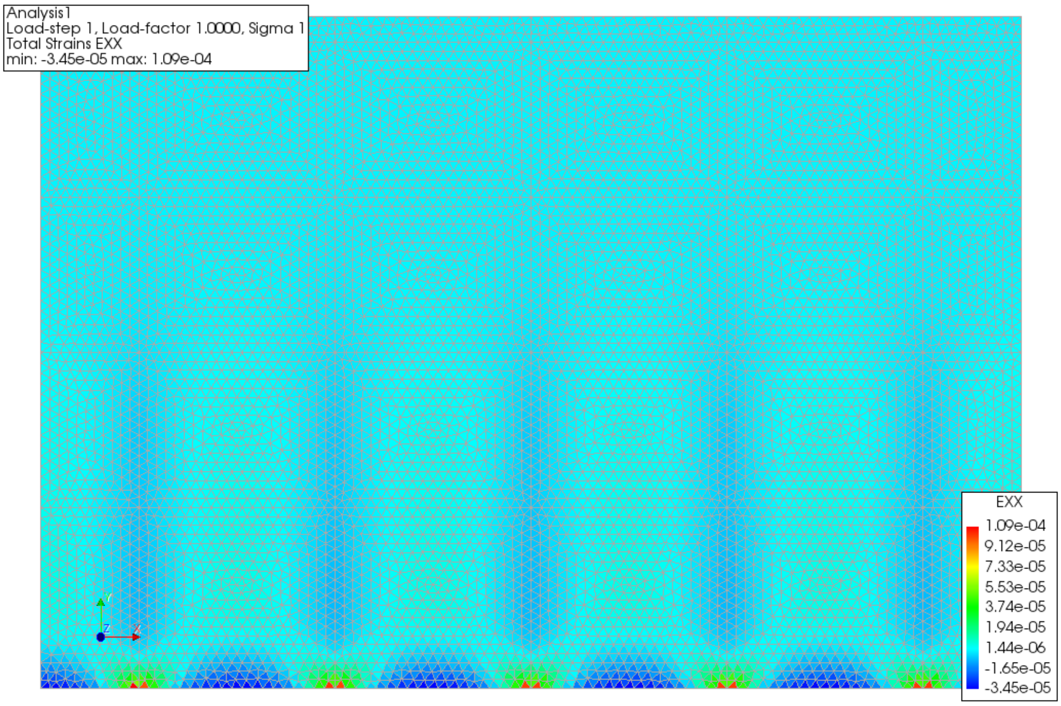


Figura 43: Deformazione ε_{xx} della matrice di calcestruzzo

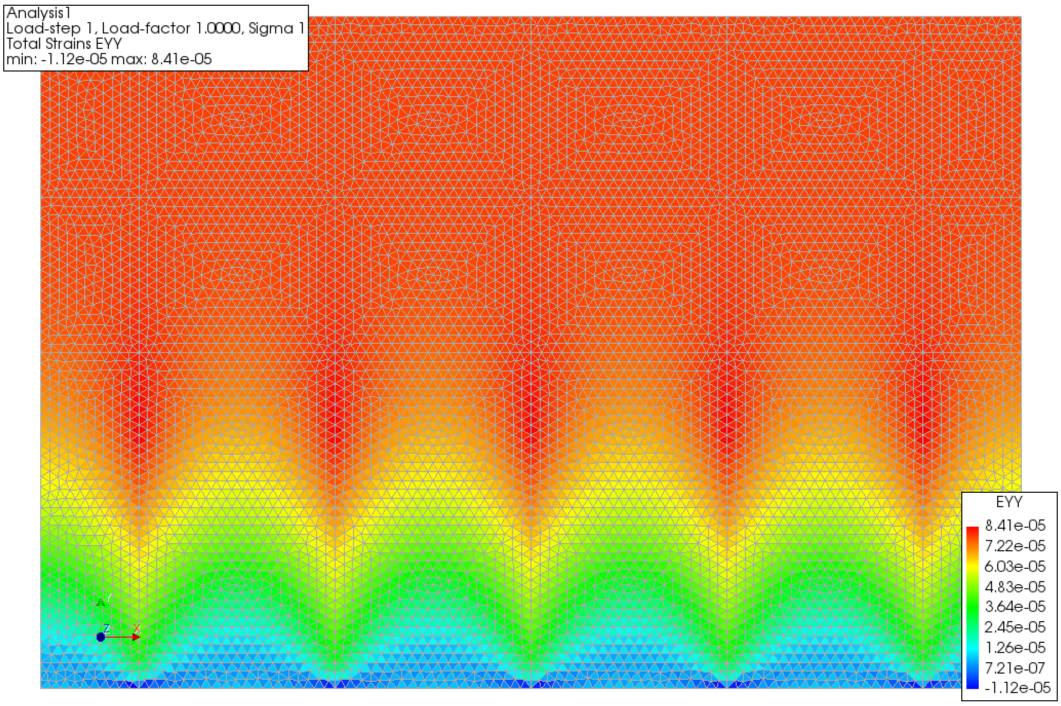


Figura 44: Deformazione ε_{yy} della matrice di calcestruzzo

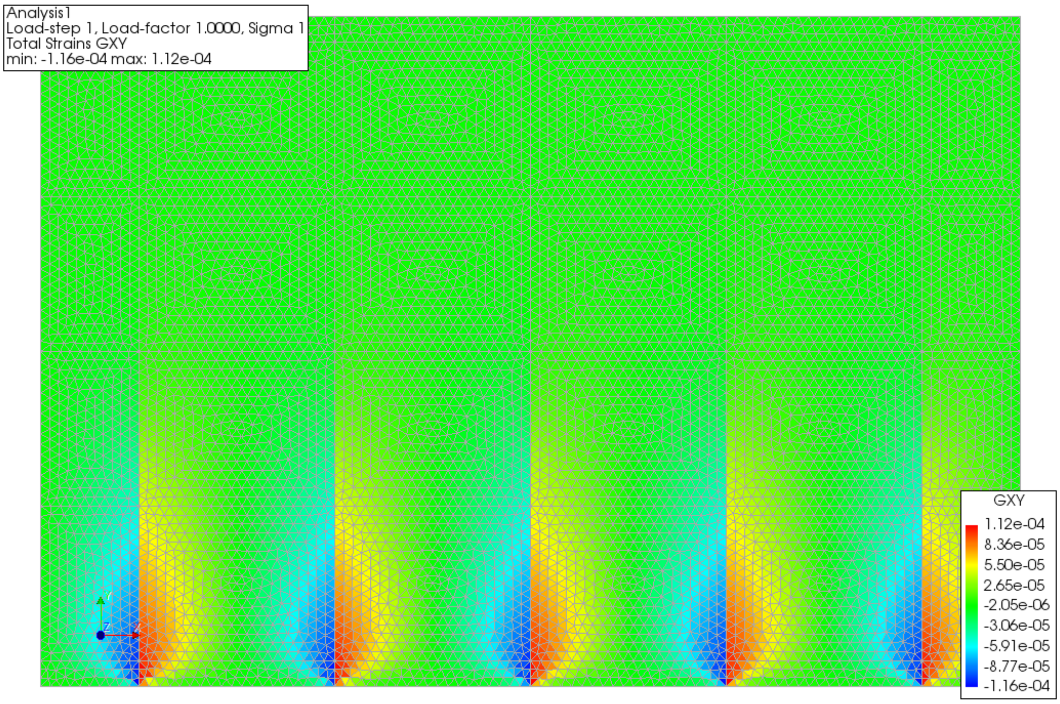


Figura 45: Deformazione γ_{xy} della matrice di calcestruzzo

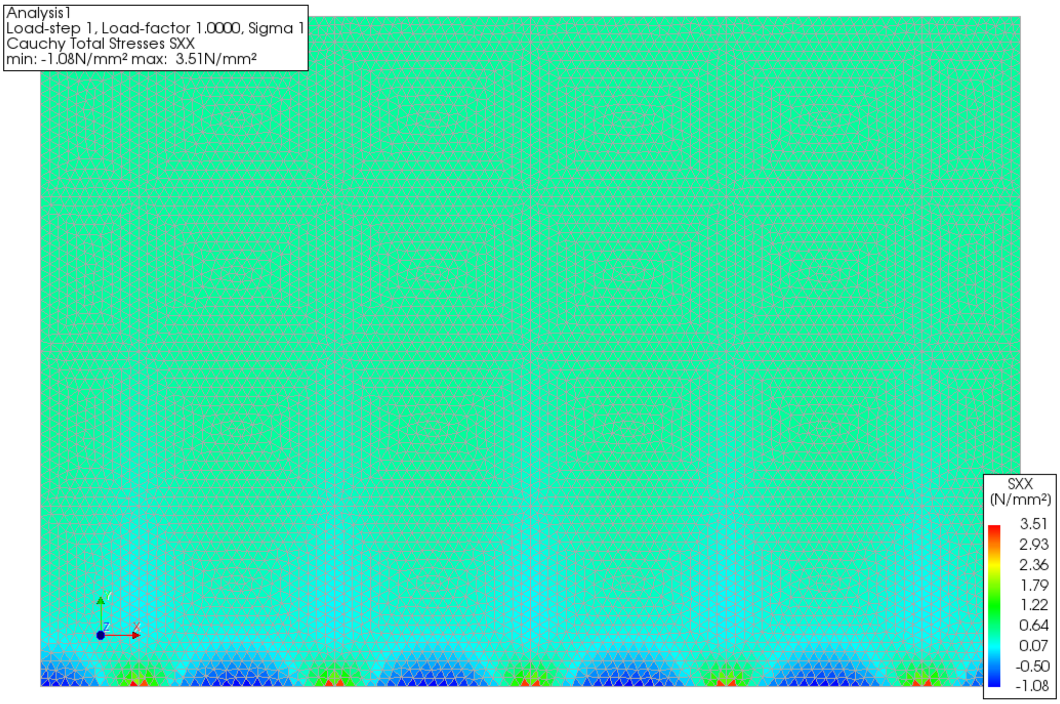


Figura 46: Tensioni σ_{xx} della matrice di calcestruzzo

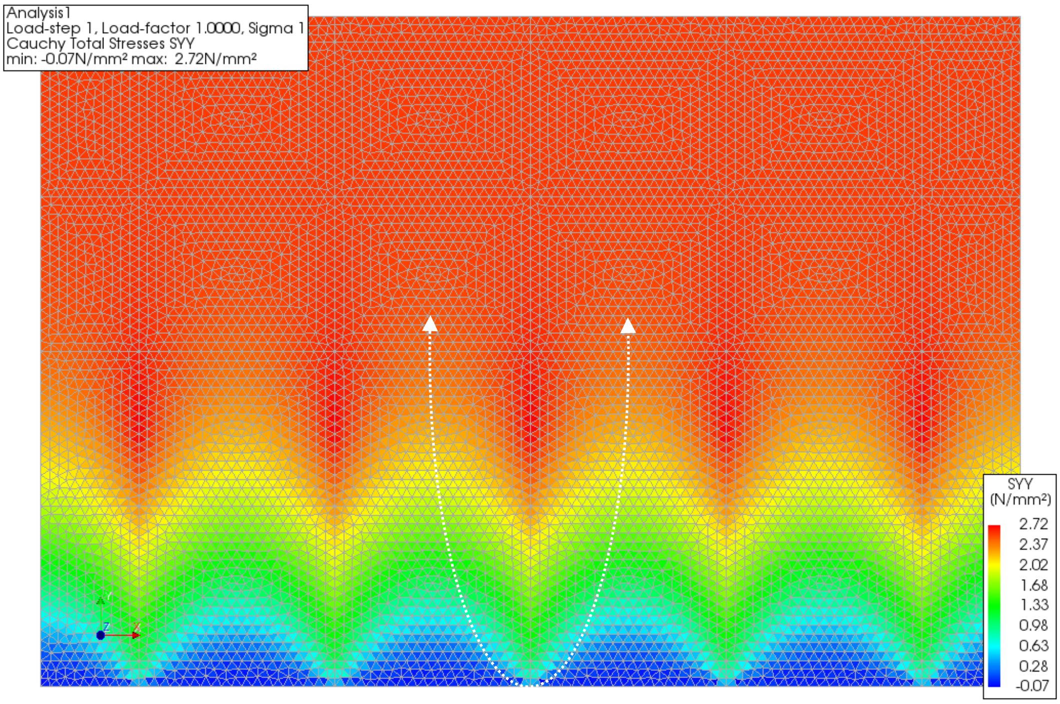


Figura 47: Tensioni σ_{yy} della matrice di calcestruzzo – Cono di diffusione delle tensioni

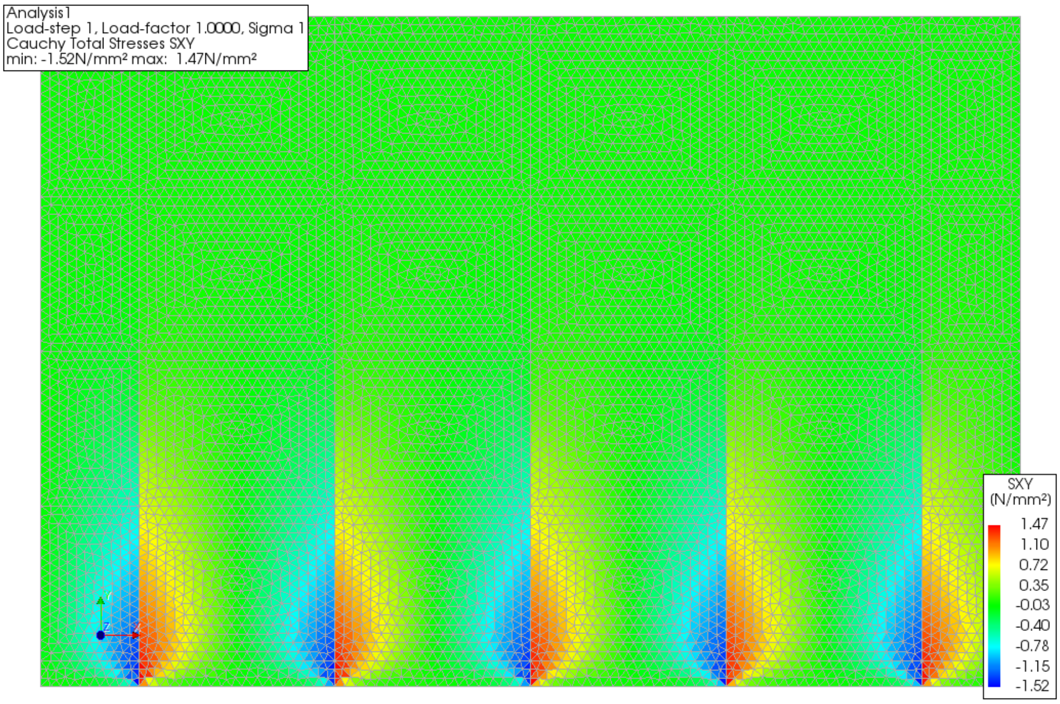


Figura 48: Tensioni τ_{xy} della matrice di calcestruzzo

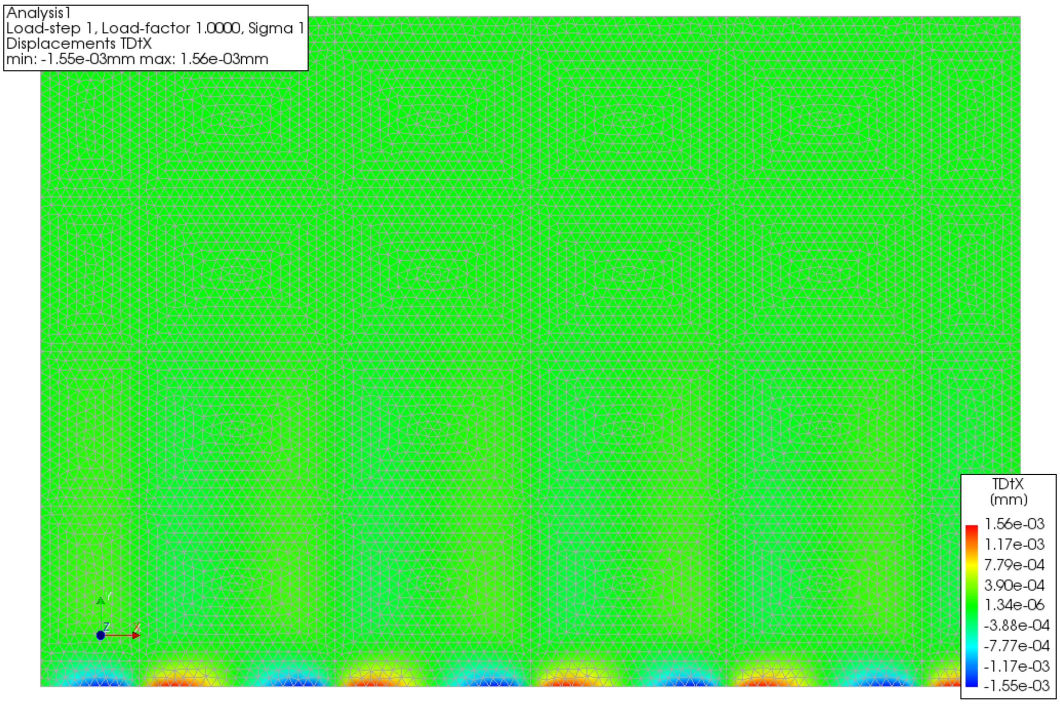


Figura 49: Campo di spostamenti δ_{xx} della matrice di calcestruzzo

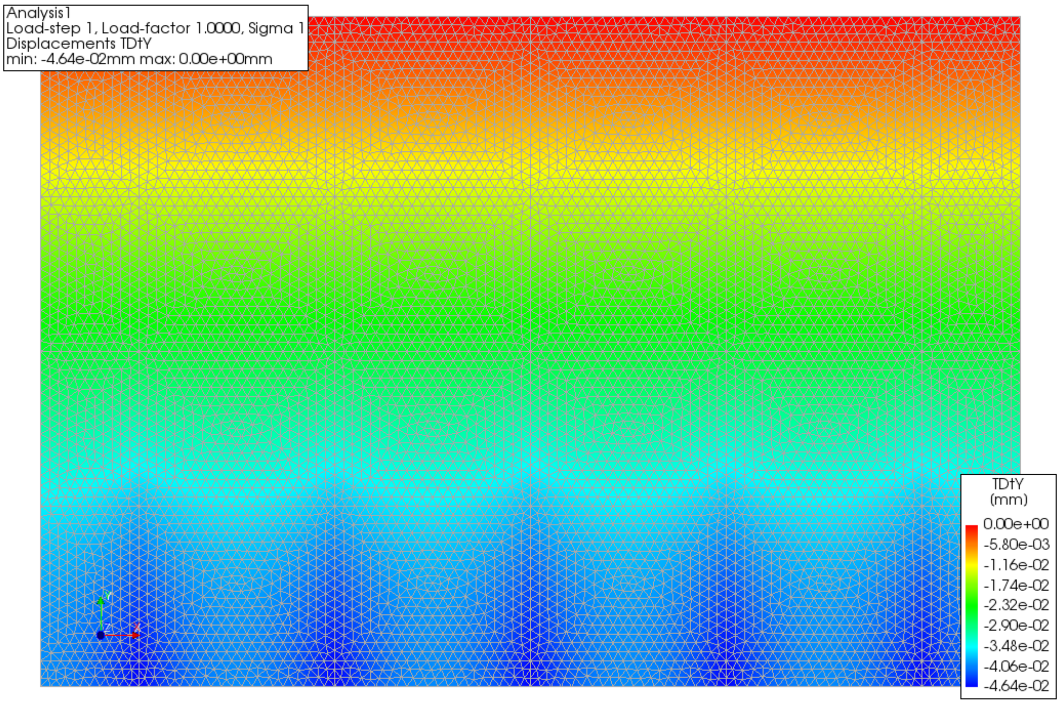


Figura 50: Campo di spostamenti δ_{yy} della matrice di calcestruzzo

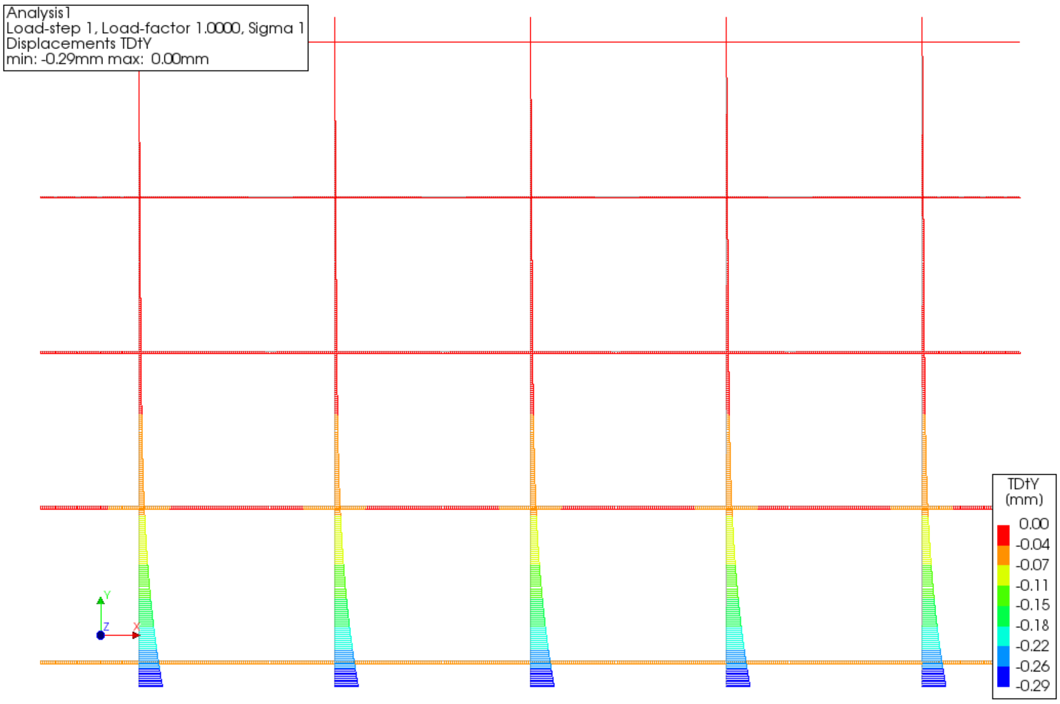


Figura 51: Campo di spostamenti δ_{yy} dell'armatura metallica

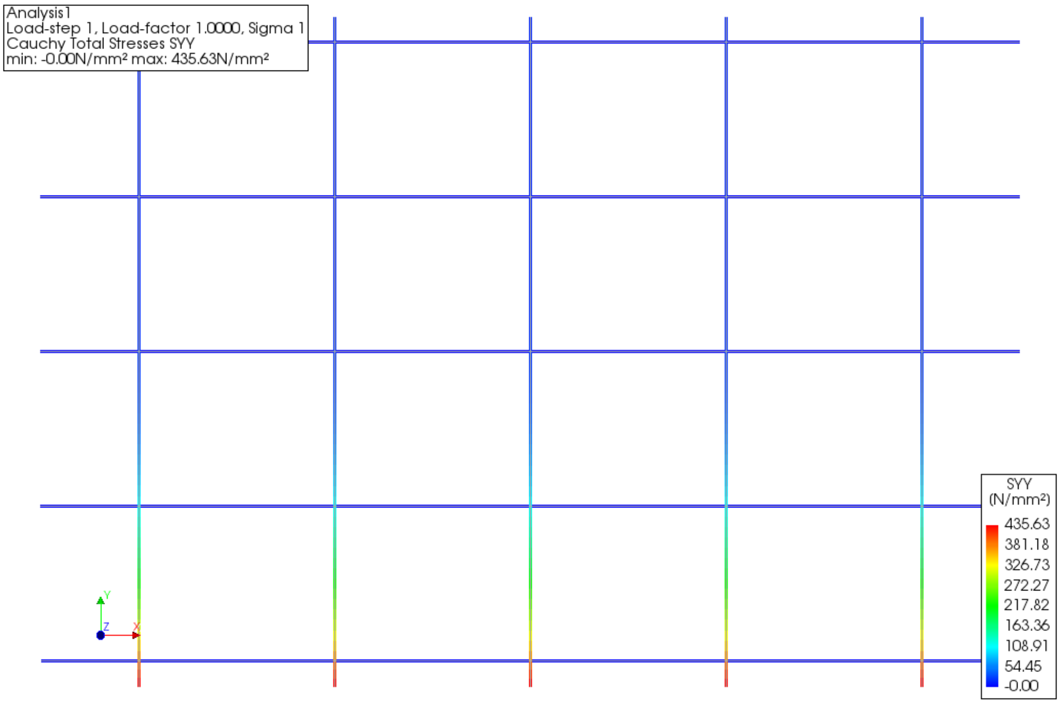


Figura 52: Tensioni σ_{yy} dell'armatura metallica

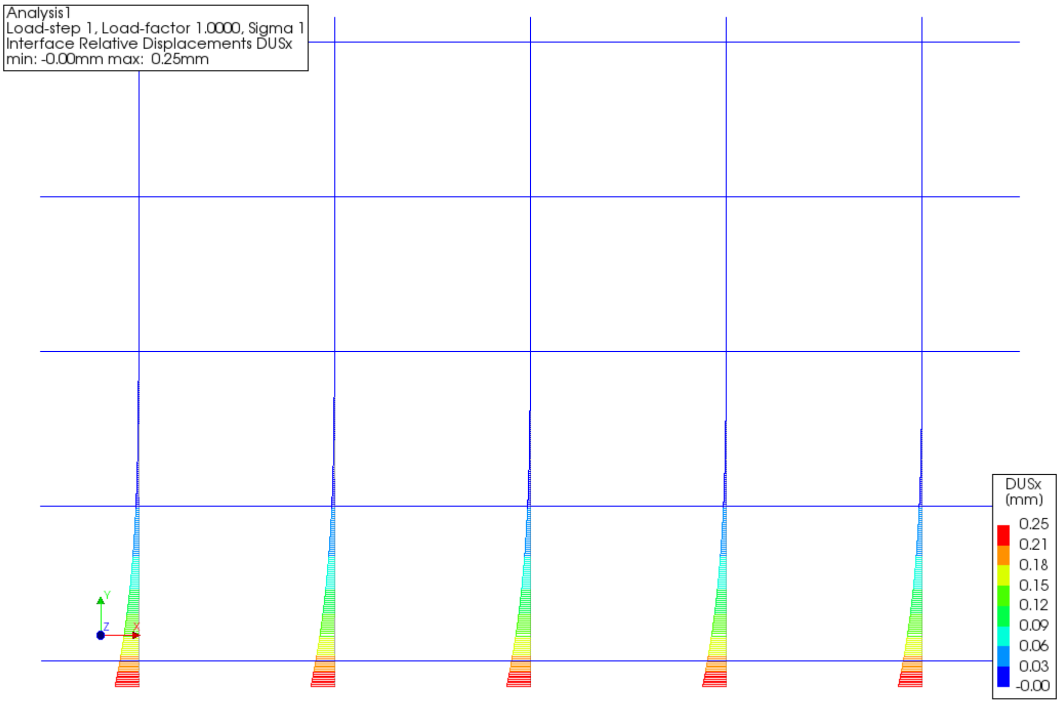


Figura 53: Campo degli spostamenti tangenziali registrati sull'elemento di interfaccia

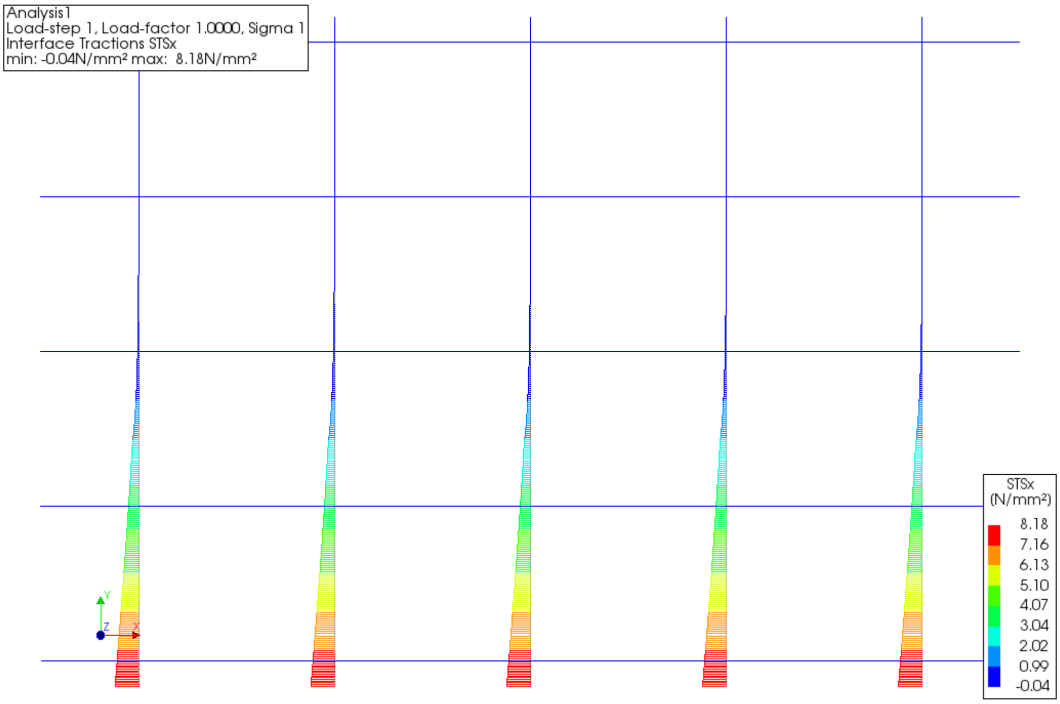


Figura 54: Campo delle tensioni tangenziali registrate sull'elemento di interfaccia

Dalla [Figura 43] è possibile osservare come la deformazione trasversale, ossia lungo x-x sia praticamente pressoché nulla in tutto l'elemento tranne che per una zona di bordo iniziale, la quale risente dell'inizio del trasferimento, tramite aderenza, della forza dall'armatura al calcestruzzo; si può notare come nella stessa [Figura 43] che la zona che risenta maggiormente delle deformazioni x-x sia quella porzione di calcestruzzo circostante la barra di armatura ed in particolare fino ad un'altezza pari circa proprio alla lunghezza di diffusione, cioè alla distanza minima tra le fessure riportata in [Tabella 4]

Più interessante risulta invece l'analisi della [Figura 44] e [Figura 47] riportanti la deformazione in direzione y-y e la tensione y-y: nell'intorno delle barre si può riconoscere in modo netto il cono di diffusione con il quale le tensioni, una volta trasferite alla matrice di calcestruzzo, si *diffondono* nell'elemento. In [Figura 47] viene evidenziato tale cono di diffusione tensionale con una linea tratteggiata.

Di rilevanza risulta la distribuzione delle tensioni tangenziali x-y di [Figura 48] e di deformazioni tangenziali x-y di [Figura 45] in cui emerge che il campo deformativo, e conseguentemente, il campo tensionale vengono perturbati unicamente nella zona circostante le barre. Al di fuori non si registrano tensioni-deformazioni tangenziali.

Infine, si passa ad esaminare la [Figura 53] e la [Figura 54]. Esse mostrano l'andamento degli scorrimenti relativi (slip) all'interfaccia e il relativo valore della tensione tangenziale che, agendo in direzione opposta alla trazione dell'armatura, provoca il graduale scaricamento di quest'ultima trasferendo tensione al calcestruzzo.

Capitolo 5.

Caso studio 2. Armature ortogonali inclinate di 45° rispetto ai lati

Il secondo caso studio di cui si riportano i risultati è analogo al precedente ma le armature risultano inclinate di 45° rispetto ai lati e, di conseguenza, inclinate di 45° rispetto alla direzione principale delle tensioni di trazione (direzione verticale). Tale configurazione geometrica equivale a richiedere $\alpha = \beta = 45°$. Per una geometria siffatta è ancora possibile, con una certa approssimazione, immaginare la sua decomposizione in modelli monodimensionali a tirante, come mostrato in [Figura 55]. A differenza del caso studiato in precedenza in cui i diversi tiranti *fittizi* erano semplicemente affiancati uno all'altro, questa volta tali elementi risultano sovrapposti l'uno all'altro con un grado di interazione maggiore; si capisce quindi come, per tale geometria, l'utilizzo della scomposizione a tirante monodimensionale, risulti un approccio con un grado di approssimazione maggiore rispetto a quanto visto nel Capitolo 4.

Per quanto riguarda la definizione della geometria dei tiranti *fittizi*, delle condizioni di vincolo e delle condizioni di carico si rimanda al Capitolo 4 in quanto valgono considerazioni analoghe. I diversi modelli che verranno discussi in seguito, al fine di rispettare la simmetria strutturale, saranno generati in modo che i nodi di intersezione delle armature in direzione α e β si trovino sui lati BC e DA; quest'operazione è resa semplice applicando *l'opzione 1* come valore della variabile *opt* dell'algoritmo Matlab.

Anche in questo caso si pone il problema relativo alla ricerca della tensione di trazione da applicare alle armature tale per cui, a diffusione avvenuta, si abbia il raggiungimento della resistenza a trazione f_{ctm} nella matrice di calcestruzzo. Il procedimento seguito è il medesimo già illustrato nel Capitolo 4 con la sola differenza che in questo caso si avranno due valori σ_α e σ_β in quanto, come mostrato in [] esistono due diversi tiranti monodimensionali, quello relativo alla direzione α e quello relativo alla direzione β.

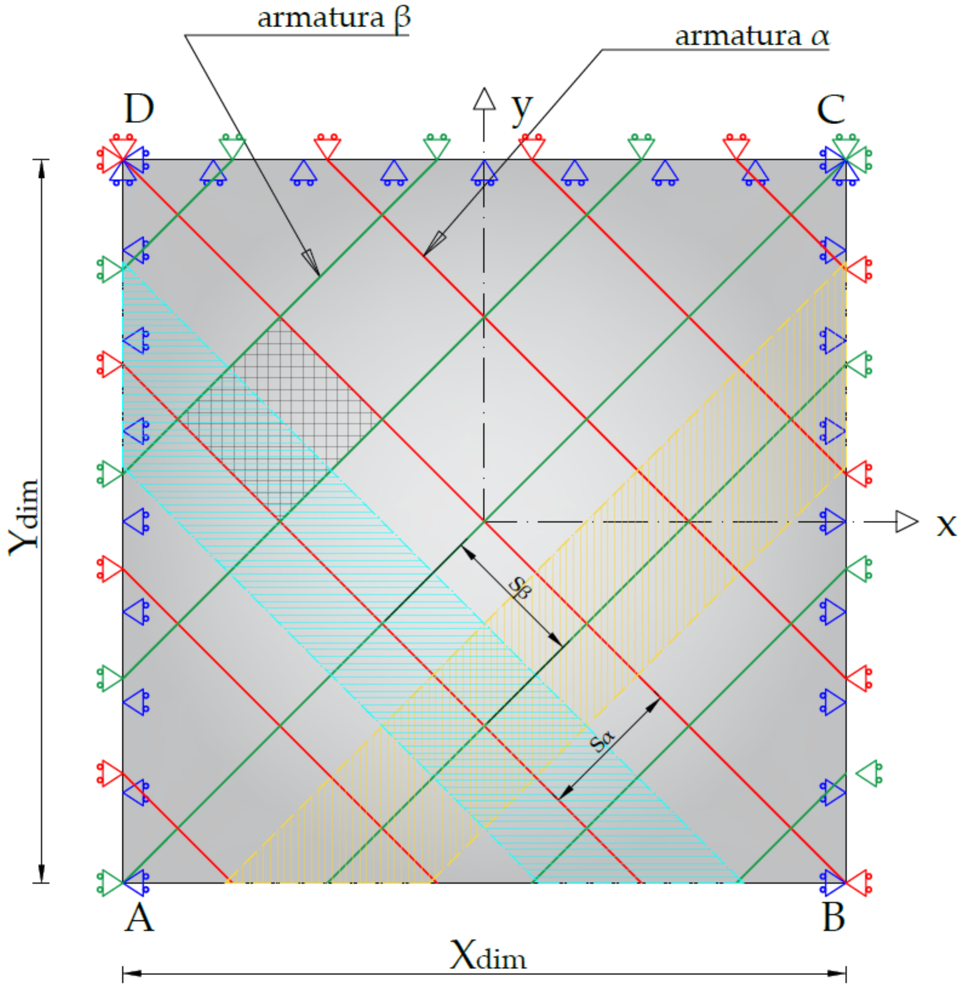


Figura 55: Geometria del caso studio 2. È possibile riconoscere la direzione dell'armatura α e β i cui angoli di inclinazione sono entrambi di 45°. Sono mostrate le condizioni di vincolo della matrice di calcestruzzo e dei nodi delle armature giacenti sul bordo. Viene infine messo in evidenza con una campitura gialla e azzurra il tirante monodimensionale "*fittizio*" che è possibile estrarre dalla geometria 2D in direzione rispettivamente β e α. La larghezza di tali tiranti risulta pari al passo delle armature, rispettivamente s_β e s_α.

La [Figura 55] mostra una medesima spaziatura nelle due direzioni, ossia $s_\alpha = s_\beta$ in quanto nei casi studio che si sono esaminati nel seguito si è assunta tale ipotesi geometrica sulla distanza interferro.

Lo studio è stato condotto prendendo in esame i diversi modelli esposti nella tabella sottostante [Tabella 8].

Caso	B_α [mm]	B_β [mm]	H [mm]	Φ_α [mm]	Φ_β [mm]	ϱ_α [%]	ϱ_β [%]	σ_α [MPa]	σ_β [MPa]
1.1	130	130	200	14	14	0.60%	0.60%	449	449
1.2	130	130	150	14	14	0.80%	0.80%	340	340
1.3	130	130	120	14	14	1.00%	1.00%	275	275
1.4	130	130	90	14	14	1.33%	1.33%	210	210
1.5	130	130	70	14	14	1.72%	1.72%	166	166
1.6	130	130	73.5	12	12	1.20%	1.20%	231	231
1.7	130	130	100	14	14	1.20%	1.20%	231	231
1.8	130	130	130	16	16	1.20%	1.20%	230	230
1.9	130	130	165	18	18	1.20%	1.20%	231	231
1.10	130	130	203	20	20	1.20%	1.20%	230	230
1.11	130	130	145	14	12	0.82%	0.60%	329	443
1.12	130	130	145	14	16	0.82%	1.08%	329	255
1.13	130	130	145	14	18	0.82%	1.37%	329	205
1.14	130	130	145	14	20	0.82%	1.69%	329	168

Tabella 8: Esposizione riassuntiva dei casi studio eseguiti per "*Armature ortogonali inclinate di 45° rispetto ai lati*". Nella tabella sono riportati, per ciascun caso, la base del tirante "*fittizio*" in direzione α e in direzione β ricavate dal modello 2D come descritto in precedenza [Figura 55], l'altezza ossia lo spessore della piastra, il diametro delle armature in direzione α e β e il rapporto percentuale di armatura di ciascuno dei due tiranti monodimensionali relativi alle due direzioni. Infine, si è riportata la tensione σ_α e la tensione σ_β con cui caricare i nodi delle armature giacenti su AB lungo le rispettive direzioni.

Si osserva che la tabella sopra riportata è stata suddivisa in tre sottogruppi:

- Casi da *1.1* a *1.5*: presentano lo stesso valore del diametro e della spaziatura delle barre nelle due direzioni, ma uno spessore della matrice decrescente; in questo modo si hanno rapporti percentuali d'armatura crescenti.

- Casi da *1.6* a *1.10*: ciascun caso presenta lo stesso diametro in entrambe le direzioni e quindi lo stesso rapporto percentuale di armatura. mantenendo la stessa dimensione della spaziatura e modificando lo spessore si aumentano i diametri lasciando inalterati i rapporti ϱ.

- Casi da *1.10* a *1.14*: La geometria dei tiranti in termini di base e altezza rimane invariata per tutti i casi. Si aumenta il diametro in una sola direzione, lasciando l'armatura nell'altra direzione inalterata.

Si osserva che per gli ultimi 4 casi le forze applicate alle armature in direzione α e in direzione β differiscono, in quanto si sono utilizzati ferri di diverso diametro. Per garantire l'equilibrio di forze in direzione orizzontale si dovranno applicare delle tensioni tangenziali sul lato AB, come già discusso in via generale nel Capitolo 3. Di seguito viene proposta la soluzione relativa al solo caso 1.10, a titolo di esempio, procedendo con l'applicazione delle formulazioni [3.1] e [3.2].

$$R_H = N_\alpha\, \sigma_\alpha\, A_{s,\alpha} - N_\beta\, \sigma_\beta\, A_{s,\beta} = 5 \cdot 329 \cdot 49\pi - 5 \cdot 443 \cdot 36\pi = 2763\ [N]$$

Assumendo l'ipotesi di τ_{AB} costantemente distribuite lungo la base, il loro valore risulta

$$\tau_{AB} = \frac{F_\alpha - F_\beta}{x_{dim} \cdot z_{dim}} = \frac{2763}{919 \cdot 145} = 0.021\ [MPa]$$

La direzione di applicazione risulta concorde alla direzione -x, come mostrato in [Figura 56] dove viene rappresentato un particolare del lato AB in riferimento al caso 1.10.

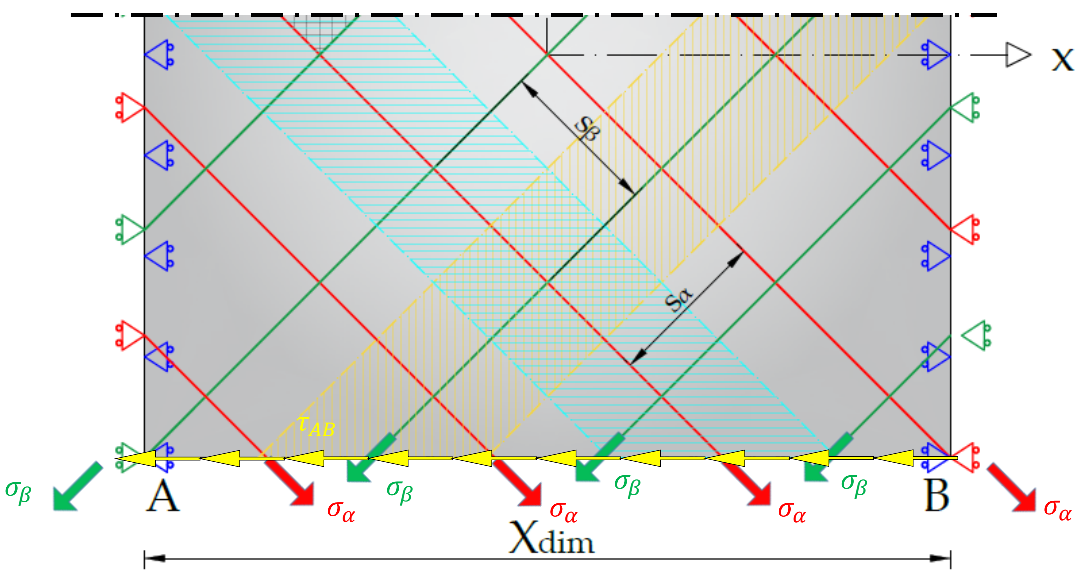


Figura 56: Rappresentazione dell'andamento delle tensioni tangenziali che nasce nel caso 1.10 a causa dell'utilizzo di un'armatura di diametro diverso in direzione α e β.

Si assumono inoltre i seguenti dati relativi alla matrice di calcestruzzo e all'acciaio delle armature:

E_s	200000 [MPa]		Cls	C25/30

A questo punto si è risolto ciascun caso attraverso il software DIANA, applicando ai nodi delle armature giacenti sul lato AB la tensione riportata nella [Tabella 8].

Valgono in questo caso le medesime osservazioni già riportate per il Caso studio 1 nel Capitolo 4: risulta necessario eseguire l'operazione di scalatura delle tensioni σ_α e σ_β in mono da ottenere, a diffusione avvenuta, il valore di f_{ctm} nella matrice di calcestruzzo. Il procedimento di scalatura[†] si esegue con le medesime operazioni già riportate per il Caso studio 1, con la sola differenza che le coppie $(y, \sigma_{c,y})$ che si riportano sul grafico [Figura 58] sono ricavate con la seguente limitazione al valore delle ascisse:

$$\sigma_{c,y}(x,y) \qquad con\ x\ \in \left[-k\cdot\frac{x_{dim}}{2};k\cdot\frac{x_{dim}}{2}\right]$$

in cui k è un valore minore di 1 scelto in base al caso in esame (nel Caso studio 1 si era assunto implicitamente $k = 1$).

Tale limitazione introdotta con il fattore k equivale a non considerare, ai fini dell'interpolazione per ottenere la curva di diffusione delle tensioni, i valori delle $\sigma_{c,y}$ nei nodi posti al di fuori dell'intervallo $[-k\cdot x_{dim}/2; k\cdot x_{dim}/2]$; questo risulta necessario ad escludere i nodi più vicino ai bordi BC e DA in quanto in tali zone si hanno degli effetti di bordo di intensificazione delle tensioni causate dalla presenza delle barre di armature che raggiungono i lati della matrice di calcestruzzo. Tali nodi apporterebbero quindi un contributo errato allo studio del campo tensionale, non rappresentando esattamente una condizione di *campo interno*. Il ragionamento qui esposto è chiarito in [Figura 57].

Anche per questo secondo caso studio viene proposta, a titolo esemplificativo, la curva di diffusione, mostrata in [Figura 58].

Si procede quindi alla determinazione, con i medesimi criteri enunciati già per il Caso studio 1 alla determinazione della distanza di diffusione, ossia la distanza minima di

[†] Nei casi dall'1.10 all'1.14 il fattore di scala calcolato si applica sia alle tensioni di trazione delle armature che alle tensioni tangenziali τ_{AB} sulla matrice di calcestruzzo.

fessurazione. Sono riportati i valori che si sono ottenuti per il Caso studio *1.1*, avendo scelto

$$a = 2.5\%\ e\ b = 5\%$$

Le [4.3] e [4.4] sono entrambe soddisfatte per

$$y_{cr} = -87\ [mm] \rightarrow \sigma_{cr} = 2.55\ [MPa]$$

$$\sigma_{min,y_{cr}} = 2.44\ [MPa] - \sigma_{max,y_{cr}} = 2.63\ [MPa]$$

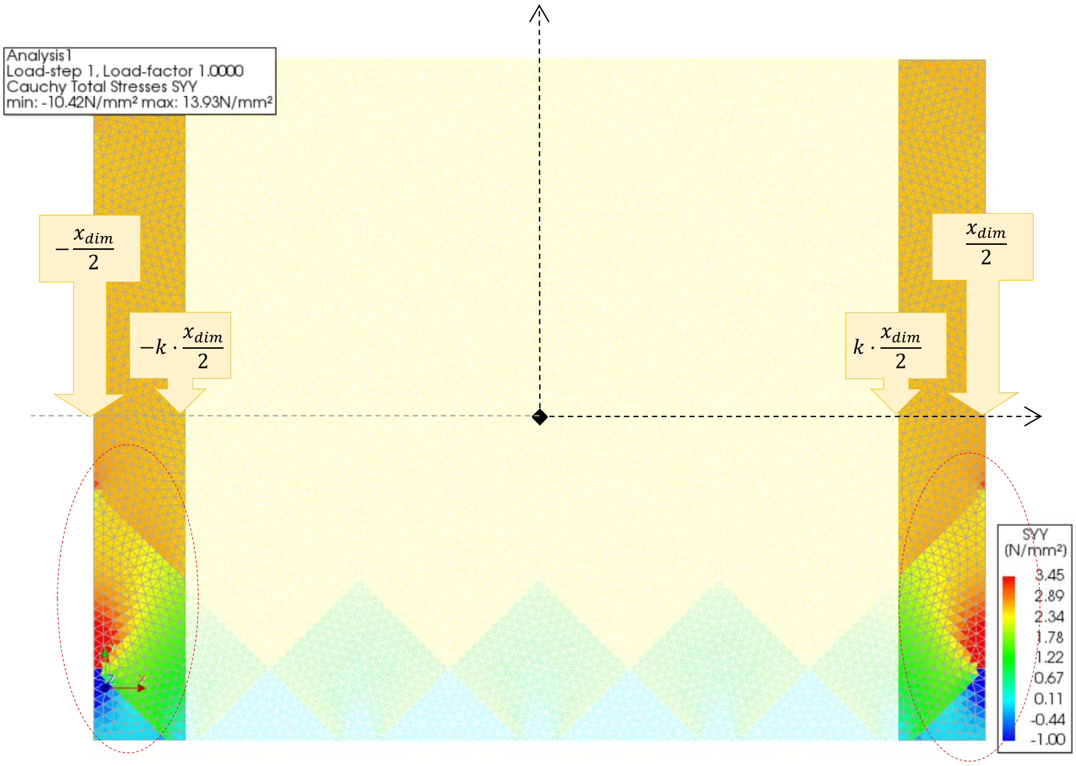


Figura 57: Zone di bordo i cui nodi non sono presi in considerazione nel procedimento di interpolazione per definire le curve di diffusione ($\left[-k \cdot \frac{x_{dim}}{2}; -\frac{x_{dim}}{2}\right]$ e $\left[k \cdot \frac{x_{dim}}{2}; \frac{x_{dim}}{2}\right]$). I valori di $\sigma_{c,y}$ sono considerati per i soli nodi della zona centrale $\left[-k \cdot \frac{x_{dim}}{2}; k \cdot \frac{x_{dim}}{2}\right]$. Nei cerchi rossi sono individuate le zone di disturbo tensionale dovute all'ancoraggio delle armature sul bordo.

Nei 14 casi oggetto di studio nel seguente Capitolo di è scelto di utilizzare il valore k pari a 0.80. Tale valore è stato ricavato noto $x_{dim} = 919.2\ [mm]$ (uguale in tutti i casi) e scegliendo $k \cdot x_{dim} = 735.4\ [mm]$ in modo da garantire la simmetria.

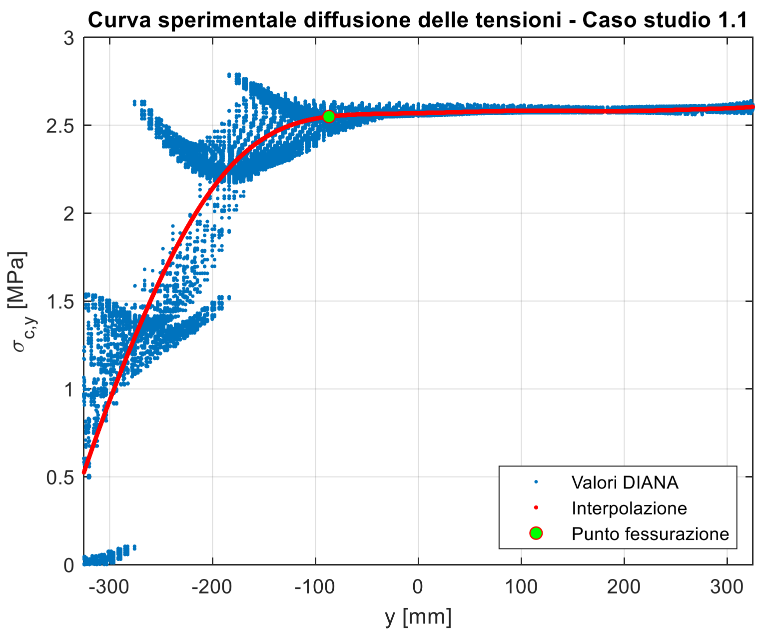


Figura 58: Curva di diffusione delle tensioni per il Caso studio 1.1 ottenuta dal processo di interpolazione.

Le distanze di fessurazione per i 14 casi studiati sono riassunte nella seguente [Tabella 9]

	Distanza MINIMA fessurazione [mm]
Caso	**DIANA – risultati numerici**
1.1	263
1.2	232
1.3	201
1.4	185
1.5	185
1.6	185
1.7	188
1.8	205
1.9	239
1.10	256
1.11	232
1.12	223
1.13	213
1.14	211

Tabella 9: Valori dell'ordinata y_{cr} alla quale si sviluppa la fessurazione. Tali valori rappresentano la distanza minima di fessurazione, cioè la distanza necessaria alla diffusione delle tensioni dall'armatura al calcestruzzo

A questo punto è possibile applicare le formulazioni teoriche trattate nel [Capitolo 2] al fine di valutare la distanza alla quale si potranno formare due fessure consecutive. In particolare, in questo caso occorre applicare la formulazione [2.17] di seguito richiamata

$$s_r = \frac{1}{\frac{cos\theta}{s_{r,y}} + \frac{sin\theta}{s_{r,x}}}$$

in cui $s_{r,y}$ e $s_{r,x}$ sono le distanze valutate con le formulazioni normative per il problema monodimensionale. Le normative che fanno espresso riferimento alla [2.17] sono soltanto le seguenti:

- EN 1992-1-1:2004
- ENV 1992-1-1:1991
- Model Code 1990
- Model Code 2010
- ECP 203 – 2007.

Le altre normative non menzionate nell'elenco sopra riportato non fanno alcun riferimento all'espressione [2.17] e quindi si è deciso di non considerarle nello studio dei 14 casi trattati nel presente capitolo.

Risulta chiaro quindi che per eseguire un confronto tra le diverse normative sarà necessario distinguere le grandezze che si stanno raffrontando, secondo la seguente suddivisione:

- EN 1992-1-1:2004, Model Code 1990, Model Code 2010 forniscono i valori della distanza massima alla quale possono trovarsi due fessure contigue in fessurazione stabilizzata. In realtà il Model Code 2010 fornisce la distanza minima alla quale si può formare una nuova fessura. La massima si è assunta pari al doppio della minima.
- EN 1992-1-1:2004, Model Code 2010, Model Code 1990 forniscono i valori minimi della spaziatura tra le fessure. In particolare, i valori minimi per quanto riguarda l'EN 1992-1-1:2004 e il Model Code 1990

sono stati ricavati dimezzando i valori massimi calcolati dalla formulazione analitica normativa.

- ENV 1992-1-1:1991, Model Code 1990, ECP 203-2007 forniscono i valori medi tra le fessure raggiunta la fase di fessurazione stabilizzata. In questo caso il valo medio per il Model Code 1990 è stato ricavato come suggerito dalla medesima normativa, ossia:

$$s_{r,mean} = \frac{2}{3} \cdot s_{r,max}$$

Prima di procedere si vuole mettere in luce un aspetto legato all'applicazione della formula di combinazione [2.17] nel calcolo della distanza minima, media e massima. Se per esempio si vuole determinare la distanza minima di fessurazione $s_{r,MIN}$ valutandola con la normativa EN 1992-1-1:2004, si può procedere seguendo due strade (si ricorda che l'EN 1992-1-1:2004 permette di valutare le distanze $s_{r,x,MAX}$ e $s_{r,y,MAX}$ massime per il modello 1D):

- Metodo A) Si determina $s_{r,MAX}$ tramite la [2.17]

$$s_{r,MAX} = \frac{1}{\frac{\cos(\theta)}{s_{r,y,MAX}} + \frac{\sin(\theta)}{s_{r,x,MAX}}}$$

e si dimezza il risultato

$$s_{r,MIN} = \frac{0.5}{\frac{\cos(\theta)}{s_{r,y,MAX}} + \frac{\sin(\theta)}{s_{r,x,MAX}}}$$

- Metodo B) Si valutano le distanze minime di fessurazione 1D nelle due direzioni come

$$s_{r,x,MIN} = \frac{s_{r,x,MAX}}{2}$$

$$s_{r,y,MIN} = \frac{s_{r,y,MAX}}{2}$$

combinando nella [2.17] direttamente i minimi

$$s_{r,MIN} = \frac{1}{\frac{\cos(\theta)}{s_{r,y,MIN}} + \frac{\sin(\theta)}{s_{r,x,MIN}}} = \frac{1}{\frac{\cos(\theta)}{0.5 \cdot s_{r,y,MAX}} + \frac{\sin(\theta)}{0.5 \cdot s_{r,x,MAX}}} = \frac{0.5}{\frac{\cos(\theta)}{s_{r,y,MAX}} + \frac{\sin(\theta)}{s_{r,x,MAX}}}$$

Quello che è possibile osservare è che, indipendentemente dal modo di combinare le distanze di fessurazione nell'espressione [2.17], il risultato che si ottiene risulta sempre essere il medesimo. Ragionamenti simili possono essere fatti anche per tutti gli altri casi.

Si può quindi ora procedere al calcolo, per i diversi modelli riportati in [Tabella 8] della distanza di formazione delle fessure, secondo i diversi approcci normativi. Di seguito ci si è limitati a riportare i risultati finali relativi alla distanza di fessurazione minima, media e massima

	Distanza MINIMA – 1D [mm]						Distanza MINIMA – 2D [mm]		
	EN 1992-1-1:2004		Model Code 1990		Model Code 2010		EN 1992-1-1:2004	Model Code 1990	Model Code 2010
Caso\Dir.	α	β	α	β	α	β	-	-	-
1.1	558	558	326	326	419	419	394	231	297
1.2	415	415	244	244	312	312	293	173	221
1.3	329	329	195	195	248	248	233	138	175
1.4	243	243	146	146	184	184	172	103	130
1.5	186	186	113	113	141	141	131	80	100
1.6	223	223	139	139	170	170	157	98	120
1.7	272	272	162	162	205	205	192	115	145
1.8	323	323	185	185	242	242	228	131	171
1.9	380	380	208	208	282	282	269	147	199
1.10	438	438	231	231	322	322	310	163	228
1.11	400	451	236	276	302	343	300	180	227
1.12	400	362	236	206	302	271	269	156	202
1.13	400	332	236	183	302	246	257	146	192
1.14	400	307	236	164	302	226	246	137	183

Tabella 10: Confronto delle distanze MINIME tra le fessure valutate secondo i diversi approcci normativi. Si sono riportati sia le distanze relative al modello 1D dei tiranti *fittizi* in direzione α e β che la loro combinazione tramite l'espressione [2.17] – Metodo B), per un angolo $\theta = 45°$

	Distanza MEDIA – 1D [mm]						Distanza MEDIA – 2D [mm]		
	ENV 1992-1-1:1991		Model Code 1990		ECP 203-2007		ENV 1992-1-1:1991	Model Code 1990	ECP 203-2007
Caso\Dir.	α	β	α	β	α	β	-	-	-
1.1	520	520	435	435	520	520	368	308	368
1.2	402	402	326	326	402	402	284	230	284
1.3	331	331	260	260	331	331	234	184	234
1.4	260	260	194	194	260	260	184	138	184
1.5	213	213	151	151	213	213	150	107	150
1.6	250	250	186	186	250	250	177	131	177
1.7	284	284	216	216	284	284	201	153	201
1.8	316	316	246	246	316	316	223	174	223
1.9	350	350	278	278	350	350	247	196	247
1.10	382	382	307	307	382	382	270	217	270
1.11	390	448	315	368	390	448	295	240	295
1.12	390	347	315	275	390	347	260	208	260
1.13	390	313	315	244	390	313	246	194	246
1.14	390	286	315	219	390	286	233	182	233

Tabella 11: Confronto delle distanze MEDIE tra le fessure valutate secondo i diversi approcci normativi. Si sono riportati sia le distanze relative al modello 1D dei tiranti *fittizi* in direzione α e β che la loro combinazione tramite l'espressione [2.17] – Metodo B), per un angolo $\theta = 45°$

	Distanza MASSIMA – 1D [mm]						Distanza MASSIMA – 2D [mm]		
	EN 1992-1-1:2004		Model Code 1990		Model Code 2010		EN 1992-1-1:2004	Model Code 1990	Model Code 2010
Caso\Dir.	α	β	α	β	α	β	-	-	-
1.1	1115	1115	653	653	839	839	789	462	593
1.2	829	829	489	489	625	625	586	346	442
1.3	658	658	390	390	496	496	465	276	351
1.4	486	486	292	292	368	368	344	206	260
1.5	372	372	226	226	282	282	263	160	199
1.6	445	445	278	278	340	340	315	197	240
1.7	543	543	325	325	411	411	384	229	290
1.8	646	646	369	369	483	483	457	261	342
1.9	760	760	416	416	563	563	537	294	398

1.10	876	876	461	461	644	644	619	326	455
1.11	801	902	472	552	603	685	600	360	454
1.12	801	724	472	412	603	541	538	311	403
1.13	801	663	472	365	603	492	513	291	383
1.14	801	614	472	328	603	453	491	274	366

Tabella 12: Confronto delle distanze MASSIME tra le fessure valutate secondo i diversi approcci normativi. Si sono riportati sia le distanze relative al modello 1D dei tiranti *fittizi* in direzione α e β che la loro combinazione tramite l'espressione [2.17] – Metodo B), per un angolo $\theta = 45°$

La rappresentazione grafica dei risultati ottenuti nella [Tabella 10], [Tabella 11] e [Tabella 12] è riportata di seguito, in [Figura 59], [Figura 60] e [Figura 61]. Si riportano inoltre, sui grafici della distanza minima, i risultati forniti dal software DIANA.

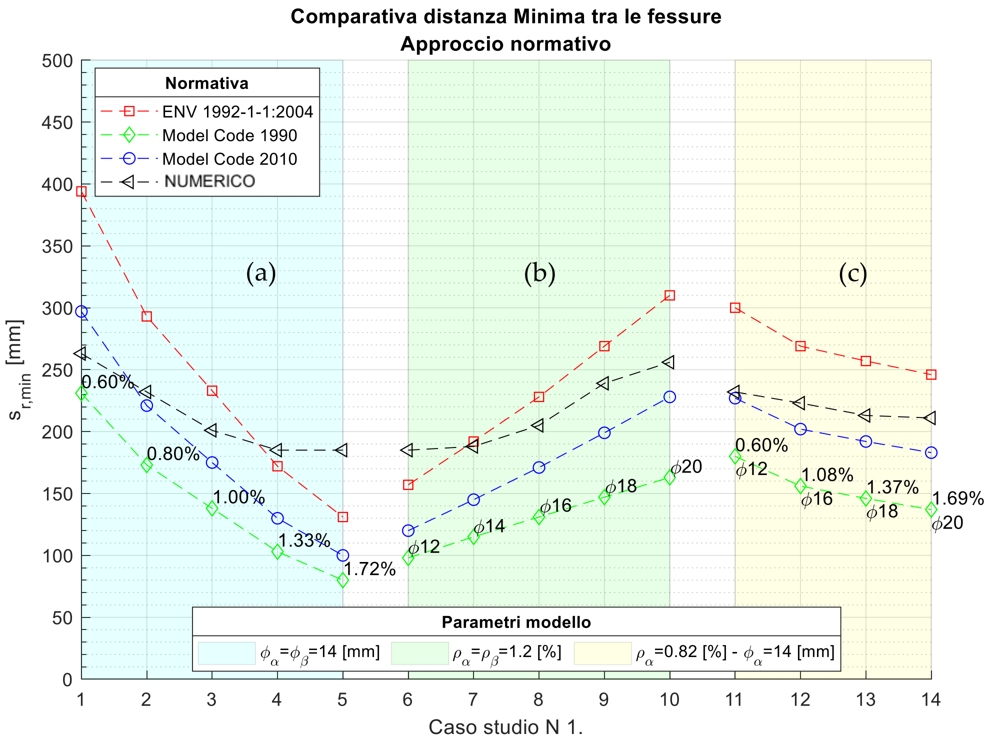


Figura 59: Grafico comparativo tra la distanza di fessurazione MINIMA calcolata secondo gli approcci normativi e i risultati ottenuti con il software DIANA. (a) – studio dell'influenza dell'aumento del rapporto percentuale di armatura, a parità di diametro in direzione α e β (14 [mm]), ottenuto modificando lo spessore della matrice di calcestruzzo e lasciando invariata la spaziatura tra le barre, uguale nelle due direzioni. (b) – studio dell'influenza dell'aumento del diametro ($\phi_\alpha = \phi_\beta$), a parità di rapporto percentuale, ottenuto modificando lo spessore della matrice di calcestruzzo e lasciando invariata la spaziatura tra le barre, uguale nelle due direzioni. (c) – effetto della variazione della variazione di ϕ_β, mantenendo ϕ_α, le spaziature nelle due direzioni e lo spessore costante per tutti e 4 i casi.

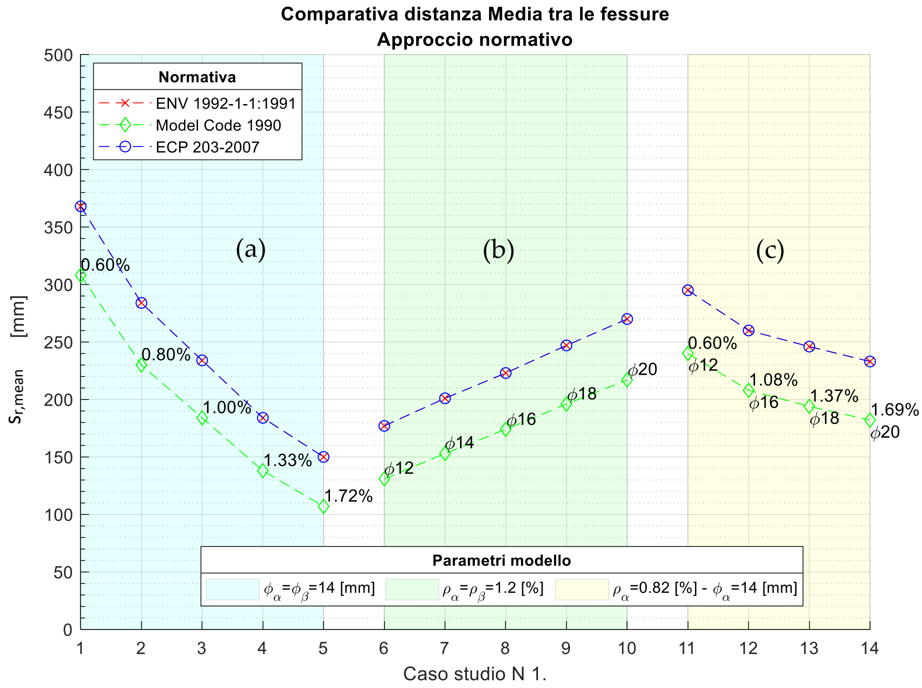


Figura 60: Grafico comparativo tra la distanza di fessurazione MEDIA calcolata secondo gli approcci normativi. (a), (b) e (c) – vedere [Figura 59]

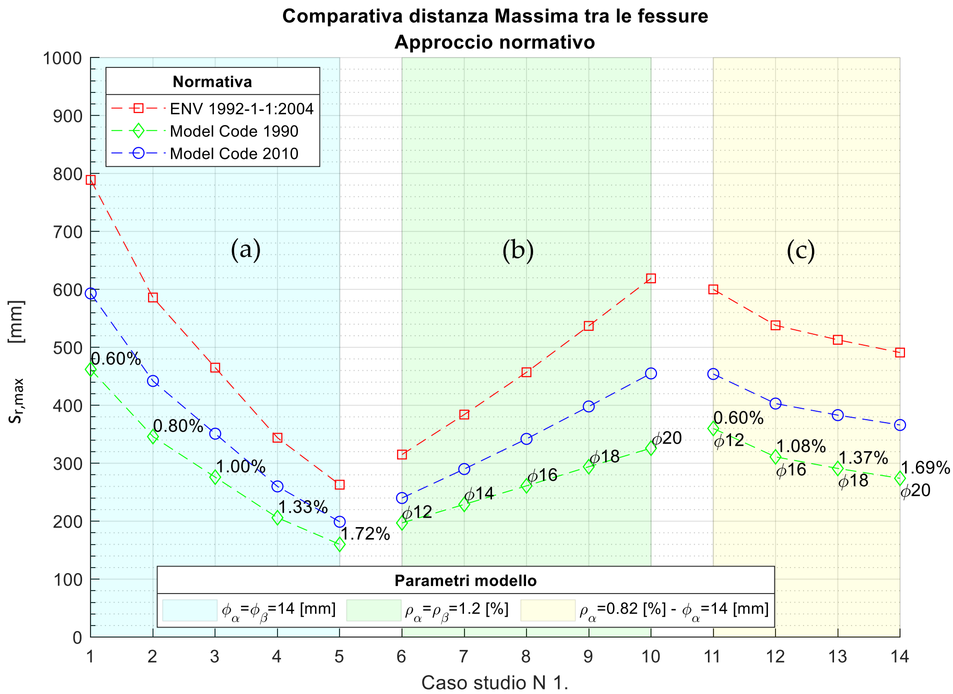


Figura 61: Grafico comparativo tra la distanza di fessurazione MASSIMA calcolata secondo gli approcci normativi. (a), (b) e (c) – vedere [Figura 59]

Dai grafici precedenti si possono fare i seguenti ragionamenti:

- Caso (a). I sotto casi dall' *1.1* all' *1.5* descrivono l'influenza che la variazione del rapporto di armatura genera nei confronti della distanza di fessurazione. In particolare, i 5 modelli considerati presentano la medesima spaziatura tra le armature ($s_\alpha = s_\beta = 130\ [mm]$) e il medesimo diametro ($\phi_\alpha = \phi_\beta = 14\ [mm]$) in entrambe le direzioni. Modificando opportunamente lo spessore della matrice di calcestruzzo si ottengono valori crescenti del rapporto d'armatura, che risulta quindi l'unico parametro ad influenzare il valore di s_r.

  In particolare, si osserva che incrementando ρ si ottiene una riduzione nella distanza tra le fessure, come già osservato nel Caso studio 1. I valori sperimentali forniti dal software DIANA hanno un andamento in accordo con le prescrizioni del Model Code 2010 nel caso di bassi rapporti d'armatura, viceversa, a mano a mano che il rapporto ρ cresce, tendono ai valori dell'ENV 1992-1-1:2004. Per elementi più armati i valori sperimentali superano anche quelli ottenuti dell'Eurocodice.

- Caso (b). I sotto casi dall' *1.6* all' *1.10* descrivono l'influenza che la variazione del diametro ha nei confronti della fessurazione. Si mantiene costante il rapporto d'armatura ($\rho_\alpha = \rho_\beta = 1.2\%$) e la spaziatura ($s_\alpha = s_\beta = 130\ [mm]$) e si varia opportunamente lo spessore.

  I risultati mostrano un incremento della distanza di fessurazione con l'aumentare di ϕ. Anche i dati sperimentali mostrano questo trend ed in particolare, per bassi valori del diametro DIANA fornisce una distanza s_r più grande rispetto a quella stimata con l'ENV 1992-1-1:2004; viceversa quando ϕ raggiunge valori più grandi la curva sperimentale fornisce risultati minori rispetto all' Eurocodice.

- Caso (c). I sotto casi dall' *1.11* all' *1.14* descrivono invece l'influenza che la variazione della percentuale di armatura (ottenuta tramite una variazione del diametro) in una sola direzione (β) hanno sul fenomeno della fessurazione bidimensionale. In particolare, si assumono $s_\alpha = s_\beta = 130\ [mm]$ e $t = 145\ [mm]$.

  La normativa fornisce una leggera diminuzione passando dal caso *1.11* all' *1.14.* Si tratta comunque di una diminuzione molto modesta da un massimo di circa 5.4 cm per l'ENV 1992-1-1:2004 fino ad un minimo di 4.3 cm per il Model Code 1990. I dati sperimentali mostrano invece una diminuzione meno severa, di soli 2.1 cm

L'interpretazione del caso (c) potrebbe ricercarsi considerando l'effetto di una variazione combinata di diametro e di rapporto di armatura.

Infatti, passando dal caso *1.11* all' *1.14* si registra un incremento del diametro e un incremento del rapporto di armatura. Singolarmente questi due parametri sono stati studiati nel caso (a) e nel caso (b) precedentemente descritti. L'incremento di diametro porta ad una crescita della distanza di fessurazione mentre l'incremento della percentuale di armatura porta ad una diminuzione.

Analizzando i risultati offerti dalla normativa si evince che il tasso di decadimento mostrato (grafico (a)) per effetto dell'aumento di ρ risulta più severo rispetto al tasso di crescita mostrato (grafico (b)) per effetto dell'aumento del diametro. La loro combinazione porterebbe quindi, combinando i due parametri, ad un leggero decremento passando dal caso *1.11* all' *1.14*, proprio come mostrato in (c). Dai risultati (a) e (b) forniti da DIANA si osserva come il tasso di decadimento e di crescita dei due sottogruppi risulta simile anche se leggermente più marcato per il gruppo (a), quindi la combinazione della variazione di entrambi i parametri (c) porta, concordemente al trend offerto dalla normativa, ad una diminuzione passando dal caso *1.11* all' *1.14.*

Le osservazioni fatte per i casi (a), (b) e (c) sono quindi le medesime già esposte per il Caso studio 1; anche nel caso di armature inclinate di 45° rispetto alla direzione principale di trazione valgono quindi i principi generali già validi per gli elementi monodimensionali (travi), ossia:

1. La riduzione della distanza tra le fessure, nella fase di fessurazione stabilizzata, si attua utilizzando un opportuno rapporto di armatura;

2. A parità di armatura utilizzata, se questa viene inserita in forma di piccolo diametro, si registra un miglioramento (riduzione) dei valori di s_r

Infine, si riportano i risultati del *post-processing* ottenuto per il solo caso *1.1* relativamente al Caso studio 2.

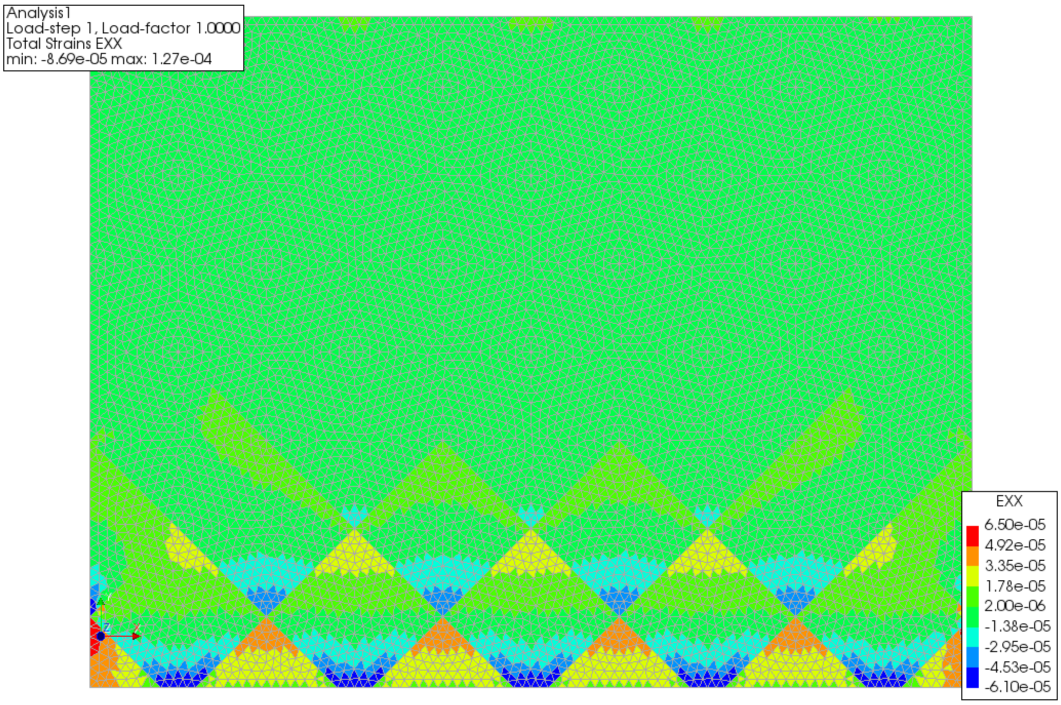


Figura 62: Deformazione ε_{xx} della matrice di calcestruzzo

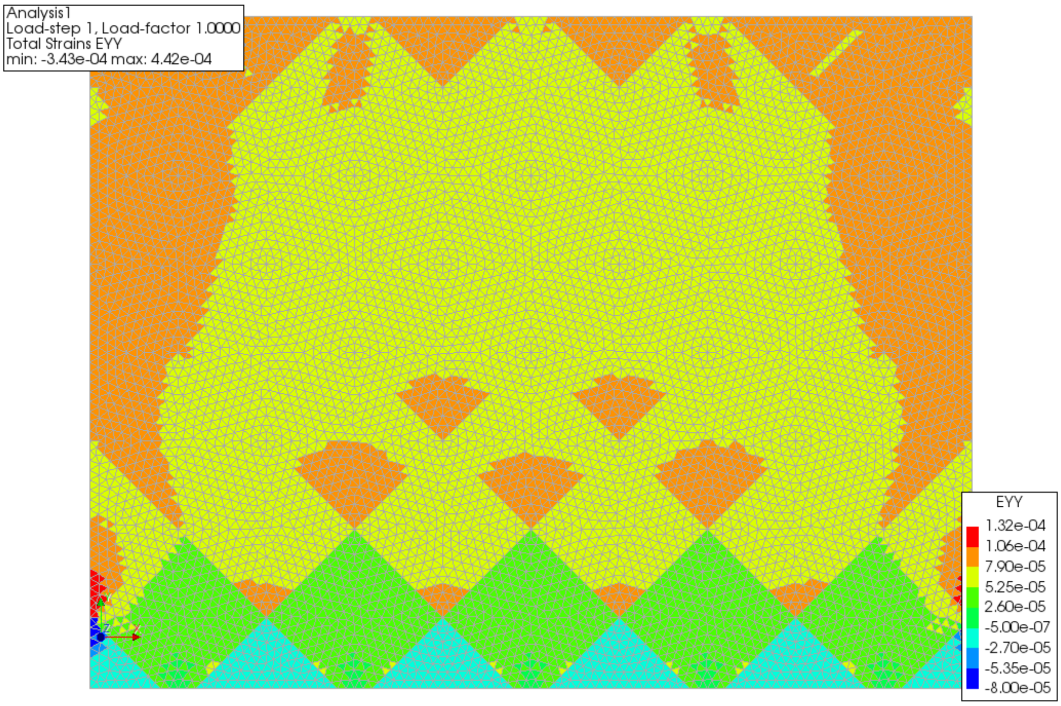


Figura 63: Deformazione ε_{yy} della matrice di calcestruzzo

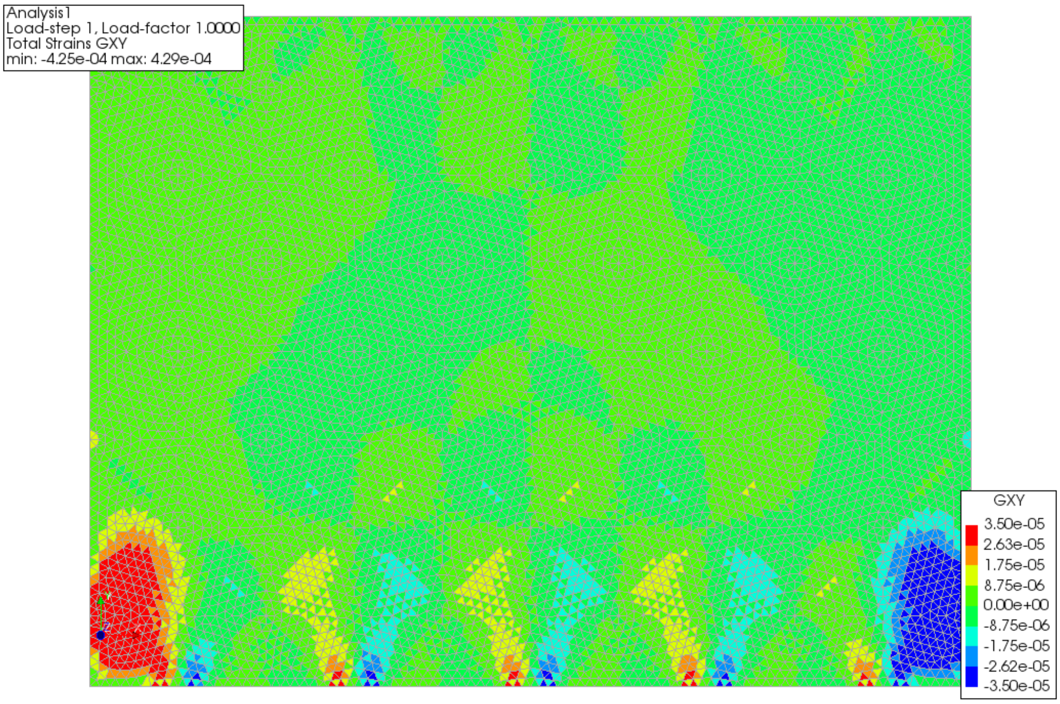


Figura 64: Deformazione γ_{xy} della matrice di calcestruzzo

Figura 65: Tensioni σ_{xx} della matrice di calcestruzzo

Figura 66: Tensioni σ_{yy} della matrice di calcestruzzo

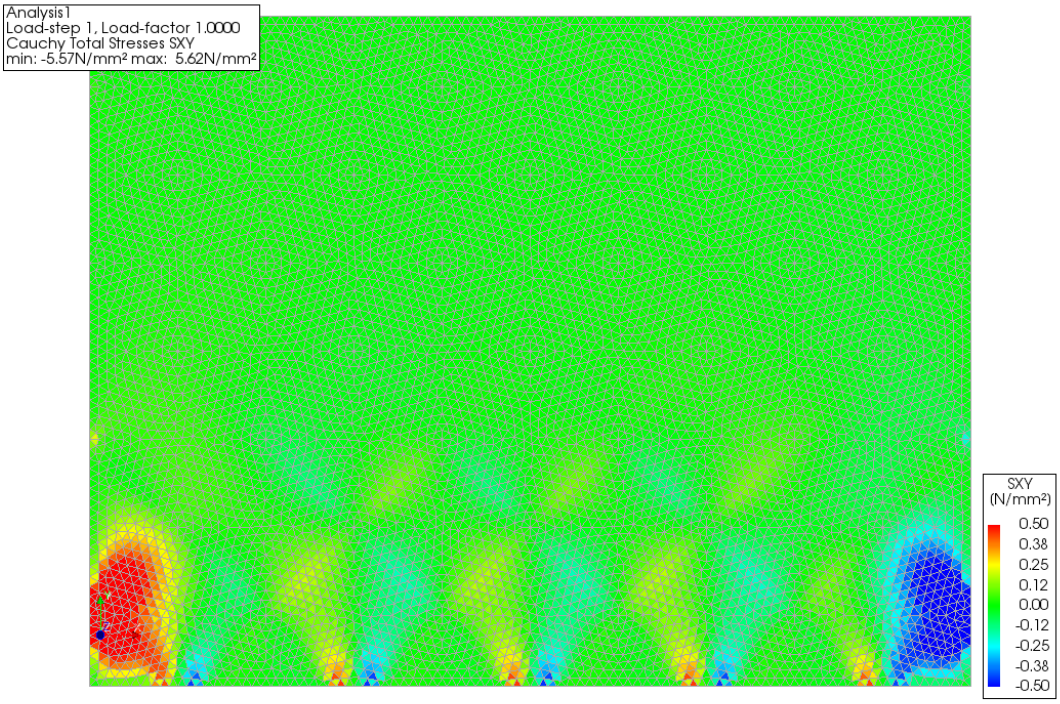


Figura 67: Tensioni τ_{xy} della matrice di calcestruzzo

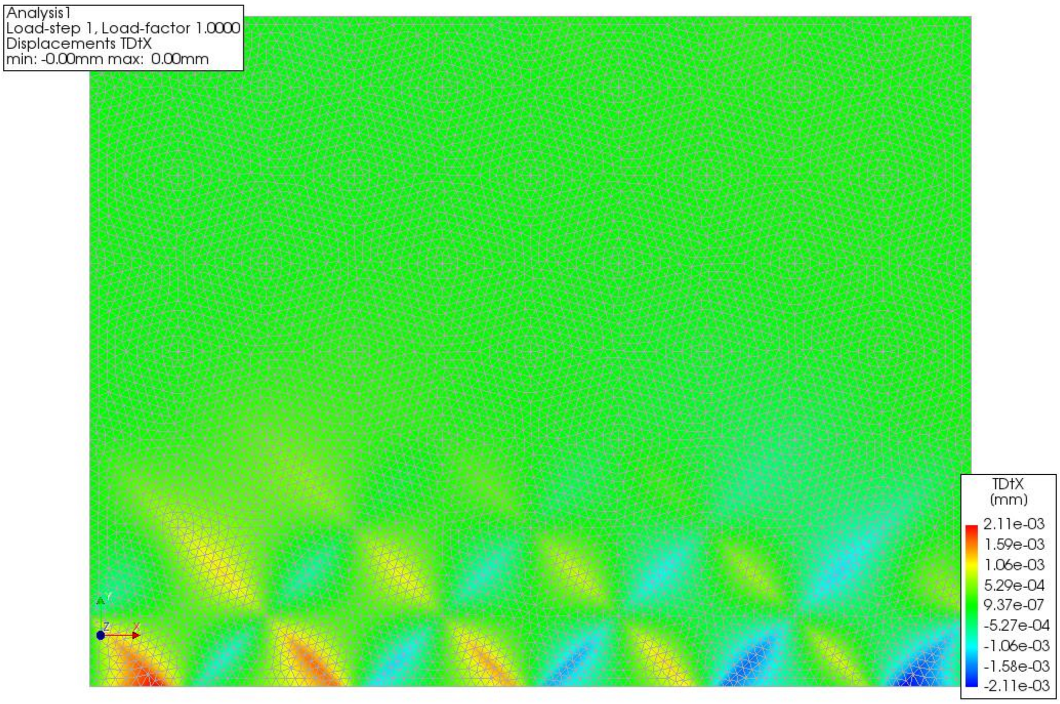


Figura 68: Campo di spostamenti δ_{xx} della matrice di calcestruzzo

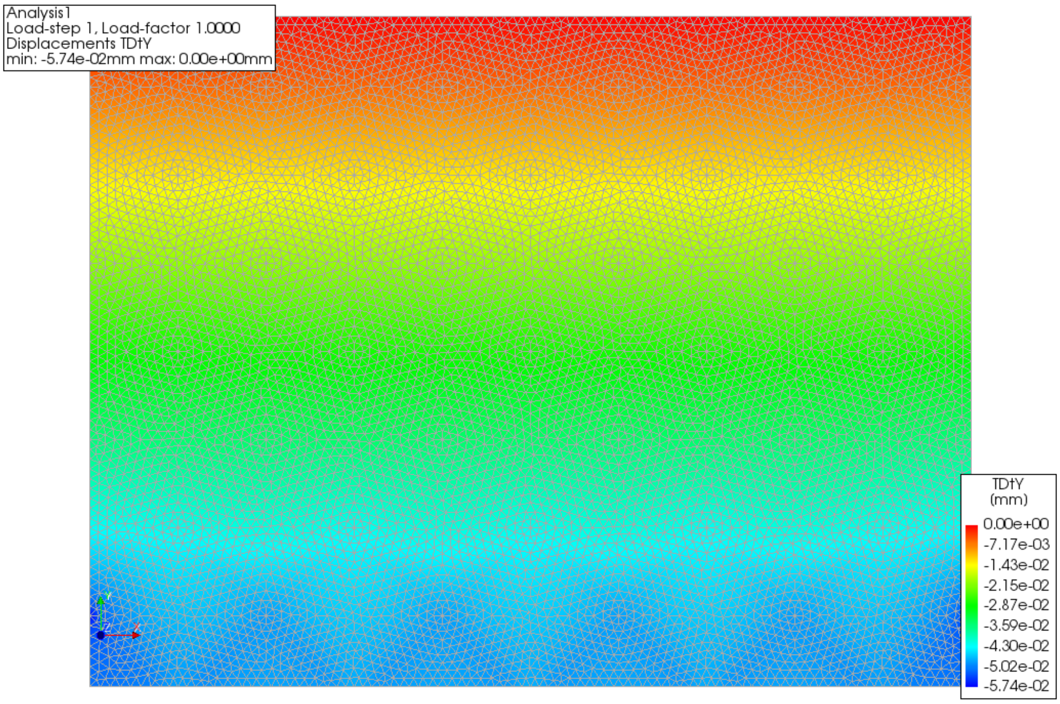


Figura 69: Campo di spostamenti δ_{yy} della matrice di calcestruzzo

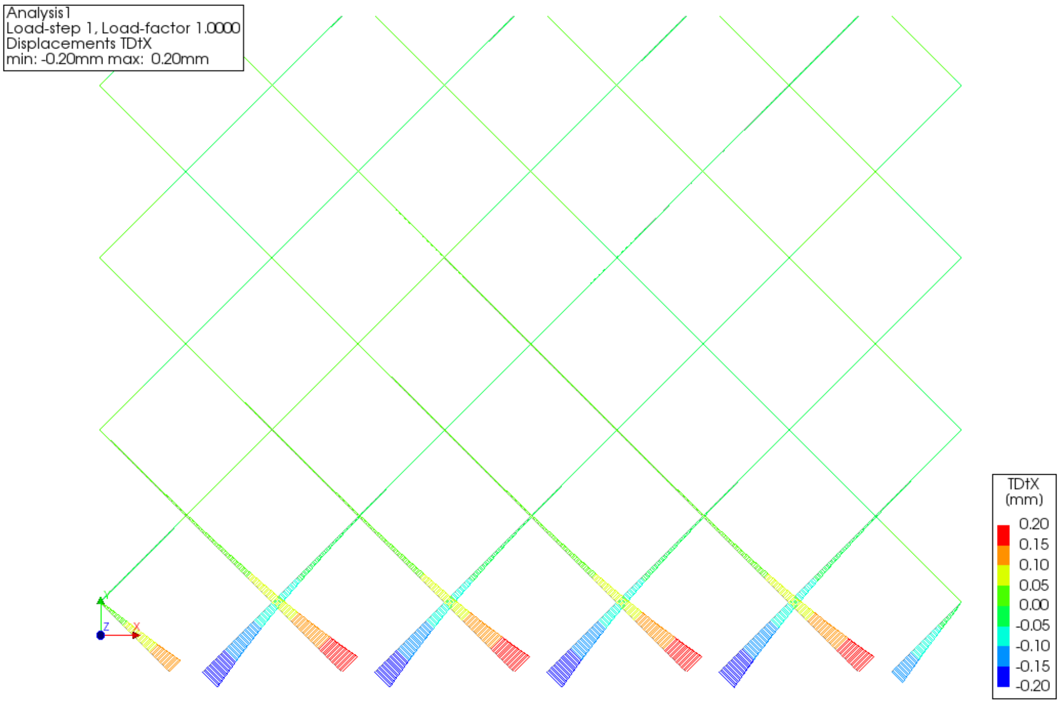


Figura 70: Campo di spostamenti δ_{xx} dell'armatura metallica

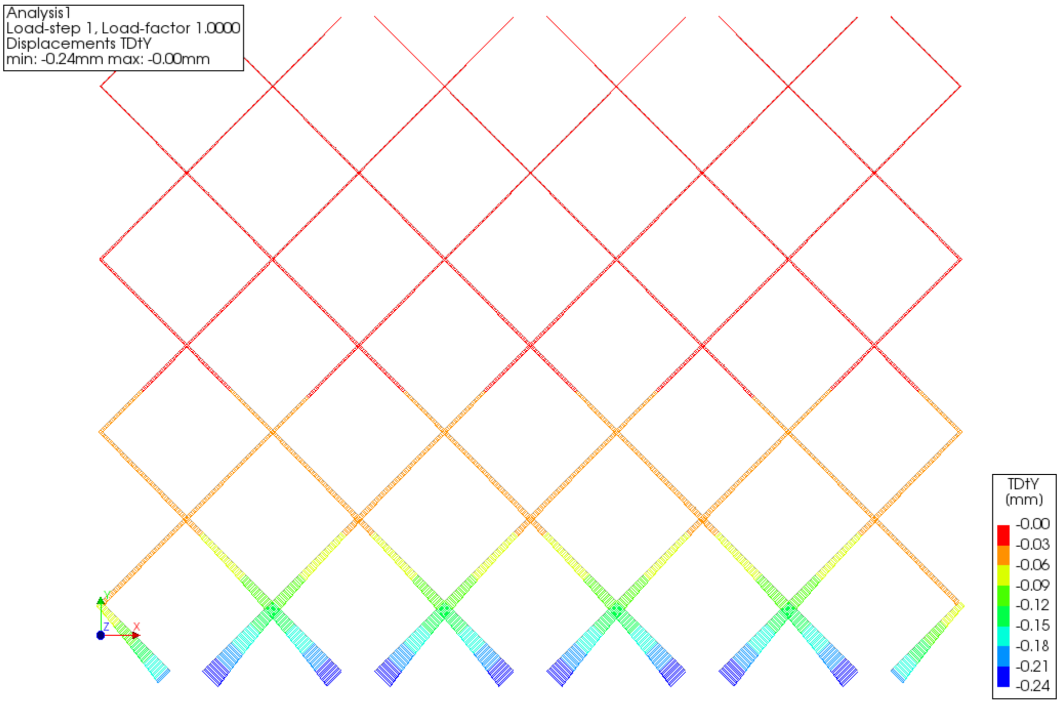


Figura 71: Campo di spostamenti δ_{yy} dell'armatura metallica

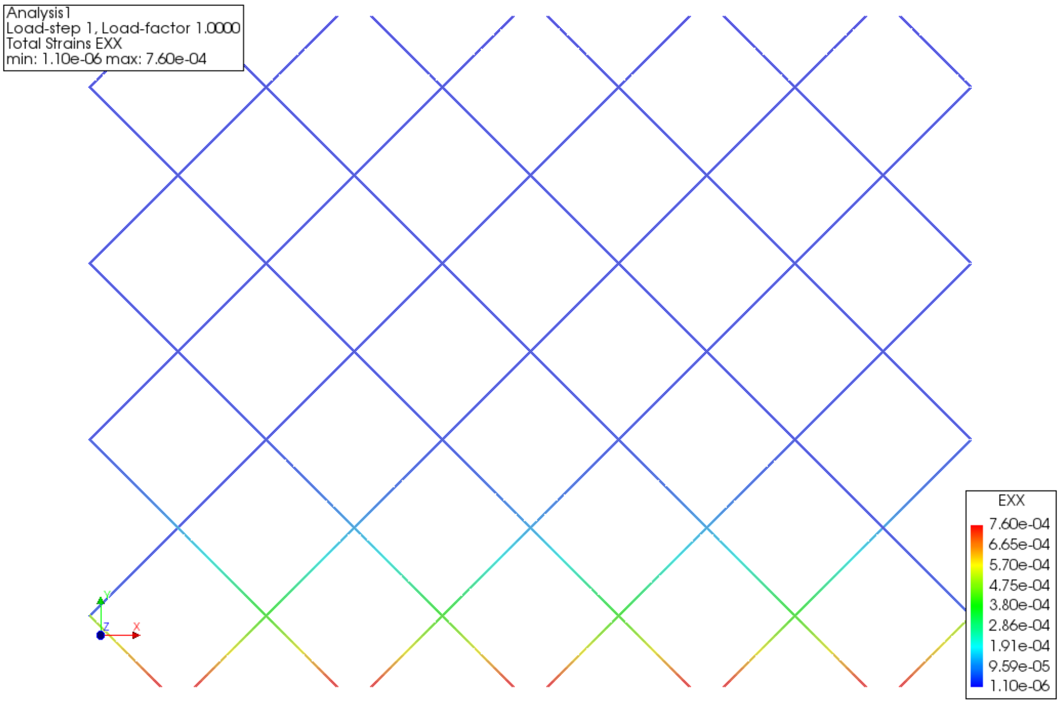


Figura 72: Deformazioni ε_{xx} dell'armatura metallica – Analoghe le ε_{yy}

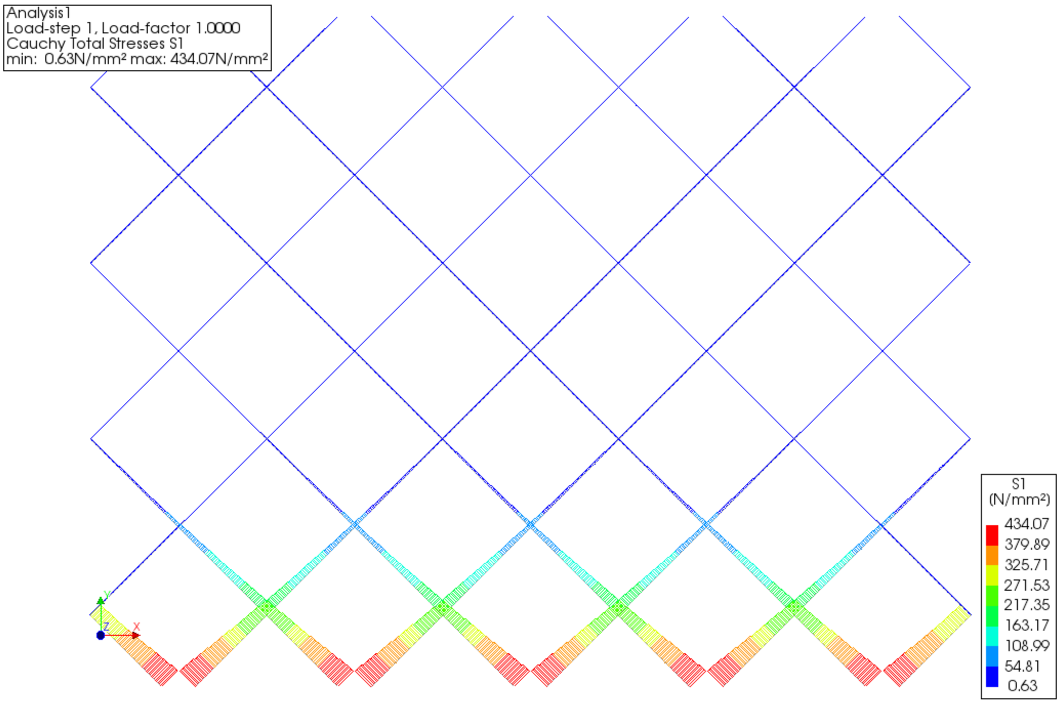


Figura 73: Tensioni σ_{11} dell'armatura metallica

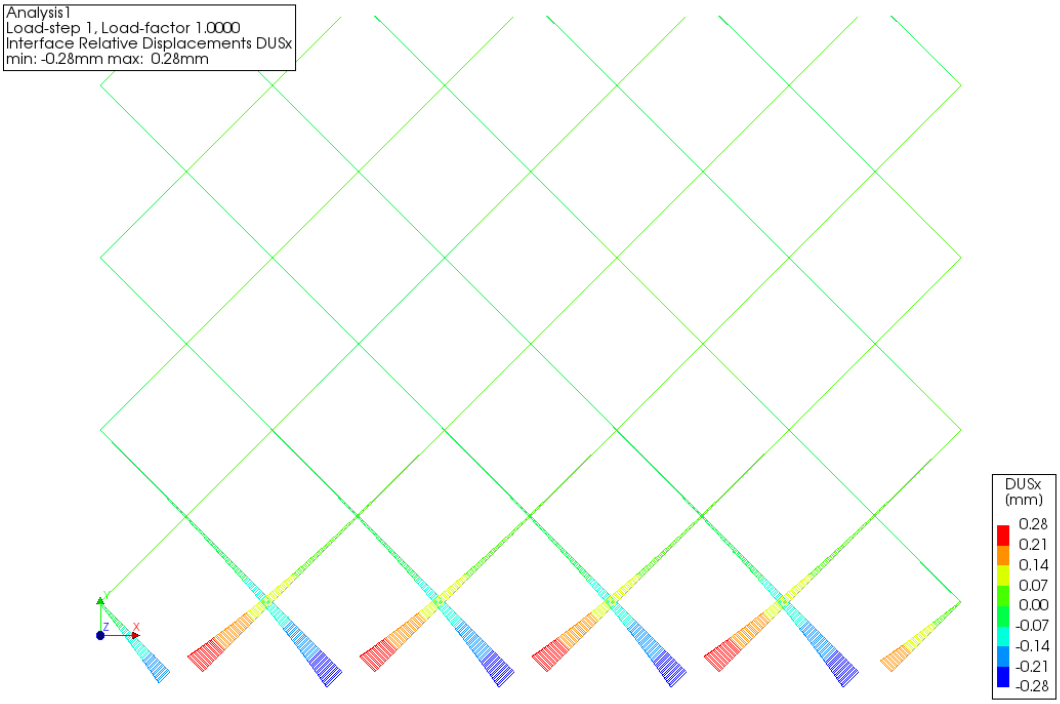


Figura 74: Campo degli spostamenti tangenziali registrati sull'elemento di interfaccia

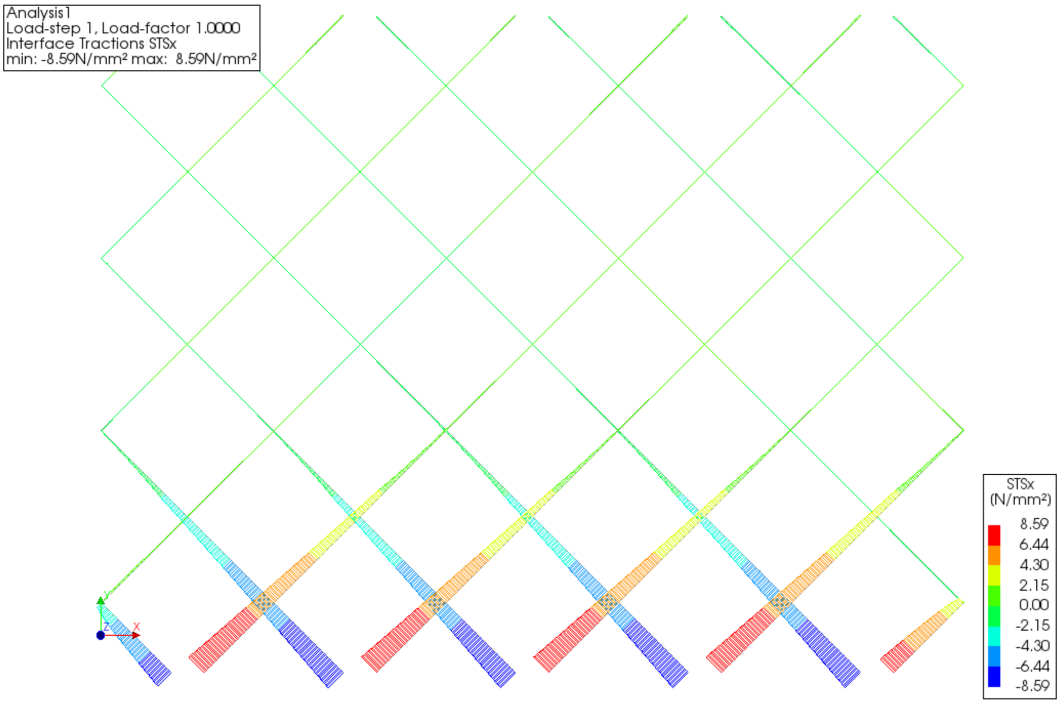
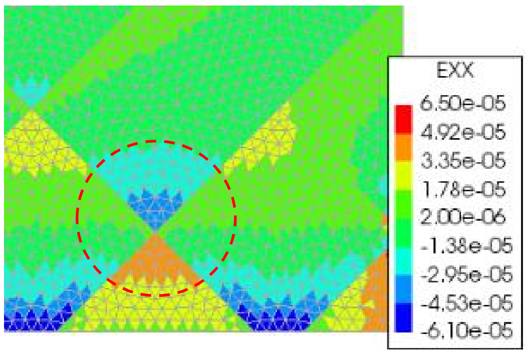


Figura 75: Campo delle tensioni tangenziali registrate sull'elemento di interfaccia

Dall'analisi della [Figura 62] si osserva come in corrispondenza dei punti di sovrapposizione delle armature si originino, nel calcestruzzo, dei capi deformativi (di trazione e compressione) molto più intensi che nel resto della matrice. Questo è dovuto alla sovrapposizione, che si ha nell'intono degli incroci delle armature, dei campi deformativi generati dal trasferimento di forze dalle armature stesse alla matrice di calcestruzzo.

In particolare, si evidenzia come nella zona di calcestruzzo inferiore al punto di incrocio le deformazioni ε_{xx} siano positive (ossia di trazione), mentre nella zona superiore al nodo esse siano negative (ossia di compressione). Lo schema seguente rappresenta graficamente quanto sopra osservato



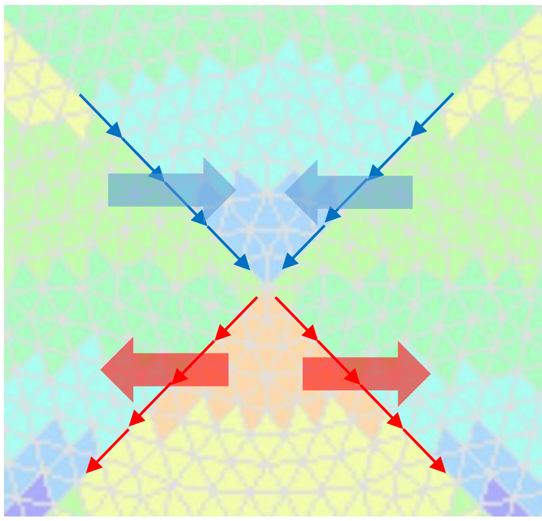
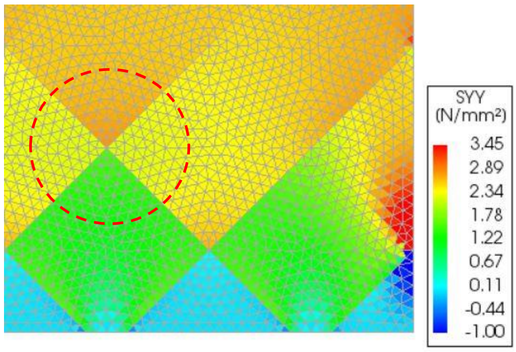


Figura 76: Sovrapposizione delle armature e concentrazione dei campi deformativi. Nella figura a fianco viene messo in evidenza il meccanismo che genera deformazioni di trazione nella parte inferiore al nodo e di compressione nella parte superiore al nodo. Le frecce lungo la direzione delle armature indicano le tensioni tangenziali che, per aderenza, si scaricano sul calcestruzzo; le frecce orizzontali mostrano invece la risultante orizzontale delle distribuzioni delle tensioni tangenziali predette, evidenziando l'effetto deformativo di trazione-compressione.

Dalla stessa [Figura 62] si evidenzia come la base inferiore AB sia soggetta, nell'intorno dei punti in cui le armature "affiorano" sul contorno, alla medesima alternanza di deformazione (positiva-negativa) interpretabile con un modello analogo a quello proposto in [Figura 76]. Le osservazioni fatte per il campo deformativo ε_{xx} si riflettono naturalmente per il campo tensionale σ_{xx}.

Interessante è l'osservazione della [Figura 65]; anche in questo caso nei nodi si registra un'intensificazione del campo tensionale σ_{yy}. Questa si può spiegare mediante un ragionamento simile a quello fatto in precedenza per la direzione x-x e mostrato in [Figura 77]. La [Figura 67] mostra invece la presenza di una certa quantità di tensioni tangenziali nell'intono delle armature. Sono ritenute come "effetti di bordo" e quindi non significative le due zone soggette ad elevati valori di τ_{xy} in prossimità dei nodi A e B



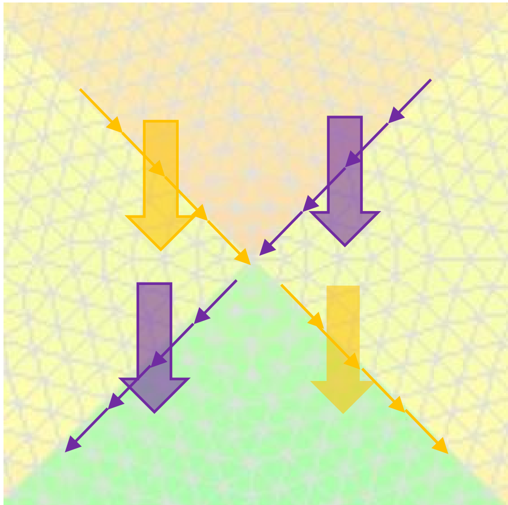


Figura 77: Sovrapposizione delle armature e concentrazione dei campi tensionali. Nella figura a fianco viene messo in evidenza il meccanismo che genera trazione di trazione nell'intorno del nodo. Le frecce lungo la direzione delle armature indicano le tensioni tangenziali che, per aderenza, si scaricano sul calcestruzzo; le frecce verticali mostrano invece la risultante verticale delle distribuzioni delle tensioni tangenziali predette, evidenziando l'effetto di sovrapposizione dei campi 2 tensionali, quello in direzione α e β.

Per quanto riguarda il campo di spostamenti δ_{yy} di [Figura 69] si osserva che esso risulta simmetrico rispetto all'asse delle Y in quanto il caso 1.1 prevede di sollecitare le armature con la stessa tensione nelle due direzioni, pertanto la risultante dei carichi è complessivamente verticale.

Infine, si osserva come le tensioni nell'acciaio [Figura 73] si riducano progressivamente fino a valori trascurabili. Tale punto corrisponde, come si può vedere dalla [Figura 78] alla posizione indicata come distanza di fessurazione minima. Alla stessa ordinata circa si trova infatti che anche gli scorrimenti tangenziali hanno raggiunto valori trascurabili (linea rossa tratteggiata)

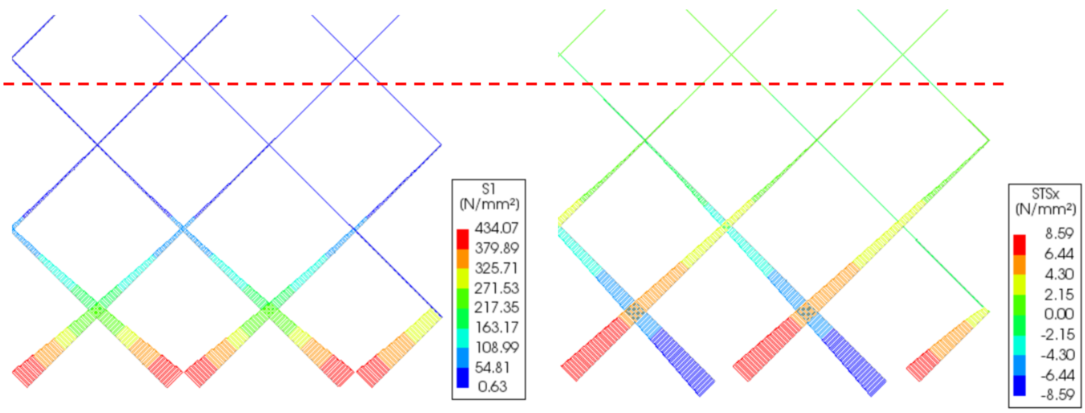


Figura 78: distanza di fessurazione. A tale ordinata tensioni e scorrimenti tangenziali dell'interfaccia hanno raggiunto valori trascurabili

Capitolo 6.

Caso studio 3. Anomalia di momento

In questo capitolo si intende affrontare il problema della cosiddetta "anomalia di momento" che si genera ogni qual volta si considerano dei modelli in cui sono presenti delle tensioni tangenziali di equilibrio sul lato AB di base. Il significato e la motivazione che hanno portato alla scelta del termine "anomalia di momento" per indicare il Caso studio 3 verranno chiariti nel seguito, fornendo una spiegazione dettagliata delle cause responsabili di tale "anomalia". Come già detto, quest'ultima, si presenta ogni qual volta insista sulla base una distribuzione τ_{AB} e quindi, a rigore, tale fenomenologia si sarebbe dovuta rilevare già nei precedenti casi *1.11, 1.12, 1.13* e *1.14* del Capitolo 5 in quanto presenti delle tensioni tangenziali di equilibrio. Nella realtà esse si presentano con dei moduli molto piccoli, il che non permette di mettere in luce il fenomeno che si intende descrivere nel seguente Capitolo. Per rilevarlo è necessario che le tensioni τ_{AB} abbiano valori apprezzabili, pertanto le tensioni di trazione delle armature in direzione α e β devono essere significativamente differenti tra loro: in questo modo l'anomalia di momento risulta amplificata, e quindi, maggiormente visibile.

Il modello utilizzato nel seguente capitolo analogo a quello mostrato in [Figura 55]; di seguito sono descritte le sue peculiarità geometriche. Si applica una tensione σ_β di $100\,[MPa]$ e una tensione σ_α di $12.5\,[MPa]$ alle armature ($N_\alpha = N_\beta = 5$), supponendo che esse abbiano entrambe un diametro $\phi_\alpha = \phi_\beta = 16\,[mm]$. Sia la spaziatura tra le barre $s_\alpha = s_\beta = 150\,[mm]$ e lo spessore della matrice di calcestruzzo $100\,[mm]$. Le armature si considerano inclinate entrambe di un angolo $\theta = 45°$.

Il modello, per garantire l'equilibrio orizzontale, deve essere completato con una distribuzione di tensioni tangenziali sul lato di base calcolata come di seguito

$$R_H = N_\alpha\, \sigma_\alpha\, A_{s,\alpha} - N_\beta\, \sigma_\beta\, A_{s,\beta} = 5 \cdot 100 \cdot 64\pi - 5 \cdot 12.5 \cdot 64\pi = 87\,965\ [N]$$

Da cui, assumendo la base $x_{dim} = 1061\ [mm]$

$$\tau_{AB} = \frac{F_\alpha - F_\beta}{x_{dim} \cdot z_{dim}} = \frac{87\,965}{1061 \cdot 100} = 0.83\ [MPa]^{‡}$$

Si applicano le stesse operazioni di scalatura alle tensioni σ e alle τ come descritte nel Capitolo 6 in modo da ottenere, a diffusione avvenuta, $\sigma_{c,y} = f_{ctm}$.

Se si analizza la [Figura 79] che riporta il campo di spostamenti si osserva come questo presenti una non simmetria rispetto all'asse delle Y, mostrando una distorsione verso il basso del vertice B rispetto al vertice A.

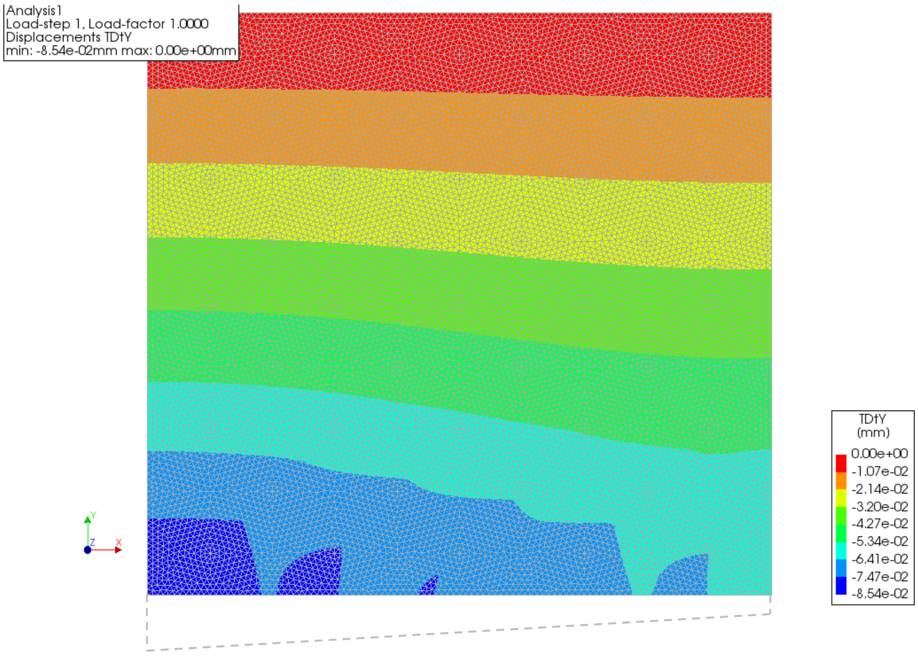


Figura 79: Campo di spostamenti ottenuto dal modello oggetto di studio. Si osserva come lo spostamento verticale nel vertice B risulti maggiore di quello nel vertice A. Il tratteggio rappresenta l'approssimazione lineare della deformata di bordo

‡ Si osserva come per mettere in evidenza l'effetto di "anomalia di momento" siano necessarie delle tensioni tangenziali di quasi due ordini due ordini di grandezza rispetto a quelle presenti nei casi 1.11, 1.12, 1.13 e 1.14 del Capitolo 5.

La non simmetria del campo di spostamenti è la rappresentazione fisica della "*anomalia di momento*". Apparentemente infatti non si rilevano delle ragioni per cui si debba presentare tale asimmetria nella deformata della struttura: infatti le armature trasferiscono, tramite il fenomeno dell'aderenza, forze inclinate di 45° alla matrice di calcestruzzo scomponibili in una direzione verticale e una orizzontale, come mostrato in [Figura 80].

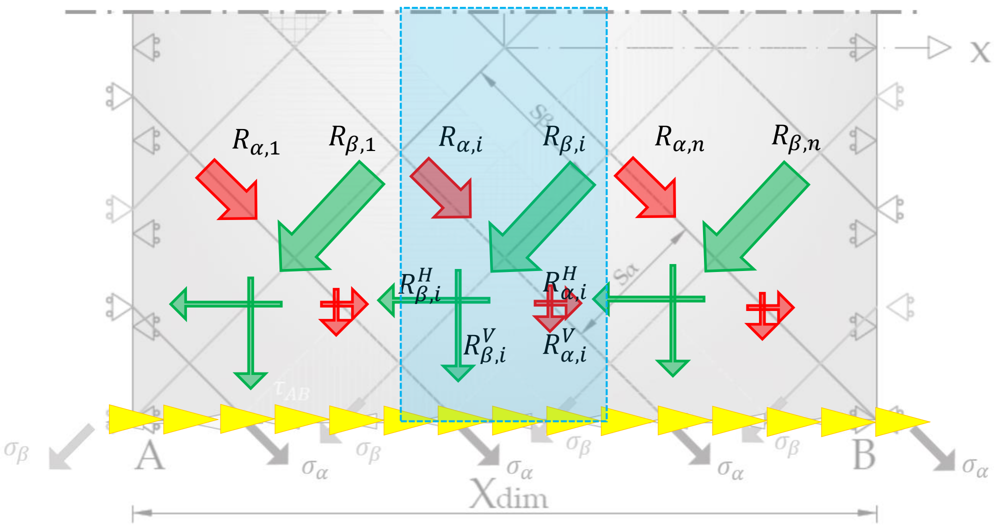


Figura 80: Diagramma delle risultanti delle forze che ciascuna armatura scarica nella matrice di calcestruzzo. Ciascuna risultante è stata scomposta nelle sue componenti orizzontale e verticale. La zona evidenziata in azzurro rappresenta il generico campo i-esimo della matrice di calcestruzzo in cui sono evidenziate le risultanti nelle due direzioni: $R_{\alpha,i}$ e $R_{\beta,i}$. Esse sono a loro volta scomposte in una componente verticale ($R_{\alpha,i}^V$ e $R_{\beta,i}^V$) e in una componente orizzontale ($R_{\alpha,i}^H$ e $R_{\beta,i}^H$).

Per quanto riguarda le componenti verticali $R_{\alpha,i}^V$ e $R_{\beta,i}^V$ esse sono differenti in modulo ma identiche, in modo ripetitivo, in ciascun campo i-esimo di calcestruzzo; inoltre esse vengono assorbite dai vincoli alla traslazione verticale disposti lungo il lato CD. Le componenti orizzontali $R_{\alpha,i}^H$ e $R_{\beta,i}^H$ sono invece differenti in verso e modulo e sono completamente equilibrate dalle tensioni tangenziali sul lato AB. Si osserva quindi una certa ripetitività e uniformità nella struttura, la quale apparentemente non sembrerebbe incentivare alcuna anomalia, almeno una volta completata la diffusione delle forze trasferite dall'acciaio alla matrice di calcestruzzo. Il problema, causa dalla deformazione non simmetrica, è infatti proprio da studiare a livello locale ovvero nella zona di diffusione delle tensioni all'interno della matrice di calcestruzzo.

Si osservi la [Figura 81]. Essa rappresenta una porzione di armature in prossimità della base AB.

Esaminando la [Figura 81 (a)] si riconosce la direzione β, con tensioni s_1 maggiori e quella α, con tensioni s_1 minori. Lo stesso andamento si registra nel diagramma delle trazioni all'interfaccia che armatura e calcestruzzo si scambiano [Figura 81 (b)]. Entrambi possono essere approssimati dalla schematizzazione proposta, assumendo le distribuzioni delle trazioni nell'armatura e delle tensioni di bond come variabili linearmente.

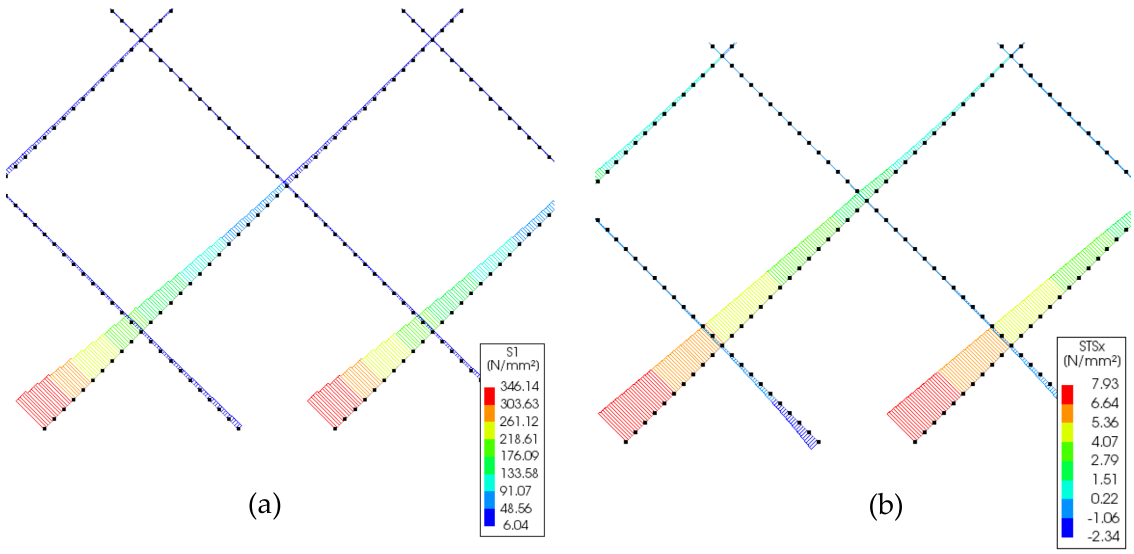


Figura 81: (a) Andamento delle tensioni di trazione nelle armature lungo le direzioni α e β. e (b) delle trazioni tangenziali di interfaccia acciaio-calcestruzzo.

Avendo assunto l'ipotesi di tensioni all'interfaccia distribuite triangolarmente, è possibile considerare la risultante entrante nel calcestruzzo come mostrato in [Figura 82]. Se si ipotizza che le distribuzioni triangolari di tensioni si sviluppino per una 'altezza pari ad h_α e h_β (altezze di diffusione), e possibile considerare la risultante applicata nel baricentro del triangolo, ossia ad 1/3 dell'altezza di diffusione. Si comprende quindi che il sistema di forze ($R^H_{\alpha,i}$ e $R^H_{\beta,i}$) così costituito genera, per ciascun campo i-esimo, una coppia avente momento $M_{AB,i}$ rispetto alla base (lato AB). L'insieme di tutte le coppie genera un momento totale pari a

$$M_{AB} = \sum_i M_{AB,i}$$

è il responsabile della asimmetria della deformata in quanto tende a far ruotare il segmento di base AB in senso antiorario, come mostrato in [Figura 82]: l'anomalia di momento rappresenta proprio l'effetto prodotto da queste coppie.

L'anomalia è quindi un fenomeno locale dovuto alla graduale diffusione delle forze nella matrice di calcestruzzo. Le componenti orizzontali $R^H_{\alpha,i}$ e $R^H_{\beta,i}$, insieme alla $T = \tau_{AB} \cdot x_{dim} \cdot t$ risultano un sistema di forze equilibrato rispetto alla traslazione in direzione x:

$$\sum_i (R^H_{\alpha,i} + R^H_{\beta,i}) + T = 0$$

Esse però non sono applicate sulla stessa retta d'azione orizzontale e quindi non garantiscono l'equilibrio rispetto alla rotazione nella zona di diffusione.

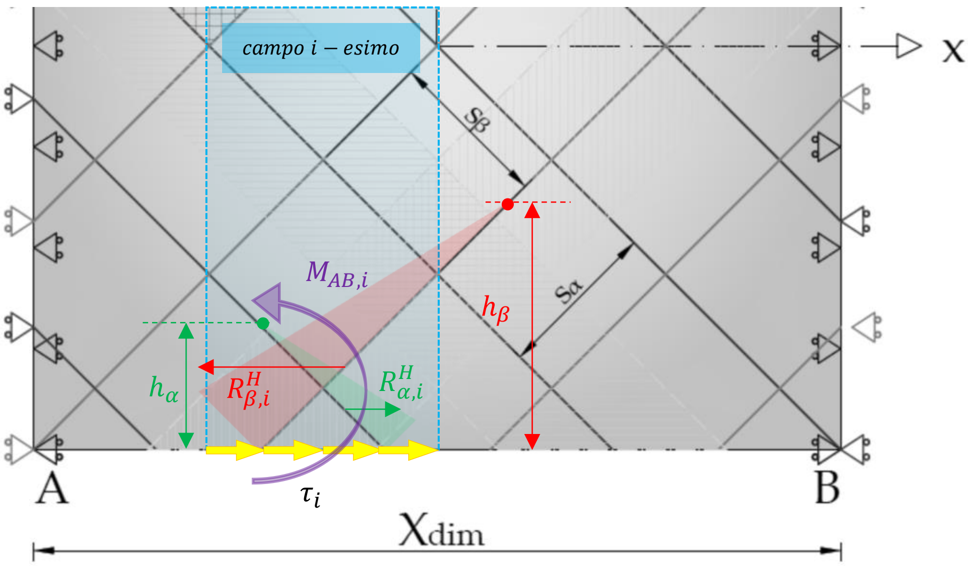


Figura 82: Anomali di momento. Sono rappresentate le distribuzioni tensionali (campitura rossa e verde triangolare) entranti nel calcestruzzo nelle due direzioni α e β. Le loro rispettive risultanti generano, moltiplicate per i rispettivi bracci, il momento $M_{AB,i}$

Le altezze di diffusione si sono ricavate immaginando che la diffusione fosse completata una volta decaduto il 90% della tensione nella barra.

Di seguito viene mostrata l'applicazione pratica al caso oggetto di studio.

Per prima cosa si procede a determinare le altezze di diffusione. A seguito della scalatura i valori tensionali nelle armature, a livello del lato AB risultano i seguenti:

$$\sigma_{\alpha_0} = 41.9\ [MPa]$$

$$\sigma_{\beta_0} = 346.1\ [MPa]$$

La tensione nelle armature, secondo i risultati numerici forniti dal software DIANA, decresce fino a raggiungere dei valori che rimangono costanti (stress residuo nella barra) e sono:

$$\sigma_{\alpha_r} = \sigma_{\beta_r} = 7.8\ [MPa]$$

Pertanto, la diffusione ha provocato il seguente decadimento tensionale:

$$\Delta_\alpha = \sigma_{\alpha_0} - \sigma_{\alpha_r} = 41.9 - 7.8 = 34.1\ [MPa]$$

$$\Delta_\beta = \sigma_{\beta_0} - \sigma_{\beta_r} = 346.1 - 7.8 = 338.3\ [MPa]$$

Si può calcolare la tensione residua $\sigma_{\alpha_{r,90}}$ e $\sigma_{\beta_{r,90}}$ ossia le tensioni che si hanno nell'acciaio una volta dissipato il 90% del decadimento tensionale Δ

$$\sigma_{\alpha_{r,90}} = \sigma_{\alpha_0} - 0.9 \cdot \Delta_\alpha = 41.9 - 0.9 \cdot 34.1 = 11.2\ [MPa]$$

$$\sigma_{\beta_{r,90}} = \sigma_{\beta_0} - 0.9 \cdot \Delta_\beta = 346.1 - 0.9 \cdot 338.3 = 41.6\ [MPa]$$

A questo punto si cercano i punti delle armature che hanno raggiunto rispettivamente i valori tensionali $\sigma_{\alpha_{r,90}}$ e $\sigma_{\beta_{r,90}}$; la loro posizione rispetto al lato AB viene scelta convenzionalmente come distanza di diffusione. Nel nostro caso si ha, dalla [Figura 81 (a)]:

$$h_\alpha \sim 141\ [mm]$$

$$h_\beta \sim 177\ [mm]$$

Le forze $R^H_{\alpha,i}$ e $R^H_{\beta,i}$ valgono inoltre

$$R^H_{\alpha,i} = \sigma_{\alpha_0} \cdot A_{s,\alpha} = 41.9 \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot \sin(45°) = 5957\ [N]$$

$$R^H_{\beta,i} = \sigma_{\beta_0} \cdot A_{s,\beta} = 346.1 \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot \cos(45°) = 49206\ [N]$$

Quindi poiché il modello considerato ha 5 campi, ossia 5 barre per ciascuna direzione, si ha:

$$R_{\alpha}^{H} = N_{\alpha} \cdot R_{\alpha,i}^{H} = 29785\ [N]$$

$$R_{\beta}^{H} = N_{\beta} \cdot R_{\beta,i}^{H} = 246029\ [N]$$

Per cui il momento complessivo M_{AB} rispetto alla base vale (positivo se antiorario):

$$M_{AB} = R_{\beta}^{H} \cdot \frac{h_{\beta}}{3} - R_{\alpha}^{H} \cdot \frac{h_{\alpha}}{3} = 246029 \cdot \frac{177}{3} - 29785 \cdot \frac{141}{3} = 13115816\ [Nmm]$$

Per poter eliminare l'anomalia di momento, ossia il disturbo locale nella zona di diffusione dovuto alle coppie $M_{AB,i}$, è possibile cercare di ripristinare l'equilibrio alla rotazione aggiungendo localmente delle tensioni tangenziali sui lati BC e DA, come mostrato in [Figura 83].

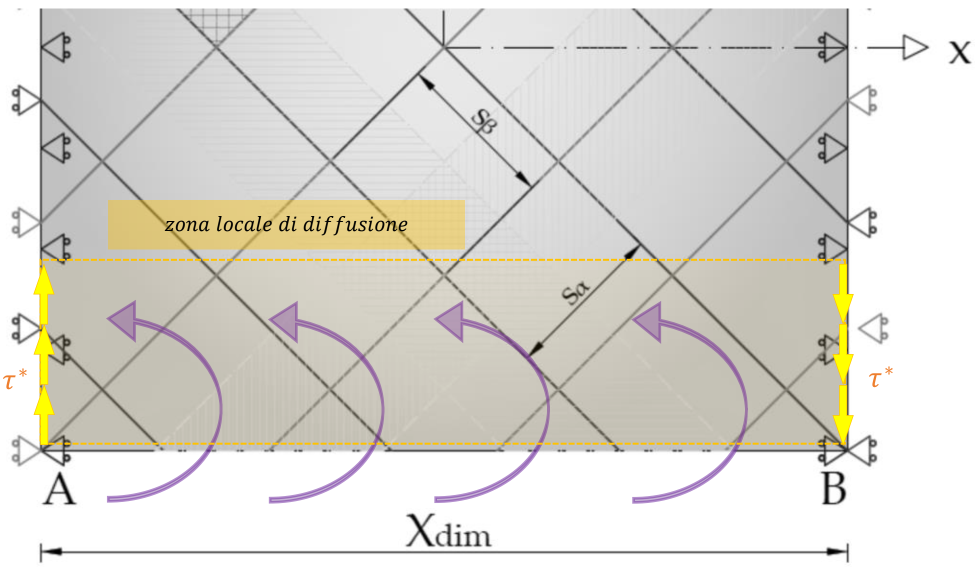


Figura 83: strategia adottata per ripristinare l'equilibrio locale alla rotazione eliminando l'anomalia di momento. Si sono inserite delle tensioni tangenziali sui bordi, per un'altezza pari alla zona di diffusione, di intensità uguale e verso opposto in modo da formare una coppia equilibrante il momento M_{AB}

In questo caso le tensioni tangenziali si ricavano, ricordano che $x_{dim} = 1061\ [mm]$ e lo spessore della matrice di calcestruzzo $z_{dim} = 100\ [mm]$

$$\tau^* = \frac{M_{AB}}{x_{dim} \cdot z_{dim} \cdot l}$$

In cui l rappresenta l'altezza su cui si intendono applicare le τ^*. Per convenzione si sceglie come il massimo tra le due altezze di diffusione, ossia:

$$l = \max(h_\alpha; h_\beta)$$

Quindi, nel nostro esempio si ha:

$$l = \max(141; 177) = 177\ [mm]$$

$$\tau^* = \frac{13115816}{1061 \cdot 100 \cdot 177} = 0.70\ [MPa]$$

Caricando nel modello DIANA tale valore di tensione applicato per una lunghezza di l ad ambo i lati, si ottiene il diagramma di spostamento seguente [Figura 84]

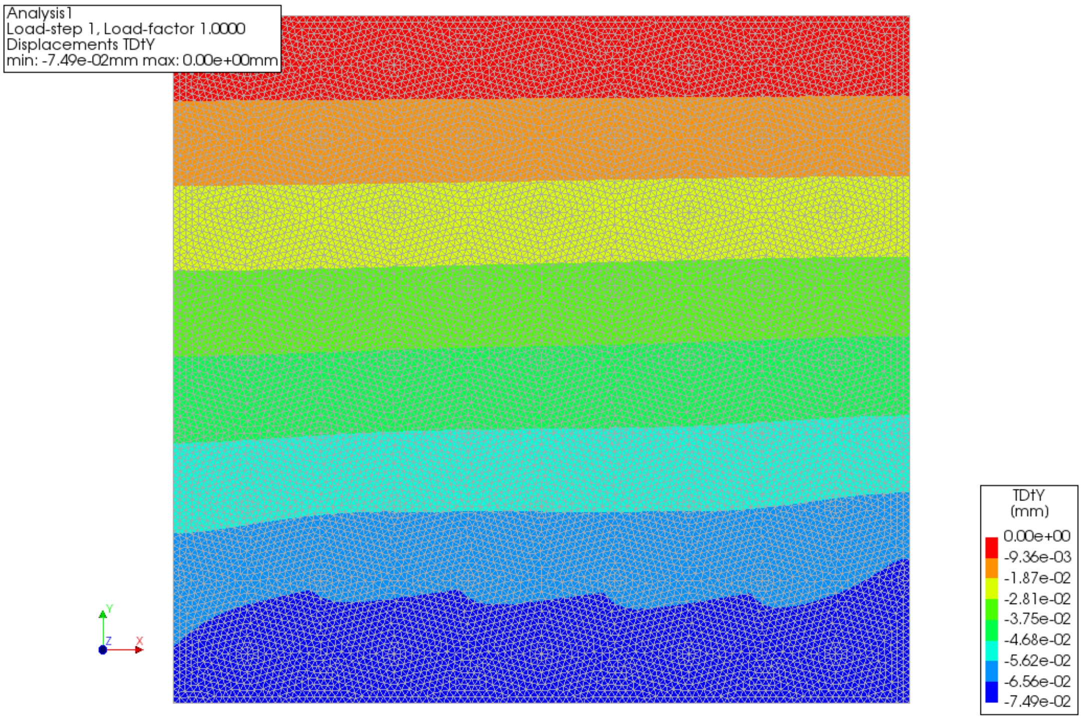


Figura 84: Diagramma degli spostamenti della matrice di calcestruzzo dopo l'applicazione delle tensioni tangenziali τ^*. Si osserva come la zona centrale del modello risulti ora perfettamente simmetrica. Le zone vicino ai lati verticali risentono degli effetti di bordo derivanti dalla distribuzione di tensioni applicata e pertanto esse non devono essere considerate.

L'anomalia di momento discussa fino ad ora in termini di spostamento, in realtà, produce distorsioni anche nel campo tensionale e deformativo. Di seguito vengono proposti alcuni confronti prima e dopo la correzione con le τ^*.

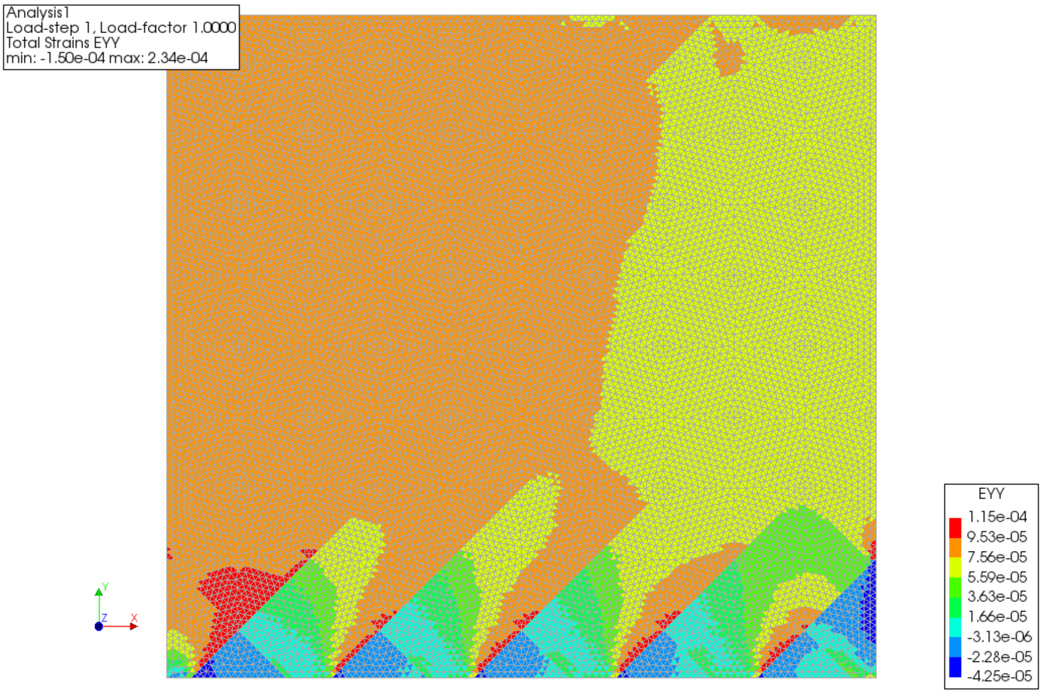


Figura 85: Deformazioni ε_{yy} della matrice di calcestruzzo PRIMA della correzione per l'anomalia di momento

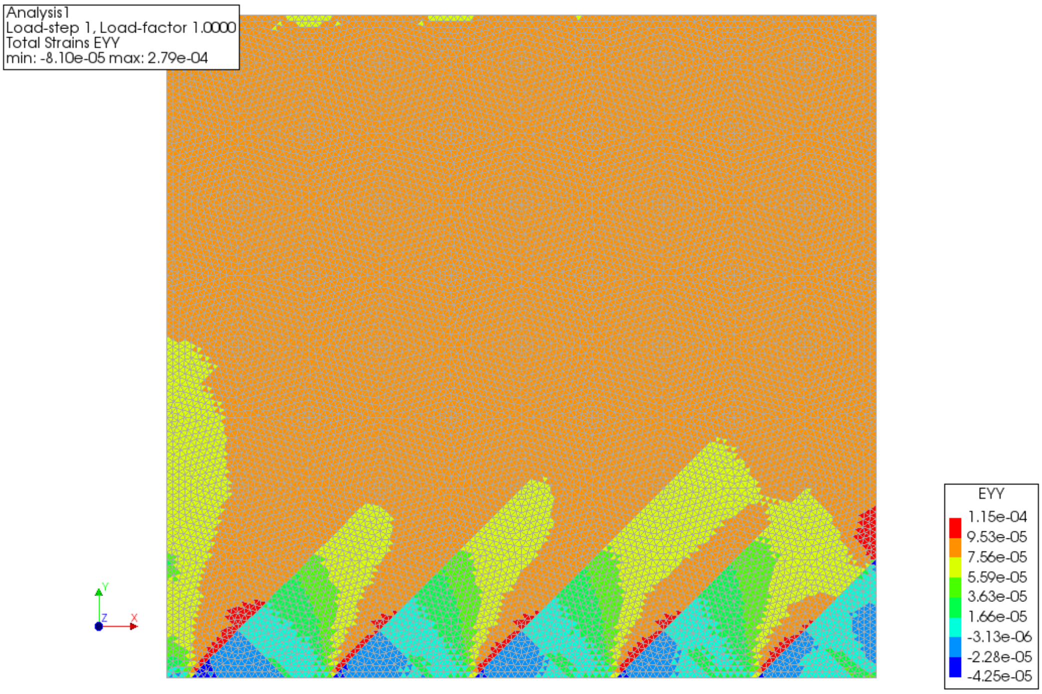


Figura 86: Deformazioni ε_{yy} della matrice di calcestruzzo DOPO la correzione per l'anomalia di momento

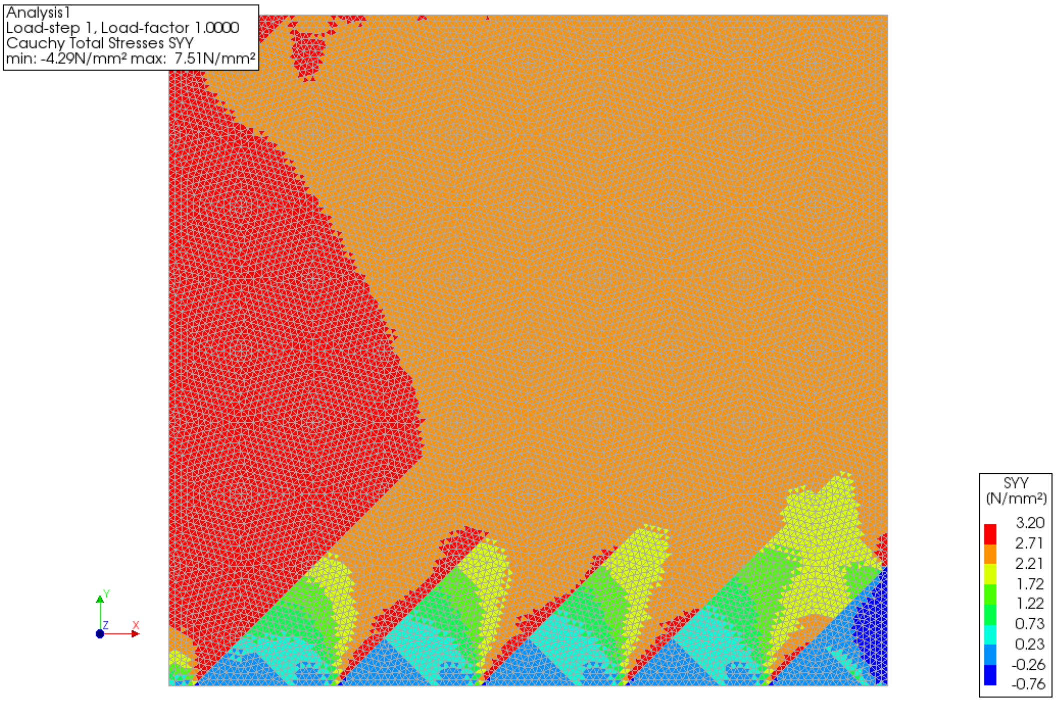


Figura 87: Tensione σ_{yy} della matrice di calcestruzzo PRIMA della correzione per l'anomalia di momento

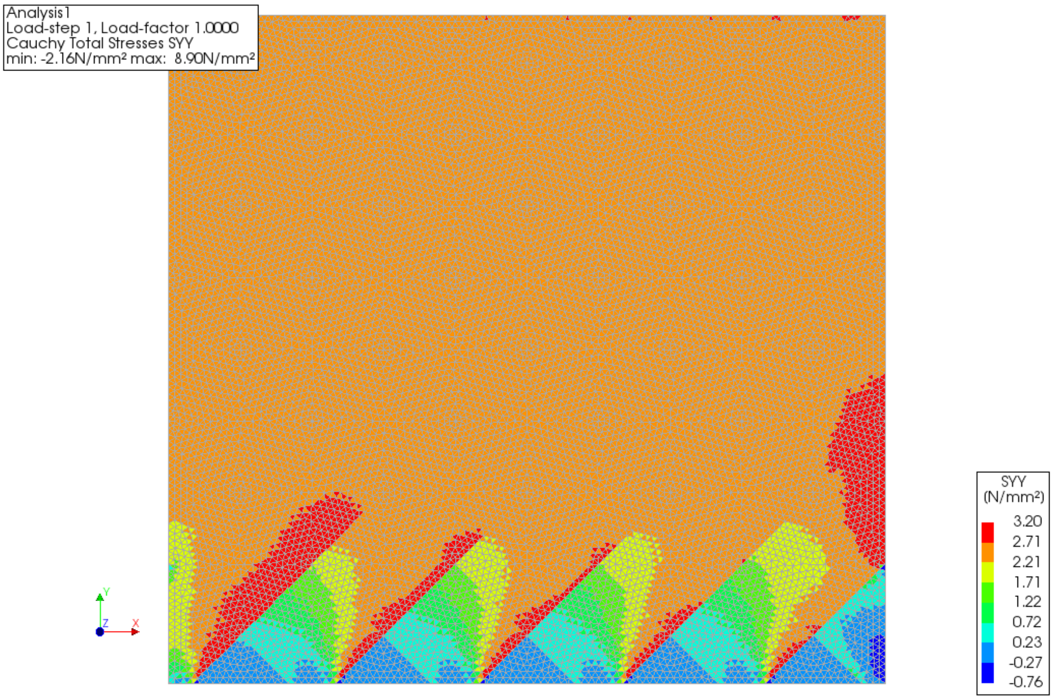


Figura 88: Tensione σ_{yy} della matrice di calcestruzzo DOPO la correzione per l'anomalia di momento

Capitolo 7.

Caso studio 4. Posizione relativa delle armature rispetto ai bordi.

Nei differenti casi che si sono studiati fino ad ora non si è mai posta l'attenzione sulla posizione relativa dell'armatura rispetto ai bordi della matrice di calcestruzzo. In realtà è possibile immaginare che il comportamento fessurativo possa essere influenzato anche da tale aspetto che verrà pertanto indagato nel presente capitolo.

Per prima cosa si definisce il concetto di posizione relativa dell'armatura rispetto al bordo definendo il concetto di modulo: esso rappresenta, supponendo di considerare $s_\alpha = s_\beta$ (equi spaziatura), il valore dimezzato della diagonale di un campo di calcestruzzo. Il numero di moduli che si possono trovare lungo la direzione Y della matrice di calcestruzzo è definito dall'utente e non necessariamente deve essere un numero intero, bensì' potrebbe essere anche un valore frazionario (razionale). In quest'ultimo caso, evidentemente, i nodi relativi alle sovrapposizioni delle armature potranno anche non più giacere sul lato di base AB. In [Figura 89] è riportato graficamente il concetto di modulo.

Introdotto il concetto di modulo, è possibile specificare le motivazioni che hanno guidato lo studio del seguente capitolo. Si intende comprendere l'eventuale influenza che la variazione del numero di moduli (per un certo modello) ha sul fenomeno fessurativo, ossia sulla distanza tra le fessure.

In particolare, si sono considerati tre diversi casi, ciascuno dei quali presenta la stessa spaziatura tra le armature ($s_\alpha = s_\beta = 130\ [mm]$), uno spessore di 150 $[mm]$ e un'armatura identica nelle due direzioni ($\phi_\alpha = \phi_\beta = 14\ [mm]$); si prendono invece in considerazioni differenti valori di y_{dim} della matrice di calcestruzzo, composte rispettivamente da:

- Caso 1.1 – numero 10 moduli: 4 + 1/2 per semi metà ("Taglio sul nodo");
- Caso 1.2 – numero 28/3 moduli: 4 + 2/3 per semi metà ("Taglio 2/3");
- Caso 1.3 – numero 26/3 moduli: 4+1/3 per semi metà ("Taglio a 1/3")

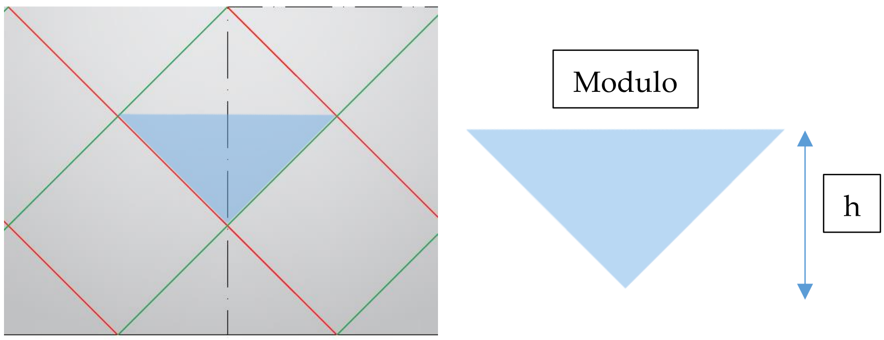


Figura 89: Definizione del concetto di modulo (evidenziato in blu) e della sua altezza h. La ripetizione di un certo numero di moduli nel piano permette di generare la geometria desiderata.

I tre casi sono riportati in [], [] e [].

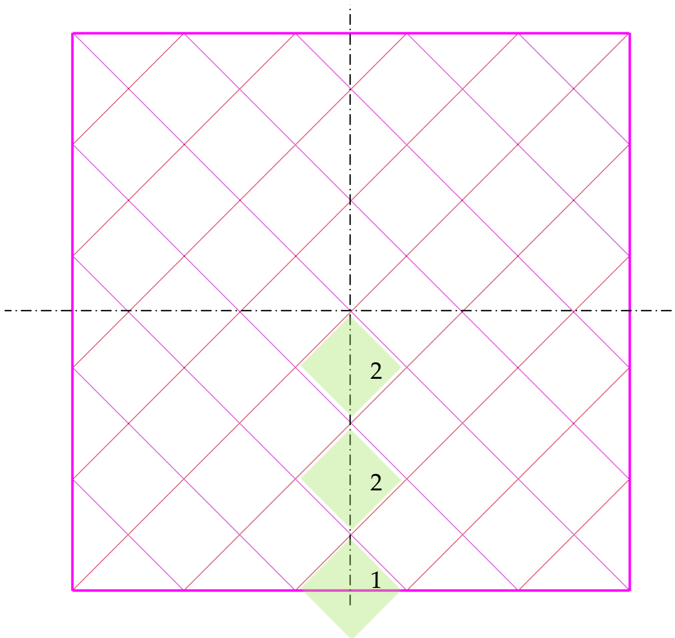


Figura 90: Caso 1.1 - Nodi di sovrapposizione delle armature giacenti sul lato AB di base. Caso "Taglio sul nodo"

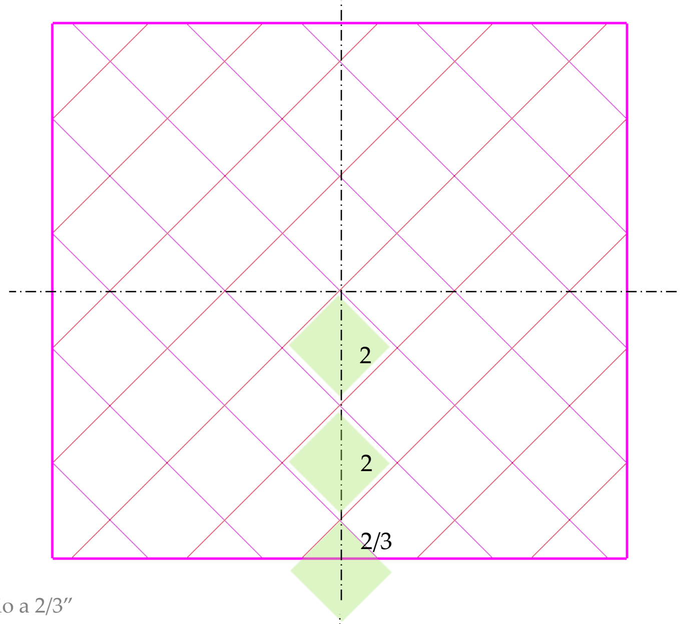


Figura 91: Caso "Taglio a 2/3"

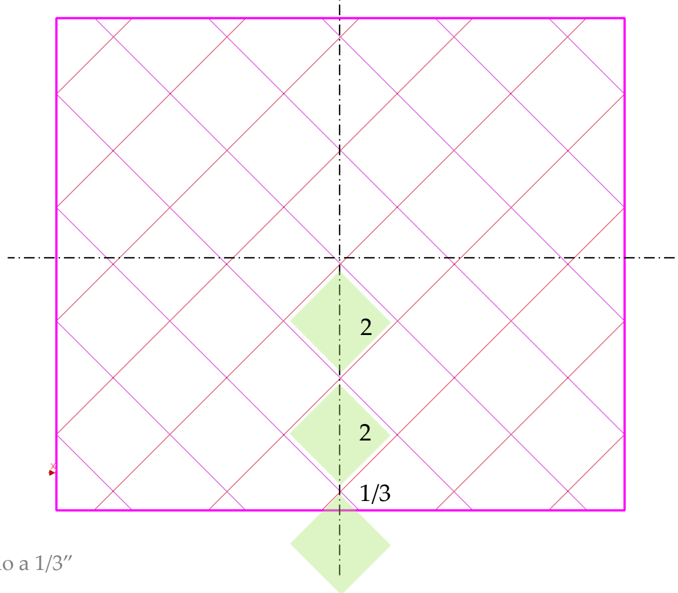


Figura 92: Caso "Taglio a 1/3"

La tabella seguente riassume il problema geometrico, riportando le tensioni utilizzate.

Caso	B_α [mm]	B_β [mm]	H [mm]	Φ_α [mm]	Φ_β [mm]	ϱ_α [%]	ϱ_β [%]	σ_α [MPa]	σ_β [MPa]
1.1	130	130	150	14	14	0.80%	0.80%	340	340
1.2	130	130	150	14	14	0.80%	0.80%	340	340
1.3	130	130	150	14	14	0.80%	0.80%	340	340

Tabella 13: Esposizione dei casi studio eseguiti. La tensione è quella di fessurazione del tirante fittizio 1D.

Si assumono inoltre i seguenti dati relativi alla matrice di calcestruzzo e all'acciaio delle armature:

E_s	200000 [MPa]		Cls	C25/30

A questo punto si è risolto ciascun caso attraverso il software DIANA, applicando ai nodi delle armature giacenti sul lato AB la tensione riportata nella [Tabella 8].

Valgono in questo caso le medesime osservazioni già riportate nel Capitolo 5: risulta necessario eseguire l'operazione di scalatura delle tensioni σ_α e σ_β in modo da ottenere, a diffusione avvenuta, il valore di f_{ctm} nella matrice di calcestruzzo.

Per una trattazione completa della procedura seguita si rimanda al Capitolo 5, in quanto le operazioni da effettuare risultano le stesse; di seguito ci si limita a riportare i risultati e le relative osservazioni.

Le distanze di fessurazione per i 3 casi studiati sono riassunte nella seguente [Tabella 14Tabella 9]

	Distanza MINIMA fessurazione [mm]
Caso	**DIANA – risultati numerici**
1.1	355
1.2	236
1.3	220

Tabella 14: Valori dell'ordinata y_{cr} alla quale si sviluppa la fessurazione. Tali valori rappresentano la distanza minima di fessurazione, cioè la distanza necessaria alla diffusione delle tensioni dall'armatura al calcestruzzo

	Distanza MINIMA – 1D [mm]						**Distanza MINIMA – 2D [mm]**		
	EN 1992-1-1:2004		**Model Code 1990**		**Model Code 2010**		**EN 1992-1-1:2004**	**Model Code 1990**	**Model Code 2010**
Caso\Dir.	α	β	α	β	α	β	-	-	-
1.1	415	415	244	244	312	312	293	173	221
1.2	415	415	244	244	312	312	293	173	221
1.3	415	415	244	244	312	312	293	173	221

Tabella 15: Confronto delle distanze MINIME tra le fessure valutate secondo i diversi approcci normativi. Si sono riportati sia le distanze relative al modello 1D dei tiranti *fittizi* in direzione α e β che la loro combinazione tramite l'espressione [2.17] – Metodo B), per un angolo $\theta = 45°$

	Distanza MEDIA – 1D [mm]						Distanza MEDIA – 2D [mm]		
	ENV 1992-1-1:1991		Model Code 1990		ECP 203-2007		ENV 1992-1-1:1991	Model Code 1990	ECP 203-2007
Caso\Dir.	α	β	α	β	α	β	-	-	-
1.1	402	402	326	326	402	402	284	230	284
1.2	402	402	326	326	402	402	284	230	284
1.3	402	402	326	326	402	402	284	230	284

Tabella 16: Confronto delle distanze MEDIE tra le fessure valutate secondo i diversi approcci normativi. Si sono riportati sia le distanze relative al modello 1D dei tiranti *fittizi* in direzione α e β che la loro combinazione tramite l'espressione [2.17] – Metodo B), per un angolo $\theta = 45°$

	Distanza MASSIMA – 1D [mm]						Distanza MASSIMA – 2D [mm]		
	EN 1992-1-1:2004		Model Code 1990		Model Code 2010		EN 1992-1-1:2004	Model Code 1990	Model Code 2010
Caso\Dir.	α	β	α	β	α	β	-	-	-
1.1	829	829	489	489	625	625	586	346	442
1.2	829	829	489	489	625	625	586	346	442
1.3	829	829	489	489	625	625	586	346	442

Tabella 17: Confronto delle distanze MASSIME tra le fessure valutate secondo i diversi approcci normativi. Si sono riportati sia le distanze relative al modello 1D dei tiranti *fittizi* in direzione α e β che la loro combinazione tramite l'espressione [2.17] – Metodo B), per un angolo $\theta = 45°$

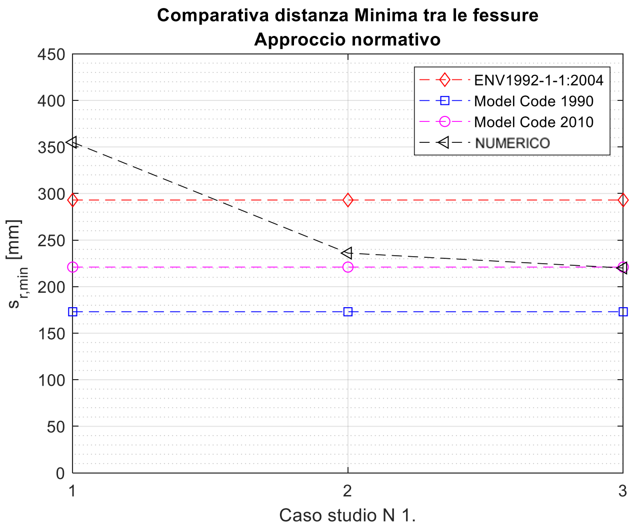


Figura 93: Distanza MINIMA di fessurazione valutata secondo l'approccio normativo. Sul grafico è stata riportata anche la soluzione numerica ricavata dalle analisi con il software DIANA.

La [Figura 93] riporta il grafico di confronto tra i risultati numerici ottenuti in Diana e i risultati calcolati dalle formulazioni normative. Si è fatto riferimento alla sola distanza minima, in quanto le altre rappresentazioni sono già state discusse nel Capitolo 5.

Analizzando il grafico di [Figura 93] si osserva come a mano a mano che il nodo in cui si ha la sovrapposizione delle armature si avvicina alla base dell'elemento di calcestruzzo (lato AB), la distanza di fessurazione diminuisce. Questo si può spiegare in base al fatto che la sovrapposizione di barre d'armatura crea un'intensificazione dei campi tensionali nell' intorno del nodo. Questo è visibile dal confronto delle figure di seguito riportate.

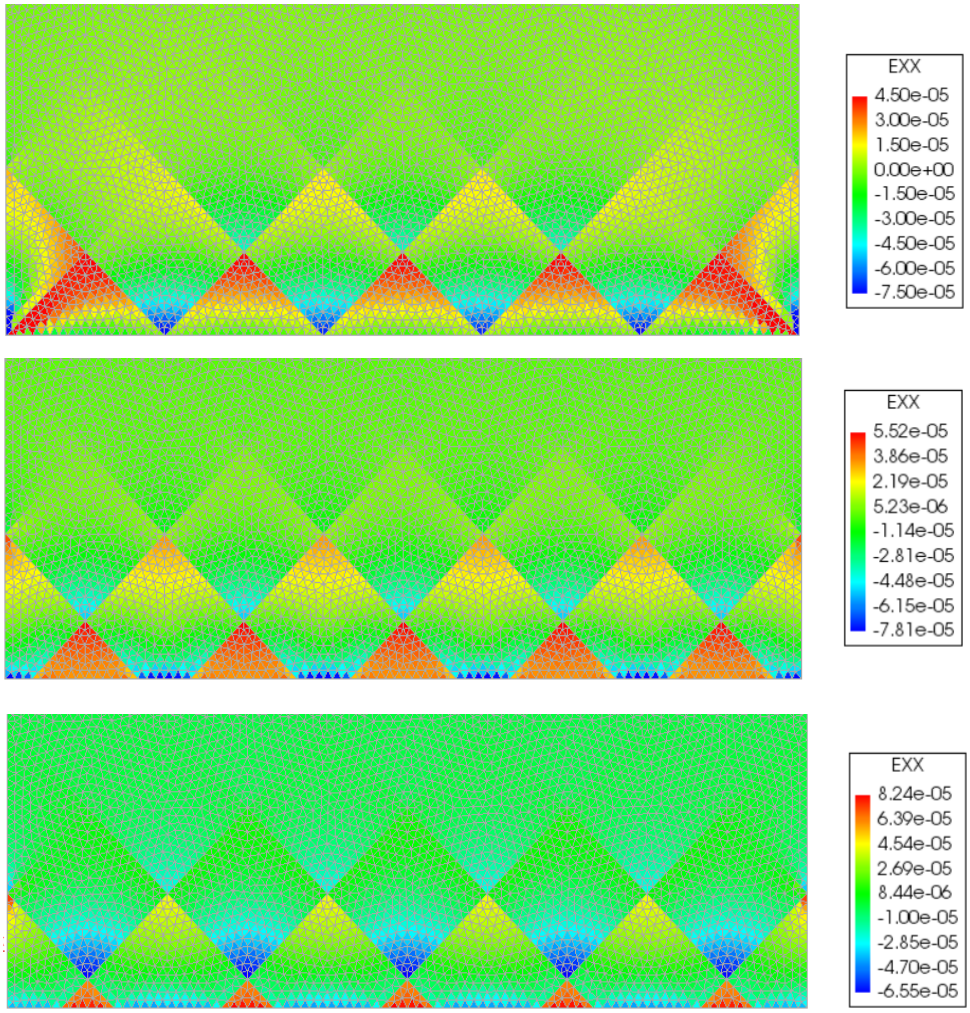


Figura 94: Confronto della deformazione ε_{xx} all'interno della matrice di calcestruzzo. (a) Taglio sul nodo - (b) Taglio a 2/3 - (c) Taglio a 1/3.

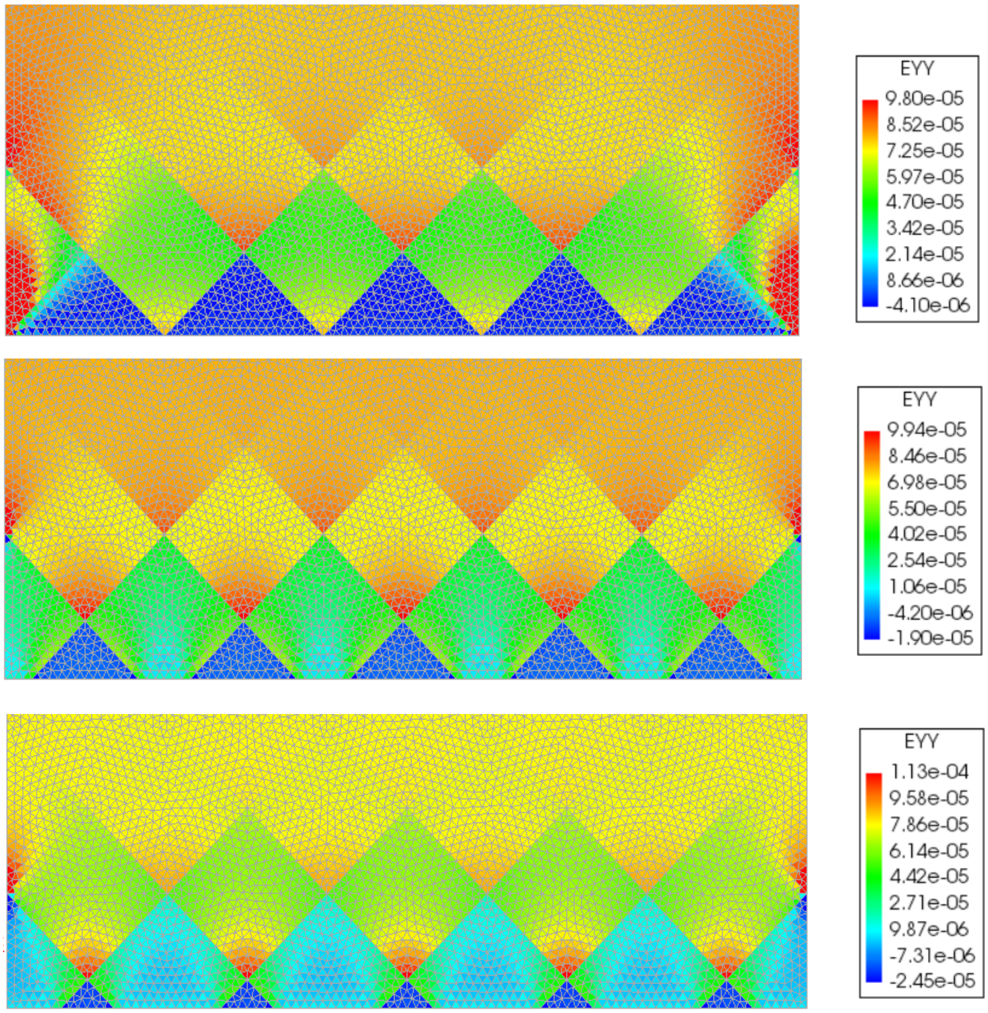


Figura 95: Confronto della deformazione ε_{yy} all'interno della matrice di calcestruzzo. (a) Taglio sul nodo - (b) Taglio a 2/3 - (c) Taglio a 1/3.

Dalle osservazioni dei primi risultati grafici, in termini di deformazioni in direzione x-x e deformazioni in direzione y-y si osserva che i nodi di sovrapposizione delle armature si spostano, passando dal taglio sul nodo, al taglio a 2/3 al taglio a 1/3 verso il basso e conseguentemente i punti di concentrazione delle deformazioni si trovano più in prossimità del lato di base.

Osservano la [Figura 94] e la [Figura 95] si osserva anche che passando dal caso (a) al caso (c) si registra un incremento (in modulo) dei valori deformativi. Le concentrazioni di deformazioni risultano quindi più severe a mano a mano che l'incrocio delle armature si avvicina al bordo libero della base.

Di interesse risulta anche la deformazione dovuta alla componente γ_{xy} del tensore delle tensioni, di seguito riportata.

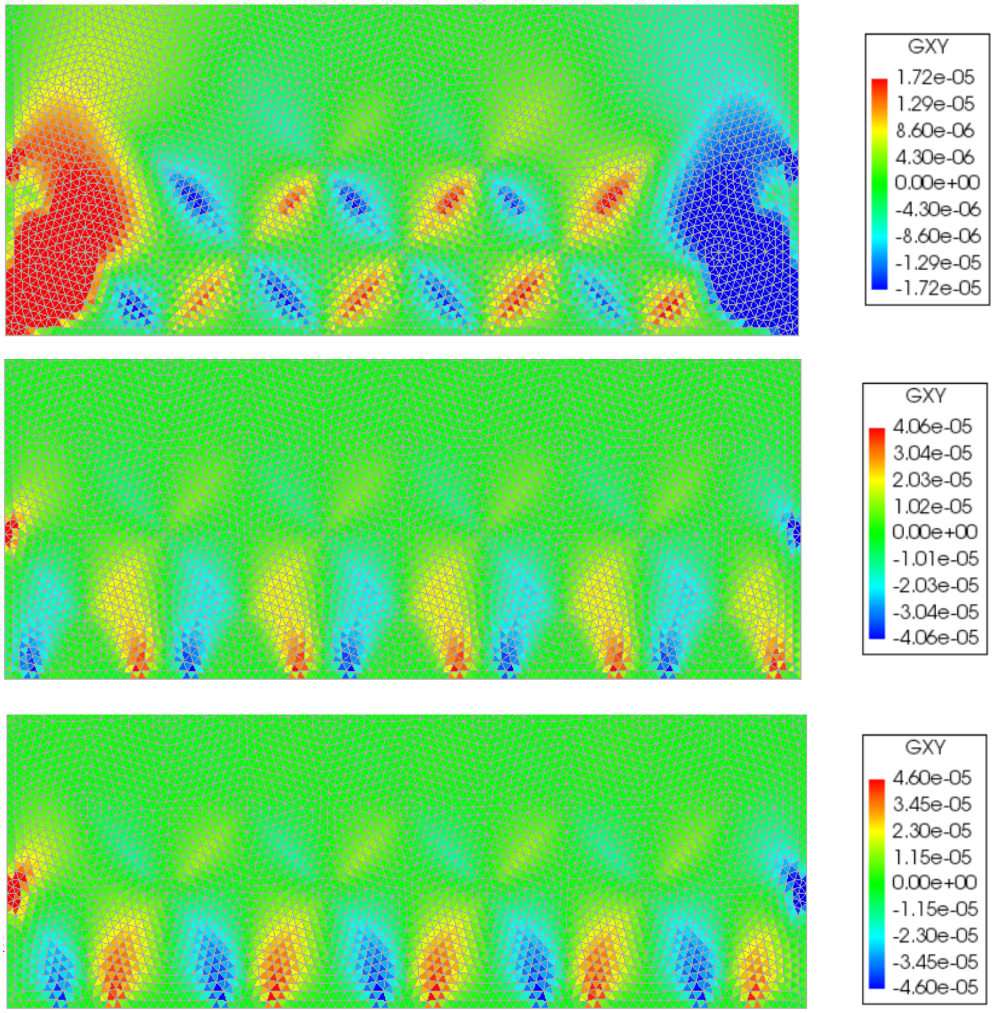


Figura 96: Confronto della deformazione γ_{xy} all'interno della matrice di calcestruzzo. (a) Taglio sul nodo - (b) Taglio a 2/3 - (c) Taglio a 1/3.

L'analisi della deformazione γ_{xy} risulta interessante in quanto si osserva un andamento simile nei casi (b) e (c); il caso (a) mostra invece una diffusione delle tensioni tangenziali differente. In particolare, il caso di "Taglio sul nodo" mostra come i campi tensionali delle γ_{xy} si presentano con la medesima intensità anche una volta superato il primo incrocio delle armature. Diversamente nei casi di "Taglio a

1/3" e di "Taglio a 2/3" l'effetto delle γ_{xy} si esaurisce prima dell'incrocio delle armature, presentandosi debolmente affievolito nella parte superiore.

I valori tensionali hanno un andamento analogo ai valori deformativi e quindi non vengono riportati. Per essi valgono i ragionamenti fatti pocanzi relativamente ai campi deformativi. Infine, si presenta il campo di tensioni principali nelle barre di armatura.

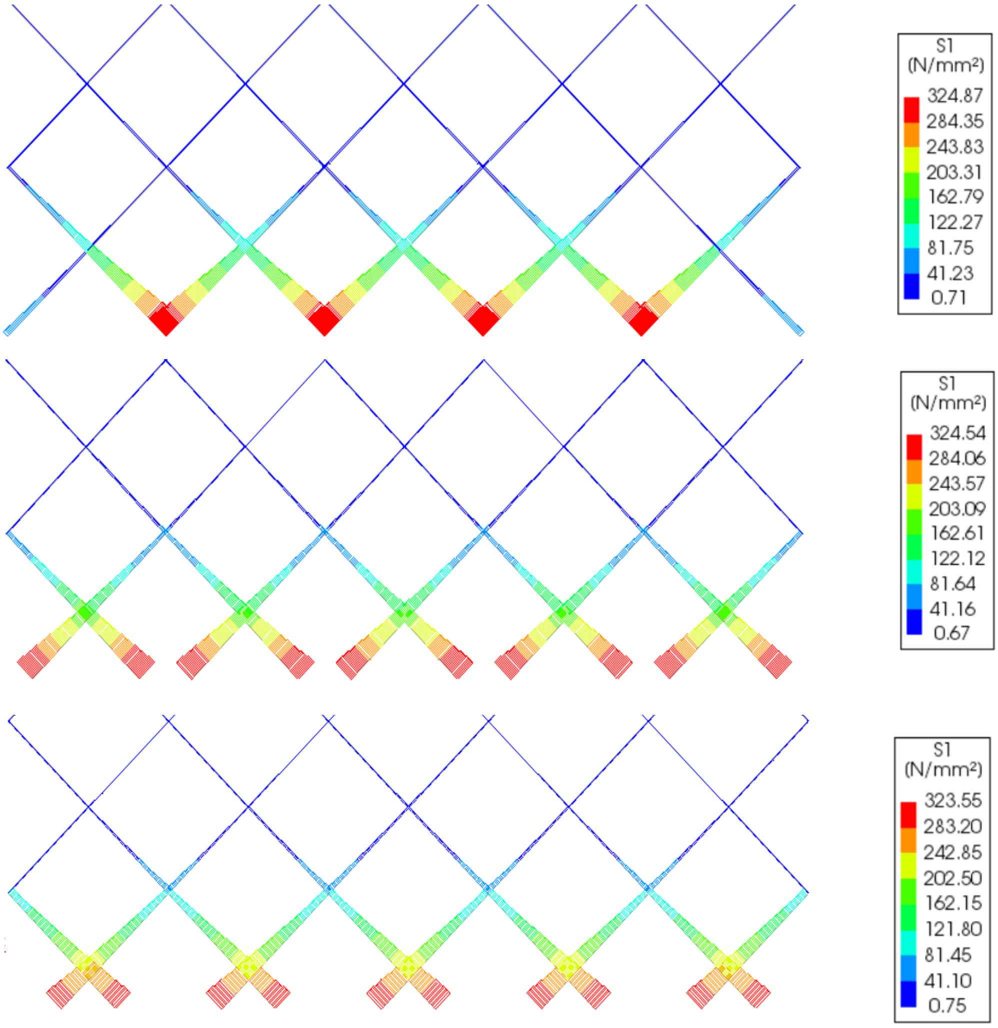


Figura 97: Confronto della tensione principale all'interno della armatura metallica. (a) Taglio sul nodo - (b) Taglio a 2/3 - (c) Taglio a 1/3.

Si osserva che l'andamento tensionale presenta un decadimento simile nei tre casi. Non sono rilevate particolarità nella tensione s_1

Appendice

Codice Matlab

Di seguito si è riportato il codice Matlab utilizzato per la generazione dei modelli *.dat* per il software DIANA.

```
%% Thesis @Polito
%
% Student:     Busso Francesco - s239619@studenti.polito.it
% Rev:         November 2018
% Title:       Analysis of cracking in 2d r.c. structure subjected to plane
%              stress
%
% Description: Generation of file .dat with geometry, support and load
%              according to the syntax requirements of DIANA FEA analyser.
%
%% Default syntax and start time counter
clc
close all
clear all
format long e
tic
%% START INPUT DATA
%% Geometric plate and reinforcement data
xp=1060; %[mm] x base dimension
yp=700; %[mm] y base dimension (it change if 'crn'=1)
alpha=45; %[deg] inclination of alpha-reinforcement -> MUST BE INTEGER
beta=45; %[deg] inclination of beta-reinforcement -> MUST BE INTEGER
s_alpha=150; %[mm] alpha-reinforcement spacing
s_beta=150; %[mm] beta-reinforcement spacing
opt=1; % The number is the chosen option for the geometry. You can choose
%        from {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}. You can chose a number > 0 only if you
%        have choosen:
%
%        (A) -> alpha=beta=45 & s_alpha=s_beta
%        (B) -> alpha=beta=90 || alpha=beta=0
%
%        Avaiable option for case (A):
%
%        {0}: no options. The geometry will be the original xp-yp.
%        {1}: Y symmetryc concrete field + intersection reinforcement on
%             (2,4) edges. xp changes.
```

```
%        {2}: X symmetryc concrete field + intersection reinforcement on
%             (1,3) edges. yp changes.
%        {3}: X symmetryc concrete field + intersection reinforcement on
%             (1,3) edges. Y symmetryc concrete field + intersection
%             reinforcement on (2,4) edges. xp and yp change.
%
%        Avaiable option for case (B):
%
%        {0}: no options. The geometry will be the original xp-yp.
%        {4}: Y symmetryc concrete field. xp changes.
%        {5}: X symmetryc concrete field. yp changes.
%        {6}: Y symmetryc concrete field + intersection reinforcement on
%             (1,3) edges. xp and yp change.
%        {7}: X symmetryc concrete field + intersection reinforcement on
%             (2,4) edges. xp and yp change.
%        {8}: intersection reinforcement on (1,3) edges. yp change.
%        {9}: intersection reinforcement on (2,4) edges. xp change.
%
%        If you are not in case (A) or (B) you must use {0}.
%% Support of plate and reinforcement
% In this section you can specify which edges nodes of concrete or
% reinforcement you want to restrain
%
% Traslation constraints of Concrete CTX, CTY and Reinforcement RTX, RTY in
% X or Y directions. They are rows vectors (1x4) tahat identify if the
% restrain in this direction work. If work {1}, if do not work {0}. The
% start (first column) is from inf. edge (base) and round counterclockwise.
%
%   edge:  1°    2°    3°    4°
%          ?     ?     ?     ?
%        |CTX,1 CTX,2 CTX,3 CTX,4| % constrain concrete to X translation
% SUPP = |CTY,1 CTY,2 CTY,3 CTY,4| % constrain concrete to X translation
%        |RTX,1 RTX,2 RTX,3 RTX,4| % constrain reinf. to X translation
%        |RTY,1 RTY,2 RTY,3 RTY,4| % constrain reinf. to Y translation
%
SUPP=[0 1 0 1
      0 0 1 0
      0 1 0 1
      0 0 0 0];
%% Reinforcement applied forces
% In this section you can specify which edges nodes of reinforcement you
% want to load with a sigma tension
%
% Tension in reinforcement in direction alpha or beta SIGMA1, SIGMA2. Tehy
% are rows vectors (1x4) tahat identify the tension in MPa for each edge.
% (The edge are the columns). The start (first column) is from inf. edge
% (base) and round counterclockwise.
%
%   edge:     1°       2°       3°      4°
%             ?        ?        ?       ?
% SIGMA = |SIGMA1,1 SIGMA1,2 SIGMA1,3 SIGMA1,4| % sigma in dir. beta (1)
%         |SIGMA2,1 SIGMA2,2 SIGMA2,3 SIGMA2,4| % sigma in dir. alpha (2)
%
% Positive direction of SIGMA is in positive direction 4 and 5, both
% defined later like cosine director of reinforcement:
%
%       dir4=[cos(beta),sin(beta)];
%       dir5=[sin(alpha),cos(alpha)];
%
%       Exemple: for general direction alpha and beta:
%             - dir (4) is in the first quadrant of xy plane
%             - dir (5) is in the second quadrant of xy plane
% WARNING !!
% If the reinforcement in alpha or beta directions not intersect an edge
```

```
% you MUST specify, for that directions and edge, 0 (zero) in the SIGMA
% table, in order to avoid abort of code.
%
 SIGMA=[-100 0 0 0
         -50 0 0 0];
diameter_alpha=14; % [mm] bar diameter of reinforcement [>= 6 mm]
diameter_beta=14; % [mm] bar diameter of reinforcement [>= 6 mm]
%% Mesh parameters
delta=10; %[mm] triangulation size order
Hgrad=1.3; %[%] mesh Gradation. It has been chosen from > 1 to < 2
Hmax=1*delta; %[mm] min value of edge elements
Hmin=1*delta; %[mm] max value of edge elements
GeometricOrder='linear'; % {'linear'},{'quadratic'}
quality=90; % [%]
%% Elemets used in DIANA FEA (see 'Element Library of Diana)
% Concrete Plane stress element
Element='T6MEM';
% Truss element for reinforcement
truss='L4TRU';
% Interface element to connect reinforcement and concrete
interface='L8IF';
%% Reinforcement details for bond - slip curve alpha
type_alpha='crescent'; % {'crescent'},{'uniform'} - type of ribs (ISO 6935-2)
rib_spacing_alpha='max'; % {'mean'},{'min'},{'max'} - claer dist. (ISO 6935-2)
collapse_mode_alpha='PO'; % {PO},{SP} - PullOut, SPlitting
bond_conditions_alpha='good'; % {good},{other}
confined_alpha='yes'; % {yes},{no} - if concrete is confined
% Consider and write on .dat file interface element of alpha dir. ??
interface_alpha=1; % {1}: yes - {0}: no
DSSX_alpha=1.8E4; % [N/mm^3] stifness D22
DSNY_alpha=1.8E4; % [N/mm^3] stifness D11
%% Reinforcement details for bond - slip curve beta
type_beta='crescent'; % {'crescent'},{'uniform'} - type of ribs (ISO 6935-2)
rib_spacing_beta='max'; % {'mean'},{'min'},{'max'} - claer dist. (ISO 6935-2)
collapse_mode_beta='PO'; % {PO},{SP} - PullOut, SPlitting
bond_conditions_beta='good'; % {good},{other}
confined_beta='yes'; % {yes},{no} - if concrete is confined
% Consider and write on .dat file interface element of beta dir. ??
interface_beta=1; % {1}: yes - {0}: no
DSSX_beta=1.8E4; % [N/mm^3] stifness D22
DSNY_beta=1.8E4; % [N/mm^3] stifness D11
%% Concrete details
fck=25; % [MPa] class of concrete
poison_c=0.2; % [-] Poison ratio
term_c=0.00001; % [1/C°] thermal expansion coefficent
thick=150; % [mm] thick of concrete element
%% Steel details
Es=200000; % [MPa] Elastic stifness modulus of steel
poison_s=0.3; % [-] Poison ratio
term_s=0.00001; % [1/C°] thermal expansion coefficent
fy=450; % [MPa] yield tension of B450 steel
ft_s=540; % [MPa] ultimate tension of B450 steel
epsu_s=0.075; % [-] ultimate eps
epssig=[fy/Es fy epsu_s ft_s]; % [eps0-sig0,eps1-sig1,...] hardening curve
%% STOP INPUT DATA
fprintf('\n********************** start ***************************\n\n');
%% Input data verification
% diameter verification
if diameter_alpha<6
    disp('ERRORE: Curva bond definita solo per diametri_alpha > = 6')
    return
end
if diameter_beta<6
    disp('ERRORE: Curva bond definita solo per diametri_beta > = 6')
```

```
    return
end
% alpha and beta are integer ?
if ne(floor(alpha),alpha)
    disp('ERRORE: alpha deve essere un numero intero')
    return
end
if ne(floor(beta),beta)
    disp('ERRORE: beta deve essere un numero intero')
    return
end
% alpha and beta are in [0,90] deg. ?
if or(alpha<0,alpha >90)
    disp('ERRORE: alpha deve essere compreso in [0°,90°]')
    return
end
if or(beta<0,beta >90)
    disp('ERRORE: beta deve essere compreso in [0°,90°]')
    return
end
% reinforcement direction overlap ?
if and(eq(beta,90),eq(alpha,0))
    disp('ERRORE: le armature sono sovrapposte')
    return
end
if and(eq(beta,0),eq(alpha,90))
    disp('ERRORE: le armature sono sovrapposte')
    return
end
% SUPP matrix is correct ?
for i=1:size(SUPP,1)
    for j=1:size(SUPP,2)
        if and(ne(SUPP(i,j),1),ne(SUPP(i,j),0))
            disp('ERRORE nei parametri matrice SUPP: USARE SOLO {0},{1}')
            return
        end
    end
end
% option is correct ?
if and(and(eq(alpha,45),eq(beta,45)),eq(s_alpha,s_beta))
    if opt>3
        disp('ERRORE: opzione non valida. Scegliere {0,1,2,3}')
        return
    end
else
    if or(and(eq(alpha,90),eq(beta,90)),and(eq(alpha,0),eq(beta,0)))
        if and(opt>0,opt<4)
            disp('ERRORE: opzione non valida. Scegliere {0,4,5,6,7,8,9}')
            return
        end
    else
        if ne(opt,0)
            disp('ERRORE: opzione non valida. Scegliere {0}')
            return
        end
    end
end
time=toc;
fprintf('Controllo dei parametri eseguito in %.2f [s] con successo!\n',...
    time);
%% Application of 'options' parameters
modulo_1=s_alpha*cos(deg2rad(alpha))+s_beta*sin(deg2rad(beta));
modulo_2=s_alpha*sin(deg2rad(alpha))+s_beta*cos(deg2rad(beta));
if eq(opt,1)
```

```
    xp=modulo_1*round(xp/modulo_1);
end
if eq(opt,2)
    yp=modulo_1*round(yp/modulo_1);
end
if eq(opt,3)
    xp=modulo_1*round(xp/modulo_1);
    yp=modulo_1*round(yp/modulo_1);
end
if eq(opt,4)
    xp=modulo_1*odd(xp/modulo_1);
end
if eq(opt,5)
    yp=modulo_1*odd(yp/modulo_1);
end
if eq(opt,6)
    xp=modulo_1*odd(xp/modulo_1);
    yp=modulo_2*odd(xp/modulo_2);
end
if eq(opt,7)
    yp=modulo_1*odd(xp/modulo_1);
    xp=modulo_2*odd(xp/modulo_2);
end
if eq(opt,8)
    yp=modulo_2*odd(xp/modulo_2);
end
if eq(opt,9)
    xp=modulo_2*odd(xp/modulo_2);
end
time=toc;
fprintf('Applicazione di options eseguita in %.2f [s] con successo!\n',...
    time);
%% Model number
modelnumber=sprintf('%dx%d_d%d_d%d_%dx%d_%dx%d_mesh%d',round(xp),...
    round(yp),diameter_alpha,diameter_beta,alpha,beta,s_alpha,s_beta,delta);
time=toc;
fprintf('Generazione del modello eseguita in %.2f [s] con successo!\n',...
    time);
fprintf('Nome: %s\n',modelnumber);
%% Generation of mesh model in PdeToolbox
%
% Creation of the plate shape. The vertex of the plate are stored in the
% [polyshape].Vertices
plate=polyshape([-xp/2 xp/2 xp/2 -xp/2],[-yp/2 -yp/2 yp/2 yp/2]);
%
% Creation of the pricipal quadrangolar internal shape. The vertex of this
% area are stored in the [polyshape].Vertices
alphar=deg2rad(alpha);
betar=deg2rad(beta);
v0=[0,0]; % coordinates vertex 0: origin of planes
v1=[s_alpha*cos(betar)/cos(alphar-betar),...
    s_alpha*sin(betar)/cos(alphar-betar)]; % coordinates vertex 1
v2= [v1(1,1)-s_beta*sin(alphar)/cos(alphar-betar),...
    v1(1,2)+s_beta*cos(alphar)/cos(alphar-betar)];% coordinates vertex 2
v3=[v2(1,1)-v1(1,1),v2(1,2)-v1(1,2)]; % coordinates vertex 3
Xv=[v0(1,1) v1(1,1) v2(1,1) v3(1,1)]; % row vector of x-coord of vertex
Yv=[v0(1,2) v1(1,2) v2(1,2) v3(1,2)];% row vector of y-coord of vertex
if eq(isequal(ones(4,1),isinterior(plate,Xv,Yv)),0)
    disp('PASSO DELLE ARMATURE TROPPO GRANDE -> RIDURRE')
    return
end
% Creation of the others quadrangolar internal shape. The vertex of these
% area are stored in the [polyshape].Vertices
%
```

```
% Increment dx and dy
d1=[v1(1,1) v1(1,2)]; % row vector of increment Delta_1 = [dx_1 dy_1]
d2=[v3(1,1) v3(1,2)]; % row vector of increment Delta_2 = [dx_2 dy_2]
d=[d1;d2]; % matrix increment in alpha and beta directions
%
% Definitions of intersections
if or(or(eq(alpha,90),eq(beta,90)),or(eq(alpha,0),eq(beta,0)))
    if and(eq(alpha,0),eq(beta,0))
        x_int_1=0; y_int_1=yp/2;
        x_int_2=-xp/2; y_int_2=0;
    end
    if and(eq(alpha,90),eq(beta,90))
        x_int_1=-xp/2; y_int_1=0;
        x_int_2=0; y_int_2=-yp/2;
    end
    if and(eq(alpha,0),and(ne(beta,0),ne(beta,90)))
        x_int_1=0; y_int_1=(xp/2)*tan(betar)+yp/2;
        x_int_2=-xp/2; y_int_2=-(xp/2)*tan(beta);
    end
    if and(eq(alpha,90),and(ne(beta,0),ne(beta,90)))
        x_int_1=-xp/2-(yp/2)/tan(betar); y_int_1=0;
        x_int_2=-(yp/2)/tan(betar); y_int_2=-yp/2;
    end
    if and(eq(beta,0),and(ne(alpha,0),ne(alpha,90)))
        x_int_1=-(yp/2)*tan(alphar); y_int_1=yp/2;
        x_int_2=-xp/2-(yp/2)*tan(alphar); y_int_2=0;
    end
    if and(eq(beta,90),and(ne(alpha,0),ne(alpha,90)))
        x_int_1=-xp/2; y_int_1=(xp/2)*tan(alphar);
        x_int_2=0; y_int_2=-yp/2-(xp/2)/tan(alphar);
    end
else
% Intersection 1
[x_int_1,y_int_1]=intersezione_rette(tan(betar),...
    xp/2*tan(betar)+yp/2,-tan(pi/2-alphar),0);
% Intersection 2
[x_int_2,y_int_2]=intersezione_rette(-tan(pi/2-alphar),...
    -xp/2*tan(pi/2-alphar)-yp/2,tan(betar),0);
end
% Number of element to consider along alpha direction
n1=ceil(sqrt(x_int_1^2+y_int_1^2)/(s_beta/cos(alphar-betar)));
% Number of element to consider along beta direction
n2=ceil(sqrt(x_int_2^2+y_int_2^2)/(s_alpha/cos(alphar-betar)));
%
% Geometry input in PdeToolbox Matlab R2018b
k=0; % element index
gd=zeros(10,1);
ns='cancellare';
sf='PLATE*(';
for i=-n2:1:n2-1
    for j=-n1:1:n1-1
        j=j+1;
        clear('agg');
        clear('el');
        agg=[2;4;[Xv+i*d(1,1)+j*d(2,1)]';[Yv+i*d(1,2)+j*d(2,2)]'];
        gd=[gd,agg];
        el=sprintf('EL%d',k);
        ns=char(ns,el);
        if ne(k,n1*n2*4)
        sf=strcat(sf,el,'+');
        else
        sf=strcat(sf,el,')');
        end
    end
```

```
end
gd(:,1)=[2;4;[-xp/2 xp/2 xp/2 -xp/2]';[-yp/2 -yp/2 yp/2 yp/2]'];
ns(1,:)='PLATE     ';
ns=ns';
[dl,bt]=decsg(gd,sf,ns);
model=createpde;
geometryFromEdges(model,dl);
mesh=generateMesh(model,'Hmax',Hmax,'Hmin',Hmin,'Hgrad',Hgrad,...
    'GeometricOrder',GeometricOrder);
% Plot (figure number 1)
figure
subplot(1,2,1);
pdegplot(dl,'EdgeLabels','on','FaceLabels','on');
title('Elements and Edge');
axis equal
axis([-xp/2 xp/2 -yp/2 yp/2]);
subplot(1,2,2)
pdemesh(model);
title('Mesh triangulation');
axis equal
axis([-xp/2 xp/2 -yp/2 yp/2]);
time=toc;
fprintf('Mesh creata Pde-toolbox eseguita in %.2f [s] con successo!\n',...
    time);
%% Quality mesh control
elemIDs=findElements(mesh,'box',[-xp/2,xp/2],[-yp/2,yp/2]);
Q=meshQuality(mesh,elemIDs);
elemIDs_quality = elemIDs(Q < quality/100);
% Plot (figure number 2)
figure
subplot(1,2,1);
hist(Q);
xlabel('Element Shape Quality','fontweight','b');
ylabel('Number of Elements','fontweight','b');
title('Mesh quality');
subplot(1,2,2);
pdemesh(mesh);
hold on
pdemesh(mesh.Nodes,mesh.Elements(:,elemIDs_quality),'EdgeColor','green');
str_title=sprintf('Elements with shape quality < %d %%',quality);
title(str_title);
axis equal
axis([-xp/2 xp/2 -yp/2 yp/2]);
%% Bond Slip model curve
[tm_alpha,s1_alpha,s2_alpha,s3_alpha,a_alpha,tf_alpha]=bondslip(diameter_alpha,type_a
lpha,rib_spacing_alpha,fck,collapse_mode_alpha,...
    bond_conditions_alpha,confined_alpha);
[tm_beta,s1_beta,s2_beta,s3_beta,a_beta,tf_beta]=bondslip(diameter_beta,type_beta,rib
_spacing_beta,fck,collapse_mode_beta,...
    bond_conditions_beta,confined_beta);
[tm_0_alpha,s1_0_alpha,s2_0_alpha,s3_0_alpha,a_0_alpha,tf_0_alpha]=bondslip(diameter_
alpha,...
    'crescent','mean',fck,'PO','good','yes');
[tm_0_beta,s1_0_beta,s2_0_beta,s3_0_beta,a_0_beta,tf_0_beta]=bondslip(diameter_beta,.
..
    'crescent','mean',fck,'PO','good','yes');
slip_alpha=linspace(0,s1_alpha,97);
slip_beta=linspace(0,s1_beta,97);
for i=1:size(slip_alpha,2)
    t0_alpha(i)=tm_alpha*(slip_alpha(i)/s1_alpha)^a_alpha;
end
for i=1:size(slip_beta,2)
    t0_beta(i)=tm_beta*(slip_beta(i)/s1_beta)^a_beta;
end
```

```
t0_alpha=[t0_alpha,tm_alpha,tf_alpha,tf_alpha];
t0_beta=[t0_beta,tm_beta,tf_beta,tf_beta];
slip_alpha=[slip_alpha,s2_alpha,s3_alpha,max(max(s3_alpha+s1_alpha,s3_0_alpha+s1_0_al
pha),max(s3_beta+s1_beta,s3_0_beta+s1_0_beta))];
slip_beta=[slip_beta,s2_beta,s3_beta,max(max(s3_alpha+s1_alpha,s3_0_alpha+s1_0_alpha)
,max(s3_beta+s1_beta,s3_0_beta+s1_0_beta))];
z_alpha=[slip_alpha;t0_alpha];
z_alpha=z_alpha(:);
z_beta=[slip_beta;t0_beta];
z_beta=z_beta(:);
% Plot (figure number 3)
figure
bondplot_alpha=plot(slip_alpha,t0_alpha,'r');
bondplot_alpha.LineWidth=2;
hold on
bondplot_beta=plot(slip_beta,t0_beta,'b');
bondplot_beta.LineWidth=2;
title({'Bond slip reinforcement-concrete','using MC2010 relationship'});
xlabel('slip [mm]');
ylabel('\tau_0 [MPa]');
grid on
if strcmp(collapse_mode_alpha,'PO')
str_legend_alpha=sprintf(['Bar diameter:\t%d [mm]\nType shape rib:\t%s\n'...
    'Option rib spacing:\t%s\nfck:\t%d [MPa]\nCollapse mode:\t%s\n'...
    'Bond conditions:\t%s\n\n'],diameter_alpha,type_alpha,rib_spacing_alpha,fck,...
    collapse_mode_alpha,bond_conditions_alpha);
else
str_legend_alpha=sprintf(['Bar diameter:\t%d [mm]\nType shape rib:\t%s\n'...
    'Option rib spacing:\t%s\nfck:\t%d [MPa]\nCollapse mode:\t%s\n'...
    'Bond conditions:\t%s\n Confined
stirrups:\t%s\n\n'],diameter_alpha,type_alpha,...
    rib_spacing_alpha,fck,collapse_mode_alpha,bond_conditions_alpha,confined_alpha);
end
if strcmp(collapse_mode_beta,'PO')
str_legend_beta=sprintf(['Bar diameter:\t%d [mm]\nType shape rib:\t%s\n'...
    'Option rib spacing:\t%s\nfck:\t%d [MPa]\nCollapse mode:\t%s\n'...
    'Bond conditions:\t%s\n\n'],diameter_beta,type_beta,rib_spacing_beta,fck,...
    collapse_mode_beta,bond_conditions_beta);
else
str_legend_beta=sprintf(['Bar diameter:\t%d [mm]\nType shape rib:\t%s\n'...
    'Option rib spacing:\t%s\nfck:\t%d [MPa]\nCollapse mode:\t%s\n'...
    'Bond conditions:\t%s\n Confined stirrups:\t%s\n\n'],diameter_beta,type_beta,...
    rib_spacing_beta,fck,collapse_mode_beta,bond_conditions_beta,confined_beta);
end
% Standard output
slip_0_alpha=linspace(0,s1_0_alpha,97);
slip_0_beta=linspace(0,s1_0_beta,97);
for i=1:size(slip_0_alpha,2)
    t0_0_alpha(i)=tm_0_alpha*(slip_0_alpha(i)/s1_0_alpha)^a_alpha;
end
for i=1:size(slip_0_beta,2)
    t0_0_beta(i)=tm_0_beta*(slip_0_beta(i)/s1_0_beta)^a_beta;
end
t0_0_alpha=[t0_0_alpha,tm_0_alpha,tf_0_alpha,tf_0_alpha];
t0_0_beta=[t0_0_beta,tm_0_beta,tf_0_beta,tf_0_beta];
slip_0_alpha=[slip_0_alpha,s2_0_alpha,s3_0_alpha,max(max(s3_alpha+s1_alpha,s3_0_alpha
+s1_0_alpha),max(s3_beta+s1_beta,s3_0_beta+s1_0_beta))];
slip_0_beta=[slip_0_beta,s2_0_beta,s3_0_beta,max(max(s3_alpha+s1_alpha,s3_0_alpha+s1_
0_alpha),max(s3_beta+s1_beta,s3_0_beta+s1_0_beta))];
hold on
bondplot_0_alpha=plot(slip_0_alpha,t0_0_alpha,'--r');
bondplot_0_alpha.LineWidth=1;
bondplot_0_beta=plot(slip_0_beta,t0_0_beta,'--b');
bondplot_0_beta.LineWidth=1;
```

```
str_legend_0_alpha=sprintf(['Bar diameter:\t%d [mm]\nType shape rib:\t'...
    'crescnt\nOption rib spacing:\tmean\nfck:\t%d [MPa]\nCollapse mode:'...
    '\tPO\nBond conditions:\tgood'],diameter_alpha,fck);
str_legend_0_beta=sprintf(['Bar diameter:\t%d [mm]\nType shape rib:\t'...
    'crescnt\nOption rib spacing:\tmean\nfck:\t%d [MPa]\nCollapse mode:'...
    '\tPO\nBond conditions:\tgood'],diameter_beta,fck);
leg=legend({str_legend_alpha,str_legend_beta,str_legend_0_alpha,str_legend_0_beta},'N
umColumns',2);
title(leg,'Parameters Bond slip');
axis([0,max(max(s3_alpha+s1_alpha,s3_0_alpha+s1_0_alpha),max(s3_beta+s1_beta,s3_0_bet
a+s1_0_beta)),0,max(max(max(t0_alpha)+5,max(t0_0_alpha)+5),max(max(t0_beta)+5,max(t0_
0_beta)+5))]);
%% Export mesh from PdeToolbox
[p,e,t]=meshToPet(mesh);
%% Algorithm on mesh
p=p';
t=t';
e_truss=e;
% deleted columns of external edge from matrix e_truss
delcol=0;
for i=1:size(e,2)
    if or(eq(e(6,i),0),eq(e(7,i),0))
        e_truss(:,i-delcol)=[];
        delcol=delcol+1;
    end
end
e_truss(3:4,:)=[]; % delete 3rd and 4th columns
e_truss(end-1:end,:)=[]; % delete 6th and 7th columns
% generation of directions of reinforcement in the 4th row
for i=1:size(e_truss,2) % define new row for the directions
    if or(eq(alpha,0),eq(alpha,90))
        if or(eq(beta,0),eq(beta,90))
            [Msg,dir_reinfo]=metodo_A(p(e_truss(1,i),1),p(e_truss(1,i),...
                2),p(e_truss(2,i),1),p(e_truss(2,i),2),beta);
            if strcmp(Msg,'None')
                e_truss(4,i)=dir_reinfo;
            else
                disp('ERRORE richiamo function ''metodo_A''');
                return
            end
        else
            [Msg,dir_reinfo]=metodo_C(p(e_truss(1,i),1),p(e_truss(1,i),...
                2),p(e_truss(2,i),1),p(e_truss(2,i),2),beta);
            if strcmp(Msg,'None')
                e_truss(4,i)=dir_reinfo;
            else
                disp('ERRORE richiamo function ''metodo_C''');
                return
            end
        end
    else
        if or(eq(beta,0),eq(beta,90))
            [Msg,dir_reinfo]=metodo_C(p(e_truss(1,i),1),p(e_truss(1,i),...
                2),p(e_truss(2,i),1),p(e_truss(2,i),2),beta);
            if strcmp(Msg,'None')
                e_truss(4,i)=dir_reinfo;
            else
                disp('ERRORE richiamo function ''metodo_C''');
                return
            end
        else
            [Msg,dir_reinfo]=metodo_B(p(e_truss(1,i),1),p(e_truss(1,i),...
                2),p(e_truss(2,i),1),p(e_truss(2,i),2));
            if strcmp(Msg,'None')
```

```
                e_truss(4,i)=dir_reinfo;
            else
                disp('ERRORE richiamo function ''metodo_B''');
                return
            end
        end
    end
end
% generation of the panel 2 of e_truss (with x-coordinates)
e_truss(:,:,2)=e_truss(:,:,1);
for i=1:size(e_truss,2)
    e_truss(1,i,2)=p(e_truss(1,i,1),1);
    e_truss(2,i,2)=p(e_truss(2,i,1),1);
end
% generation of the panel 3 of e_truss (with y-coordinates)
e_truss(:,:,3)=e_truss(:,:,1);
for i=1:size(e_truss,2)
    e_truss(1,i,3)=p(e_truss(1,i,1),2);
    e_truss(2,i,3)=p(e_truss(2,i,1),2);
end
% generation of the panel 4 of e_truss (equal to panel 1)
e_truss(:,:,4)=e_truss(:,:,1);
% rename the number of nodes in the 1st panel: two or four occorrence
ass=tabulate([e_truss(1,:,1),e_truss(2,:,1)]');
ass(:,3)=[];
% add to table 'ass', what is the direction of the edges to which the node
% belongs, for each occorrence. So the possible occorrence are (value in
% column 2):
%
%              {0}: the nodes is not a edge-truss node;
%              {1}: the nodes has only one occorrence: it represent a end
%                   node of a truss that is in contact with the outside;
%              {2}: two case:
%                             (A) it represent a internal node not at bar
%                                 intersection: in this case it has two
%                                 equal occorrence 1,1 or 2 2;
%                             (B) it represent an edge node: in this case
%                                 it has two different occorrence 1 and 2;
%              {4}: the nodes has four occorrence: it represent internal
%                   node of intersection of bar along direction 1 and 2.
%
for j=1:size(ass,1)
    k=1;
    for i=1:size(e_truss,1)
        if eq(ass(j,1),e_truss(1,i,4))
            ass(j,k)=e_truss(4,i,4);
            k=k+1;
        end
        if eq(ass(i,1),e_truss(2,i,4))
            ass(k,j)=e_truss(4,i,4);
            k=k+1;
        end
    end
end
% Generation of new name for node of reinforcement. The new name will be
% assigned to all the nodes that in table 'ass' have {1},{2} or {4}
% occorrence. So :
%
%      num. occorrence: {1}-> new 1 name;
%      num. occorrence: {2}-> new 1 or 2 name/s if you are in case (A) or
%                             case (B);
%      num. occorrence: {4}-> new 2 name;
%
k=1;
```

```
for i=1:size(ass,1)
    if eq(ass(i,2),1)
        ass(i,7)=size(p,1)+k;
        k=k+1;
    end
    if eq(ass(i,2),2)
        if eq(ass(i,3),ass(i,4))
            ass(i,7)=size(p,1)+k;
            k=k+1;
        else
            if or(eq(eq(ass(i,3),1),eq(ass(i,4),2)),eq(eq(ass(i,3),2),...
                    eq(ass(i,4),1)))
                ass(i,7)=size(p,1)+k;
                ass(i,8)=size(p,1)+k+1;
                k=k+2;
            else
                disp('ERRORE nel numero di occorrenze nodi truss');
            end
        end
    end
    if eq(ass(i,2),4)
        ass(i,7)=size(p,1)+k;
        ass(i,8)=size(p,1)+k+1;
        k=k+2;
    end
end
% Verify that occorrence [ass(:,2)] is equal onl to {0},{1},{2} or {4}
for ii=1:size(ass,1)
    if or(or(eq(ass(ii,2),0),eq(ass(ii,2),1)),...
            or(eq(ass(ii,2),2),eq(ass(ii,2),4)))
    else
        fprintf('ERRORE valore non consentito come occorrenza nodo\n');
    end
end
% Assign the new nae nodes in the panel 1 of matrix e_truss
for j=1:size(ass,1)
    for i=1:size(e_truss,2)
        if eq(e_truss(1,j,4),ass(j,1))
            if eq(ass(i,2),1)
                e_truss(1,j,1)=ass(j,7);
            end
            if eq(ass(j,2),4)
                if eq(e_truss(4,i,1),1)
                    e_truss(1,i,1)=ass(j,7);
                else
                    if eq(e_truss(4,i,1),2)
                        e_truss(1,i,1)=ass(j,8);
                    end
                end
            end
            if eq(ass(j,2),2)
                if eq(ass(j,3),ass(j,4))
                    e_truss(1,i,1)=ass(j,7);
                else
                    if or(and(eq(ass(j,3),1),eq(ass(j,4),2)),...
                            and(eq(ass(j,3),2),eq(ass(j,4),1)))
                        if eq(e_truss(4,j,1),1)
                            e_truss(1,i,1)=ass(j,7);
                        else
                            if eq(e_truss(4,i,1),2)
                                e_truss(1,j,1)=ass(j,8);
                            end
                        end
                    end
```

```
                end
            end
        end
    end
    for i=1:size(e_truss,2)
        if eq(e_truss(2,i,4),ass(j,1))
            if eq(ass(j,2),1)
                e_truss(2,i,1)=ass(j,7);
            end
            if eq(ass(j,2),4)
                if eq(e_truss(4,i,1),1)
                    e_truss(2,i,1)=ass(j,7);
                else
                    if eq(e_truss(4,i,1),2)
                        e_truss(2,i,1)=ass(j,8);
                    end
                end
            end
            if eq(ass(j,2),2)
                if eq(ass(j,3),ass(j,4))
                    e_truss(2,i,1)=ass(j,7);
                else
                    if or(and(eq(ass(j,3),1),eq(ass(j,4),2)),...
                            and(eq(ass(j,3),2),eq(ass(j,4),1)))
                        if eq(e_truss(4,i,1),1)
                            e_truss(2,i,1)=ass(j,7);
                        else
                            if eq(e_truss(4,i,1),2)
                                e_truss(2,i,1)=ass(j,8);
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end
%
% Control if the re-name of truss node has been correct
for j=1:size(e_truss,2)
    for i=1:2
        if eq(e_truss(i,j,1),e_truss(i,j,4))
            fprintf('ERRORE nella numerazione dei nodi dell''armatura');
            return;
        end
    end
end
% Define the new list of coordinates point of truss-elements nodes
x_truss=[e_truss(1,:,2),e_truss(2,:,2)];
y_truss=[e_truss(1,:,3),e_truss(2,:,3)];
[C,ia,ic]=unique([e_truss(1,:,1),e_truss(2,:,1)]);
p_truss(:,1)=C';
p_truss(:,2)=x_truss(1,ia)';
p_truss(:,3)=y_truss(1,ia)';
% Generate the coordinate p_tot = p '+' p_truss
p_tot=[(1:1:size(p,1))',p;p_truss];
% Plot (figure number 4)
figure
o=ones(1,size(p,1));
p3=plot3(p(:,1),p(:,2),0*o,'.k'); % vertex of triangular mesh
p3.MarkerSize=0.2;
hold on;
for j=1:size(e_truss,2) % reinforcement alpha and beta direction
    if eq(e_truss(4,i,1),1)
```

```
        p3=plot3([e_truss(1,i,2),e_truss(2,i,2)],...
            [e_truss(1,i,3),e_truss(2,i,3)],[5,5],'or');
        p3.LineWidth=0.1;
        p3.LineStyle='--';
        p3.MarkerSize=2.5;
    else
        if eq(e_truss(4,i,1),2)
            p3=plot3([e_truss(1,i,2),e_truss(2,i,2)],...
                [e_truss(1,i,3),e_truss(2,i,3)],[10,10],'ob');
            p3.LineWidth=0.1;
            p3.LineStyle='--';
            p3.MarkerSize=2.5;
        else
            disp('ERRORE stampa delle armature');
        end
    end
end
% plot interface element like filled surface
for i=1:size(e_truss,2)
    if eq(e_truss(4,i,1),1)
        p3=fill3([e_truss(1,i,2) e_truss(2,i,2) e_truss(2,i,2)...
            e_truss(1,i,2)]',[e_truss(1,i,3) e_truss(2,i,3)...
            e_truss(2,i,3) e_truss(1,i,3)]',[0 0 5 5]','r','FaceAlpha',...
            0.05);
        p3.EdgeColor='r';
        p3.EdgeAlpha=0.2;
    else
        if eq(e_truss(4,i,1),2)
            p3=fill3([e_truss(1,i,2) e_truss(2,i,2) e_truss(2,i,2)...
                e_truss(1,i,2)]',[e_truss(1,i,3) e_truss(2,i,3)...
                e_truss(2,i,3) e_truss(1,i,3)]',[0 0 10 10]',...
                'b','FaceAlpha',0.05);
            p3.EdgeColor='b';
            p3.EdgeAlpha=0.2;
        else
            disp('ERRORE stampa interfaccia');
        end
    end
end
%% Restrain
% Algorithm on SUPPORT matrix
%
% Definitions of sign to use finding edge nodes, in accord to the following
% conventions:
%
%         edge    sign xp1 | sign xp2 | sign yp1 | sign yp2
%          1        (-)         (+)       (-)         (-)
%          2        (+)         (+)       (-)         (+)
%  idv =   3        (-)         (+)       (+)         (+)
%          4        (-)         (-)       (-)         (+)
%
% the [idv] matrix has on rows the edge of plate and on columns the sign of
% xp and yp to use in the function 'findNodes'
%
idv=[-1 +1 -1 -1
     +1 +1 -1 +1
     -1 +1 +1 +1
     -1 -1 -1 +1];
% Define tollerance to find nodes
tol=delta/10;
% Initialize variable to save support nodes
X_support=[];Y_support=[];
% Start finding restrained nodes
%
```

```
% j: Index of columns of SUPP matrix. It is the name of considered side
% i: Index of rows of SUPP matrix. It varies accord to the varies support
%    conditions (CTX, CTY, RTX, RTY).
%
for j=1:size(SUPP,1)
    if gt(sum(SUPP(:,j)),0)
        ID=findNodes(mesh,'box',[idv(j,1)*xp/2-tol idv(j,2)*xp/2+tol],...
            [idv(j,3)*yp/2-tol idv(j,4)*yp/2+tol])';
        for i=1:size(SUPP,1) % i: index of rows of SUPP matrix
            if and(eq(SUPP(i,j),1),eq(i,1))
                X_support=[X_support;ID,zeros(size(ID,1),1),j*...
                    ones(size(ID,1),1)];
            end
            if and(eq(SUPP(i,j),1),eq(i,2))
                Y_support=[Y_support;ID,zeros(size(ID,1),1),j*...
                    ones(size(ID,1),1)];
            end
            if and(eq(SUPP(j,i),1),eq(i,3))
                for hh=1:size(ID,1)
                    for kk=1:size(e_truss,2)
                        if eq(ID(hh,1),e_truss(1,kk,4))
                            X_support=[X_support;e_truss(1,kk,1),...
                                e_truss(4,kk,1),j];
                        end
                        if eq(ID(hh),e_truss(2,kk,4))
                            X_support=[X_support;e_truss(2,kk,1),...
                                e_truss(4,kk,1),j];
                        end
                    end
                end
            end
            if and(eq(SUPP(j,i),1),eq(i,4))
                for hh=1:size(ID,1)
                    for kk=1:size(e_truss,2)
                        if eq(ID(hh,1),e_truss(1,kk,4))
                            Y_support=[Y_support;e_truss(1,kk,1),...
                                e_truss(4,kk,1),j];
                        end
                        if eq(ID(hh),e_truss(2,kk,4))
                            Y_support=[Y_support;e_truss(2,kk,1),...
                                e_truss(4,kk,1),j];
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end
% plot the restrained nodes
if ne(size(X_support,1),0)
    for ii=1:size(X_support,1)
        if le(X_support(ii,1),size(p,1))
            p3=plot3(p(X_support(ii,1),1),p(X_support(ii,1),2),0,...
                'o','MarkerFaceColor','y','MarkerEdgeColor','k'...
                ,'MarkerSize',4);
        else
            if eq(X_support(ii,2),1)
                plot3(p_truss(X_support(ii,1)-size(p,1),2),p_truss...
                    (X_support(ii,1)-size(p,1),3),5,'o',...
                    'MarkerFaceColor','y','MarkerEdgeColor','k',...
                    'MarkerSize',4);
            else
                if eq(X_support(ii,2),2)
                    plot3(p_truss(X_support(ii,1)-size(p,1),2),p_truss...
```

```
                        (X_support(ii,1)-size(p,1),3),10,'o',...
                        'MarkerFaceColor','y','MarkerEdgeColor','k',...
                        'MarkerSize',4);
                else
                    disp('ERRORE definizione direzioni nodi vincolati')
                end
            end
        end
    end
end
if ne(size(Y_support,1),0)
    for ii=1:size(Y_support,1)
        if le(Y_support(ii,1),size(p,1))
            p3=plot3(p(Y_support(ii,1),1),p(Y_support(ii,1),2),0,'d'...
                ,'MarkerFaceColor','g','MarkerEdgeColor','k'...
                ,'MarkerSize',4);
        else
            if eq(Y_support(ii,2),1)
                plot3(p_truss(Y_support(ii,1)-size(p,1),2),p_truss...
                    (Y_support(ii,1)-size(p,1),3),5,'d',...
                    'MarkerFaceColor','g','MarkerEdgeColor','k',...
                    'MarkerSize',4);
            else
                if eq(Y_support(ii,2),2)
                    plot3(p_truss(Y_support(ii,1)-size(p,1),2),p_truss...
                        (Y_support(ii,1)-size(p,1),3),10,'d',...
                        'MarkerFaceColor','g','MarkerEdgeColor','k',...
                        'MarkerSize',4);
                else
                    disp('ERRORE definizione direzioni nodi vincolati')
                end
            end
        end
    end
end
%
% Definitions of directions of reinforcement (cosine director)
dir4=[1*cos(betar),1*sin(betar),0];
dir5=[-1*sin(alphar),1*cos(alphar),0];
%
%% Sigma load
%
% In this case we use the same 'idv' vector and the same 'tol' both defined
% in the previous section
%
% j: Index of columns of SIGMA matrix. It is the name of considered side
% i: Index of rows of SIGMA matrix. It varies accord to the loaded
% direction: 1 for sigma in direction beta and 2 for sigma in direction
% alpha
%
% The result is the [F] matrix:
%
%
%         |   1 col.   | 2 col. |   3 col.  | 4 col.|
%          name of the   sigma    direction   edge
%    [F]=  truss nodes            of sigma
%
%
F=[];
for j=1:size(SIGMA,2)
    ID=findNodes(mesh,'box',[idv(j,1)*xp/2-tol idv(j,2)*xp/2+tol],...
        [idv(j,3)*yp/2-tol idv(j,4)*yp/2+tol])';
    for i=1:size(SIGMA,1)
        correct=0;
```

```
        for hh=1:size(ID,1)
            for kk=1:size(e_truss,2)
                if and(eq(ID(hh,1),e_truss(1,kk,4)),eq(e_truss(4,kk,1),i))
                    F=[F;e_truss(1,kk,1),SIGMA(i,j),e_truss(4,kk,1),j];
                    correct=1;
                end
                if and(eq(ID(hh,1),e_truss(2,kk,4)),eq(e_truss(4,kk,1),i))
                    F=[F;e_truss(2,kk,1),SIGMA(i,j),e_truss(4,kk,1),j];
                    correct=1;
                end
            end
        end
        if eq(correct,0)
            if ne(SIGMA(j,i),0)
            fprintf(['ERRORE: l''armatura in direzione %d non interseca'...
                'il lato %d.\nModificare la geometria dell''armatura o'...
                ' la tensione applicata\n'],i,j);
            return
            end
        else
            if ne(SIGMA(j,i),0)
            time=toc;
            fprintf(['Carico di sigma%d lato %d eseguito in '...
                '%.2f [s] con successo!\n'],i,j,time);
            end
        end
    end
end
% delete sigma=0 in F matrix
%
F(eq(F(:,2),0),:)=[];
%
% plot sigma tension
F1=F(eq(F(:,3),1),:);
F2=F(eq(F(:,3),2),:);
if eq(isempty(F1),0)
    for ii=1:size(F1,1)
        h=scatter3(p_tot(F1(ii,1),2),p_tot(F1(ii,1),3),5,'d');
        h.MarkerFaceColor='c';
        h.MarkerFaceAlpha=0.2;
        set(h,'SizeData',abs(F1(ii,2)));
        h.MarkerEdgeColor='b';
    end
end
if eq(isempty(F2),0)
    for ii=1:size(F2,1)
        h=scatter3(p_tot(F2(ii,1),2),p_tot(F2(ii,1),3),10,'d');
        h.MarkerFaceColor='c';
        h.MarkerFaceAlpha=0.2;
        set(h,'SizeData',abs(F2(ii,2)));
        h.MarkerEdgeColor='b';
    end
end
%
%% Tau load
% In this section will be calculated the tau load to apply on Concrete
% edeges to balance the sigma load applied on the reinforcement
% You can assume j like a edge index
for j=1:4
    %
    % Define for each edge j the number of intersection of reinforcement in
    % direction 1 and direction 2
    %
    if eq(isempty(F1),0)
```

```
        ns1=sum(F1(:,4)==j); % number of force on edge j that have dir. 1
    else
        ns1=0;
    end
    if eq(isempty(F2),0)
        ns2=sum(F2(:,4)==j); % number of force on edge j that have dir. 2
    else
        ns2=0;
    end
    %
    % Calculate the tau load value. In accordance to Diana Element Library
    % this load is a [force/unit length] dimension.
    %
    As_alpha=pi*diameter_alpha^2/4; % area of bar section in alpha dir.
    As_beta=pi*diameter_beta^2/4; % area of bar section in beta dir.
    if or(eq(j,1),eq(j,3))
        tau(j,1)=(-
SIGMA(1,j)*cos(betar)*ns1*As_beta+SIGMA(2,j)*sin(alphar)*ns2*As_alpha)/xp;
    end
    if or(eq(j,2),eq(j,4))
        tau(j,1)=(-SIGMA(1,j)*sin(betar)*ns1*As_beta-
SIGMA(2,j)*cos(alphar)*ns2*As_alpha)/yp;
    end
end
%
% approx tau vector
tau=round(tau,8);
%
% Define the correct syntax for Diana tau acting on edge. In .dat file the
% software want the follow commands:
%
%               ELEM
%               xxx  EDGE   Ly
%                    FORCE  zzz.zzz
%                    DIRECT kk
% where
%               x: name of the element loaded by tau on edge
%               y: can be 1,2 or 3. It represent the name of the edge loaded
%                  The name of the edge in Diana conventions is the name of
%                  the  opposite vertex for triangular element.
%                  Exemple:
%                           Triangular element: n101 n103 n105
%                           if you want to load edge (n101-n105) you must
%                           use L2
%               z: value of the force/unit length
%               kk: direction in wich act the load. If the direction is not
%                   in the element plane then the out-of-plane part of the
%                   load will be lost (Diana gives a warning message).
%
%
% Define approx. vector of edge plate used in the follow script section
ve=round([-yp/2;xp/2;yp/2;-xp/2],5);
% Define index for 've vector'
idd=[3:2:7;2:2:7;3:2:7;2:2:7];
%
T=[];
for j=1:size(tau,1)
    if ne(tau(j,1),0)
        % Find the nodes on the j edge
        IDtau=findNodes(mesh,'box',[idv(j,1)*xp/2-tol idv(j,2)*xp/2+tol]...
            ,[idv(j,3)*yp/2-tol idv(j,4)*yp/2+tol])';
        % Find elements attached to theese nodes
        IDtau_e=findElements(mesh,'attached',IDtau)';
        for i=1:size(IDtau_e,1)
```

```
            vertex(i,1:7)=round([IDtau_e(i,1),p(t(IDtau_e(i),1),1),...
                p(t(IDtau_e(i),1),2),p(t(IDtau_e(i),2),1),...
                p(t(IDtau_e(i),2),2),p(t(IDtau_e(i),3),1),...
                p(t(IDtau_e(i),3),2)],5)';
        end
        % delete element that haven't edge on side j-th and find which
        % nodes belong to the j-th edge.(1- belong, 0 not belong)
        idm=0;
        for ii=1:size(vertex,1)
            if eq(sum(eq(vertex(ii-idm,idd(j,:)),ve(j,1))),1)
                vertex(ii-idm,:)=[];
                idm=idm+1;
            else
                cond=eq(vertex(ii-idm,idd(j,:)),ve(j,1));
                vertex(ii-idm,8:1:10)=cond;
                vertex(ii-idm,11)=j;
                if eq(vertex(ii-idm,8),0)
                    vertex(ii-idm,12)=1;
                else
                    if eq(vertex(ii-idm,9),0)
                        vertex(ii-idm,12)=2;
                    else
                        if eq(vertex(ii-idm,10),0)
                            vertex(ii-idm,12)=3;
                        else
                            disp('ERRORE elaborazione elementi tau');
                        end
                    end
                end
            end
        end
        T=[T;vertex];
    end
end
% Plot the tau tension
for j=1:size(tau,1)
    if ne(tau(j,1),0)
        % Find the nodes on the j edge
        IDtau_plot=findNodes(mesh,'box',[idv(j,1)*xp/2-tol idv(j,2)*...
            xp/2+tol],[idv(j,3)*yp/2-tol idv(j,4)*yp/2+tol])';
        if or(eq(j,1),eq(j,3))
            if tau(j,1)>0
                ptau=scatter3(mesh.Nodes(1,IDtau_plot(:,1)),mesh.Nodes...
                    (2,IDtau_plot(:,1)),zeros(size(IDtau_plot,1),1),'>');
            else
                ptau=scatter3(mesh.Nodes(1,IDtau_plot(:,1)),mesh.Nodes...
                    (2,IDtau_plot(:,1)),zeros(1,size(IDtau_plot,1)),'<');
            end
            ptau.MarkerFaceColor='m';
            ptau.MarkerFaceAlpha=0.1;
            set(ptau,'SizeData',50);
            ptau.MarkerEdgeColor='m';
        end
        if or(eq(j,2),eq(j,4))
            if tau(j,1)>0
                ptau=scatter3(mesh.Nodes(1,IDtau_plot(:,1)),mesh.Nodes...
                    (2,IDtau_plot(:,1)),zeros(1,size(IDtau_plot,1)),'^');
            else
                ptau=scatter3(mesh.Nodes(1,IDtau_plot(:,1)),mesh.Nodes...
                    (2,IDtau_plot(:,1)),zeros(1,size(IDtau_plot,1)),'v');
            end
            ptau.MarkerFaceColor='m';
            ptau.MarkerFaceAlpha=0.1;
            set(ptau,'SizeData',50);
```

```
            ptau.MarkerEdgeColor='m';
        end
    end
end
%% Summary
%
% [p]->(x,y):points of the triangulation (mesh)
% [p_truss]->(#name vertex,x,y):points of the reinforcemennt truss (already
%                                with double node at the intersection of
%                                alpha and beta reinforcement)
% [p_tot]->(#name vertex,x,y):points of the mesh + reinforcemennt truss
%                            (already with double node at the intersection
%                             of alpha and beta reinforcement)
% [e_truss](panel 1)->(name vertex initial
%                      name vertex final
%                      edge label
%                      direction):truss definition
% [e_truss](panel 1&4)->interface definition
% [X_support]->(name vertex, dir, edge) :list of vertex x-restrained. 'dir'
%               indicate the truss direction of restrained nodes. If you
%               restrain concrete element (plate: CTX) you have
%               'dir'=0
% [Y_support]->(name vertex, dir, edge) :list of vertex y-restrained. 'dir'
%               indicate the truss direction of restrained nodes {1} for
%               beta or {2} for alpha. If you restrain concrete element
%               (plate: CTY) you have 'dir'=0
% [tau]->( tau edge 1
%          tau edge 2
%          tau edge 3
%          tau edge 4 ): 1x4 vector
% [T]-> ( elem. x1 y1 x2 y2 x3 y3 1€? 2€? 3€?, edge, 0 vertex)
%
%       elem: element number
%       x1,y1,x2,y2,x3,y3: coordinates of triangular vertex
%       1€? 2€? 3€? : the vertex 1,2, or 3 belong to the edge. {1} if yes,
%       {2} if no
%       edge: number of edge
%       0 vertex: {1},{2},{3}. Indicates what is the vertex that not belong
%       to the edge
%
% [F1]&[F2]->(reinf. node, sigma, dir., edge): list table of reinforcement
%            tension applied.
%
%       reinf.node: name of reinf node loaded by sigma
%       sigma: value of tension
%       dir: direction of sigma: {1} for beta or {2} for alpha
%       edge: name of edge loaded
%
time=toc;
fprintf('Termine script processo eseguito in %.2f [s] con successo!\n',time);
%
%
%% Write of .dat file
%
name_model=sprintf('%s.dat.txt',modelnumber);
Ec=22000*((fck+8)/10)^0.3; % [MPa] Young's concrete modulus
FileId=fopen(name_model,'w');
% Title of .dat file
fprintf(FileId,':Analisi della fessurazione di strutture in c.a. soggette a stati
piani di tensione\r\n:Modello %s\r\n',modelnumber);
% Units
fprintf(FileId,'\r\n''UNITS''\r\nLENGTH  MM\r\nFORCE   N\r\nTIME    SEC\r\nTEMPER
CELSIUS\r\nANGLE   RAD\r\n\r\n');
% Model
```

```
fprintf(FileId,'''MODEL''\r\nGRAVACC   -9.80665\r\nGRAVDI    3\r\n\r\n');
% Directions
fprintf(FileId,'''DIRECT''\r\n1     1.0  0.0  0.0\r\n2     0.0  1.0  0.0\r\n3     0.0
0.0  1.0\r\n4     %.15f %.15f %.15f\r\n5     %.15f %.15f
%.15f\r\n\r\n',dir4(1),dir4(2),dir4(3),dir5(1),dir5(2),dir5(3));
% Material
fprintf(FileId,'''MATERI''\r\n1    NAME   "concrete"\r\n     YOUNG  %d\r\n     POISON
%f\r\n     THERMX %f\r\n',Ec,poison_c,term_c);
fprintf(FileId,'2    NAME   "Steel Reinfocement"\r\n     YOUNG  %d\r\n     POISON
%f\r\n     THERMX %f\r\n     YIELD  VMISES\r\n     YLDSTR %f\r\n     EPSSIG %f %f %f
%f\r\n     HARDEN WORK\r\n',Es,poison_s,term_s,fy,epssig);
fprintf(FileId,'3    NAME   "Interface reinforcement alpha directions"\r\n     DSSX
%f\r\n     DSNY   %f\r\n     BONDSL 3\r\n     DISTAU ',DSSX_alpha,DSNY_alpha);
fprintf(FileId,'%f ',z_alpha);
fprintf(FileId,'\r\n');
fprintf(FileId,'4    NAME   "Interface reinforcement beta directions"\r\n     DSSX
%f\r\n     DSNY   %f\r\n     BONDSL 3\r\n     DISTAU ',DSSX_beta,DSNY_beta);
fprintf(FileId,'%f ',z_beta);
fprintf(FileId,'\r\n\r\n');
% Geometry
fprintf(FileId,'''GEOMET''\r\n1    THICK  %f\r\n2    CROSSE %f\r\n3    CROSSE %f\r\n4
CONFIG BONDSL\r\n     THICK  %f\r\n5    CONFIG BONDSL\r\n     THICK
%f\r\n\r\n',thick,As_alpha,As_beta,pi*diameter_alpha,pi*diameter_beta);
% Support
fprintf(FileId,'''SUPPOR''\r\nNAME "y restrain"\r\n/');
fprintf(FileId,'%d ',Y_support(:,1));fprintf(FileId,'/ TR 2\r\n');
fprintf(FileId,'NAME "x restrain"\r\n/');
fprintf(FileId,'%d ',X_support(:,1));fprintf(FileId,'/ TR 1\r\n\r\n');
% Force definitions
% sigma
F_list_order=unique(F(:,4));
k=1;
fprintf(FileId,'''LOADS''');
for ii=1:size(F_list_order,1)
    fprintf(FileId,'\r\nCASE %d\r\nNAME "Sigma
%d"\r\nNODAL\r\n',k,F_list_order(ii,1));
    k=k+1;
    for hh=1:size(F,1)
        if eq(F(hh,4),F_list_order(ii,1))
            if eq(F(hh,3),2)
                fprintf(FileId,'%d    FORCE %d
%f\r\n',F(hh,1),F(hh,3)+3,F(hh,2)*As_alpha);
            else
                if eq(F(hh,3),1)
                    fprintf(FileId,'%d    FORCE %d
%f\r\n',F(hh,1),F(hh,3)+3,F(hh,2)*As_beta);
                else
                    disp('ERRORE nella scrittura .dat delle SIGMA')
                    return
                end
            end
        end
    end
end
num_lc=k;
% tau
if eq(isequal(T,[]),0)
    T_list_order=unique(T(:,11));
    ee=0;
    for ii=1:size(T_list_order,1)
        fprintf(FileId,'CASE %d\r\nNAME "Edge tau
%d"\r\nELEMEN\r\n',num_lc+ee,T_list_order(ii,1));
        ee=ee+1;
        for hh=1:size(T,1)
```

```
            lab=sprintf('L%d',T(hh,12));
            if T(hh,1)<=9
                fprintf(FileId,'%d    EDGE   %s\r\n     FORCE  %f\r\n     DIRECT
%d\r\n',T(hh,1),lab,tau(T(hh,11),1),mod(T(hh,11)-1,2)+1);
            end
            if and(T(hh,1)<=99,T(hh,1)>9)
                fprintf(FileId,'%d   EDGE   %s\r\n     FORCE  %f\r\n     DIRECT
%d\r\n',T(hh,1),lab,tau(T(hh,11),1),mod(T(hh,11)-1,2)+1);
            end
            if and(T(hh,1)<=999,T(hh,1)>99)
                fprintf(FileId,'%d  EDGE   %s\r\n     FORCE  %f\r\n     DIRECT
%d\r\n',T(hh,1),lab,tau(T(hh,11),1),mod(T(hh,11)-1,2)+1);
            end
            if and(T(hh,1)<=9999,T(hh,1)>999)
                fprintf(FileId,'%d EDGE   %s\r\n     FORCE  %f\r\n     DIRECT
%d\r\n',T(hh,1),lab,tau(T(hh,11),1),mod(T(hh,11)-1,2)+1);
            end
            if and(T(hh,1)<=99999,T(hh,1)>9999)
                fprintf(FileId,'%d EDGE   %s\r\n     FORCE  %f\r\n     DIRECT
%d\r\n',T(hh,1),lab,tau(T(hh,11),1),mod(T(hh,11)-1,2)+1);
            end
        end
    end
end
% Coordinates
fprintf(FileId,'\r\n''COORDI'' DI=2\r\n');
for i=1:size(p_tot,1)
    if i<=9
        fprintf(FileId,'%d     %f %f\r\n',i,p_tot(i,2),p_tot(i,3));
    end
    if and(i<=99,i>9)
        fprintf(FileId,'%d    %f %f\r\n',i,p_tot(i,2),p_tot(i,3));
    end
    if and(i<=999,i>99)
        fprintf(FileId,'%d   %f %f\r\n',i,p_tot(i,2),p_tot(i,3));
    end
    if and(i<=9999,i>999)
        fprintf(FileId,'%d  %f %f\r\n',i,p_tot(i,2),p_tot(i,3));
    end
    if and(i<=99999,i>9999)
        fprintf(FileId,'%d %f %f\r\n',i,p_tot(i,2),p_tot(i,3));
    end
    if i>99999
        fprintf(FileId,'%d %f %f\r\n',i,p_tot(i,2),p_tot(i,3));
    end
end
% Concrete element
fprintf(FileId,'\r\n''ELEMEN'' DI=2\r\nSET "Plane Stress"\r\nCONNEC\r\n');
for i=1:size(t,1)
    if i<=9
        fprintf(FileId,'%d     %s  %d %d %d\r\n',i,Element,t(i,1),t(i,2),t(i,3));
    end
    if and(i<=99,i>9)
        fprintf(FileId,'%d    %s  %d %d %d\r\n',i,Element,t(i,1),t(i,2),t(i,3));
    end
    if and(i<=999,i>99)
        fprintf(FileId,'%d   %s  %d %d %d\r\n',i,Element,t(i,1),t(i,2),t(i,3));
    end
    if and(i<=9999,i>999)
        fprintf(FileId,'%d  %s  %d %d %d\r\n',i,Element,t(i,1),t(i,2),t(i,3));
    end
    if and(i<=99999,i>9999)
        fprintf(FileId,'%d %s  %d %d %d\r\n',i,Element,t(i,1),t(i,2),t(i,3));
    end
```

```
    if i>99999
        fprintf(FileId,'%d %s  %d %d %d\r\n',i,Element,t(i,1),t(i,2),t(i,3));
    end
end
n_e=size(t,1);
fprintf(FileId,'MATERI 1\r\nGEOMET 1\r\n');
% Reinforcement element dir beta
fprintf(FileId,'SET "Truss Element: Reinforcement dir beta"\r\nCONNEC\r\n');
for i=1:size(e_truss,2)
    if eq(e_truss(4,i),1)
        n_t=i+n_e;
        if n_t<=9
            fprintf(FileId,'%d     %s  %d
%d\r\n',n_t,truss,e_truss(1,i),e_truss(2,i));
        end
        if and(n_t<=99,n_t>9)
            fprintf(FileId,'%d    %s  %d
%d\r\n',n_t,truss,e_truss(1,i),e_truss(2,i));
        end
        if and(n_t<=999,n_t>99)
            fprintf(FileId,'%d   %s  %d %d\r\n',n_t,truss,e_truss(1,i),e_truss(2,i));
        end
        if and(n_t<=9999,n_t>999)
            fprintf(FileId,'%d  %s  %d %d\r\n',n_t,truss,e_truss(1,i),e_truss(2,i));
        end
        if and(n_t<=99999,n_t>9999)
            fprintf(FileId,'%d %s  %d %d\r\n',n_t,truss,e_truss(1,i),e_truss(2,i));
        end
        if n_t>99999
            fprintf(FileId,'%d %s  %d %d\r\n',n_t,truss,e_truss(1,i),e_truss(2,i));
        end
    end
end
fprintf(FileId,'MATERI 2\r\nGEOMET 3\r\n');
% Reinforcement element dir alpha
fprintf(FileId,'SET "Truss Element: Reinforcement dir alpha"\r\nCONNEC\r\n');
for i=1:size(e_truss,2)
    if eq(e_truss(4,i),2)
        n_t=i+n_e;
        if n_t<=9
            fprintf(FileId,'%d     %s  %d
%d\r\n',n_t,truss,e_truss(1,i),e_truss(2,i));
        end
        if and(n_t<=99,n_t>9)
            fprintf(FileId,'%d    %s  %d
%d\r\n',n_t,truss,e_truss(1,i),e_truss(2,i));
        end
        if and(n_t<=999,n_t>99)
            fprintf(FileId,'%d   %s  %d %d\r\n',n_t,truss,e_truss(1,i),e_truss(2,i));
        end
        if and(n_t<=9999,n_t>999)
            fprintf(FileId,'%d  %s  %d %d\r\n',n_t,truss,e_truss(1,i),e_truss(2,i));
        end
        if and(n_t<=99999,n_t>9999)
            fprintf(FileId,'%d %s  %d %d\r\n',n_t,truss,e_truss(1,i),e_truss(2,i));
        end
        if n_t>99999
            fprintf(FileId,'%d %s  %d %d\r\n',n_t,truss,e_truss(1,i),e_truss(2,i));
        end
    end
end
fprintf(FileId,'MATERI 2\r\nGEOMET 2\r\n');
% Interface
kkk=1;jjj=1;
```

```
for ii=1:size(e_truss,2)
    if eq(e_truss(4,ii,1),2)
        el_interface_alpha(:,kkk,1)=e_truss(:,ii,1);
        el_interface_alpha(:,kkk,2)=e_truss(:,ii,4);
        kkk=kkk+1;
    else
        if eq(e_truss(4,ii,1),1)
            el_interface_beta(:,jjj,1)=e_truss(:,ii,1);
            el_interface_beta(:,jjj,2)=e_truss(:,ii,4);
            jjj=jjj+1;
        else
            disp('ERRORE suddivisione interface alpha-beta')
            return
        end
    end
end
% Interface alpha direction
if eq(interface_alpha,1)
fprintf(FileId,'SET "Interface: reinforcement alpha"\r\nCONNEC\r\n');
for i=1:size(el_interface_alpha,2)
    n_i=n_t+i;
    if n_i<=9
        fprintf(FileId,'%d     %s  %d %d %d
%d\r\n',n_i,interface,el_interface_alpha(1,i,1),el_interface_alpha(2,i,1),el_interfac
e_alpha(1,i,2),el_interface_alpha(2,i,2));
    end
    if and(n_i>9,n_i<=99)
        fprintf(FileId,'%d    %s  %d %d %d
%d\r\n',n_i,interface,el_interface_alpha(1,i,1),el_interface_alpha(2,i,1),el_interfac
e_alpha(1,i,2),el_interface_alpha(2,i,2));
    end
    if and(n_i>99,n_i<=999)
        fprintf(FileId,'%d   %s  %d %d %d
%d\r\n',n_i,interface,el_interface_alpha(1,i,1),el_interface_alpha(2,i,1),el_interfac
e_alpha(1,i,2),el_interface_alpha(2,i,2));
    end
    if and(n_i>999,n_i<=9999)
        fprintf(FileId,'%d  %s  %d %d %d
%d\r\n',n_i,interface,el_interface_alpha(1,i,1),el_interface_alpha(2,i,1),el_interfac
e_alpha(1,i,2),el_interface_alpha(2,i,2));
    end
    if and(n_i>9999,n_i<=99999)
        fprintf(FileId,'%d %s  %d %d %d
%d\r\n',n_i,interface,el_interface_alpha(1,i,1),el_interface_alpha(2,i,1),el_interfac
e_alpha(1,i,2),el_interface_alpha(2,i,2));
    end
    if and(n_i>99999,n_i<=999999)
        fprintf(FileId,'%d%s  %d %d %d
%d\r\n',n_i,interface,el_interface_alpha(1,i,1),el_interface_alpha(2,i,1),el_interfac
e_alpha(1,i,2),el_interface_alpha(2,i,2));
    end
    if n_i>999999
        fprintf(FileId,'%d%s  %d %d %d
%d\r\n',n_i,interface,el_interface_alpha(1,i,1),el_interface_alpha(2,i,1),el_interfac
e_alpha(1,i,2),el_interface_alpha(2,i,2));
    end
end
fprintf(FileId,'MATERI 3\r\nGEOMET 4\r\n');
end
% Interface beta direction
if eq(interface_beta,1)
fprintf(FileId,'SET "Interface: reinforcement beta"\r\nCONNEC\r\n');
for i=1:size(el_interface_beta,2)
    n_ii=n_i+i;
```

```
    if n_ii<=9
        fprintf(FileId,'%d     %s  %d %d %d
%d\r\n',n_ii,interface,el_interface_beta(1,i,1),el_interface_beta(2,i,1),el_interface
_beta(1,i,2),el_interface_beta(2,i,2));
    end
    if and(n_ii>9,n_ii<=99)
        fprintf(FileId,'%d    %s  %d %d %d
%d\r\n',n_ii,interface,el_interface_beta(1,i,1),el_interface_beta(2,i,1),el_interface
_beta(1,i,2),el_interface_beta(2,i,2));
    end
    if and(n_ii>99,n_ii<=999)
        fprintf(FileId,'%d   %s  %d %d %d
%d\r\n',n_ii,interface,el_interface_beta(1,i,1),el_interface_beta(2,i,1),el_interface
_beta(1,i,2),el_interface_beta(2,i,2));
    end
    if and(n_ii>999,n_ii<=9999)
        fprintf(FileId,'%d  %s  %d %d %d
%d\r\n',n_ii,interface,el_interface_beta(1,i,1),el_interface_beta(2,i,1),el_interface
_beta(1,i,2),el_interface_beta(2,i,2));
    end
    if and(n_ii>9999,n_ii<=99999)
        fprintf(FileId,'%d %s  %d %d %d
%d\r\n',n_ii,interface,el_interface_beta(1,i,1),el_interface_beta(2,i,1),el_interface
_beta(1,i,2),el_interface_beta(2,i,2));
    end
    if and(n_ii>99999,n_ii<=999999)
        fprintf(FileId,'%d%s  %d %d %d
%d\r\n',n_ii,interface,el_interface_beta(1,i,1),el_interface_beta(2,i,1),el_interface
_beta(1,i,2),el_interface_beta(2,i,2));
    end
    if n_ii>999999
        fprintf(FileId,'%d%s  %d %d %d
%d\r\n',n_ii,interface,el_interface_beta(1,i,1),el_interface_beta(2,i,1),el_interface
_beta(1,i,2),el_interface_beta(2,i,2));
    end
end
fprintf(FileId,'MATERI 4\r\nGEOMET 5\r\n');
end
% close file
fclose(FileId);
%
%
%
time=toc;
fprintf('Termine generazione dat eseguito in %.2f [s] con successo!\n',time);
fprintf('\n*********************** end ****************************\n');
%
%
%% User's function - let at the end of script -
function [x,y]=intersezione_rette(m_1,q_1,m_2,q_2)
% function [x,y]=intersezione_rette(m_1,q_1,m_2,q_2)
% si introducono i parametri m e q delle rette di cui si vuole conoscere
% il punto di intersezione e la function restituisce le coordinate x e y
% dell'intersezione
    if ne(m_1,m_2)
        x=(q_2-q_1)/(m_1-m_2);
        y=m_2*x+q_2;
    else
        disp('ERRORE: le armature sono parallele - correggere ');
        return;
    end
end
% ------------------------------------------------------------------ %
function [tm,s1,s2,s3,a,tf]=bondslip(d,t,c,f,cm,bc,co)
```

```
% function [bs]=bondslip(d,t,c,f,cm,bc,co) return the bond-slip curve for
% the introduced parameters: diameter, type, clear dist, fck, collapse_mode,
% bond conditions, confined
clear('tm','s1','s2','s3','a','tf');
fcm=f+8;
if strcmp(cm,'PO')
    if strcmp(bc,'good')
        tm=2.5*sqrt(fcm);
        s1=1;
        s2=2;
        [smin,smax]=ribspacing(d,t);
        if isnan(smin)&&isnan(smax)
            fprintf('DIAMETER BAR OR TYPE SHAPE RIB is not correct')
        end
        if strcmp(c,'mean')
            s3=0.5*(smin+smax);
        else
            if strcmp(c,'min')
                s3=smin;
            else
                if strcmp(c,'max')
                    s3=smax;
                else
                    fprintf('RIB SPACING must be "min - max - mean"')
                end
            end
        end
        a=0.4;
        tf=0.4*tm;
    else
        if strcmp(bc,'other')
            tm=1.25*sqrt(fcm);
            s1=1.8;
            s2=3.6;
            [smin,smax]=ribspacing(d,t);
            if isnan(smin)&&isnan(smax)
                fprintf('DIAMETER BAR OR TYPE SHAPE RIB is not correct')
            end
            if strcmp(c,'mean')
                s3=0.5*(smin+smax);
            else
                if strcmp(c,'min')
                    s3=smin;
                else
                    if strcmp(c,'max')
                        s3=smax;
                    else
                        fprintf('RIB SPACING must be "min - max - mean"')
                    end
                end
            end
            a=0.4;
            tf=0.4*tm;
        else
            fprintf('BOND CONDITIONS value is not correct');
        end
    end
else
    if strcmp(cm,'SP')
        if strcmp(bc,'good')
            if strcmp(co,'no')
                tm=7*(fcm/25)^0.25;
                s1=1.0*(tm/(2.5*sqrt(fcm)))^(1/0.4);
                s2=s1;
```

```
            s3=1.2*s1;
            a=0.4;
            tf=0;
        else
            if strcmp(co,'yes')
                tm=8*(fcm/25)^0.25;
                s1=1.0*(tm/(2.5*sqrt(fcm)))^(1/0.4);
                s2=s1;
                [smin,smax]=ribspacing(d,t);
                if isnan(smin)&&isnan(smax)
                    fprintf('DIAMETER BAR OR TYPE SHAPE RIB is not correct')
                end
                if strcmp(c,'mean')
                    s3=0.5*0.5*(smin+smax);
                else
                    if strcmp(c,'min')
                        s3=0.5*smin;
                    else
                        if strcmp(c,'max')
                            s3=0.5*smax;
                        else
                            fprintf('RIB SPACING must be "min - max - mean"')
                        end
                    end
                end
                a=0.4;
                tf=0.4*tm;
            else
                fprintf('UNCONFINED VALUE is not correct');
            end
        end
    else
        if strcmp(bc,'other')
            if strcmp(co,'no')
                tm=5*(fcm/25)^0.25;
                s1=1.8*(tm/(1.25*sqrt(fcm)))^(1/0.4);
                s2=s1;
                s3=1.2*s1;
                a=0.4;
                tf=0;
            else
                if strcmp(co,'yes')
                    tm=5.5*(fcm/25)^0.25;
                    s1=1.8*(tm/(1.25*sqrt(fcm)))^(1/0.4);
                    s2=s1;
                    [smin,smax]=ribspacing(d,t);
                    if isnan(smin)==1&&isnan(smax)==1
                        fprintf('DIAMETER BAR OR TYPE SHAPE RIB is not correct')
                    end
                    if strcmp(c,'mean')
                        s3=0.5*0.5*(smin+smax);
                    else
                        if strcmp(c,'min')
                            s3=0.5*smin;
                        else
                            if strcmp(c,'max')
                                s3=0.5*smax;
                            else
                                fprintf('RIB SPACING must be "min - max - mean"')
                            end
                        end
                    end
                    a=0.4;
                    tf=0.4*tm;
```

```
                    else
                        fprintf('UNCONFINED VALUE is not correct');
                    end
                end

            else
                fprintf('BOND CONDITIONS value is not correct');
            end
        end
    else
        fprintf('COLLAPSE-MODE value is not correct');
    end
end
end
% ------------------------------------------------------------------- %
function [min,max]=ribspacing(d,t)
% function [rs]=ribspacing(d,t) return the rib spacing function of
% diameter (d) and type of shape ribs (t)
if strcmp(t,'uniform')
    min=0.5*d;
    max=0.7*d;
else
    if strcmp(t,'crescent')
        if d>=6&&d<10
            min=0.5*d;
            max=d;
        else
            if d>=10
                min=0.5*d;
                max=0.8*d;
            else
                max=NaN;
                min=NaN;
            end
        end
    else
        max=NaN;
        min=NaN;
    end
end
end
function ris=odd(S)
% s=odd(x) return the approximation of x to the nearest odd integer
ris = 2*floor(S/2)+1;
end
function ris=even(S)
% s=odd(x) return the approximation of x to the nearest odd integer
ris = 2*round(S/2);
end
function [Msg_a,dir_reinfo_a]=metodo_A(x_1,y_1,x_2,y_2,beta)
% function [Msg,dir_reinfo]=metodo_A(x_1,y_1,x_2,y_2,beta)
if eq(round(x_1,8),round(x_2,8))
    if eq(beta,0)
        dir_reinfo_a=2; Msg_a='None';
    else
        dir_reinfo_a=1; Msg_a='None';
    end
else
    if eq(round(y_1,8),round(y_2,8))
        if eq(beta,0)
            dir_reinfo_a=1; Msg_a='None';
        else
            dir_reinfo_a=2; Msg_a='None';
        end
```

```
    else
        dir_reinfo_a=0; Msg_a='Errore';
    end
end
end
function [Msg_b,dir_reinfo_b]=metodo_B(x_1,y_1,x_2,y_2)
% function [Msg,dir_reinfo]=metodo_B(x_1,y_1,x_2,y_2)
dir=round(rad2deg(atan((y_1-y_2)/(x_1-x_2))));
if dir<0
    dir_reinfo_b=2; % direction 2 = alpha
    Msg_b='None';
else
    if dir>0
        dir_reinfo_b=1; % direction 1 = beta
        Msg_b='None';
    else
        dir_reinfo_b=0;
        Msg_b='Errore';
    end
end
end
function [Msg_c,dir_reinfo_c]=metodo_C(x_1,y_1,x_2,y_2,beta)
% function [Msg,dir_reinfo]=metodo_C(x_1,y_1,x_2,y_2,beta)
if eq(round(x_1,8),round(x_2,8))
    if eq(beta,90)
        Msg_c='None'; dir_reinfo_c=1;
    else
        Msg_c='None'; dir_reinfo_c=2;
    end
else
    if eq(round(y_1,8),round(y_2,8))
        if eq(beta,0)
            Msg_c='None'; dir_reinfo_c=1;
        else
            Msg_c='None'; dir_reinfo_c=2;
        end
    else
        [Msg_b,dir_reinfo_b]=metodo_B(x_1,y_1,x_2,y_2);
        if strcmp(Msg_b,'Errore')
            Msg_c='Errore'; dir_reinfo_c=0;
        else
            Msg_c=Msg_b; dir_reinfo_c=dir_reinfo_b;
        end
    end
end
end
```

Bibliografia

[1] CEB-FIP Model Code 1990, Design Code, Thomas Telford, June 1991

[2] CEB-FIP Bulletin 65, Model Code 2010 (Volume I) – Final Draft, March 2012

[3] CEB-FIP Bulletin 66, Model Code 2010 (Volume II) – Final Draft, April 2012

[4] CEB-FIP Bulletin 10, Bond of reinforcement in concrete, August 2000

[5] CEB-FIB Bulletin 72, Bond and anchorage of embedded reinforcement: Background to the fib Model Code for Concrete Structures 2010, May 2014

[6] EN 1992-1-1:2004, Eurocode 2: Design of concrete structures Part 1-1: General rules and rules for buildings

[7] ENV 1992-1-1:1991, Eurocode 2: Design of concrete structures Part 1-1: General rules and rules for buildings

[8] D.M. 09/01/1996, “Norma tecniche per il calcolo, l’esecuzione ed il collaudo delle strutture in cemento armato normale e precompresso e per le strutture metalliche”

[9] D.M. 14/01/2008, “Norme tecniche per le costruzioni”

[10] ECP 203-2007, "Egyptian code for design and construction of concrete structures"

[11] JSCE 2007, "Standard specifications for concrete structures – Design"

[12] Balázs, György. (1993). Cracking analysis based on slip and bond stresses. ACI Materials Journal. 90. 340-348.

[13] Lee, Kiyeol & Lee, HwaMin. (2017). Numerical analysis and modeling for crack width calculation using IoT in reinforced concrete members. Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing. 9. 10.1007/s12652-017-0543-z.

[14] Bertagnoli G; Carbone V.I.; Giordano L; Mancini G (2002) Controllo dell'apertura delle fessure in elementi bidimensionali in c.a. In: Giornate AICAP 2002, Bologna, 6-8 Giugno 2002. pp. 53-60

[15] PDE Toolbox guide, Matlab

[16] DIANA User's Manual - Release 10.2