

POLITECNICO DI TORINO

Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

Tesi di Laurea Magistrale



Modelli e controlli per veicoli autonomi

Relatore:

Chiar.mo Prof. Enrico Galvagno

Correlatore:

Prof. Mauro Velardocchia

Ing. Antonio Tota

Candidato:

Gianluca Mari

S240568

A me

Sommario

Capitolo I – Stato dell’Arte	6
1.1. Classificazione veicoli autonomi.....	6
1.2. I primi veicoli autonomi.....	8
1.2.1. DARPA Grand Challenge.....	9
1.3. Auto autonome moderne.....	11
1.4. Componentistica necessarie per un veicolo autonomo.....	13
Capitolo II – Modelli di veicolo	15
2.1. Single Track Model.....	16
2.2. Equazioni dinamiche.....	19
2.2.1. Termini Inerziali.....	19
2.2.2. Equazioni di congruenza.....	21
2.3. Modello monotraccia lineare.....	23
2.3.1. Comportamento a regime.....	29
2.4. Studio della stabilità.....	32
2.4.1. Confronto Stabilità.....	36
2.5. Andamento Stati del sistema a seguito di un dato input.....	44
2.5.1. Ramp Steer.....	44
2.5.2. Colpo di Sterzo.....	49
2.5.3. Sine Sweep.....	51
2.6. Modello a bicicletta con dinamica longitudinale.....	53
2.6.1. Caratteristiche dinamiche del modello – modello linearizzato.....	53
2.6.2. Modello non lineare.....	61
Capitolo III – Analisi modellazione strade e Comfort	76
3.1. Elementi costitutivi dello spazio stradale.....	77
3.2. Andamento Planimetrico dell’asse.....	80
<i>Criteria di composizione dell’asse</i>	80
<i>Elementi del tracciato planimetrico</i>	80
- <i>Rettifili</i>	81
- <i>Curve circolari</i>	81
- <i>Curve a raggio variabile</i>	82
3.4. Verifica del parametro di scala.....	86
<i>Criterio 2 (Sovrapendenza longitudinale delle linee di estremità della carreggiata)</i>	87
<i>Campo di utilizzazione dei raccordi di clotoide</i>	89
3.5. Esempio realizzazione traiettoria.....	91

3.6. Comfort di guida	98
3.6.1. Realizzazione Filtro	101
3.6.3. – Analisi in frequenza e bande di ottava	104
Capitolo IV – Sistemi di controllo	108
Modelli di Path-Tracking	109
4.1 Pure Pursuit	109
4.1. Modello di Stanley	120
4.2. Modello Ibrido	124
4.3.1. Controllo Longitudinale	131
4.3.2. Controllo Laterale	154
4.4. Sensoristica	165
Conclusioni	169
Bibliografia	170

Introduzione

La necessità di ridurre l'errore umano, che risulta essere la causa del 93% degli incidenti stradali, ha portato in questi ultimi anni le case automobilistiche ad implementare sempre più sofisticati sistemi di assistenza alla guida, quali Adaptive cruise control, lane keeping system, autonomous parking, fino ad arrivare ai primi prototipi di veicoli completamente autonomi. Tutto ciò sta portando ad una nuova concezione del trasporto su strada, in grado di conciliare alti standard di sicurezza con un incremento della qualità percepita, associata alla riduzione dei tempi di percorrenza e alle nuove opportunità offerte dalla riduzione dell'intervento umano nella guida del veicolo. Questa tesi si prefigge come obiettivo lo studio e simulazione del comportamento dinamico del veicolo avvalendosi di diversi modelli con grado di complessità crescente. Questo primo passo è risultato fondamentale per poter introdurre nei vari sistemi di controllo il modello di veicolo più consono alla soluzione progettuale. Segue poi la modellazione e l'analisi di stabilità di un veicolo secondo le ipotesi del modello a bicicletta con pneumatici linearizzati. Si è disaccoppiata la dinamica longitudinale da quella laterale per ricavare un modello usato per il controllo di traiettoria. L'esigenza di definire un sistema più complesso, che tenga conto anche dell'effettiva dinamica longitudinale ha portato alla realizzazione di un secondo modello a tre gradi di libertà adatto a sistemi di controllo ACC. Infine è stato realizzato un modello di veicolo non lineare (impiegando modelli di pneumatico secondo la formulazione di Pacejka) che potesse definire bene il comportamento dello stesso in condizioni più spinte, quali ad esempio il sovrasterzo di potenza che è stato studiato con prove specifiche. Prima di agire sulla parte di controllo ci si è concentrati sulla definizione di traiettorie realistiche da adottare come riferimento per il controllo direzionale del veicolo autonomo. A tal fine si sono condotte analisi relative al comfort percepito (UNI ISO 2631) e alla sicurezza in relazione alla progettazione delle strade (secondo Decreto del Presidente C.N.NR n.13465 del 1995). L'ultimo capitolo si conclude con l'analisi, confronto ed implementazione dei vari modelli di inseguimento di traiettoria secondo le tecniche Pure Pursuit, Stanley Method e Hybrid. Inoltre, si sono analizzate diverse metodologie di controllo atte al mantenimento della distanza di sicurezza e della velocità imposte dal guidatore, al cambio e mantenimento di corsia, e al superamento di ostacoli avvalendosi di toolbox disponibili in Matlab/Simulink.

Capitolo I – Stato dell’Arte

Viene descritto in tale capitolo lo stato dell’arte dei veicoli autonomi, focalizzando l’attenzione sulle auto autonome. Si andranno analizzare classificazioni, progetti passati, vetture in commercio e progetti futuri.

1.1. Classificazione veicoli autonomi

Nell’ingegneria dell’autoveicolo, sistemi di assistenza alla guida sono considerati come il più importante campo di studio per la sicurezza. Le auto senza conducente hanno la capacità di percepire l’ambiente circostante tramite diversi sensori che ricevano con continuità informazioni che permettono alla macchina di poter viaggiare senza alcun apporto umano e di aggiornare una mappa virtuale in modo tale da garantire l’inseguimento di una traiettoria desiderata e di tenere traccia degli eventi esterni.

Quando si parla di veicolo autonomi si fa riferimento ad una classificazione dei sistemi autonomi, esplicitata dalla SAE International Automotive, basata su 5 livelli.

Il **livello 0** si applica a tutte le automobili prodotte nei primi anni 2000 e in quelle low cost prive di supporti elettronici; nel **livello 1** il guidatore è supportato da altri sistemi che possono indicare la presenza di pericoli o condizioni.

Automazione parziale la si ha nel **livello 2** che prevede una prima integrazione di guida con il pilota. L’automobile gestisce accelerazione e frenate ma direzione e controllo traffico risultano esclusive del guidatore. Attualmente diverse case automobilistiche stanno spingendo l’acceleratore verso questa nuova realtà, a.e Mercedes-Benz ha sviluppato l’Intelligent Drive [1], sistema di assistenza alla guida e di sicurezza che aumentano il comfort e agevolano il compito del guidatore. Parallelamente, sensibile a tale problema è Toyota con il suo “Safety Sense” [2] costituito da un sistema di Pre-Collision (PCS), avviso superamento corsia (LDA), riconoscimento segnaletica stradale (RSA) nonché l’ormai di

default Cruise Control Adattivo (ACC) che consente di mantenere l'auto ad una distanza minima dal veicolo che precede.

Parliamo di Automazione condizionata se entriamo nel **livello 3**, primo livello di vera e propria automazione. L'auto è in grado di guidare da sola gestendo accelerazione, frenate e direzione mentre il pilota interviene in situazione problematiche o laddove la guida autonoma non sia permessa o troppo pericolosa. Si chiama "AI traffic jam pilot" [3], il primo sistema in grado di raggiungere un livello di automazione 3, utilizzabile fino ai 60 Km/h, introdotto sull' Audi A8.

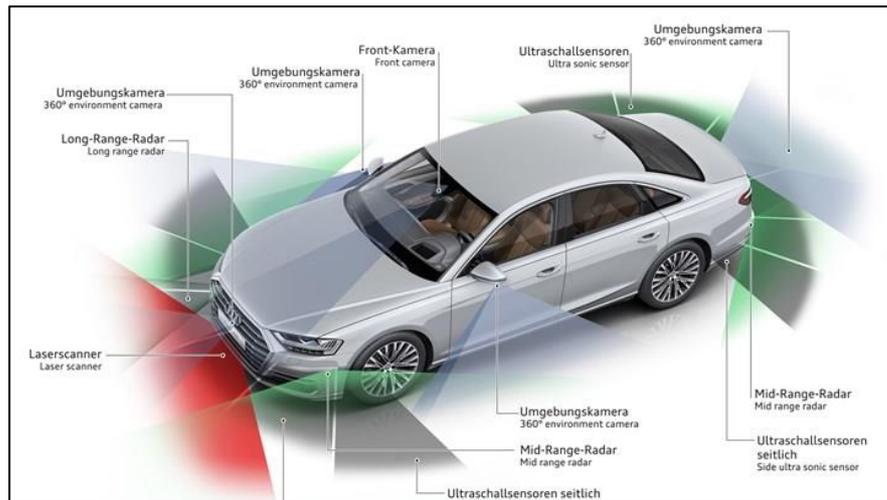


Fig. 1.1 – Sensoristica Audi A8 autonoma

Il **livello 4**, definito Alta automazione, garantisce la previsione e la gestione delle tipiche situazioni dovute al traffico o alla percorrenza di strade urbane o extraurbane senza ausilio del guidatore, a cui però è sempre garantita la possibilità di riprendere il pieno e totale controllo dell'auto su richiesta.

Il visionario e CEO di Tesla Motors, Elon Musk, ha annunciato che entro fine 2019 le sue auto saranno dotate di un'automazione **livello 5** – Guida completamente autonoma. In questo livello la presenza del pilota è totalmente inesistente. L'auto in base ai compiti richiesti si occupa in autonomia di individuare il percorso da seguire, prendere la direzione giusta, accelerare o rallentare in base alle condizioni di traffico o alle situazioni emergenti.



Fig. 1.2 – Concept veicolo livello 5

1.2. I primi veicoli autonomi

Interessante è analizzare l'evoluzione che i veicoli autonomi hanno avuto dalle prime apparizioni, in cui sostanzialmente erano più robot che veri e propri veicoli fino alle soluzioni più tecnologiche e affascinanti come la rivoluzionaria Pop-Up in fase di progettazione da Italdesign, Audi e Airbus.

Dal 1966 al 1972 presso la SRI international negli Stati Uniti fu progettato e sviluppato **Shakey**, il primo robot che presentava comportamenti autonomi. Il robot era costituito da una telecamera orientabile, ultrasuoni per misurare la distanza e sensori di tatto. Shakey, inoltre, era collegato tramite una connessione RF ad un computer che si occupava della navigazione e della esplorazione.

Dal 1985 al 1988 nell'ambito del programma Strategic Computing fu sviluppato negli Stati Uniti il **DARPA Autonomous Land Vehicle**, costruito partendo da un veicolo standard a 8 ruote capace di raggiungere una velocità di $72 \frac{km}{h}$ su una strada normale e di $29 \frac{km}{h}$ su terreni accidentati. L'ALV poteva trasportare 6 scaffali di apparecchiature elettroniche prendendo l'energia necessaria dalla sua unità di potenza ausiliaria diesel da 12 kW. A bordo dell'ALV furono montati diversi sensori che consistevano in una videocamera a colori e in uno scanner laser che restituiva i dati con una cadenza di 1-2 secondi. La prima dimostrazione in cui l'ALV seguì la strada che doveva percorrere si svolse nel 1985 ad una velocità di $3 \frac{km}{h}$ su un percorso dritto di 1 km, poi in seguito nel 1986 si svolse un'altra dimostrazione in cui seguì a $10 \frac{km}{h}$ un percorso di 4.5 km che presentava curve e diverse tipologie di terreno. Infine, nel 1987 si svolse una dimostrazione ad una velocità media di $15.5 \frac{km}{h}$ su un percorso di 4.5 km con diverse tipologie di terreno e diverse larghezze stradali in cui era necessario anche evitare alcuni ostacoli presenti sul tracciato.



Fig. 1.3 – prototipo dello Shankey a sinistra e dell'ALV a destra

Dal 1993 al 1995 fu sviluppato in Germania presso l'università Bundeswhr di Monaco **VaMP**, una delle prime vere auto autonome basata su una Mercedes 500 SEL riprogettata in modo che fosse possibile controllarne i freni, l'acceleratore e lo sterzo tramite i comandi di un computer. Quest'auto era in grado di guidare nel traffico per lunghe distanze senza l'intervento umano grazie alla visione artificiale che le permetteva di riconoscere gli ostacoli in movimento evitandoli o superandoli autonomamente. La VaMP si basava solo sull'utilizzo di 4 camere, 2 frontali e 2 posteriori. Nel 1995 fu testata su un lungo tragitto da Monaco a Odense in Danimarca, percorse 1600 km, 95% dei quali percorsi in maniera totalmente autonoma senza alcun intervento umano.



Fig. 1.4 – scatto progetto ARGO

In Italia fu sviluppato presso il dipartimento di ingegneria dell'informazione dell'università di Parma **ARGO** (Fig.4), auto basata su una Lancia Thema 2000 con installato sulla colonna dello sterzo un motore elettrico che permetteva al veicolo di sterzare autonomamente. ARGO era dotata solo di sensori passivi, infatti era equipaggiata con un solo sistema di visione stereoscopica che consentiva alla vettura di estrarre informazioni sulla strada e l'ambiente circostante permettendo così alla macchina di seguire la corsia, localizzare gli ostacoli sul percorso e di effettuare cambi di corsia. Nel giugno del 1998 fu sottoposta ad un test estensivo in cui sono stati percorsi circa 2000 km sulle autostrade italiane in modalità automatica. Argo riuscì a operare per il 94% del tempo in totale autonomia.

1.2.1. DARPA Grand Challenge

Nel novembre 2007, a seguito dei successi della DARPA Grand Challenge del 2004 e 2005, si tenne in California la DARPA Urban Challenge finanziata dalla Defense Advanced Research Projects Agency (DARPA) l'ente di ricerca più importante del dipartimento della difesa degli Stati Uniti. Per l'evento si richiedeva ai team partecipanti di costruire un veicolo autonomo capace di guidare nel traffico, effettuare manovre complesse quali parcheggi, sorpassi e cambi di corsia. Tale evento fu davvero rivoluzionario infatti proprio qui furono

sviluppati i primi veicolo autonomi in grado di interagire nel traffico urbano sia con veicoli autonomi che non.

Tra i migliori progetti che parteciparono alla competizione citiamo:

Stanley sviluppato dall'università di Stanford nel 2005. Stanley vinse la DARPA Grand Challenge del 2005 percorrendo i 212 km del percorso previsto in 6 ore e 54 min. Il progetto si basava su una Volkswagen Touareg R5 Diesel a 4 ruote motrici, a cui venne aggiunto un attuatore elettrico per comandare l'acceleratore e il freno, un motore elettrico DC alla colonna dello sterzo per poterlo comandare elettronicamente e superiormente la vettura presentava 5 sensori di distanza, una camera a colori per percepire la strada a grandi distanze, 2 sensori RADAR a 24 GHz per la rilevazione di grandi ostacoli a grandi distanze, un GPS e una IMU. Inoltre, i dati provenienti dal veicolo stesso come velocità e angolo di sterzata venivano comunicati al sistema tramite CAN bus.

Sandstorm sviluppato dall'università Carnegie Mellon partecipò alla DARPA Grand Challenge del 2005 dove però nessuno dei veicoli terminò il percorso ma, Sandstorm, registrò la distanza percorsa maggiore di 11.78 km. L'auto partecipò alla stessa competizione nel 2005 arrivando al secondo posto percorrendo i 212 km in 7 ore e 5 minuti. La vettura si basava sul modello M008 HMMWV del 1986, a cui venne montato un ingranaggio all'inizio della colonna di sterzo per poter comandare lo stesso tramite un motore DC in modo tale da comandare l'angolo volante. Inoltre, per comandare i freni venne posto un motore elettrico che permetteva di premere il pedale del freno mentre per comandare l'acceleratore venne sostituita la valvola della pompa dell'iniezione con una valvola comandata da un motore DC. I sensori montati includevano 3 LIDAR fissi, un LIDAR orientabile, un RADAR, un paio di camere per la visione stereo, un GPS e una IMU.



Fig. 1.5 – Stanley a sinistra e Sandstorm a destra

Boss, sviluppato presso l'università Carnegie Mellon nel 2007, partecipò alla DARPA Urban Challenge nel 2007 arrivando al primo posto percorrendo i 96 km di percorso urbano in 4 ore e 10 minuti. Boss si basa su una Chevrolet Tahoe del 2005 modificata con un sistema drive-by-wire commerciale in cui sono presenti motori elettrici che consentono di sterzare, schiacciare il pedale del freno e spostare la leva del cambio. Tale sistema consente anche grazie al CAN bus di comunicare con il modulo di controllo del motore; inoltre una combinazione di sensori, per la maggior parte attivi, consentono di poter navigare in maniera sicura in un ambiente urbano. La macchina risulta essere dotata di un LIDAR

Velodyne a 64 piani, 5 RADAR di cui 4 puntano in avanti e uno montato nella parte posteriore del veicolo, 5 sensori SICK, 4 LIDAR fissi che puntano in avanti, 2 camere per la visione stereo, una GPS e una IMU.

Junior fu sviluppato presso l'università di Stanford nel 2007 e anch'essa partecipò alla DARPA Urban Challenge nel 2007 arrivando al secondo posto percorrendo i 96 km previsti in 4 ore e 29 minuti. Essa si basa su una Volkswagen Passat Wagon del 2006 opportunamente modificata con un sistema drive-by-wire che consente di comandare i principali controlli del veicolo quali sterzo, freni, acceleratore, leva del cambio, freno di stazionamento e indicatori di direzione. Per la navigazione la vettura si basa su un sistema che include un GPS a doppia frequenza, una IMU e l'odometria delle ruote. Inoltre, i sensori montati includono 4 sensori SICK, un sensore laser che punta in avanti, un LIDAR Velodyne a 64 piani per il rilevamento di ostacoli e veicoli in movimento, 2 LIDAR fissi montati sul paraurti anteriore e 5 RADAR montati intorno alla griglia anteriore.



Fig. 1.6 – Boss a sinistra e Junior a destra

1.3. Auto autonome moderne

Descriviamo ora alcuni progetti di veicolo autonomo ancora in fase di sviluppo in modo tale da capire quali sono le ultime tecnologie sviluppate ed utilizzate in questo ambito.

Deeva è stata sviluppata in Italia presso l'Artificial Vision and Intelligent Systems Laboratory (VisLab) a partire dal 2015. Si basa su una Audi A4 2.0T FWD del 2013 modificata per ospitare un sistema drive-by-wire che, tramite degli attuatori comandati tramite un CAN-bus, permette di controllare le funzionalità primarie del veicolo, quali acceleratore, freno, sterzo, ed eventualmente quelle secondarie (cambio, tergicristalli e indicatori di direzione). Utilizza una tecnologia proprietaria basata sulla visione artificiale che permette di utilizzare sensori a basso costo ed elevato livello di integrazione dei sensori con il veicolo; infatti esteticamente la vettura risulta sembrare un'auto tradizionale. Monta a bordo 13 coppie di camere stereo tutte a colori tranne 4 camere ad infrarossi poste sugli specchietti retrovisori, un sensore laser a 8 piani posizionato in mezzo al paraurti anteriore, 2 sensori

laser a 4 piani sui due lati del paraurti anteriore, un sensore laser a 4 piani in mezzo al paraurti posteriore e un GPS/IMU.

MadeInGermany è stata sviluppata in Germania presso l'Autonomous Lab a partire dal 2010. Si basa su una Volkswagen Passat Variant 3c equipaggiata con un sistema drive-by-wire, un LIDAR Velodyne a 65 piani, 6 sensori di distanza, 3 RADAR, 2 camere per la visione stereo poste sul parabrezza, 1 sensore per l'odometria posto sulle ruote posteriori ed un GPS. La macchina possiede il permesso di circolare in Germania nel traffico reale testando le funzioni di guida autonoma. Inoltre, nel 2015 è stata testata in Messico e ha percorso in maniera totalmente autonoma 2250 km di autostrada e 150 km in città.



Fig. 1.7 – prototipo Google Car

Google car è un progetto sviluppato negli Stati Uniti presso Google Inc. a partire dal 2009. Il progetto Google car è probabilmente il progetto che riguarda la guida autonoma più conosciuto. Il progetto comprende 3 diversi tipi di veicoli: una Toyota Prius, una Lexus RX450h e un prototipo di auto progettato da zero dalla stessa Google, *Fig.6*. Tutte le vetture montano gli stessi sensori: un LIDAR Velodyne a 64 piani, 3 RADAR posti sul paraurti anteriore, un RADAR posto sul paraurti posteriore, una camera posta vicino allo specchietto retrovisore, un encoder montato sulle ruote posteriori, un GPS e una IMU. All'interno di tale progetto sono stati percorsi ad oggi più di un milione di miglia su strade pubbliche in maniera totalmente autonoma e ancora adesso circolano a Mountain View, California e ad Austin, Texas.



Fig. 1.8 – concept Pop.Up

Pop.Up è un progetto in fase di progettazione da Italdesign e Airbus mostrato nelle ultime due edizioni del Salone di Ginevra che ambisce a rivoluzionare il modo di vedere il trasporto nel breve-medio periodo. Pop.Up combina la flessibilità di un'utilitaria a due posti con la libertà e la flessibilità di un veicolo aereo con decollo e atterraggio verticale (VTOL) Il sistema è costituito da 3 blocchi: un modulo di terra, realizzato insieme ad Audi, che presenta due motori elettrici in grado di garantire la marcia autonoma del veicolo tramite un pacchetto di sensoristica costituito da LIDAR, RADAR, camere e una GPU/IMU; una capsula di carbonio 2.6x1.4x1.5 metri progettata per ospitare due passeggeri con l'obiettivo di creare un trasporto condiviso e altamente tecnologico grazie alla realtà aumentata implementata e al sistema eye-tracking per ottenere un'interazione uomo-macchina istintiva; un modulo di aria in via di progettazione da Airbus che risulta essere un grande Drone costituito da 4 rotori e altrettanti contro-rotori necessari per ridurre vibrazioni e rumorosità.

1.4. Componentistica necessarie per un veicolo autonomo

Un veicolo per poter viaggiare in completa autonomia ha bisogno di diversi componenti in grado di attuare l'acceleratore, il freno, lo sterzo e per avere con continuità informazioni dal mondo esterno in modo tale da rilevare eventuali ostacoli statici e/o dinamici.

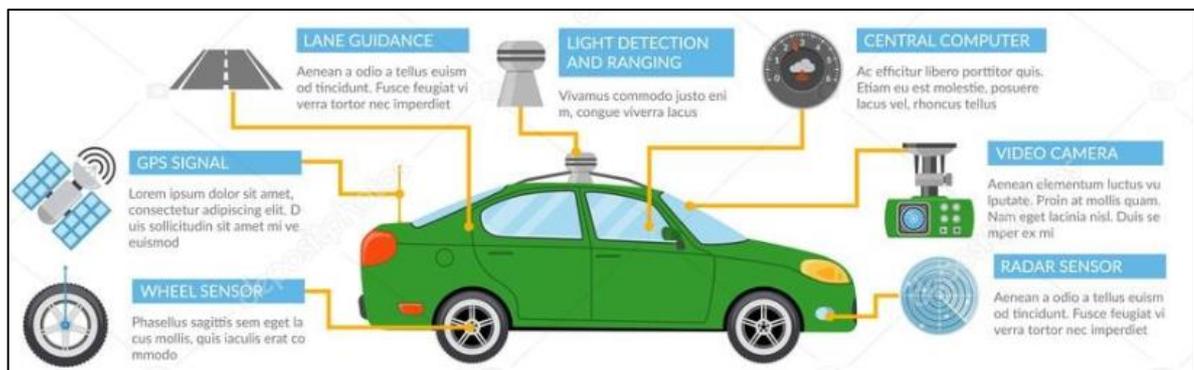


Fig. 1.9 – schema componenti in un veicolo autonomo

Per acquisire i dati sull'ambiente circostante e determinare la posizione del veicolo sono necessari diversi sensori che verranno descritti di seguito.

Il **LIDAR** (Laser Imaging Detection and Ranging) è una tecnologia di rilevamento che misura la distanza illuminando un target con un laser e analizzandone la luce riflessa. Uno dei più utilizzati è il Velodyne VLP-16 che crea immagini 3D a 360° tramite una coppia di 16 laser-rilevatori montati in una carcassa compatta. Il LIDAR genererà un insieme di punti, *Fig. 1.10*, in grado quindi di realizzare immagini 3D con un range di 100 m.

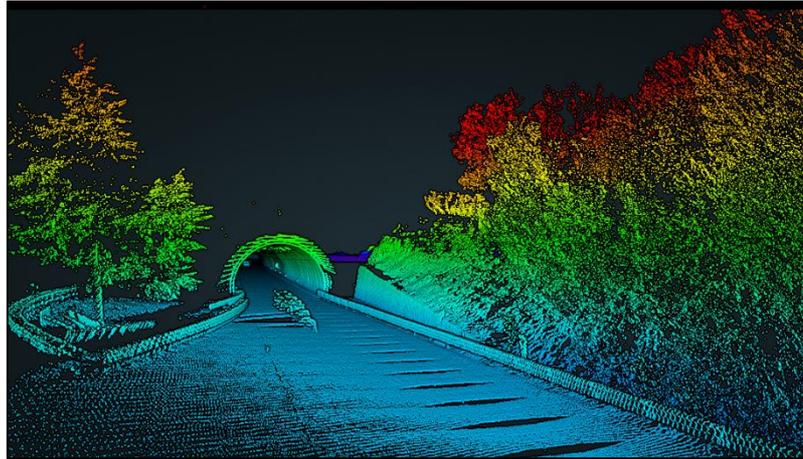


Fig. 1.10 – immagine 3D generata dal LIDAR

Per avere un'elevata precisione della posizione del veicolo è necessario introdurre un **ricevitore GPS** quale l'OXTS xNAV 550 RTK costituito da una coppia di ricevitori integrati garantendo un'accuratezza della posizione di 2 cm. Esso rimane stabile quando la velocità del veicolo è stazionaria o in una dinamica non molto marcata e non è affetta da interferenza magnetica. Si integra molto bene ai LIDAR e quando il segnale ha problemi, come ad esempio in galleria, l'interconnessione con un sistema IMU (Inertial Measurement Unit) permette di massimizzare le performance. Aggiungendo un sensore odometrico si possono migliorare le performance spingendosi anche a più elevate velocità.

Per acquisire immagini dell'ambiente esterno sono necessarie delle **telecamere**, ad esempio la Mobileye camera 5 che garantisce la realizzazione di immagini real-time ad alta definizione in grado di identificare pedoni, veicoli e corsie.

Inoltre, i veicoli sono equipaggiati anche da unità di distribuzione di potenza per gestire l'energia elettrica e una **HMI** (Human Machine Interface) per la selezione di comandi base (i.e. accensione/spegnimento dei devices o il passaggio da modalità autonoma a manuale).

Oltre alla sensoristica su descritta fondamentale per il rilevamento degli ostacoli e la determinazione della posizione, sono necessari dei sistemi di attuazione per gestire l'azionamento dell'acceleratore, freno e sterzo. Per avere un controllo automatico sul pedale del freno e dell'acceleratore è necessario implementare un sistema definito drive-by-wire, con tale termine si indica l'idea di rimuovere i collegamenti meccanici fra i comandi dell'automobile e le parti che fisicamente eseguono questi comandi. Cioè in tal modo, al posto che azionare i freni o l'acceleratore in modo meccanico, i comandi di frenatura e accelerazione vengono inviati ad una centralina che, dopo averli elaborati, li trasmette agli organi interessati. Inoltre, al fine di poter gestire anche l'attuazione dello sterzo è necessario introdurre un **modulo EPAS** (Electric Power Assisted Steering) che insieme ai sistemi by wire prima analizzati permettono di garantire la desiderata attuazione assistita.

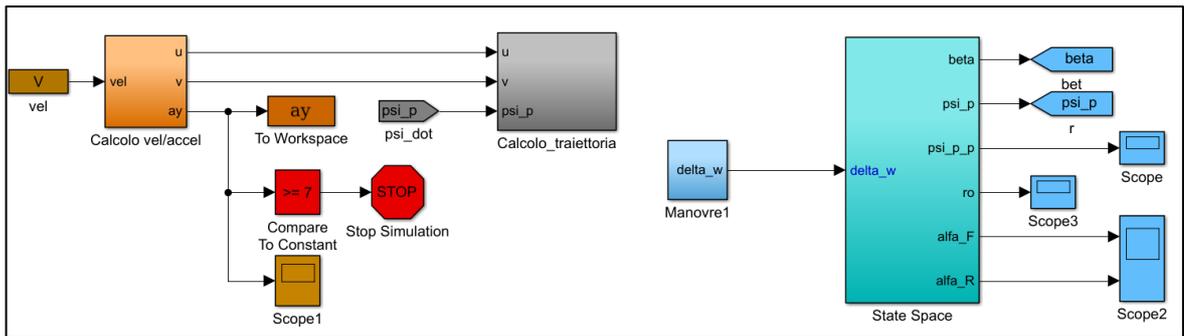


Capitolo II – Modelli di veicolo

In this chapter will be shown some vehicle's model from an easier-linear one called *Single-Track Model* to a complex one in witch non-linear analysis on Forces, Tyres will be discussed.

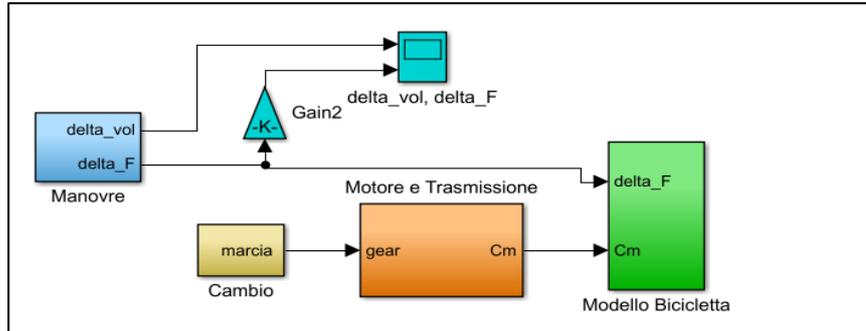
An analysis on models is a fundamental for controls; only studying the response and the range of validation of that we can introduce control logics.

Obiettivo di tale capitolo è definire una serie di modelli di autoveicolo in grado di rispondere a diverse esigenze. Innanzitutto, si andrà ad analizzare un *modello Single-Track di veicolo con pneumatici linearizzati nelle ipotesi che la velocità del veicolo sia costante* e quindi di poter, secondo alcune ipotesi, disaccoppiare la dinamica longitudinale da quella laterale. Tale approccio valido per piccoli angoli di deriva e per basse accelerazioni laterali ci permette di effettuare un'iniziale analisi di stabilità del veicolo e di effettuare diverse prove in campo lineare.



L'esigenza di definire un modello più complesso, che tenga conto anche dell'effettiva dinamica longitudinale ha portato alla realizzazione di un secondo modello a tre gradi di libertà; in tal senso si è innanzitutto linearizzato il problema con *un modello a 3gdl lineare* che verrà utilizzato per un confronto con il modello precedentemente analizzato. Bisogna dire che tale modello permette la modellazione della dinamica longitudinale, ma per le ipotesi fatte di puro rotolamento non è in grado di definire le interazioni delle forze longitudinali e laterali rendendo inefficiente quest'ultimo all'analisi del comportamento del veicolo in condizioni molto spinte (a.e. sovrasterzo di potenza).

La necessità di un modello, che dia risultati coerenti con la fisica anche in condizioni non lineari ha portato alla realizzazione di un *modello a 3gdl non lineare* introducendo le espressioni empiriche di Pacejka nella modulazione del comportamento degli pneumatici.



2.1. Single Track Model

Si è deciso di analizzare, in prima approssimazione, un modello di veicolo a bicicletta linearizzato, Fig.1, al quale verranno introdotte delle strategie di controllo. Si tratta del modello più semplice, ma costituisce la base per modelli più complessi. Tale modello lineare è capace di descrivere la dinamica del veicolo fino ad un'accelerazione laterale di $4\frac{m}{s^2}$.

Si suppone la simmetria rispetto all'asse longitudinale in modo tale da poter rappresentare l'assale anteriore e posteriore tramite un'unica ruota virtuale. Un possibile schema è rappresentato in Fig.11. Si tratta di un unico corpo rigido di massa m concentrata nel suo centro di gravità O . Si considerano noti i valori delle due distanze a e b , definite

rispettivamente semipasso anteriore e posteriore. L'angolo di rotazione attorno all'asse z del riferimento-ruota rispetto al riferimento-veicolo è definito angolo di sterzo.

È inoltre introdotto un angolo di sterzo anteriore δ_F ed uno analogo per l'assale posteriore δ_R (rappresentato nullo in figura). Nonostante le vetture comuni abbiano un sistema di sterzata delle sole ruote anteriori, il modello consentirà di imporre un angolo di rotazione alle ruote posteriori, in tal modo si potranno ad esempio simulare vetture dotate di sistemi di sterzata integrale 4WS.

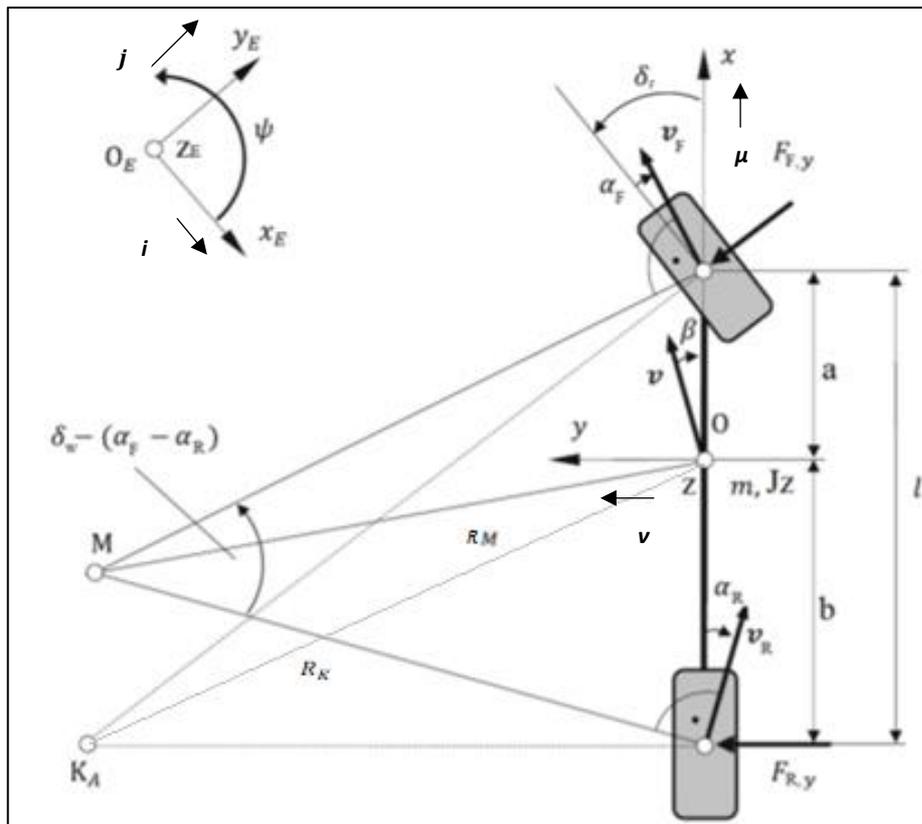


Fig. 2.1 - modello di veicolo

Per consuetudine, si definisce un sistema di riferimento $(x, y, z; O)$ *solidale al telaio* con origine nel baricentro e versori (μ, ν, λ) . Come illustrato in figura, l'asse x viene assunto coincidente con la direzione longitudinale del veicolo e diretto in avanti, l'asse z ortogonale alla strada e diretto verso l'alto e l'asse y perpendicolare agli altri due e diretto verso sinistra. Inoltre, si è definito un sistema di riferimento fisso $(X, Y, Z; O_E)$ necessario per determinare la posizione del veicolo in termini assoluti, fondamentale soprattutto per l'inseguimento di traiettoria in una successiva logica di controllo. Una volta note le funzioni $u(t)$, $v(t)$ e $\dot{\psi}(t)$ è interessante conoscere anche il moto del veicolo rispetto ad un riferimento cartesiano fisso, *solidale alla strada* e quindi detto di assi di suolo.

Verrà di seguito descritto il processo di ottenimento della matrice di rotazione che permette di ruotare qualsiasi vettore dal sistema veicolo x, y, z al sistema inerziale X, Y, Z .

Si ruoti il sistema XYZ attorno all'asse Z fino a quando l'asse X coincide con la proiezione dell'asse x sul piano XY . L'angolo descritto è l'angolo di imbardata ψ e la matrice che permette di passare al sistema inerziale risulta essere:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Quindi a partire dalle componenti della velocità di traslazione del baricentro del veicolo lungo il sistema di riferimento ad esso solidale (u e v) e dall'angolo di imbardata (ψ) è possibile calcolare le componenti di velocità del baricentro rispetto al sistema di riferimento fisso inerziale (\dot{X}_G e \dot{Y}_G):

$$\begin{cases} \dot{X}_G = u \cos \psi - v \sin \psi \\ \dot{Y}_G = v \cos \psi + u \sin \psi \end{cases} \quad (2.2)$$

Per semplice integrazione si può quindi ricavare la posizione del baricentro nel sistema di riferimento fisso, rispetto al quale si può calcolare la traiettoria.

In condizioni puramente cinematiche con centro di istantanea rotazione in K_A , possiamo definire l'angolo di sterzo necessario per effettuare una traiettoria di raggio R_K da considerazioni puramente geometriche

$$\tan(\delta_0) = \frac{l}{\sqrt{R_K^2 - b^2}} \quad (2.3)$$

E quindi per angoli di sterzo piccoli e con raggio di curvatura molto più grande del passo del veicolo, avremo $\delta_0 \approx \frac{l}{R_K}$. Nella realtà non si ha una condizione cinematica ideale, ma il sistema come vediamo è dinamico e quindi parleremo di *sterzata dinamica* del veicolo; si svilupperanno degli angoli di deriva e quindi il centro di curvatura (dato dall'intersezione delle ortogonali alle velocità dei centri ruota) si sposterà da K_A a M . Da un'analisi geometrica è possibile legare gli angoli di deriva con gli angoli di sterzata cinematica e dinamica, applicando al triangolo di vertici i centri ruota e M e introducendo il teorema dei seni si ottiene ricordando che stiamo analizzando piccoli angoli:

$$\delta_F - \delta_0 = \alpha_F - \alpha_R \quad (2.4)$$

Quando la velocità del veicolo è piccola, possiamo pensare che gli angoli di deriva dei due assali siano molto piccoli e simili, dunque l'angolo di sterzata dinamica coincide con quello statico e quindi:

$$\delta_F \approx \frac{l}{R_K} \quad (2.5)$$

In scenari reali però gli angoli di deriva non sono piccoli e coincidenti e allora avremo che la sterzata dinamica sarà differente da quella ideale cinematica. Inoltre, introduciamo le varie assunzioni fatte per valutare le successive equazioni dinamiche del modello:

- La velocità del veicolo V è assunta costante
- Angoli d'assetto β e angoli di deriva α sono considerati sufficientemente piccoli per considerare la parte lineare della dinamica del veicolo
- Piccoli angoli di sterzo alle ruote δ_F

2.2. Equazioni dinamiche

Esistono inoltre due sistemi di riferimento solidali a ciascuna ruota; si ricorda che le forze longitudinali e laterali applicate dallo pneumatico sono dirette lungo l'asse longitudinale e laterale della ruota. Sulla base delle precedenti ipotesi, si procede a formulare matematicamente un modello di veicolo.

Quindi si hanno le seguenti equazioni di equilibrio dinamiche nella direzione longitudinale (τ), laterale (\mathbf{n}) e l'equilibrio alla rotazione attorno all'asse verticale del baricentro.

$$\begin{cases} ma_x = F_{F,x} \cos(\delta_F) + F_{R,x} \cos(\delta_R) - F_{F,y} \sin(\delta_F) - F_{R,y} \sin(\delta_R) \\ ma_y = F_{F,y} \cos(\delta_F) + F_{R,y} \cos(\delta_R) + F_{F,x} \sin(\delta_F) + F_{R,x} \sin(\delta_R) \\ J_Z \ddot{\psi} = a[F_{F,y} \cos(\delta_F) + F_{F,x} \sin(\delta_F)] - b[F_{R,y} \cos(\delta_R) + F_{R,x} \sin(\delta_R)] \end{cases} \quad (2.6)$$

2.2.1. Termini Inerziali

Si deve ricavare l'accelerazione del veicolo. La velocità assoluta del veicolo si può esprimere facilmente in termini di versori del sistema di riferimento veicolo^a:

$$\mathbf{V} = u\boldsymbol{\mu} + v\boldsymbol{\nu} \quad (2.7)$$

Deriviamo per ottenere le componenti dell'accelerazione lungo i versori del sistema mobile.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \dot{u}\boldsymbol{\mu} + u\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} + \dot{v}\boldsymbol{\nu} + \frac{d\boldsymbol{\nu}}{dt} = \\ &= \dot{u}\boldsymbol{\mu} + u\dot{\psi}\boldsymbol{\lambda} \wedge \boldsymbol{\mu} + \dot{v}\boldsymbol{\nu} + v\dot{\psi}\boldsymbol{\lambda} \wedge \boldsymbol{\nu} \\ &= (\dot{u} - \dot{\psi}v)\boldsymbol{\mu} + (\dot{v} + \dot{\psi}u)\boldsymbol{\nu} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Riassumendo, l'accelerazione assoluta del veicolo può essere espressa in termini di componenti lungo gli assi del sistema di riferimento solidale al veicolo:

$$\mathbf{a} = a_x\boldsymbol{\mu} + a_y\boldsymbol{\nu} = (\dot{u} - \dot{\psi}v)\boldsymbol{\mu} + (\dot{v} + \dot{\psi}u)\boldsymbol{\nu} \quad (2.9)$$

Se consideriamo che la traiettoria compiuta dal baricentro O è sempre tangente alla velocità \mathbf{V} , si può scomporre l'accelerazione \mathbf{a} anche in accelerazione centripeta a_n e accelerazione tangenziale a_t . Più nel dettaglio:

$$\mathbf{a}_G = a_t\mathbf{t} + a_n\mathbf{n} \quad (2.10)$$

^a Si sottolinea l'ipotesi che il veicolo si possa muovere solo su un piano orizzontale, in tal modo avremo che la terza componente di velocità sia nulla.

Dove \mathbf{t} ed \mathbf{n} sono i versori rispettivamente parallelo e ortogonale alla velocità del baricentro \mathbf{V} :

$$\mathbf{t} = \cos \beta \boldsymbol{\mu} + \sin \beta \mathbf{v} \quad (2.11)$$

A tal punto è possibile esplicitare le due componenti, sapendo che, nelle ipotesi fatte di piccoli angoli di assetto^a, $\beta = \frac{v}{u}$:

$$a_t = \mathbf{a}_G \cdot \mathbf{t} = a_x \cos \beta + a_y \sin \beta = \frac{\dot{u}v + \dot{v}u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad (2.12)$$

$$a_n = \mathbf{a}_G \cdot \mathbf{n} = -a_x \sin \beta + a_y \cos \beta = \frac{\dot{\psi}(u^2 + v^2) - \dot{u}v + \dot{v}u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad (2.13)$$

Possiamo ora ricavare l'espressione generale del raggio di curvatura:

$$R_G = \frac{V^2}{a_n} = \frac{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{\psi}(u^2 + v^2) - \dot{u}v + \dot{v}u} = \frac{V}{\dot{\psi} - \frac{\dot{u}v - \dot{v}u}{V^2}}$$

Si tratta di una quantità con segno, il raggio di curvatura avrà segno positivo se il centro di curvatura si trova alla sinistra del veicolo, negativo in caso contrario. Analizzando un modello di veicolo a velocità costante si perviene alla seguente relazione approssimata per il raggio di curvatura della traiettoria del baricentro:

$$R_G \approx \frac{V}{\dot{\psi} + \frac{\dot{v}}{V}} \approx^b \frac{V}{\dot{\psi} + \frac{\dot{v}\beta + \dot{\beta}V}{u}} \quad (2.14)$$

Da cui, nelle ipotesi di velocità costante si ha:

$$R_G \approx \frac{V}{\dot{\psi} + \dot{\beta}} \quad (2.15)$$

La presenza di \dot{v} può rendere R_G ben diverso da $R = \frac{u}{\dot{\psi}}$. A traiettoria assestata $\dot{\beta} = 0$ e $\dot{\psi} = 0$ quindi l'accelerazione di O è solo centripeta $a_t = 0$ e $a_n = V\dot{\psi}$.

^a Quindi possiamo dire che $\cos \beta = 1$ e $\sin \beta = \beta$

^b Nelle ipotesi fatte avremo che $v = V\beta$ quindi $\dot{v} = \dot{V}\beta + \dot{\beta}V$

2.2.2. Equazioni di congruenza

È importante definire delle equazioni in modo tale da esprimere gli angoli di deriva dei due assali in funzione dei parametri principali del veicolo (δ , β , $\dot{\psi}$, u e v);

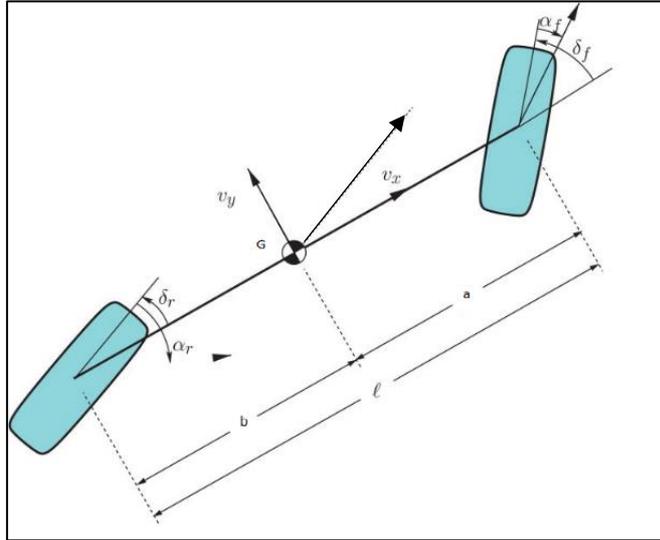


Fig. 2.2 – relazione velocità tra CG e ruota anteriore

definita la velocità assoluta del baricentro del veicolo nel piano xy è necessario valutare la velocità con cui si spostano i due centri ruota. Essi sono considerati come punti solidali alla cassa del veicolo, con le ruote libere di ruotare intorno all'asse verticale passante per essi. È necessario effettuare alcune considerazioni geometriche servendosi di una vista dall'alto del veicolo nel piano xy (Fig. 2.2).

Da analisi geometriche possiamo ricollegare la velocità della ruota alla velocità del veicolo. Per calcolare la velocità assoluta del centro V_F , a partire dalla velocità del baricentro del veicolo V_G e dalla velocità di imbardata $\dot{\psi}$, si applica l'equazione fondamentale della cinematica dei corpi rigidi che lega la velocità di due punti appartenenti allo stesso corpo rigido:

$$\mathbf{V}_F = \mathbf{V}_G + \dot{\psi} \wedge \mathbf{r}_F \quad (2.16)$$

Dove $\mathbf{r}_F = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$ è il vettore che congiunge il baricentro con il centro anteriore, trattandosi di una ruota virtuale non avremo una componente lungo l'asse y ma solo la distanza longitudinale definita dal semi-passo anteriore. Le componenti della velocità del mozzo rispetto agli assi del sistema di riferimento veicolo sono:

$$\begin{aligned} u_F &= \mathbf{V}_F \cdot \boldsymbol{\mu} = \mathbf{V}_G \cdot \boldsymbol{\mu} + (\dot{\psi} \wedge \mathbf{r}_F) \cdot \boldsymbol{\mu} \\ v_F &= \mathbf{V}_F \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{V}_G \cdot \boldsymbol{\nu} + (\dot{\psi} \wedge \mathbf{r}_F) \cdot \boldsymbol{\nu} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Quindi:

$$u_F = u \quad (2.18)$$

$$v_F = v + a\dot{\psi}$$

Analogamente è possibile ricavare le espressioni delle componenti di velocità della ruota posteriore. In tal caso:

$$\mathbf{V}_R = \mathbf{V}_G + \dot{\psi} \wedge \mathbf{r}_R \quad (2.19)$$

Dove $\mathbf{r}_R = \begin{bmatrix} -b \\ 0 \end{bmatrix}$ è il vettore che congiunge il baricentro con il centro ruota posteriore. Quindi:

$$\begin{aligned} u_R &= u \\ v_R &= v - b\dot{\psi} \end{aligned} \quad (2.20)$$

I moduli delle velocità dei mozzi ruota e gli angoli β_i tra le direzioni della velocità del centro ruota e la direzione longitudinale del veicolo si possono calcolare come segue:

$$\begin{cases} |\mathbf{V}_F| = \sqrt{u_F^2 + v_F^2} \\ |\mathbf{V}_R| = \sqrt{u_R^2 + v_R^2} \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\begin{cases} \beta_F = \arctan\left(\frac{u_F}{v_F}\right) = \arctan\left(\frac{v + a\dot{\psi}}{u}\right) \\ \beta_R = \arctan\left(\frac{u_R}{v_R}\right) = \arctan\left(\frac{v - b\dot{\psi}}{u}\right) \end{cases} \quad (2.22)$$

Da cui è possibile ricavare gli angoli di deriva delle ruote:

$$\begin{cases} \alpha_F = \delta_F - \beta_F = \delta_F - \arctan\left(\frac{v + a\dot{\psi}}{u}\right) \\ \alpha_R = \delta_R - \beta_R = \delta_R - \arctan\left(\frac{v - b\dot{\psi}}{u}\right) \end{cases} \quad (2.23)$$

Quindi se gli angoli β_i sono piccoli, essendoci in normali condizioni di esercizio preponderanza della velocità di avanzamento u rispetto alla componente laterale v^a , avremo che l'arcotangente si semplifica e quindi:

$$\begin{cases} \alpha_F = \delta_F - \left(\frac{v + a\dot{\psi}}{u}\right) = \delta_F - \beta - \frac{a}{u}\dot{\psi} \\ \alpha_R = \delta_R - \left(\frac{v - b\dot{\psi}}{u}\right) = \delta_R - \beta + \frac{b}{u}\dot{\psi} \end{cases} \quad (2.24)$$

^a Tale condizione anche precedentemente indicata fa sì che, essendo l'angolo di assetto del veicolo $\beta = \arctan\left(\frac{v}{u}\right)$ piccolo in condizioni normali di esercizio, la componente di velocità longitudinale del veicolo tenda al valore assoluto di velocità V .

2.3. Modello monotraccia lineare

Dopo questa trattazione è possibile riscrivere la (2.6) sostituendo le espressioni delle accelerazioni longitudinali e laterali definite in (2.9) e ricordando le ipotesi iniziali di piccoli angoli di sterzo:

$$\begin{cases} m(\dot{u} - \dot{\psi}v) = F_{F,x} + F_{R,x} - F_{F,y} \delta_F - F_{R,y} \delta_R \\ m(\dot{v} + \dot{\psi}u) = F_{F,y} + F_{R,y} + F_{F,x} \delta_F + F_{R,x} \delta_R \\ J_Z \ddot{\psi} = a[F_{F,y} + F_{F,x} \delta_F] - b[F_{R,y} + F_{R,x} \delta_R] \end{cases} \quad (2.25)$$

Osservazione. Un ulteriore fondamentale approssimazione dell'equazioni di equilibrio del modello monotraccia si ottiene supponendo assegnata la velocità di avanzamento $u(t)$. Così, la prima equazione della (2.16) diventa un'equazione algebrica nella nuova incognita che sarà necessariamente la forza longitudinale. Se consideriamo un veicolo a *trazione posteriore*, con *sterzata solo sulle ruote anteriori* ($\delta_R = 0^a$), e si pone $F_{F,x} = 0$ si perviene ad una forte semplificazione delle equazioni di equilibrio. Infatti, la prima equazione diventa semplicemente l'espressione di $F_{R,x}$:

$$F_{R,x} = m(\dot{u} - \dot{\psi}v) + F_{F,y} \delta_F \quad (2.26)$$

E nelle restanti due equazioni differenziali non compare la funzione incognita $F_{R,x}(t)$:

$$\begin{aligned} m(\dot{v} + \dot{\psi}u) &= F_{F,y} + F_{R,y} \\ J_Z \ddot{\psi} &= aF_{F,y} - bF_{R,y} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Quindi in tali ipotesi il sistema dinamico è governato da due sole equazioni differenziali in $v(t)$ e $\psi(t)$.

Nel caso di veicoli a trazione anteriore o integrale, la situazione è un po' più complessa. Non sia ha tale disaccoppiamento. In generale si ha disaccoppiamento solo se la trazione e la sterzata sono su assali differenti.

Per un veicolo a *trazione e sterzata anteriore*, poniamo $F_{R,x} = 0$ e quindi la prima equazione della (2.16) diventa:

$$F_{F,x} = m(\dot{u} - \dot{\psi}v) + F_{F,y} \delta_F \quad (2.28)$$

Però la funzione $F_{F,x}(t)$ compare anche nelle altre due equazioni, che, in base alla precedente relazione, diventano:

$$\begin{aligned} m(\dot{v} + \dot{\psi}u) &= F_{F,y} + F_{R,y} + [m(\dot{u} - \dot{\psi}v) + F_{F,y} \delta_F] \delta_F, \\ J_Z \ddot{\psi} &= aF_{F,y} - bF_{R,y} + a[m(\dot{u} - \dot{\psi}v) + F_{F,y} \delta_F] \delta_F. \end{aligned} \quad (2.29)$$

^a Nei veicoli reali la progettazione delle sospensioni in modo tale da garantire diverse specifiche può generare la presenza di angoli di convergenza sulle ruote ϵ che va a modificare le forze laterali sviluppate dalle ruote che avrei avuto senza convergenza []. Quindi si potrebbero avere angoli di sterzo non nulli anche alle ruote posteriori.

Anche in questo caso il sistema dinamico è governato da due sole equazioni differenziali in $v(t)$ e $\psi(t)$, che sono però più complesse. Tuttavia, dato che i termini in più sono sempre moltiplicati per l'angolo di sterzo δ_F , si può ritenere che abbiano scarsa influenza, finché δ_F è piccolo. Infatti, nell'ipotesi che anche l'accelerazione longitudinale sia piccola avremo che il termine tra parentesi sia costituito da due infinitesimi di ordine superiore ($a_x \delta_F$ e δ_F^2) e quindi possiamo trascurare tali due termini influenzando poco la risposta.

Il modello monotraccia più classico utilizza le ultime due equazioni di equilibrio (2.6) oltre alle equazioni di congruenza (2.24). Si tratta di un sistema dinamico a due variabili di stato.

Per poter *linearizzare il modello*, si assume comportamento lineare delle forze laterali $F_{i,y}$ definito dalla *equazione costitutiva lineare*:

$$F_{i,y} = C_i \alpha_i \quad (2.30)$$

dove C_i è la rigidità di deriva dell'asse i -esimo e non della singola ruota.

In seguito a tali analisi è possibile riformulare le equazioni di equilibrio laterale e alla rotazione definita in (2.18). Ricordando l'ipotesi iniziale di piccoli β , le componenti di velocità longitudinale e laterale del baricentro sono di seguito definite:

$$\begin{cases} u = V \cos(\beta) \approx V \\ v = V \sin(\beta) \approx V\beta \end{cases} \quad (2.31)$$

Avremo che la derivata della velocità laterale v sarà:

$$\dot{v} = \dot{V}\beta + \dot{\beta}V \quad (2.32)$$

Inoltre, se la velocità del veicolo V è considerata costante la (2.22) si riduce a:

$$\dot{v} = V\dot{\beta} \quad (2.33)$$

E sostituendola nella (2.8), ricordando l'equazione (2.9) che descrive il comportamento lineare dello pneumatico e la (2.18) che descrive i valori degli angoli di deriva in funzione degli input del (δ_F, δ_R e V) e degli stati (β e ψ) del sistema, otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} m(V\dot{\beta} + \dot{\psi}V) = (-C_F - C_R)\beta + \left(-\frac{C_F a}{V} + \frac{C_R b}{V}\right)\dot{\psi} + C_F \delta_F + C_R \delta_R \\ J_Z \ddot{\psi} = (-C_F a + C_R b)\beta + \left(-\frac{C_F a^2}{V} - \frac{C_R b^2}{V}\right)\dot{\psi} + (C_F a)\delta_F - (C_R b)\delta_R \end{cases} \quad (2.34)$$

Riferendoci allo State-Space, l'equazione del moto (2.24) del sistema lineare può essere trasformata in un set di equazioni differenziali del primo ordine; la tipica definizione dello stata space e così scritta:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}(t) \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}(t) \end{cases} \quad (2.35)$$

Sia il vettore degli stati e degli input così definiti:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \beta \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \delta_F \\ \delta_R \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Quindi conviene riscrivere la (2.21) esplicitando le derivate degli stati in funzione degli input e degli stati:

$$\begin{cases} \dot{\beta} = \left(\frac{-C_F - C_R}{mV} \right) \beta + \left(\frac{-C_F a + C_R b - mV^2}{mV^2} \right) \dot{\psi} + \frac{C_F \delta_F + C_R \delta_R}{mV} \\ \ddot{\psi} = \left(\frac{-C_F a + C_R b}{J_Z} \right) \beta + \left(\frac{-C_F a^2 - C_R b^2}{J_Z V} \right) \dot{\psi} + \frac{(C_F a) \delta_F - (C_R b) \delta_R}{J_Z} \end{cases} \quad (2.38)$$

Possiamo, ora, definire le matrici **A**, **B**, **C**, **D** della (2.22) come segue:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{-C_F - C_R}{mV} & \frac{-C_F a + C_R b - mV^2}{mV^2} \\ \frac{-C_F a + C_R b}{J_Z} & \frac{-C_F a^2 - C_R b^2}{J_Z V} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{C_F}{mV} & \frac{C_R}{mV} \\ \frac{C_F a}{J_Z} & \frac{-C_R b}{J_Z} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Prima di definire le matrici **C** e **D** bisogna dire quali sono gli output voluti **y**; per avere in uscita molti dati utili per l'analisi del sistema definiamo:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \beta \\ \dot{\psi} \\ \rho \\ \alpha_F \\ \alpha_R \end{bmatrix}$$

Dove con ρ si indica la curvatura del veicolo. Ricordando che $\rho = \frac{1}{R_g}$ con R_g definito dalla (2.15) avremo:

$$\rho = \frac{(\dot{\psi} + \dot{\beta})}{V} \quad (2.41)$$

Allora sostituendo l'espressione di $\dot{\beta}$ (2.38) otteniamo:

$$\rho = \left(\frac{-C_R - C_F}{mV^2} \right) \beta + \left(\frac{-C_F a + C_R b}{mV^3} \right) \dot{\psi} + \frac{C_F \delta_F + C_R \delta_R}{mV^2} \quad (2.42)$$

Quindi, dall'equazione (2.29) e ricordando le espressioni degli angoli di deriva definite nelle equazioni (2.18), avremo che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \beta \\ \dot{\psi} = \dot{\psi} \\ \rho = \left(\frac{-C_R - C_F}{mV^2} \right) \beta + \left(\frac{-C_F a + C_R b}{mV^3} \right) \dot{\psi} + \frac{C_F \delta_F + C_R \delta_R}{mV^2} \\ \alpha_F = \delta_F - \beta - \frac{a}{V} \dot{\psi} \\ \alpha_R = \delta_R - \beta + \frac{b}{V} \dot{\psi} \end{array} \right. \quad (2.43)$$

Allora:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \left(\frac{-C_R - C_F}{mV^2} \right) & \left(\frac{-C_F a + C_R b}{mV^3} \right) \\ -1 & -\frac{a}{V} \\ -1 & \frac{b}{V} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{C_F}{mV^2} & \frac{C_R}{mV^2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

È possibile riscrivere completamente il problema in forma matriciale secondo la (2.22):

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-C_F - C_R}{mV} & \frac{-C_F a + C_R b - mV^2}{mV^2} \\ \frac{-C_F a + C_R b}{J_Z V} & \frac{-C_F a^2 - C_R b^2}{J_Z V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_F}{mV} & \frac{C_R}{mV} \\ \frac{C_F a}{J_Z} & \frac{-C_R b}{J_Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_F \\ \delta_R \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta \\ \psi \\ \rho \\ \alpha_F \\ \alpha_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \left(\frac{-C_R - C_F}{mV^2}\right) & \left(\frac{-C_F a + C_R b}{mV^3}\right) \\ -1 & -\frac{a}{V} \\ -1 & \frac{b}{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{C_F}{mV^2} & \frac{C_R}{mV^2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_F \\ \delta_R \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

La 2.46 può essere riscritta anche in un'altra forma nel caso si vogliano come stati del sistema non più l'angolo di assetto e la velocità di imbardata ma quest'ultima e la velocità laterale; ricordando la 2.31 e la 2.33 avremo:

$$\begin{cases} \dot{v} = \left(\frac{-C_F - C_R}{mV}\right)v + \left(\frac{-aC_F + bC_R - mV^2}{mV}\right)\psi + \frac{C_F}{m}\delta_F + \frac{C_R}{m}\delta_R \\ \dot{\psi} = \left(\frac{-aC_F + bC_R}{J_Z V}\right)v + \left(\frac{-C_F a^2 - C_R b^2}{J_Z V}\right)\psi + \frac{aC_F}{J_Z}\delta_F - \frac{bC_R}{J_Z}\delta_R \end{cases} \quad (2.47)$$

E quindi le matrici **A** e **B** saranno:

$$\mathbf{A}|_{v,\psi} = \begin{bmatrix} \frac{-C_F - C_R}{mV} & \frac{-C_F a + C_R b - mV^2}{mV} \\ \frac{-C_F a + C_R b}{J_Z V} & \frac{-C_F a^2 - C_R b^2}{J_Z V} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}|_{v,\psi} = \begin{bmatrix} \frac{C_F}{m} & \frac{C_R}{m} \\ \frac{aC_F}{J_Z} & -\frac{bC_R}{J_Z} \end{bmatrix}$$

La soluzione generale \mathbf{x} della (2.34) è data dalla somma dell'integrale \mathbf{x}_0 del sistema omogeneo e di un integrale particolare \mathbf{x}_p :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{x}_p(t) \quad (2.48)$$

Purtroppo, come si vede dalle matrici su definite, nel caso generale in cui $V \neq cost$ non è possibile ottenere analiticamente queste soluzioni, utilizzando lo State-Space, perché il sistema, anche se lineare, ha coefficienti dipendenti dal tempo. Se, invece, la velocità di avanzamento V è costante, il sistema di equazioni differenziali lineari diventa a coefficienti costanti, e ciò permette di ottenere la soluzione in forma analitica, almeno per la parte omogenea, che verifica:

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \quad (2.49)$$

si tratta quindi di un'ipotesi di grande rilevanza per i successivi sviluppi.

Sappiamo che, nel caso di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, si ipotizza una soluzione in forma esponenziale

$$\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}e^{\lambda t} \quad (2.50)$$

Da cui segue subito che $\dot{\mathbf{x}}_0 = \lambda \mathbf{x}e^{\lambda t}$. Sostituendo ed eliminando $e^{\lambda t}$, si perviene ad un classico problema agli autovalori per la matrice \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad (2.51)$$

Gli autovalori sono dati dalle radici dell'equazione caratteristica:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (2.52)$$

che, come nel nostro caso di matrice 2x2, diventa:

$$\lambda^2 - \text{tr}(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}) = 0 \quad (2.53)$$

Risolviendo, si ottengono i due autovalori λ_1 e λ_2 :

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}(\mathbf{A}) \pm \sqrt{\text{tr}(\mathbf{A})^2 - 4\det(\mathbf{A})}}{2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (2.54)$$

Se il discriminante è negativo, ovvero $\xi < 1$, il sistema è sottosmorzato e i due autovalori sono complessi coniugati. Inoltre, analizzando la (2.39) si può ricavare la traccia e il determinante:

$$\begin{cases} \text{tr}(\mathbf{A}) = -\frac{1}{V} \left[\frac{C_F + C_R}{m} + \frac{C_F a^2 + C_R b^2}{J_Z} \right] \\ \det(\mathbf{A}) = \frac{1}{mJ_Z V^2} [C_F C_R (a + b)^2 - mV^2 (aC_F - bC_R)] \end{cases} \quad (2.55)$$

2.3.1. Comportamento a regime

Nel caso di sterzo in posizione fissa e velocità di avanzamento uniforme, il veicolo si stabilizza su un percorso circolare. Si parla quindi di moto in condizione stazionarie perché tutte le grandezze rilevanti sono costanti nel tempo.

Utile è considerare le equazioni di equilibrio a regime; tale soluzione a regime può essere ricavata dallo spazio degli stati imponendo $\dot{x} = 0$ da cui gli stati saranno così definiti:

$$x = -A^{-1}Bu$$

Allora, imponendo $\dot{\beta} = \dot{\psi} = 0$ nella (2.21) avremo:

$$\begin{cases} \beta = \frac{C_F C_R b L - a C_F m V^2}{C_F C_R L^2 - m V^2 (C_F a - C_R b)} \delta_F \\ \psi = \frac{V L C_F C_R}{C_F C_R L^2 - m V^2 (C_F a - C_R b)} \delta_F \end{cases} \quad (2.56)$$

Osservazione. In campo lineare $F_y = C_\alpha \alpha$; inoltre, applicando l'equilibrio a regime dei momenti di imbardata e alla traslazione laterale, possiamo definire le forze laterali dei due assali come:

$$F_{y,F} = m_f a_y$$

$$F_{y,R} = m_r a_y$$

e quindi possiamo dire che:

$$\begin{cases} \alpha_F = \frac{m_f}{C_\alpha} a_y \\ \alpha_R = \frac{m_r}{C_\alpha} a_y \end{cases}$$

Ricordando l'equazione (2.4) in cui si legava l'angolo di sterzo dinamico a quello cinematico e agli angoli di deriva delle due ruote e sostituendo l'equazione precedente avremo:

$$\delta - \delta_0 = \left(\frac{m_f}{C_{\alpha,f}} - \frac{m_r}{C_{\alpha,r}} \right) a_y \quad (2.57)$$

Quindi, ripartendo la massa tra avantreno e retrotreno come segue:

$$\begin{cases} m_f = m \frac{b}{l} \\ m_r = m \frac{a}{l} \end{cases}$$

Sostituendo nella (2.57) otteniamo

$$\delta - \delta_0 = \frac{m}{l} \left(\frac{b}{C_{\alpha,f}} - \frac{a}{C_{\alpha,r}} \right) a_y \quad (2.58)$$

Dove $K = \frac{m}{l} \left(\frac{b}{C_{\alpha,f}} - \frac{a}{C_{\alpha,r}} \right)$ è appunto il gradiente di sottosterzo.

Se $K = 0$ la risposta del veicolo, per qualsiasi angolo di sterzo, è uguale a quella puramente cinematica; ciò non vuol dire però che il veicolo stia operando in condizioni cinematiche, in quanto gli angoli di slip delle ruote non sono trascurabili e allora il suo comportamento è generalmente definito come “*condizione neutra*”.

Se $K > 0$ per mantenere costante il raggio di curvatura l’angolo di sterzo deve crescere all’aumentare della velocità del veicolo ed il veicolo in tale condizione è detto che stia operando in “*Condizione Sottosterzante*”.

È possibile determinare i valori in stazionario di:

- Angolo di assetto

$$\frac{\beta}{\delta_F} = \left(1 - \frac{maV^2}{bLC_R} \right) \frac{b}{L + KV^2} \quad (2.59)$$

- Velocità di imbardata

$$\frac{r}{\delta_F} = \frac{V}{L + KV^2} \quad (2.60)$$

- Accelerazione laterale

$$\frac{a_y}{\delta_F} = \frac{V^2}{L + KV^2} \quad (2.61)$$

- Curvatura

$$\frac{\rho}{\delta_F} = \frac{1}{L + KV^2} \quad (2.62)$$

Interessante è capire come evolva il comportamento stazionario del veicolo con la velocità dello stesso essendo tutte le grandezze fortemente legate ad essa.

Si è fatta quindi un'analisi del comportamento a regime, per le varie tipologie di veicoli, messa in luce nelle seguenti figure.

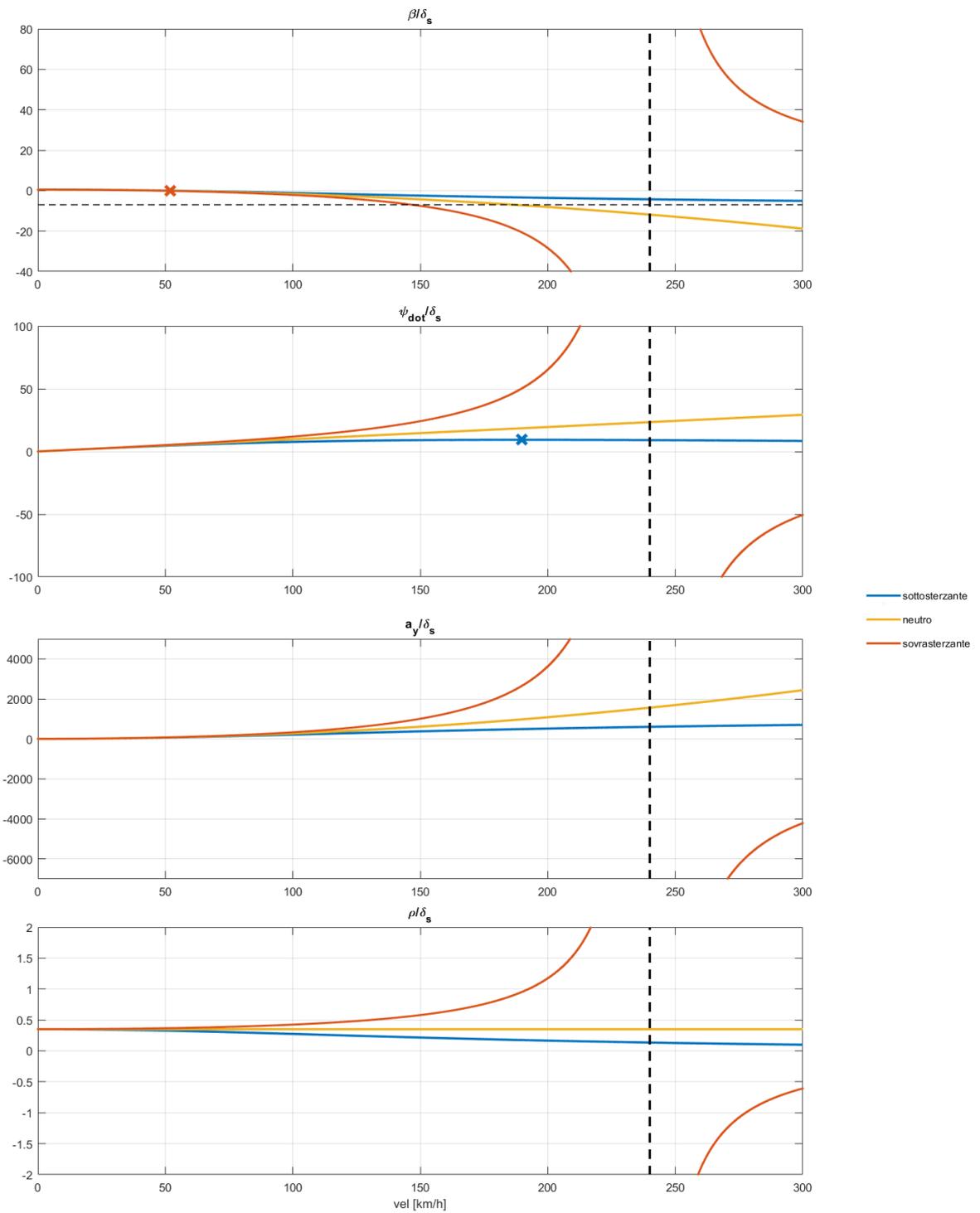


Fig. 2.3 - valori a regime degli stati al variare della velocità

Il valore stazionario, del veicolo sottosterzante, di $\frac{\beta}{\delta_s^a}$ decresce all'aumentare della velocità fino ad annullarsi per un valore di velocità:

$$V_{\beta=0} = \sqrt{\frac{bL C_R}{am}} \approx 50 \frac{km}{h} \quad (2.63)$$

Aumentando ulteriormente la velocità il suo valore diventa negativo ed il suo valore tende a:

$$\frac{\beta}{\delta_F} = \frac{aC_F}{aC_F - bC_R} \approx -7 \quad (2.64)$$

In Fig. 2.3 è mostrato anche l'andamento a regime per un veicolo neutro; ricordando che $K=0$, mentre $K>0$ per un sottosterzante, avremo una risposta più marcata rispetto al veicolo sottosterzante.

Invece, il veicolo sovrasterzante ($K<0$) è caratterizzato da una condizione di criticità a 240 km/h quindi la risposta tende ad infinito quando la velocità raggiunge tale punto critico.

Si osserva che per il veicolo neutro il raggio di curvatura è indipendente dalla velocità e corrisponde con il raggio di sterzata cinematico.

Inoltre, per tale tipologia di veicolo l'angolo di assetto non sarà nullo anzi è maggiore in modulo a quello di un veicolo sottosterzante. Come si nota nei precedenti grafici, il veicolo neutro risulta

essere più reattivo di un veicolo sottosterzante; infatti avremo valori di accelerazione laterale, velocità di imbardata e raggio di curvatura (costante) maggiori.

2.4. Studio della stabilità

La stabilità del veicolo è determinata solo dai due autovalori λ_1 e λ_2 , o meglio solo dal segno della loro parte reale. Infatti, il sistema è *asintoticamente stabile se e solo se i due autovalori hanno parte reale negativa*:

$$\text{stabilità} \Leftrightarrow \text{Re}(\lambda_1) < 0 \text{ e } \text{Re}(\lambda_2) < 0 \quad (2.65)$$

^a Si definisce δ_s l'angolo di sterzo al volante.

Se anche un solo autovalore ha parte reale positiva, la soluzione ha un termine che cresce senza limiti con il trascorrere del tempo ed il sistema è detto instabile.

La traccia e il determinante della matrice \mathbf{A} sono molto importanti perché possono fornire informazioni utili sui due autovalori grazie alle relazioni:

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (2.66)$$

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2 \quad (2.67)$$

Nel nostro caso, la $\text{tr}(\mathbf{A})$ è definita dalla (2.55) e si osserva che essa risulta essere sempre negativa; dovendo essere negativa gli autovalori non potranno essere

- Né entrambi con parte reale positiva, altrimenti la $\text{tr}(\mathbf{A})$ sarebbe positiva
- Né entrambi con parte reale nulla, altrimenti la $\text{tr}(\mathbf{A})$ sarebbe nulla

Per tale ragione gli autovalori potranno quindi essere:

- Reali distinti e negativi, generando un Moto Aperiodico smorzato
- Complessi coniugati a parte reale negativa, provocando un Moto Oscillatorio Smorzato

Garantendo così la *stabilità* del sistema. Oppure possiamo avere un *comportamento instabile* con autovalori:

- Reali distinti, positivo e l'altro negativo; in tale condizione avremo che, essendo $\text{tr}(\mathbf{A}) < 0$, $|\lambda_{neg}| > \lambda_{pos}$.

Quindi, studiando il segno del $\det(\mathbf{A})$ individuiamo se ci troviamo o meno in una condizione stabile; essendo il $\det(\mathbf{A})$ definito secondo la (2.55) avremo che una condizione necessaria e sufficiente per la stabilità è:

$$\det(\mathbf{A}) > 0 \quad (2.68)$$

Quindi, possiamo studiare la stabilità del sistema analizzando il segno del $\det(\mathbf{A})$; imponendo che il $\det(\mathbf{A})=0$ ricaviamo il valore limite di stabilità, che si ha per un valore di velocità pari a:

$$V_{cr} = \sqrt{\frac{C_F C_R l^2}{m(a C_F - b C_R)}} \quad (2.69)$$

Si noti che V_{cr} non dipende da J_z .

Osservazione. Un veicolo può essere classificato come:

1. Veicolo sovrasterzante se $aC_F - bC_R > 0$; in tal caso avremo che la (2.69) fornisce un valore di velocità critica oltre il quale il sistema diventa instabile.
2. Veicolo neutro se $aC_F - bC_R = 0$; un veicolo in queste condizioni invece ha una soglia di instabilità per un valore di velocità che tende ad infinito, quindi $\det(\mathbf{A})$ è sempre maggiore di zero e il sistema risulterà essere sempre stabile.
3. Veicolo sottosterzante se $aC_F - bC_R < 0$; in queste condizioni la (2.69) non ha soluzioni reali e il veicolo risulta essere quindi asintoticamente stabile a prescindere dalla velocità.

Si analizza, per definire il comportamento del veicolo, una *Ford Fusion Ibrida* i quali valori sono presi da [3]:

Massa, m [kg]	1997.6
Mom. Inerzia, J_{zz} [kg m ²]	3728
Passo del veicolo, l [m]	2.85
Semi passo anteriore, a [m]	1.30
Semi passo posteriore, b [m]	1.55
Ripartizione peso front/totale [%]	55

Tabella I – Parametri vettura prove

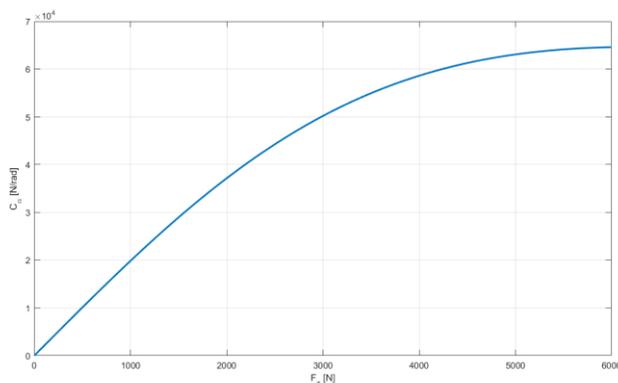


Fig. 2.4 – andamento rigidezza di deriva ruota

Innanzitutto, si è analizzato, utilizzando un modello di pneumatico più complesso che tiene conto delle formule semi-empiriche di Pacejka, l'andamento della rigidezza di deriva della singola ruota al variare del carico applicato Fig. 2.4.

Nel modello analizzato si fa riferimento ad una sola ruota virtuale che sintetizza il comportamento dell'intero assale; a tal proposito è necessario definire una caratteristica della rigidezza di deriva dell'intero assale. Nell'ipotesi in cui le due ruote sullo stesso assale sono sottoposte ad uno stesso carico normale, possiamo definire:

$$C_{\alpha,assale} = 2C_{\alpha,ruota}$$

$$F_{z,assale} = 2F_{z,ruota}$$

E quindi avremo che la caratteristica di rigidezza di deriva dell'assale^a sarà:

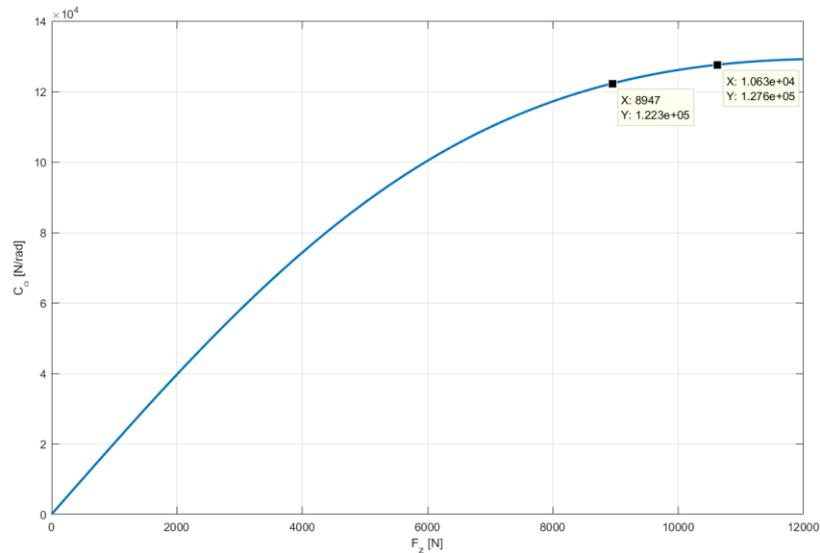


Fig. 2.5 – andamento rigidezza di deriva assale

Allora tenendo conto di questo comportamento possiamo analizzare le configurazioni di diverse tipologie di vetture.

In condizioni normali d'esercizio, possiamo ricavare il carico normale applicato lungo i due assali, come:

$$\begin{cases} F_{z,F} = mg \frac{b}{L} = 10629 \text{ N} \\ F_{z,R} = mg \frac{a}{L} = 8947 \text{ N} \end{cases}$$

A cui corrispondono dei valori di rigidezza a deriva:

$$\begin{cases} C_F = 1.28e^5 \frac{\text{N}}{\text{rad}} \\ C_R = 1.22e^5 \frac{\text{N}}{\text{rad}} \end{cases}$$

Allora essendo $aC_F - bC_R = -22700 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}} < 0$ e quindi il veicolo in questione sarà *sottosterzante*.

Possiamo avere un veicolo neutro, se pensiamo di utilizzare pneumatici simili (con la stessa caratteristica di Fig. 2.5), andando a caricare maggiormente il posteriore spostando il baricentro del veicolo in mezzeria. In tali condizioni avremo che:

$$a = b = \frac{l}{2} = 1.425 \text{ m}$$

$$F_{z,F} = F_{z,R} = \frac{mg}{2} = 9788 \text{ N}$$

^a Analizziamo il solo comportamento fino ad un carico applicato sull'assale di 25000 N.

$$C_F = C_R = 1.26e^5$$

E quindi in tali condizioni $aC_F - bC_R = 0$ quindi il veicolo sarà *neutro*.

Per avere, invece, un veicolo sovrasterzante bisogna pensare di caricare maggiormente il posteriore; infatti, si noti come il legame tra la rigidezza di deriva e il carico verticale sia men che proporzionale ($C_\alpha = aF_z - bF_z^2$) allora pensiamo di andare a caricare maggiormente il posteriore (13 % in più rispetto al caso sottosterzante) e quindi quello che si ha è un incremento della rigidezza di deriva di circa il 4%, sottolineando proprio quanto detto in precedenza^a.

$$a = 1.5 \text{ m}$$

$$b = 1.35 \text{ m}$$

$$\begin{cases} F_{z,F} = 9283 \text{ N} \\ F_{z,R} = 10314 \text{ N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_F = 1.24 \frac{\text{N}}{\text{rad}} \\ C_R = 1.27 \frac{\text{N}}{\text{rad}} \end{cases}$$

Allora, avremo che $aC_F - bC_R = 14550 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}} > 0$ e quindi il veicolo sarà *sovrasterzante*.

Dalla (2.47) è possibile vedere come il valore di velocità critica risulti essere pari a $189 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

2.4.1. Confronto Stabilità

Di seguito verrà analizzata e confrontata la stabilità delle tre tipologie di veicolo sopra definiti. Per fare tale operazione, è stato realizzato uno Script in ambiente Matlab dove al variare della velocità di esercizio *vel* sono stati ricavati i valori di frequenza propria, smorzamento e i relativi poli del sistema. Si è proceduto tramite un ciclo for, all'interno del quale è stato inizializzato il problema nello State-Space riprendendo l'espressione in (2.33). Per il calcolo delle ω_n , ζ e dei poli è stato utilizzato il comando *damp*.

^a Per quanto detto una variazione modesta del baricentro (e.g. $\pm 10 - 15 \text{ cm}$) può influenzare, almeno a livello teorico, di molto il comportamento del veicolo passando da un comportamento sottosterzante ad uno sovrasterzante e viceversa.

```

vel=[10:1:240]/3.6;
POLES=[zeros(length(vel),1),zeros(length(vel),1)];
ZETA=[zeros(length(vel),1),zeros(length(vel),1)]; %Fattore di smorzamento
FREQ=[zeros(length(vel),1),zeros(length(vel),1)]; %frequenze proprie
DET_A=[zeros(length(vel),1)]; %determinante di A
TR_A=[zeros(length(vel),1)]; %traccia di A

for k=1:length(vel)
    Vv=vel(k);

    A=[(-Cf-Cr)/(m*Vv), (-Cf*a+Cr*b-m*Vv^2)/(m*Vv^2);
        (-Cf*a+Cr*b)/Jz, (-Cf*a^2-Cr*b^2)/(Jz*Vv)];

    B=[Cf/(m*Vv); (Cf*a/Jz)];
    C=[1,0;0,1];
    D=[0;0];

    G=ss(A,B,C,D);
    [Wn,Z,P]=damp(G);
    POLES(k,:)=P;
    ZETA(k,:)=Z;
    FREQ(k,:)=Wn;
    DET_A(k)=det(A);
    TR_A(k)=trace(A);
end

```

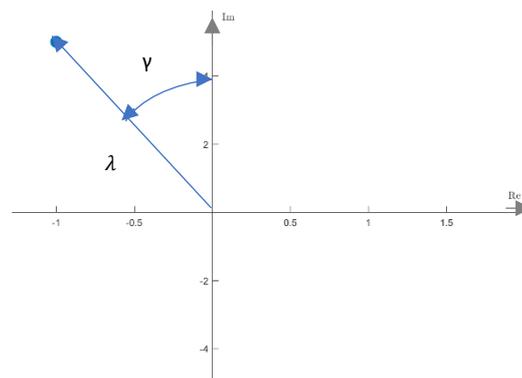
Fig. 2.6 – Script Matlab per stabilità

Tale comando ritorna due vettori contenenti i valori di frequenze naturali e fattori di smorzamento del sistema lineare G.

I valori di frequenza naturale e fattore di smorzamento di un autovalore λ sono ottenuti dalle seguenti due equazioni:

$$\omega_n = |\lambda|$$

$$\zeta = -\cos(\angle \lambda) = \sin(\gamma)$$



Dove con s si definisce la coordinata del polo.

Quindi calcolati gli autovalori della matrice A si possono definire le frequenze proprie e i fattori di smorzamento. Ad esempio, come possiamo vedere in Fig. 2.9 per il veicolo sottosterzante, gli autovalori avranno una parte reale ed una positiva quindi avranno un fattore di smorzamento diverso da 1. Quindi calcolando l'angolo tra la congiungente all'origine del polo nel piano (Real, Im) e l'asse reale otteniamo un determinato fattore di smorzamento che seguirà l'andamento mostrato in figura; diminuendo all'aumentare dell'angolo definito e quindi all'aumentare della componente immaginaria.

Dapprima analizziamo la stabilità di un veicolo sovrasterzante, ricordiamo di seguito i dati di riferimento^a quali rigidità di deriva all'anteriore, posteriore e i semi passi del veicolo:

1	Veicolo Sovrasterzante	
	Rigidità a deriva anteriore, C_f [N/rad]	$1.24e^5$
	Rigidità a deriva posteriore, C_r [N/rad]	$1.27e^5$
	Semipasso anteriore, a [m]	1.5
	Semipasso posteriore, b [m]	1.35

Applicando lo script in Fig. 2.6, si è andato a diagrammare le ω_n , ξ e i poli del sistema come si vede nella figura successiva.

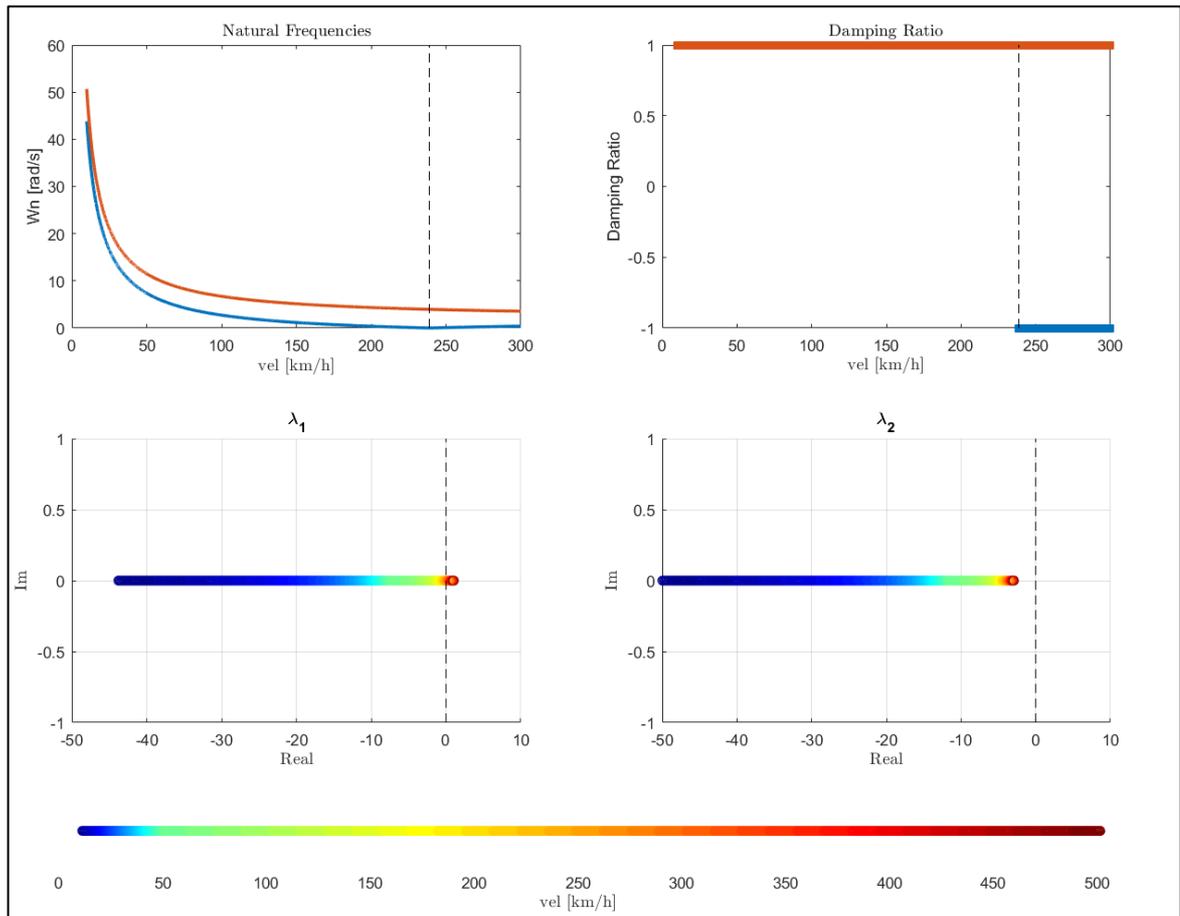


Fig. 2.7 – diagramma delle frequenze naturali, fattore di smorzamento e poli

Come ci aspettavamo, un veicolo sovrasterzante risulta avere una condizione di instabilità ad una velocità critica, ricavata in precedenza di circa $240 \frac{km}{h}$. I due poli del sistema risulteranno essere reali e distinti con parte reale negativa fino a tale velocità critica. In questo range di velocità la risposta totale del sistema è costituita da due risposte

^a Mentre per i valori di massa, inerzia si rifarà sempre ai valori in *Tabella 1* essendo uguali per tutte le tipologie di veicolo

aperiodiche smorzate differenti con velocità di decadimento diversa. A velocità più elevate uno dei due poli sarà reale positivo provocando così l'instabilità del sistema, dato che la risposta effettiva del sistema è formata da una risposta stabile che tende ad esaurirsi velocemente ed una instabile che cresce con legge esponenziale nel tempo.

Di seguito è analizzato come varia il comportamento del veicolo se si va ad aumentare la rigidità di deriva al posteriore fino ad un comportamento *neutro* della vettura.

2	Veicolo Neutro	
	Rigidità a deriva anteriore, Cf [N/rad]	$1.26e^5$
	Rigidità a deriva posteriore, Cr [N/rad]	$1.26e^5$
	Semipasso anteriore, a [m]	1.425
	Semipasso posteriore, b [m]	1.425

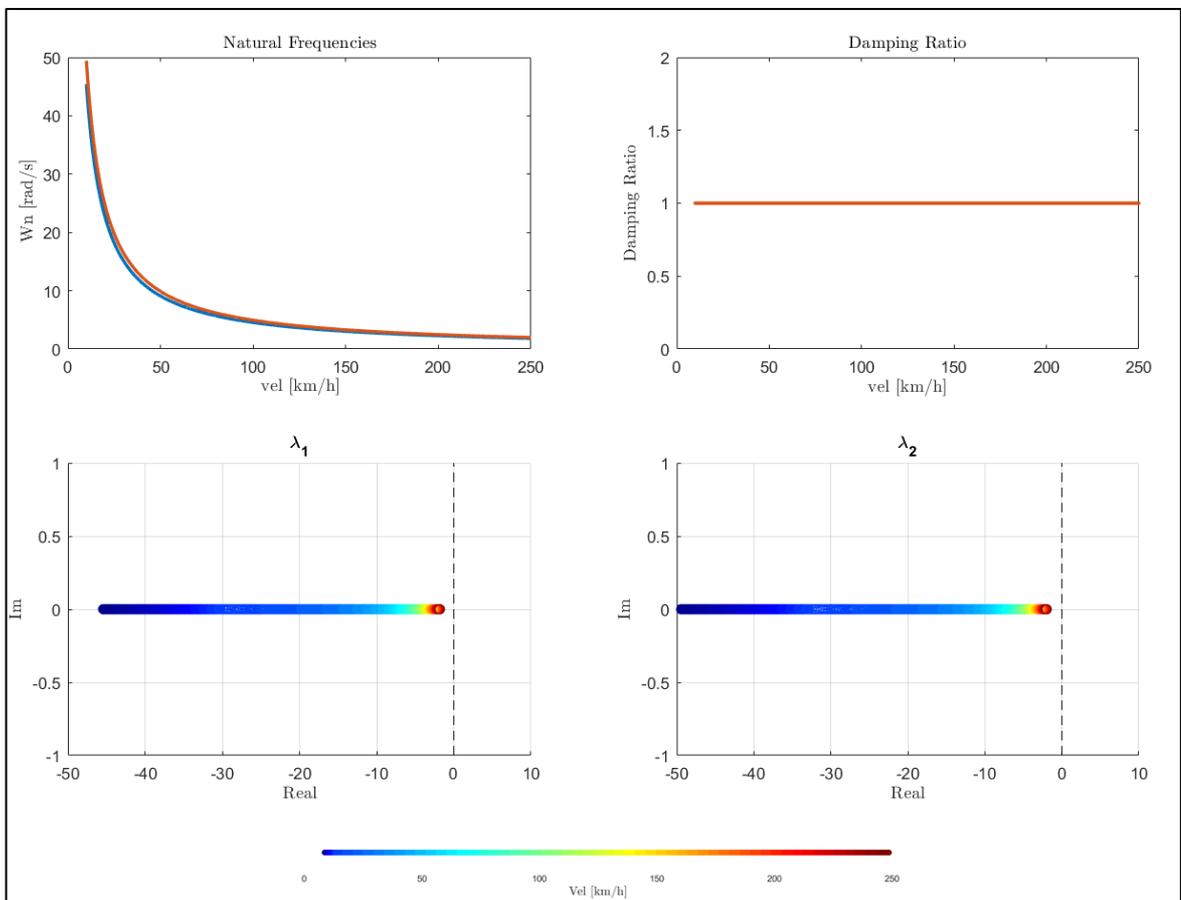


Fig. 2.8 – comportamento veicolo neutro

Come si vede il veicolo neutro risulta essere asintoticamente stabile, infatti si vede che i poli sono reali con parte reale negativa in tutto il range di velocità.

Tale comportamento bisognava aspettarselo dato che per un veicolo neutro il $\det(\mathbf{A})$ è positivo fino a velocità infinita.

Un veicolo neutro allora risponderà con legge aperiodica smorzata, e volendo fare un primo confronto di massima con un veicolo sovrasterzante presenta delle velocità di decadimento più alte. Inoltre, dall'analisi dei fattori di smorzamento avremo che un veicolo neutro risulti essere costituito da un $\xi=1$ in tutto il range di velocità permettendoci di dire che quindi la risposta del veicolo risulti essere dotata di un comportamento sovra-smorzato e quindi costituito da una risposta esponenziale decrescente nel tempo.

Interessante è la risposta di un veicolo a comportamento sottosterzante. Infatti, generalmente vetture europee sono caratterizzate da un comportamento sottosterzante con valori di gradiente di sottosterzo $K \approx 30 - 50 \frac{\circ}{g}$ al volante.

Allora, definito il veicolo sottosterzante aventi tali parametri caratteristici:

3	Veicolo Sottosterzante	
	Rigidità a deriva anteriore, Cf [N/rad]	$1.28e^5$
	Rigidità a deriva posteriore, Cr [N/rad]	$1.22e^5$
	Semipasso anteriore, a [m]	1.3
	Semipasso posteriore, b [m]	1.55

Possiamo definire i diagrammi delle frequenze proprie, fattore di smorzamento e dei poli:

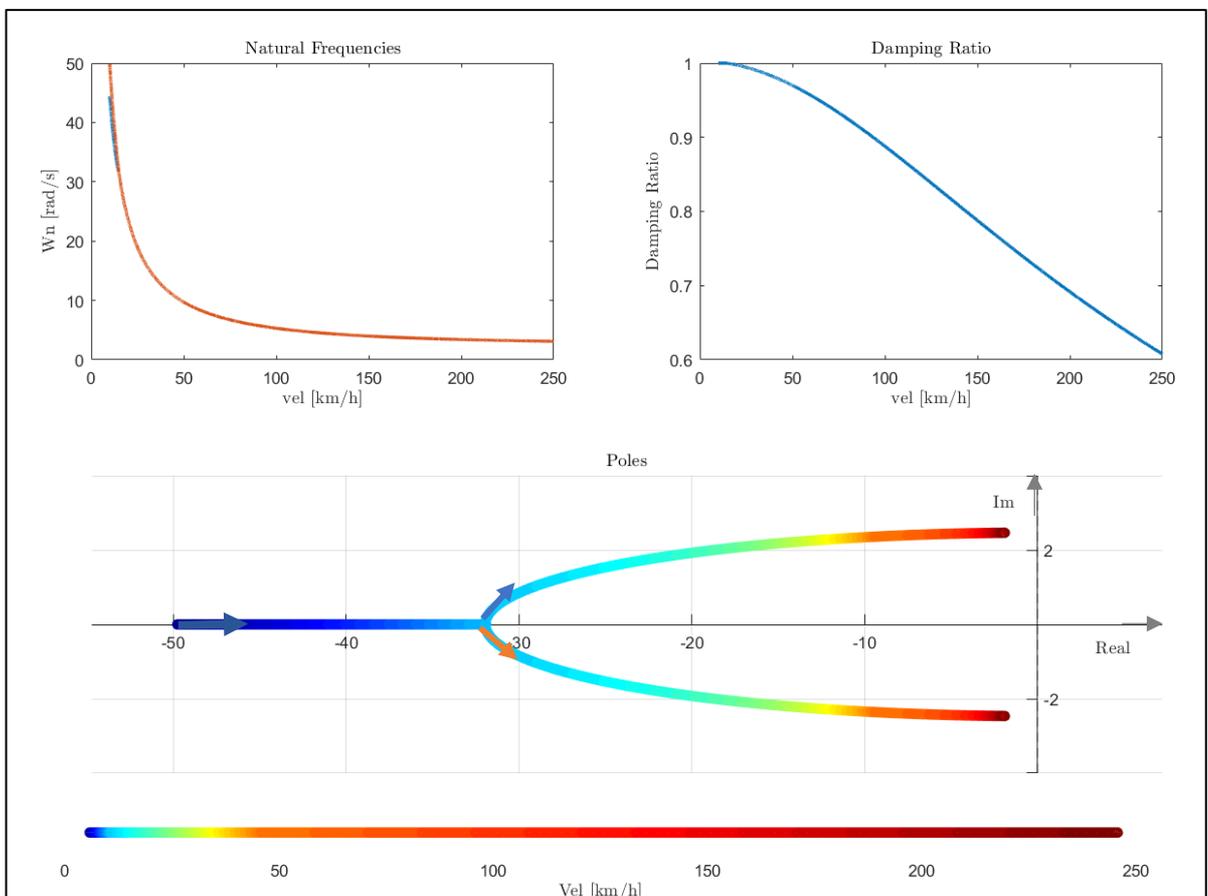


Fig. 2.9 – comportamento veicolo sottosterzante

Come per il veicolo neutro, anche il veicolo sottosterzante presenta un comportamento asintoticamente stabile.

Infatti, avremo entrambi i poli^a sempre costituiti da una parte reale negativa con fattori di smorzamento pari ad 1 fino ad una certa velocità prossima ai 15 km/h oltre il quale tende a diminuire con un andamento visibile in Fig. 2.9. Volendo analizzare la risposta del sistema dall'analisi dei poli notiamo che fino ai 15 km/h in cui $\xi=1$ essi hanno solo parte reale negativa e quindi ci aspettiamo una risposta esponenziale decrescente; successivamente i poli risultano essere complessi coniugati e quindi la risposta del sistema assumerà una forma periodica con un valore di frequenza propria ω_n e con ampiezza decrescente.

Osservazione. Si può studiare la stabilità anche senza calcolare direttamente i due poli, ma affinché entrambi i poli abbiano parte reale negativa occorre e basta che siano verificate le seguenti due condizioni

$$\text{stabilità} \Leftrightarrow \text{tr}(\mathbf{A}) < 0 \text{ e } \det(\mathbf{A}) > 0 \quad (2.70)$$

Applicando tale criterio di stabilità possiamo dare un'altra chiave di lettura legata al valore del determinante e al valore di velocità che fa sì che la condizione sopra indicata non sia più valida.

Dall'espressione del $\det(\mathbf{A})$ si evince che la presenza di una velocità critica si ha solo per un veicolo sovrasterzante, essa può essere valutata graficamente:

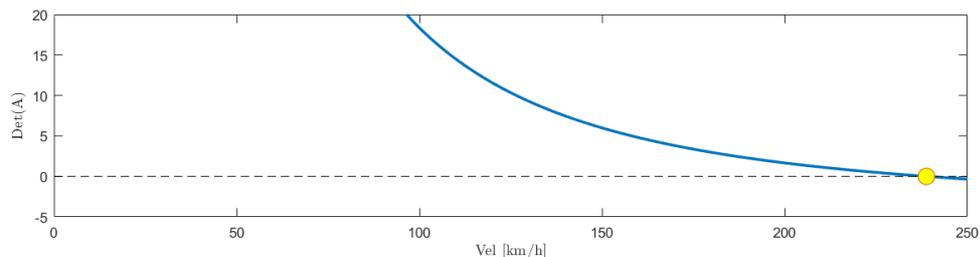


Fig. 2.10 – andamento $\det(\mathbf{A})$ al variare della velocità di marcia

Infatti, l'intersezione tra la curva in blu che definisce l'andamento del $\det(\mathbf{A})$ in funzione della velocità di marcia del veicolo e la curva tratteggiata che divide il semipiano positivo da quello negativo si ottiene il valore di velocità critica che risulta essere appunto circa $240 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

^a In Fig.17 è mostrato l'andamento dei due poli. Inizialmente essi hanno parte reale, per poi iniziare ad avere anche parte immaginari, seguendo l'evoluzione data dalla freccia blu e arancione.

A questo punto ha un certo interesse conoscere come sia l'evoluzione degli autovalori, cioè i poli del sistema, al variare della velocità del veicolo anche quando il veicolo ha un comportamento stabile. A tal proposito, è utile riportare un grafico $tr(\mathbf{A})$ e $det(\mathbf{A})$.

Dato che la $tr(\mathbf{A}) < 0$ imponendo che il termine sotto radice della (2.54) sia nullo otteniamo due autovalori reali, coincidenti e con parte reale negativa. Quindi se:

- 1- $det(\mathbf{A}) = \frac{tr(\mathbf{A})^2}{4}$ avremo che $\lambda_1 = \lambda_2 \in Re$ con $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) < 0$
- 2- $det(\mathbf{A}) > \frac{tr(\mathbf{A})^2}{4}$ avremo due autovalori complessi coniugati
- 3- $det(\mathbf{A}) < 0$ avremo due autovalori reali e di segno opposto

La curva $det(\mathbf{A}) = \frac{tr(\mathbf{A})^2}{4}$ suddivide il piano in due zone: quella inferiore che corrisponde ad autovalori reali e distinti e quella superiore che corrisponde ad autovalori complessi coniugati.

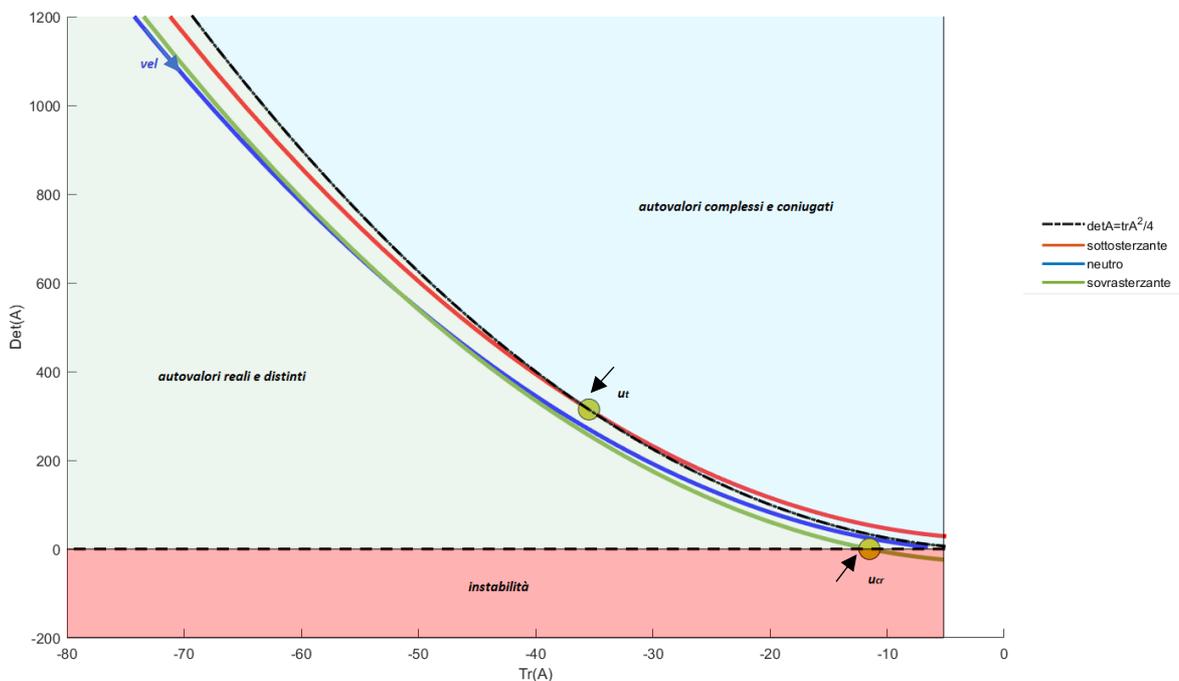


Fig. 2.11- evoluzione (tracce, det) in tutto il range di velocità

Al crescere della velocità si hanno i seguenti comportamenti:

Un veicolo *sovrasterzante* ha sempre autovalori reali e distinti. Di questi uno diventa positivo quando la parabola in figura attraversa l'asse delle ascisse ad una velocità pari a quella critica u_{cr} e corrisponde alla perdita di stabilità.

Un veicolo *neutro* generico ha sempre autovalori reali negativi ed al crescere della velocità sia la traccia che il determinante tendono a zero.

Un veicolo *sottosterzante* invece ha inizialmente autovalori reali e negativi ma oltre una certa velocità u_t si trasformano in complessi coniugati con parte reale negativa; quindi pur avendo un comportamento sempre stabile cambia il tipo di moto durante il transitorio. A basse velocità è di tipo aperiodico smorzato invece ad alte velocità è di tipo oscillatorio smorzato.

2.5. Andamento Stati del sistema a seguito di un dato input

Il modello presenta come stati del sistema l'angolo d'assetto e la velocità di imbardata. A seguito di un input dato dall'angolo di sterzo esso risponderà con particolari andamenti che verranno esplicitati in tale trattazione. Per poter definire la risposta nel tempo del modello, si è realizzato un modello in ambiente Matlab-Simulink così definito:

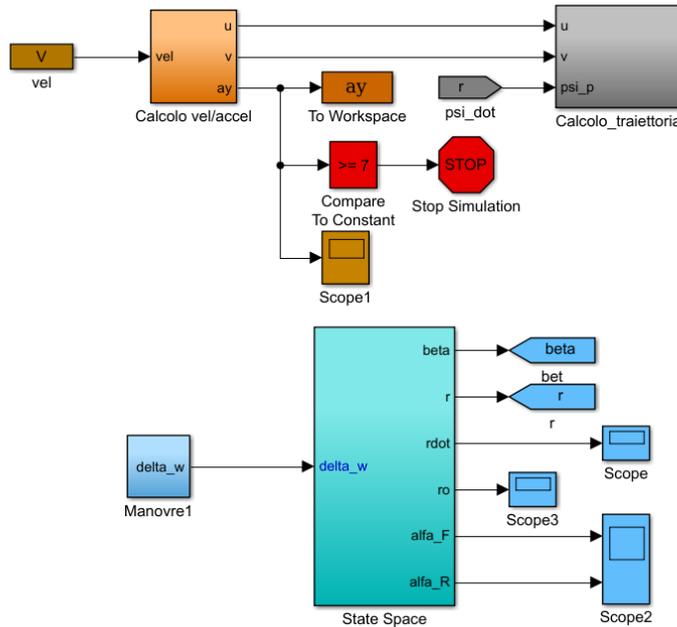


Fig. 2.12 – Modello Simulink a velocità costante

Il modello è definito da diversi sottosistemi, Fig.2.12. Innanzitutto, è necessario definire la manovra (*Manovre*); tale blocco dà in uscita l'angolo di sterzo, input dello State Space nel quale è definito il problema nello spazio degli stati descritto dalle 2.46-47 e che restituisce in uscita l'angolo di assetto, la velocità e accelerazione di imbardata, il raggio di curvatura e gli angoli di deriva anteriori e posteriori.

In alto sono presenti ulteriori due blocchi per la determinazione della velocità longitudinale, laterale (2.31-32), accelerazione laterale e per la determinazione della traiettoria effettuata.

2.5.1. Ramp Steer

La manovra di Ramp Steer è utilizzata per poter analizzare il comportamento laterale del veicolo. Si è fatta una simulazione considerando il veicolo sottosterzante ed imponendo una velocità costante del veicolo pari a $30 \frac{km}{h}$ imponendo una crescita graduale dell'angolo di sterzo con uno slope di $15^\circ/s$.

La manovra può essere schematizzata in tal modo:

- Impostare la velocità del veicolo ad un dato valore (30 km/h) e sia mantenuta costante.
- Ottenuta la velocità desiderata, si aumenta dolcemente l'angolo volante da 0 a 400 °^a con una pendenza di 15°/s

Le variabili che vengono analizzate nella manovra sono appunto gli stati dinamici del sistema quali angolo di assetto e velocità di imbardata ed inoltre verrà analizzata anche l'accelerazione laterale.

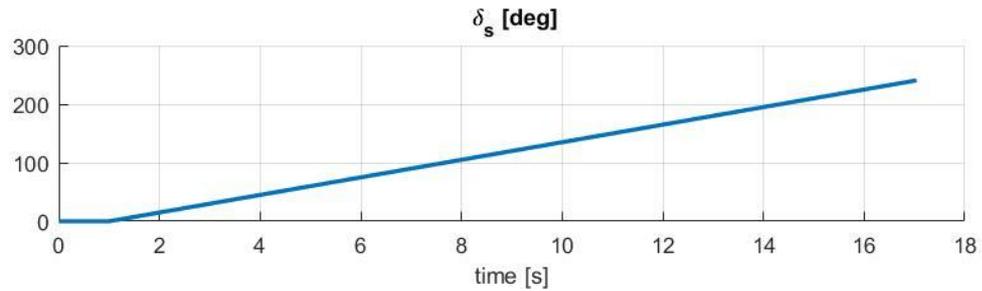


Fig. 2.13 – angolo volante

Questo test è utile per osservare il comportamento laterale quasi statico del veicolo nell'intero range di accelerazione laterale.

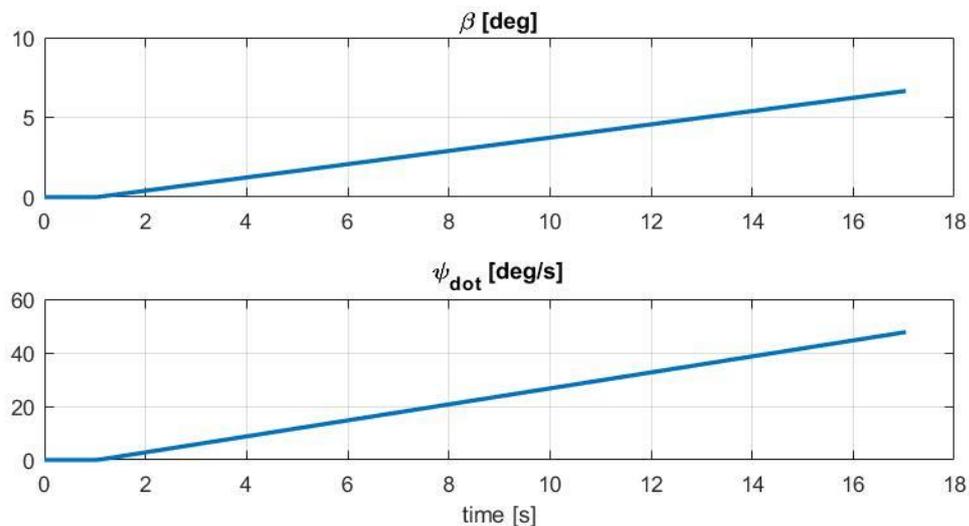


Fig. 2.14 – diagramma stati sistema

^a Inoltre, si ha un rapporto di sterzo pari a 14.6.

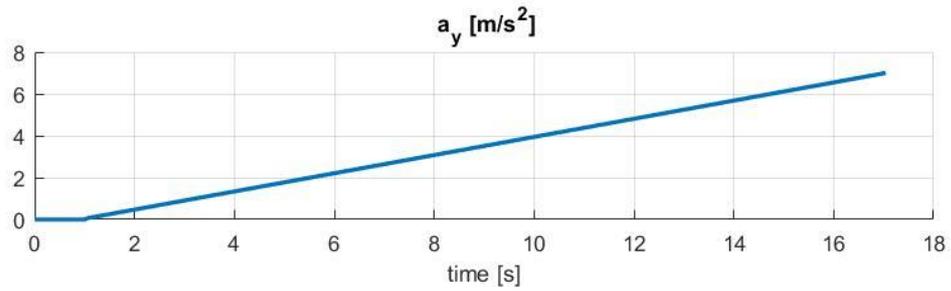


Fig. 2.15 – accelerazione laterale

Di seguito è raffigurata la traiettoria percorsa dal veicolo con una rappresentazione grafica del veicolo in cui è possibile vedere l'incremento graduale dell'angolo di assetto.

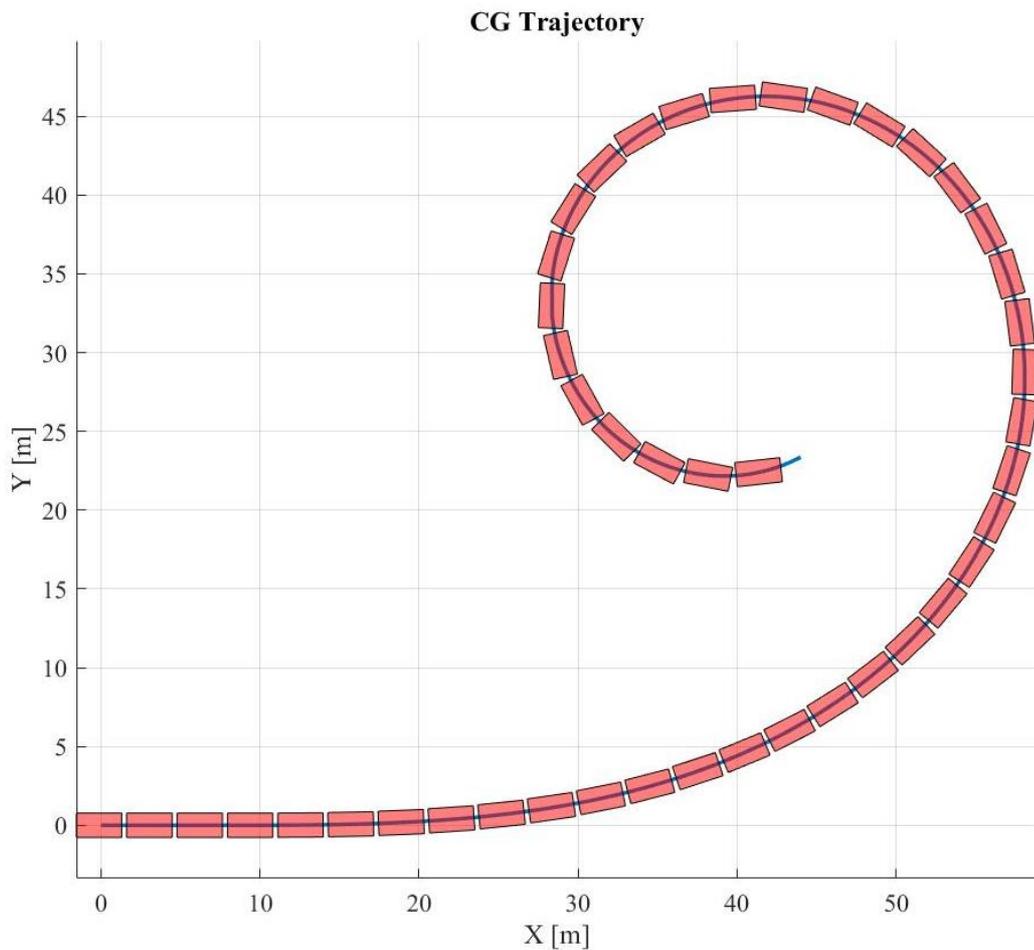


Fig. 2.16 – traiettoria con esplicitazione grafica dell'angolo di assetto

Si analizza ora un veicolo sovrasterzante definito in precedenza; verranno di seguito analizzate diverse prove a velocità differenti (30, 60, 120, 240 km/h).

Innanzitutto, analizziamo la risposta in termini degli stati del sistema (β e $\dot{\psi}$) e di accelerazione laterale. A 30 km/h si ha una crescita positiva dell'angolo d'assetto,

aumentando la velocità, già a 60 km/h, notiamo come l'angolo di assetto cambia di segno. Quindi effettivamente, come si può vedere più nel dettaglio in Fig. 2.19, il veicolo a basse velocità tenderà a eseguire una curva puntando verso l'esterno curva mentre

incrementando la velocità, dato il cambio di segno di β , la vettura punterà verso l'interno curva e con valori sempre più elevati all'aumentare della velocità.

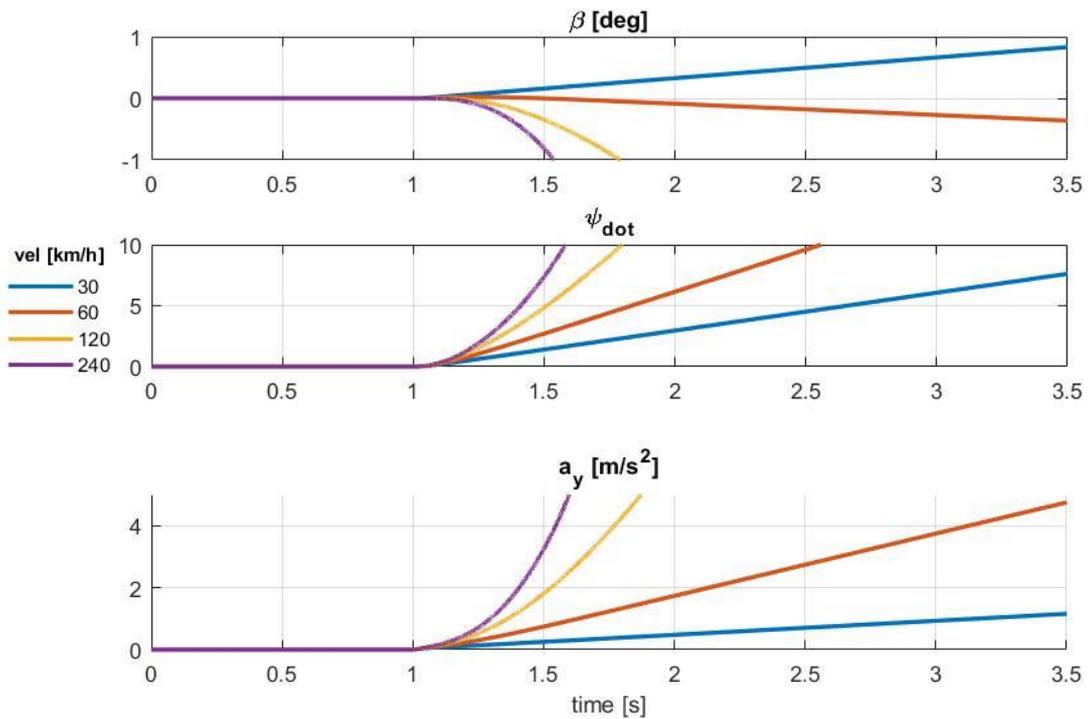


Fig.2.17 – andamento stati sistemi a diverse velocità

Di seguito è mostrato come varia l'angolo di assetto con l'accelerazione laterale del veicolo al variare della velocità di esercizio del veicolo.

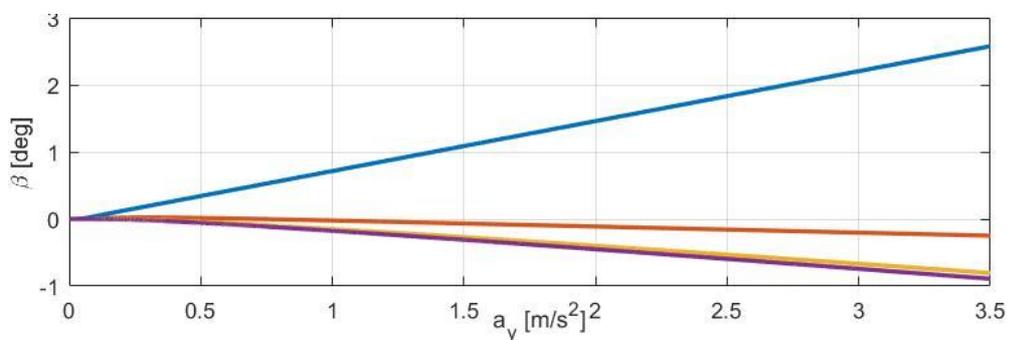


Fig. 2.18 – variazione β con a_y

Vengono di seguito raffigurato l'angolo di assetto nelle due condizioni operative differenti (60 km/h con veicolo che punta all'esterno curva e 240 km/h con veicolo che punta all'interno curva con valori di angolo di assetto maggiori)

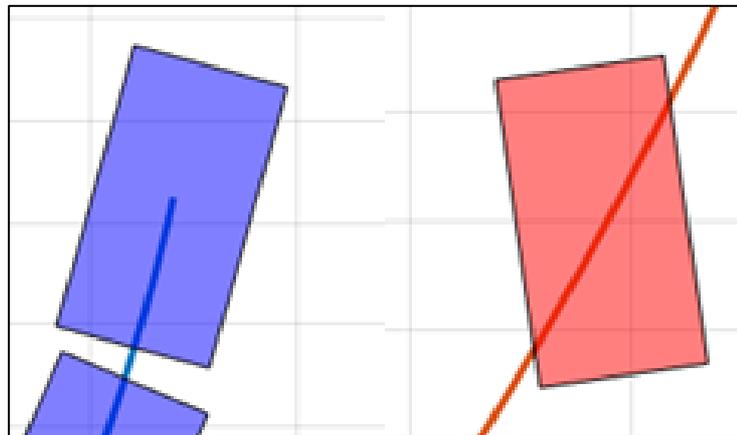


Fig. 2.19 – variazione angolo di assetto con la velocità

Si effettui ora una manovra per un veicolo sottosterzante; si analizzerà il veicolo a due diverse velocità significative per mostrare il cambio di segno dell'angolo di assetto per una velocità di 50 km/h.

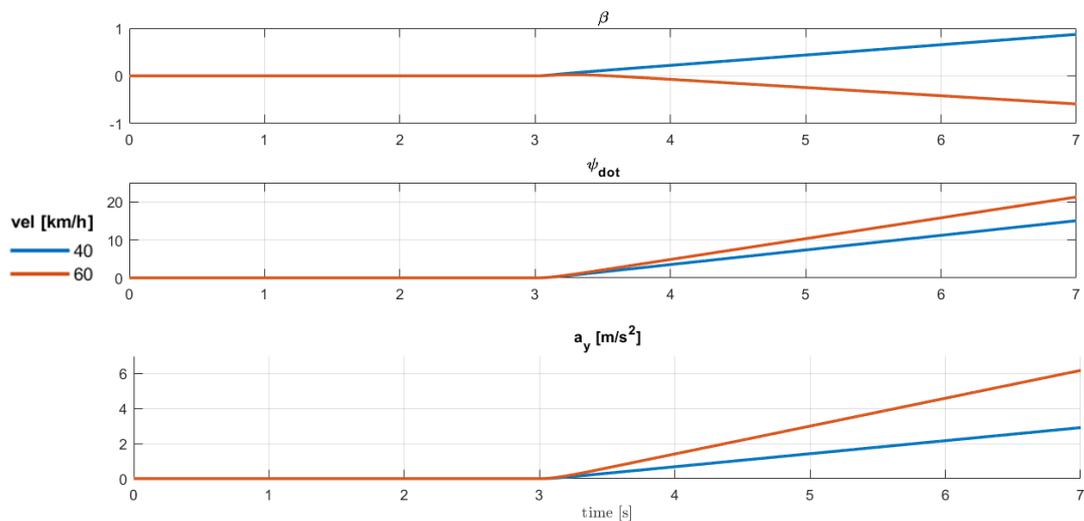


Fig. 2.20 – Andamento stati al variare della velocità

Infatti, le due simulazioni fatte a 40km/h e 60km/h mostrano il cambio di tendenza dell'angolo di assetto e quindi del comportamento del veicolo sottosterzante con la velocità.

2.5.2. Colpo di Sterzo

La prova di Colpo di sterzo è utile per poter analizzare la stabilità del sistema ad un input a gradino ed il comportamento in transitorio del veicolo. L'angolo di sterzo finale dovrebbe essere scelto in modo che, a regime, l'accelerazione laterale sia di $4 \frac{m}{s^2}$.

La manovra consiste in:

- Fissare il Cruise Control ad una data velocità.
- Raggiunto tale valore di velocità, si applica un angolo di sterzo; ciò consiste nel definire una crescita di quest'ultimo con una velocità pari a $400^\circ/s$ fino ad un valore massimo di 60° .

Verrà analizzato il veicolo sottosterzante, andando a mostrare delle prove di colpo di sterzo a velocità differenti (20, 50, 90, 130 km/h).

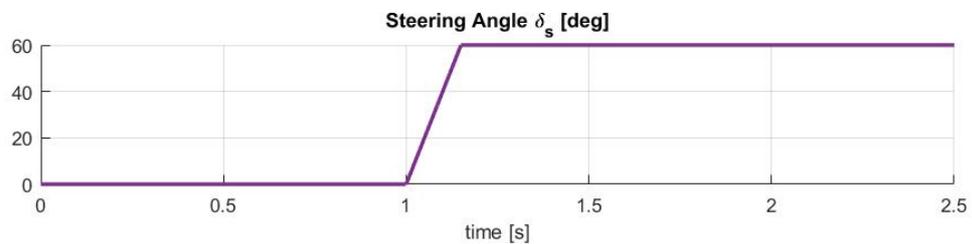


Fig. 2.21 – angolo di sterzo per le varie prove

All'aumentare della velocità si nota innanzitutto un aumento della velocità di imbardata e quindi dell'accelerazione laterale. Invece all'aumentare della velocità del veicolo l'angolo di assetto diminuisce ed il suo valore tende a stabilizzarsi sempre più lentamente riducendosi il fattore di smorzamento.

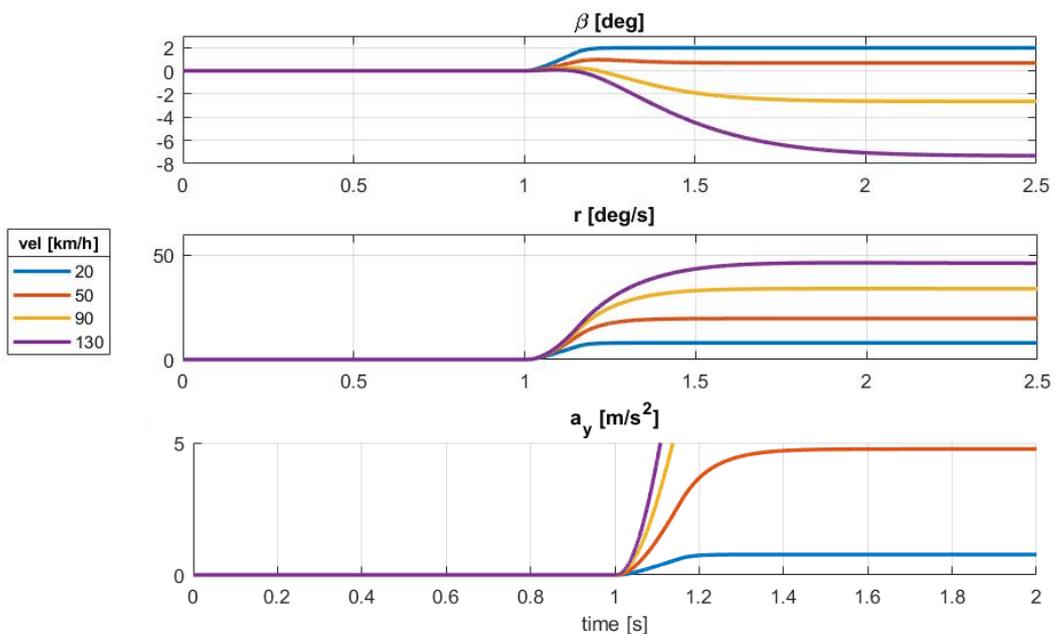


Fig. 2.22 – andamento stati sistema

La distanza R_P dell'asse del veicolo dal centro di rotazione a regime si calcola semplicemente dalla equazione (2.15) ricordando che $\dot{\nu} = 0$:

$$R_P = \frac{V}{\dot{\psi}_P}$$

Dove $\dot{\psi}_P$ è la velocità di imbardata a regime, che si può calcolare per il veicolo sottosterzante ad una velocità di 50 km/h dall'equazione

$$\dot{\psi}_P = \frac{VLC_F C_R}{C_F C_R L^2 - mV^2(C_F a - C_R b)} \delta_F = 0.34 \text{ rad/s} \quad (2.72)$$

Allora il raggio di curvatura risulterà essere di 41 m circa.

Inoltre, dal blocco "Calcolo traiettoria" è possibile definire la posizione globale del veicolo a partire dalla velocità di imbardata, l'angolo di slip e la velocità; infatti, andando ad integrare le equazioni (2.2) e la velocità di imbardata otteniamo la posizione del veicolo nel sistema di riferimento fisso:

$$\begin{cases} \psi = \int_{\psi_0}^{\psi} r dt \\ X_G = \int_{X_0}^{X_G} (V \cos \beta \cos \psi - V \sin \beta \sin \psi) dt \\ Y_G = \int_{Y_0}^{Y_G} (V \cos \beta \sin \psi + V \sin \beta \cos \psi) dt \end{cases} \quad (2.73)$$

Nel caso si volesse percorrere la stessa curva di raggio pari a 41 m ma ad una velocità superiore, occorrerebbe un angolo di sterzo maggiore, confermando il carattere sottosterzante del veicolo.

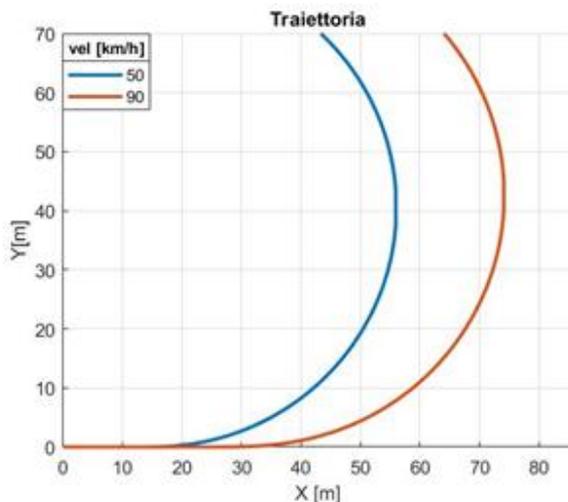


Fig. 2.23 – variazione traiettoria con la velocità

Come si vede in figura all'aumentare della velocità di percorrenza del veicolo il raggio di curvatura incrementa, quindi è necessario avere delle velocità di imbardata più elevate in modo tale da seguire la traiettoria voluta; per fare ciò analizzando l'espressione a regime della velocità di imbardata si nota che essendo il veicolo sottosterzante a parità di angolo di sterzo il numeratore della (2.72) cresce più lentamente del

denominatore quindi la velocità di imbardata tende a diminuire e allora per bilanciare il tutto è necessario un angolo volante maggiore.

Analizziamo gli angoli di deriva dei due assali:

$$\begin{cases} \alpha_F = \delta_F - \beta - \frac{a}{V}r \sim 1.578^\circ \\ \alpha_R = -\beta + \frac{b}{V}r \sim 1.0033^\circ \end{cases}$$

Entrambi sono minori di 2° e ciò convalida la scelta di un modello lineare per i pneumatici. Trattandosi di un veicolo sottosterzante si ha $\alpha_F > \alpha_R$.

2.5.3. Sine Sweep

In una manovra di sine sweep si assegna al volante un movimento alternato con frequenza lentamente crescente. È interessante osservare che in questa prova così come in quella del colpo di sterzo assume una certa rilevanza il valore del momento di inerzia.

La prova consiste quindi in:

- Assestare il veicolo^a ad una data velocità richiesta (40 km/h).
- Si fa poi variare l'angolo volante con ampiezze dell'ordine di $10\text{-}30^\circ$, con frequenza crescente da 0 a 40Hz. Le ampiezze sono abbastanza contenute in modo da far lavorare i pneumatici in campo quasi lineare. Grazie al notevole smorzamento presente nel sistema, se la frequenza viene variata lentamente si ha di fatto in ogni istante una risposta oscillatoria di regime.

Quindi la prova consiste nell'applicare un comando di sterzo sinusoidale, rappresentato in Fig. 2.23, con ampiezza costante e frequenza variabile

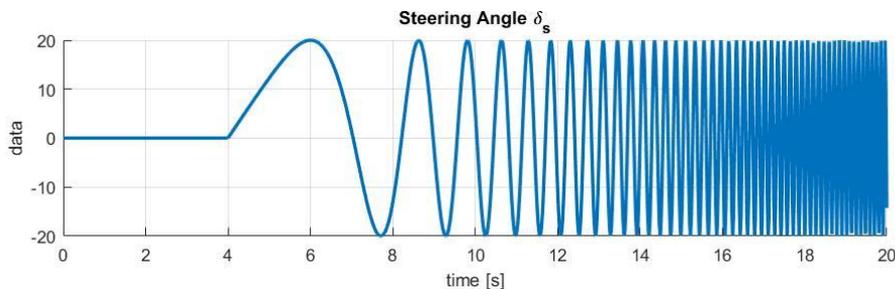


Fig. 2.23 – angolo volante in una prova sine sweep

$$\begin{cases} \delta_v = \delta_0 \sin(2\pi f(t)t) \\ f(t) = f_0 + \frac{f_T - f_0}{T} t \end{cases} \quad (1.74)$$

^a La prova verrà effettuata per un veicolo sovrasterzante.

Dove f_0 è la frequenza iniziale al tempo t_0 e f_T la frequenza al tempo T. Ottenendo i seguenti andamenti degli stati. Essendo il sistema stabile a bassa velocità notiamo come l'output prende lo stesso andamento armonico dell'angolo di sterzo senza generare però delle risposte irregolari con ampiezze che tenderebbero ad infinito.

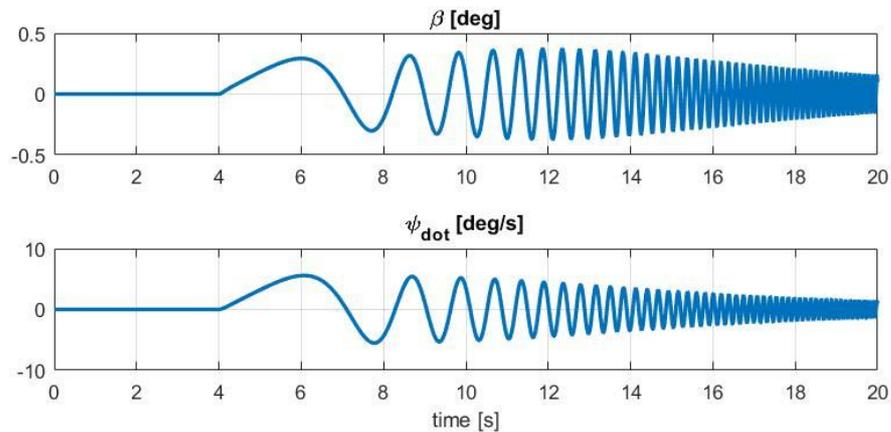


Fig. 2.24– andamento stati del sistema a 40 km/h

Al contempo si potrebbe analizzare la risposta a velocità superiori (220 km/h), ciò che ci possiamo aspettare è che essendo il veicolo instabile, a differenza del caso precedente in cui la risposta risulta essere sì sinusoidale ma stabile, la risposta avrà un andamento esponenziale provocando valori di angoli di assetto e di velocità di deriva di notevole entità.

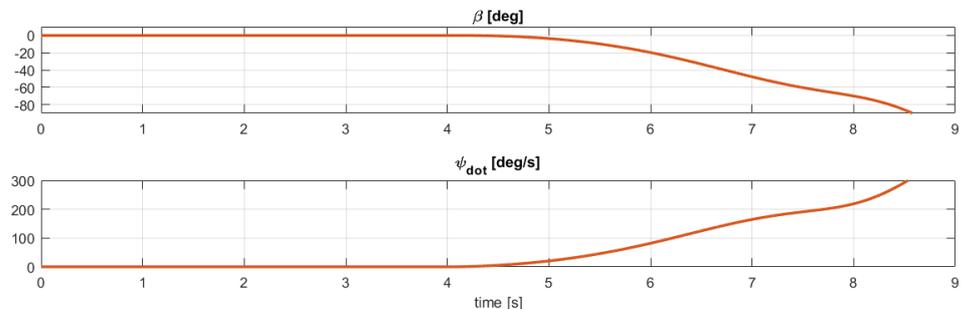


Fig. 2.25 – andamento stati a 220 km/h

2.6. Modello a bicicletta con dinamica longitudinale

Per poter introdurre anche la dinamica longitudinale, in modo tale da avere un modello in grado di gestire variazioni di velocità, è necessario tener conto anche dell'equazione di equilibrio longitudinale che abbiamo descritto nell'introduzione.

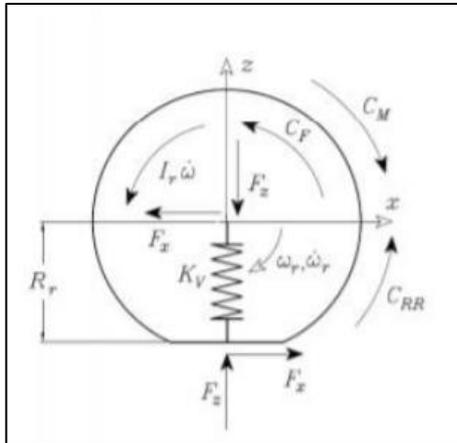
Riscriviamo, per completezza, l'equazione caratteristica che permette di analizzare il comportamento longitudinale-laterale del veicolo

$$\begin{cases} m(\dot{u} - rv) = F_{F,x} \cos(\delta_F) + F_{R,x} \cos(\delta_R) - F_{F,y} \sin(\delta_F) - F_{R,y} \sin(\delta_R) - \frac{1}{2} \rho S C_x u^2 \\ m(\dot{v} + ru) = F_{F,y} \cos(\delta_F) + F_{R,y} \cos(\delta_R) + F_{F,x} \sin(\delta_F) + F_{R,x} \sin(\delta_R) \\ J_z \ddot{\psi} = a[F_{F,y} \cos(\delta_F) + F_{F,x} \sin(\delta_F)] - b[F_{R,y} \cos(\delta_R) + F_{R,x} \sin(\delta_R)] \end{cases} \quad (2.75)$$

2.6.1. Caratteristiche dinamiche del modello – modello linearizzato

Per poter definire la prima equazione è necessario riscrivere la forza longitudinale F_x^a in funzione degli stati e degli input^b.

Per poter fare ciò, è necessario analizzare il D.C.L. della ruota anteriore.



Dall'equilibrio si ha:

$$\dot{\omega}_r = \frac{C_M - C_B - C_{rr} - F_x R_W}{J_z}$$

Dove è stata introdotta la resistenza a rotolamento C_{rr} ; una coppia resistente dovuta principalmente all'isteresi del materiale costituente lo pneumatico e definita come:

$$C_{rr} = F_{z,F} f_{R0}$$

Dall'equilibrio della ruota, tenendo presente le ipotesi di puro rotolamento tra pneumatico e terreno:

$$\frac{[C_M - C_B - 2J_W \dot{\omega}_W]}{R_W} - F_{rr} = F_{x,F} \quad (2.76)$$

^a Inoltre, viene ripetuta l'assunzione di angoli di sterzo piccoli.

^b Tale trattazione è valida per il modello lineare, nel caso non lineare le forze sono definite tramite formule di Pacejka e si introdurranno ulteriori due stati relativi alle velocità di rotazione delle ruote.

Dove:

$$F_{x,F} = F_{x,FR} + F_{x,FL}$$

Aggiungendo il parametro di attrito evolvente che simula una forza dissipativa:

$$F_{rr} = f_{R0} \frac{mgb}{L}$$

Con f_{R0} coefficiente dipendente dal manto stradale e dalla pressione di gonfiaggio.

Per poter esprimere il tutto in funzione degli stati del sistema, bisogna riformulare le espressioni di $\dot{\omega}_E$ e $\dot{\omega}_W$.

Possiamo fare l'assunzione, utilizzata solo per il modello con pneumatici lineari, di *puro rotolamento*:

$$\omega_W = \frac{|V_{FX}|}{R_W}$$

$$V_{FX} = |V_F| \cos(\alpha) \cong |V_F|$$

Dove V_{FX} è la proiezione della velocità del veicolo lungo l'asse longitudinale.

Ipotizzando per angoli piccolo che $v_F \ll u_F$; si ha che:

$$|V_F| \cong \sqrt{u_F^2} \quad \text{e quindi:}$$

$$\omega_W = \frac{|V_{FX}|}{R_W} \cong \frac{|V_F|}{R_W} \cong \frac{\sqrt{u_F^2}}{R_W} = \frac{u}{R_w}$$

Sostituendo le relazioni appena ottenute nella prima equazione d'equilibrio sulla ruota anteriore, si ha:

$$\frac{\left[C_{M,F} - C_{B,F} - \frac{2J_W \dot{u}}{R_W} \right]}{R_W} - f_{R0} \frac{mgb}{L} = F_{x,F} \quad (2.76)$$

E per la ruota posteriore:

$$\frac{\left[C_{M,R} - C_{B,R} - \frac{2J_W \dot{u}}{R_W} \right]}{R_W} - f_{R0} \frac{mga}{L} = F_{x,R} \quad (2.77)$$

Bisogna tener conto che si sta analizzando l'assale anteriore che quindi non sarà sottoposto all'intera forza peso mg , ma solo ad una quota parte pari a $\frac{mgb}{L}$ ipotizzando di trascurare i trasferimenti di carico presenti.

In effetti, si ha che il nuovo sistema dinamico terrà conto di un nuovo stato costituito dalla velocità longitudinale del veicolo e nuovi input del sistema legati alle coppie generate dall'impianto motore e frenante.

Viene di seguito analizzato il modello in questione con delle ipotesi semplificative per poterne analizzare il comportamento lineare.

Possiamo pensare, per semplificare l'analisi del modello, di linearizzare il problema e quindi ritornare ad un problema definito nello State-Space così come si è operato nel caso precedente di analisi a velocità costante.

Bisogna, quindi, introdurre delle ipotesi semplificative:

- Si assumono angoli di sterzo, d'assetto e di deriva piccoli; quindi possiamo approssimare $\sin \delta = \delta$ e $\cos \delta = 1$.
- Analizziamo un veicolo a trazione posteriore, con sterzata solo all'anteriore ($\delta_R = 0$), e si pone $F_{F,x} = 0$.

Sulla base di queste ipotesi abbiamo che la (2.76) si riscrive come:

$$\begin{cases} m(\dot{u} - rv) = F_{R,x} - F_{F,y} \delta_F - \frac{1}{2} \rho S C_x u^2 \\ m(\dot{v} + ru) = F_{F,y} + F_{R,y} \\ J_z \ddot{\psi} = a F_{F,y} - b F_{R,y} \end{cases} \quad (2.78)$$

E sostituendo le espressioni (2.75-76) e nelle ipotesi di linearità degli pneumatici avremo:

$$\begin{cases} m(\dot{u} - rv) = \left\{ \frac{[C_M - C_B - 2J_W \frac{\dot{u}}{R_W}] - f_{R0} mg}{R_W} \right\} - \frac{C_F \alpha_F \delta_F}{m} - \left(\frac{1}{2} \rho S C_x u^2 \right) \\ m(\dot{v} + ru) = C_F \alpha_F + C_R \alpha_R \\ J_z \ddot{\psi} = a C_F \alpha_F - b C_R \alpha_R \end{cases}$$

Ricordando l'equazione di congruenza per l'angolo di deriva

$$\alpha_F = \delta_F - \frac{v + ar}{u}$$

$$\alpha_R = -\frac{v - br}{u}$$

il problema si riscrive come segue:

$$\begin{cases} m(\dot{u} - rv) = \left\{ \frac{[C_M - C_B - 2J_W \frac{\dot{u}}{R_W}] - f_{R0} mg}{R_W} \right\} - \frac{C_F \cancel{\delta_F}^2}{m}{}^a + \frac{C_F \cancel{\delta_F}}{m u} \delta_F{}^b + \frac{C_F a}{m u} \dot{\psi} \delta_F - \left(\frac{1}{2} \rho S C_x u^2 \right) \\ m(\dot{v} + ru) = C_F \left(\delta_F - \frac{v + \dot{\psi} a}{u} \right) - C_R \left(\frac{v - \dot{\psi} b}{u} \right) \\ J_z \dot{r} = a C_F \left(\delta_F - \frac{v + \dot{\psi} a}{u} \right) + b C_R \left(\frac{v - \dot{\psi} b}{u} \right) \end{cases}$$

^a Possiamo trascurarlo poiché è del secondo ordine e risulta molto piccolo

^b Trascurabile essendo per le ipotesi fatte $v \ll u$

Analizziamo la prima equazione, esplicitandola in funzione di \dot{u} avremo:

$$K\dot{u} = v\dot{\psi} + \frac{C_F a}{m} \frac{\dot{\psi}}{u} \delta_F + \frac{C_F v}{m} \frac{\dot{\psi}}{u} \delta_F - \frac{1}{2} \frac{\rho S C_x u^2}{m} + \frac{C_M - C_B}{m R_W} - f_{r0} g$$

$$\text{con } K = \frac{m R_W^2 + 2 J_W}{m R_W^2}$$

Notiamo la presenza di diversi termini composti da più stati e/o ingressi che si moltiplicano fra di loro e per cui occorre linearizzarli.

Sia definita una funzione $f(x)$, essa è linearizzata adottando l'espansione in serie di Taylor troncata al primo ordine:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{df}{dx}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{df}{dy}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Ottenendo la seguente forma linearizzata:

$$\begin{aligned} \dot{u} = & \frac{-\rho S C_x u_0}{mK} u + \left(\frac{\dot{\psi}_0}{K} + \frac{C_F \delta_{F0}}{mK u_0} \right) v + \left(\frac{v_0}{K} + \frac{a C_F \delta_{F0}}{mK u_0} \right) \dot{\psi} + \frac{C_M}{mK R_W} - \frac{C_B}{mK R_W} + \left(\frac{a C_F \dot{\psi}_0 + C_F v_0}{mK u_0} \right) \delta_F \\ & + \frac{\rho S C_x u_0^2}{mK} - \frac{v_0 \dot{\psi}_0}{K} - \frac{f_{r0} g}{K} - \frac{\rho S C_x u_0}{2mK} \end{aligned}$$

E linearizzando anche le altre due equazioni di equilibrio otteniamo il nuovo *sistema dinamico linearizzato*:

$$\begin{cases} \dot{u} = \left(\frac{-\rho S C_x u_0}{mK} \right) u + \left(\frac{\dot{\psi}_0}{K} + \frac{C_F \delta_{F0}}{mK u_0} \right) v + \left(\frac{v_0}{K} + \frac{a C_F \delta_{F0}}{mK u_0} \right) \dot{\psi} + \frac{C_M}{mK R_W} - \frac{C_B}{mK R_W} + \left(\frac{a C_F \dot{\psi}_0 + C_F v_0}{mK u_0} \right) \delta_F + \left(\frac{\rho S C_x u_0^2}{mK} - \frac{\rho S C_x u_0}{2mK} - \frac{v_0 \dot{\psi}_0}{K} - \frac{f_{r0} g}{K} \right) \\ \dot{v} = \left(\frac{C_F v_0 + a C_F \dot{\psi}_0 + C_R v_0 - b C_R \dot{\psi}_0 - \dot{\psi}_0}{m u_0^2} \right) u + \left(\frac{-C_F - C_R}{m u_0} \right) v + \left(\frac{-a C_F + b C_R}{m u_0} - u_0 \right) \dot{\psi} + \frac{C_F}{m} \delta_F + \left(\frac{b \dot{\psi}_0 C_R - C_F v_0 - C_R v_0 - a \dot{\psi}_0 C_F + \dot{\psi}_0 u_0}{m u_0} \right) \\ \dot{\psi} = \left(\frac{a v_0 C_F + C_F \dot{\psi}_0 a^2 - b v_0 C_R + C_R \dot{\psi}_0 b^2}{J_Z u_0^2} \right) u + \left(\frac{C_R b - C_F a}{J_Z u_0} \right) v + \left(\frac{-C_F a^2 - C_R b^2}{J_Z u_0} \right) \dot{\psi} + \frac{a C_F}{J_Z} \delta_F + \left(\frac{b v_0 C_R - a v_0 C_F - C_F \dot{\psi}_0 a^2 - C_R \dot{\psi}_0 b^2}{J_Z u_0} \right) \end{cases}$$

E cioè, riscrivendo in forma matriciale ricordando che gli stati del sistema sono u , v e $\dot{\psi}$:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\rho S C_x u_0}{mK} & \frac{r_0}{K} + \frac{C_F \delta_{F0}}{mK u_0} & \frac{v_0}{K} + \frac{a C_F \delta_{F0}}{mK u_0} \\ \frac{C_F v_0 + a C_F \dot{\psi}_0 + C_R v_0 - b C_R \dot{\psi}_0 - \dot{\psi}_0}{m u_0^2} & \frac{-C_F - C_R}{m u_0} & \frac{-a C_F + b C_R}{m u_0} - u_0 \\ \frac{a v_0 C_F + C_F \dot{\psi}_0 a^2 - b v_0 C_R + C_R \dot{\psi}_0 b^2}{J_Z u_0^2} & \frac{C_R b - C_F a}{J_Z u_0} & \frac{-C_F a^2 - C_R b^2}{J_Z u_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \quad (2.79)$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{1}{mK R_W} & -\frac{1}{mK R_W} & \frac{a C_F \dot{\psi}_0 + C_F v_0}{mK u_0} \\ 0 & 0 & \frac{C_F}{m} \\ 0 & 0 & \frac{a C_F}{J_Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_M \\ C_B \\ \delta_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\rho S C_x u_0^2}{mK} - \frac{\rho S C_x u_0}{2mK} - \frac{v_0 \dot{\psi}_0}{K} - \frac{f_{r0} g}{K} \\ \frac{b r_0 C_R - C_F v_0 - C_R v_0 - a r_0 C_F}{m u_0} + \dot{\psi}_0 u_0 \\ \frac{b v_0 C_R - a v_0 C_F - C_F r_0 a^2 - C_R r_0 b^2}{J_Z u_0} \end{bmatrix}$$

Che sintetizzando assume la forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu + l$$

Dalla quale tramite un semplice Script in Matlab è possibile ottenere i valori dei poli, frequenze proprie e fattori di smorzamento di tale sistema del terzo ordine.

Si analizzi il veicolo sovrasterzante definito in precedenza e si diano i seguenti valori iniziali:

Valori Iniziali	
v_0 [m/s]	0
$\dot{\psi}_0$ [deg/s]	0
δ_{F0} [deg]	0

Parametri veicolo	
m [kg]	1996.8
a [m]	1.5
b [m]	1.35
C_F [N/rad]	$1.24e^5$
C_R [N/rad]	$1.27e^5$
J_z [kg m ²]	3728

di seguito è mostrata l'analisi di stabilità al variare delle condizioni iniziali di velocità longitudinale del veicolo u_0 :

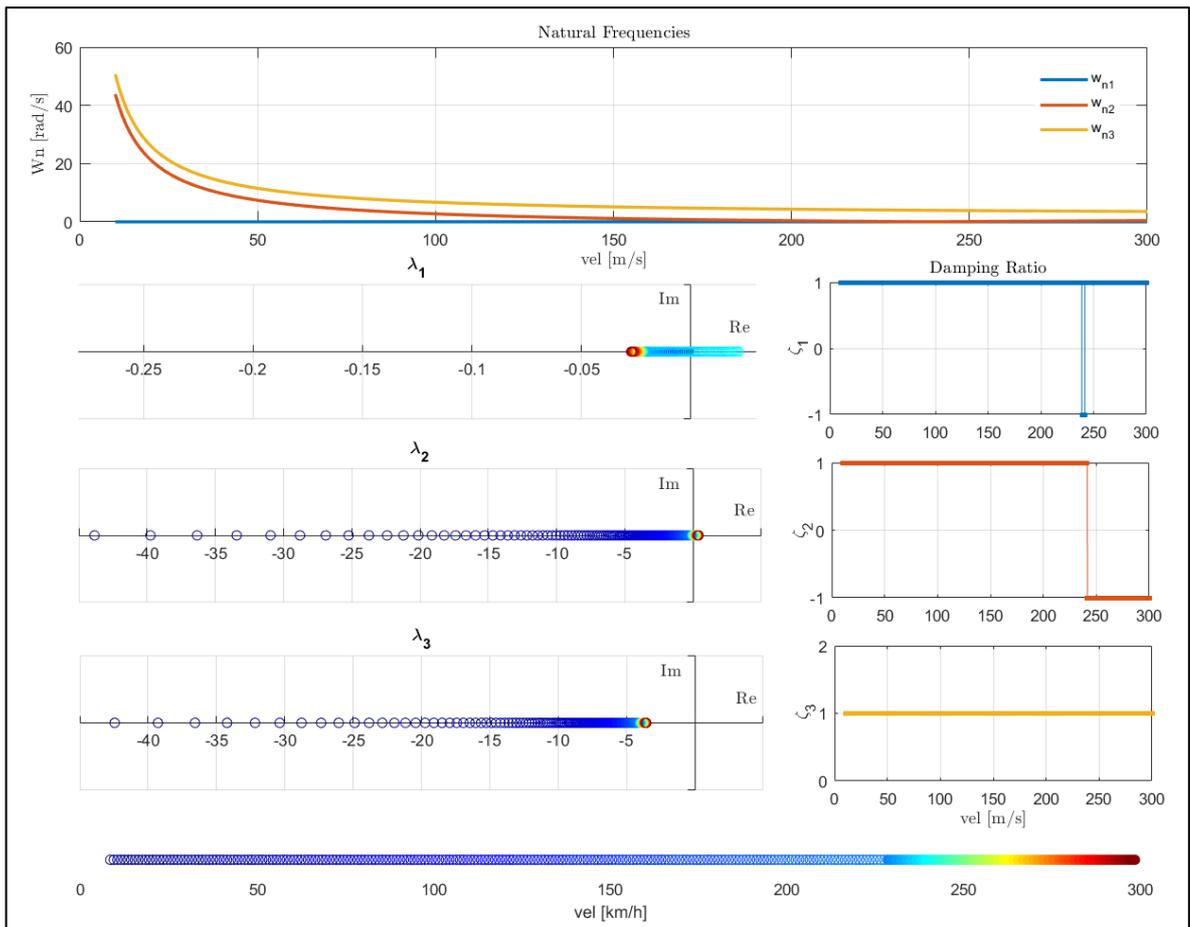


Fig. 2.26 – caratteristiche modello linearizzato, veicolo sovrasterzante

Notiamo dall'immagine sovrastante che il sistema essendo a tre gradi di libertà sarà caratterizzato dall'aver tre poli, a fissata velocità iniziale, caratterizzati dall'aver ognuno una data frequenza naturale e fattore di smorzamento. Nell'ipotesi di far variare la velocità longitudinale iniziale da 10 a 300 km/h si hanno tali andamenti; In Fig. 2.26 si sottolinea il fatto che i primi due poli risultano essere caratterizzati da criticità, mentre il terzo risulta essere nell' LHP per tutto il range di velocità. Mentre il secondo polo è caratterizzato da una velocità critica prossima ai 240 km/h oltre la quale risulta essere sempre instabile, il primo polo presenta solo un piccolo range di velocità in cui diventa critico per poi ritornare nel LHP e quindi in condizioni safe.

Nelle condizioni iniziali prima definite, imponendo un controllo sulla velocità longitudinale del veicolo, si è effettuata una manovra di Ramp Steer nelle condizioni operative definite in precedenza^a per un veicolo sottosterzante.

Per poter confrontare tale modello con il modello lineare senza dinamica longitudinale descritto in precedenza, è necessario effettuare una manovra a velocità costante; per fare ciò è necessario agire sul pedale dell'acceleratore.

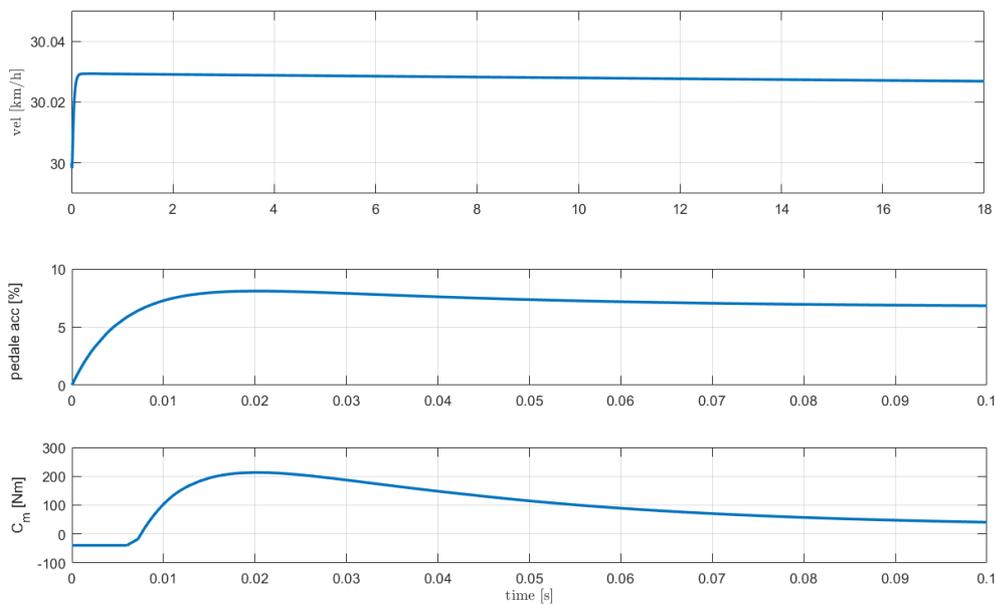


Fig. 2.27 – andamento pedale acceleratore e coppia motrice

Successivamente, si entra in curva con angoli di sterzo crescenti con velocità di $15^\circ/\text{s}$

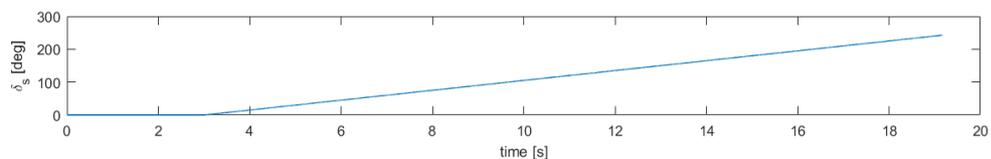


Fig. 2.28 – variazione angolo di sterzo

E quindi avremo così un incremento di angolo di assetto, velocità di imbardata e accelerazione, con andamenti del tutto speculari al modello trattato inizialmente.

^a Per la manovra Ramp-Steer del modello linearizzato senza dinamica longitudinale

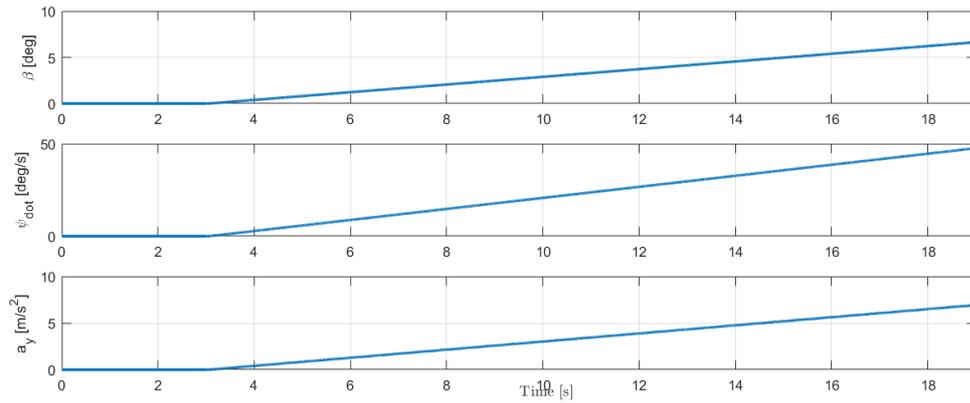


Fig. 2.29 – andamento stati sistema e accelerazione laterale

Interessante è anche l'analisi della matrice A dei due modelli con e senza dinamica longitudinale. Come abbiamo visto dall'evoluzione delle frequenze proprie, fattori di smorzamento e poli gli andamenti sono molto simili.

Infatti, analizziamo l'andamento degli autovalori al variare della velocità iniziale u_0

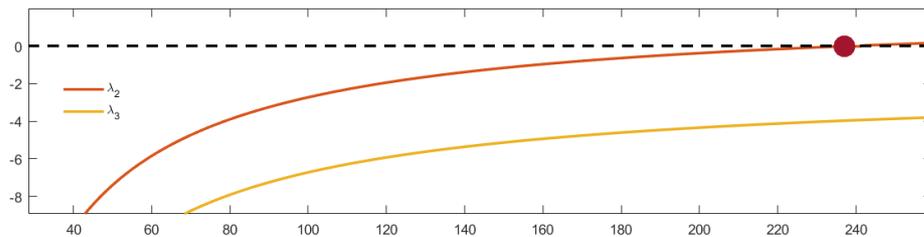


Fig. 2.30 – andamento autovalori con la velocità

In Fig. 2.30 si nota appunto che la risposta in termini di λ_3 è sempre stabile con un andamento aperiodico. Invece, per quanto riguarda la risposta in termini di λ_2 essa è stabile fino ad una velocità prossima ai 240 km/h per poi avere un andamento esponenziale crescente, velocità critica anche del modello lineare semplificato analizzato all'inizio della trattazione.

Modello con dinamica longitudinale			
Autovalori	Autovettori		
	u	v	$\dot{\psi}$
-0.0027	1	0	0
-13.5706	0	1	0.9869
-17.9386	0	1	-1.836
Modello senza dinamica longitudinale			
Autovalori	Autovettori		
	u	v	$\dot{\psi}$
-13.5706	/	1	0.9677
-17.9386	/	1	-1.836

Tab I – $u_0 = 30$ km/h

Modello con dinamica longitudinale			
Autovalori	Autovettori		
	u	v	$\dot{\psi}$
-0.00236	1	0	0
0.1607	0	1	-0.026
-3.7963	0	1	0.028
Modello senza dinamica longitudinale			
Autovalori	Autovettori		
	u	v	$\dot{\psi}$
0.1607	/	1	-0.026
-3.7963	/	1	0.028

Tab II - $u_0 = 260$ km/h

Ricordando che gli autovettori sono definiti a meno di una costante moltiplicativa

$$C_i \begin{Bmatrix} \phi_{i1} \\ \phi_{i2} \end{Bmatrix} = \phi_i$$

Per capire quali stati del sistema partecipano ad una data forma modale, si può procedere andando a definire quel valore C_i che restituisce un valore tipico di quel grado di libertà; poi andando a sostituire il valore ottenuto per definire il valore dell'altro grado di libertà e confrontando con i valori tipici possiamo effettivamente capire se esso influenza o meno quel modo.

Cioè nel nostro caso notiamo che nel sistema a 3 gdl il modo a più bassa frequenza propria è governato unicamente dalla velocità longitudinale, il secondo è definito come segue:

$$C_2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.9869 \end{Bmatrix} = \phi_2$$

Sapendo che valori tipici della velocità di imbardata sono 20-30 °/s (e quindi 0.35-0.5 rad/s) allora

$$C_2 | C_2 \cdot 0.9869 = 0.35 \rightarrow C_2 = 0.3546$$

E quindi la velocità laterale avrà valore $v = 0.3546 \frac{m}{s}$ e quindi non è un valore piccolo^a. Dal terzo modo notiamo che la risposta in termini di velocità laterale e velocità di imbardata ha segni opposti e tendenzialmente non trascurabili.

Inoltre, analizzando la traccia avremo anche in tal caso dei valori di $\text{Tr}(\mathbf{A})$ sempre negativi e coincidenti al modello lineare iniziale:

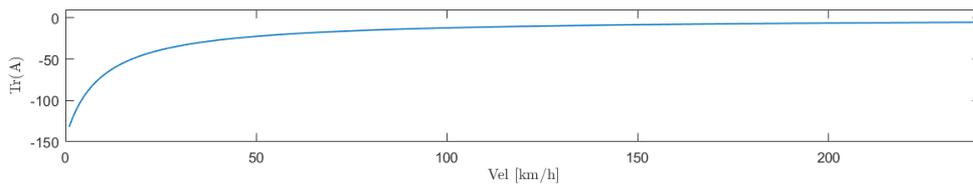


Fig. 2.31 – andamento traccia con la velocità

^a Infatti, calcolando l'angolo di assetto $\beta = \frac{v}{u} = \frac{0.3546}{8.33} \cdot \frac{180}{\pi} = 2.44^\circ$ e quindi non trascurabile.

2.6.2. Modello non lineare

Linearizzare i modelli è una pratica utile per poter definire il comportamento del veicolo, le sue risposte ma ovviamente non dà risultati ottimali in tutto il range di applicazione. È interessante complicare il modello Single-Track; infatti se si vogliono studiare situazioni in cui gli angoli di deriva possono raggiungere valori elevati non è più possibile ipotizzare un legame lineare come in (2.30).

Elimineremo quindi le ipotesi di angoli di deriva, d'assetto piccoli in modo tale da poter analizzare il comportamento del veicolo nella sua complessità.

Pertanto, occorre introdurre l'effettiva risposta non lineare dello pneumatico all'angolo di deriva, se si vogliono esaminare condizioni di funzionamento in cui i pneumatici possano essere impegnati fino al limite di aderenza, utilizzando una formula empirica tipo la Magic Formula di Pacejka.

A tal senso si è eliminata l'ipotesi di puro rotolamento^a. Per misurare di quanto la cinematica di una ruota con pneumatico si discosti da quella di puro rotolamento si usa abitualmente tale scorrimento longitudinale; a dir la verità è mostrato [4] che, se opportunamente definiti, gli scorrimenti si annullano se la ruota soddisfa le condizioni di puro rotolamento.

Per poter utilizzare il modello di Pneumatico non lineare descritto dalle formule di Pacejka bisogna introdurre ulteriori due stati, uno per ogni assale, corrispondenti alla velocità di rotazione.

$$\omega_F = \int \frac{C_{M,F} - C_{B,F} - F_{x,F}R_r - f_0F_{z,F}}{J_r}$$

$$\omega_R = \int \frac{C_{M,R} - C_{B,R} - F_{x,R}R_r - f_0F_{z,R}}{J_r}$$

Dalle quali sarà possibile definire gli scorrimenti delle due ruote e quindi le forze longitudinali relative.

Per poter tener conto delle variazioni di forze longitudinali a causa dello scorrimento dello pneumatico s

$$s = \begin{cases} 1 - \frac{u}{\omega R} & \text{trazione} \\ \frac{\omega R}{u} - 1 & \text{compressione} \end{cases}$$

Continuano a valere le due equazioni di equilibrio (2.75) e le due equazioni di congruenza (2.24); mentre per i pneumatici, o meglio, per la caratteristica dell'assale, si fa uso del legame costitutivo non lineare, qui riscritto con notazione diversa

^a Ipotesi mantenuta nel caso lineare, per semplicità, ma bisogna sapere che così facendo dando coppia motrice la ruota non sentirà alcuno scorrimento e di conseguenza non avremo variazioni di forze longitudinali.

$$F_{y,F} = F_{y,F}(\alpha_F, S_F)$$

$$F_{y,R} = F_{y,R}(\alpha_R, S_R)$$

È importante osservare che queste due funzioni che descrivono il comportamento degli pneumatici vengono ora a dipendere anche dal coefficiente di aderenza μ fra ruota e strada. Cosa che prima non accadeva nei modelli lineari perché, come noto, la rigidità di deriva non dipende da μ . A differenza dei modelli precedentemente trattati, le equazioni del sistema dinamico sono non lineari e quindi non è più possibile ottenere analiticamente la soluzione.

Quindi, una volta definito il tipo di fondo stradale ($\mu = \text{cost.}$) si suppone di conoscere per ciascun pneumatico una funzione del tipo

$$F_y = f(\alpha, F_z)^a$$

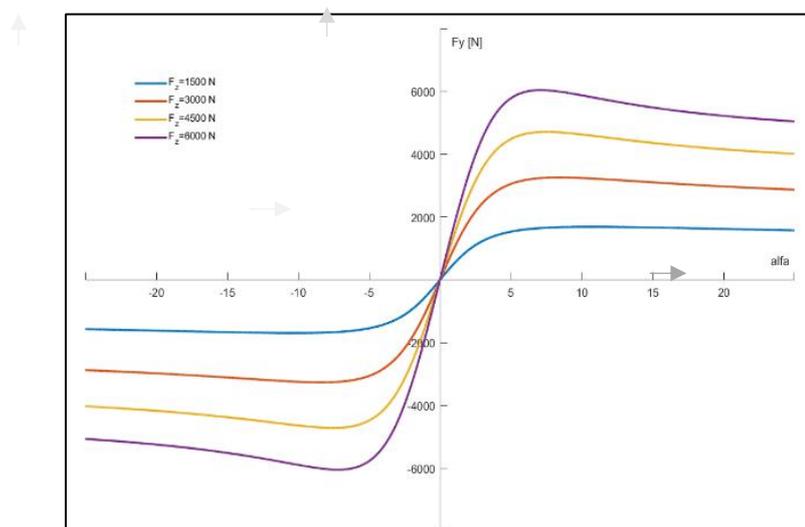


Fig. 2.32 – andamento forze laterali e longitudinali al variare del carico normale applicato

Il modello di pneumatico utilizzato inoltre prevede il comportamento in transitorio che segue il concetto delle lunghezze di rilassamento [4]; inoltre, si verifica sperimentalmente un effetto di interazione reciproca tra forza longitudinale e laterale sviluppabili contemporaneamente da uno pneumatico. È possibile considerare l'interazione attraverso un'approssimazione ellittica della curva che descrive F_y in funzione di F_x oppure altra possibilità è quella di considerare l'interazione introducendo a valle del modello di Pacejka delle tabelle [5].

^a È importante osservare che questa funzione che descrive il comportamento degli pneumatici vengono ora a dipendere anche dal coefficiente di aderenza μ fra ruota e strada. Ciò non accadeva nei modelli lineari perché la rigidità di deriva è indipendente da μ . Inoltre, in tale trattazione si ipotizza una sola ripartizione statica dei pesi sulle due ruote.

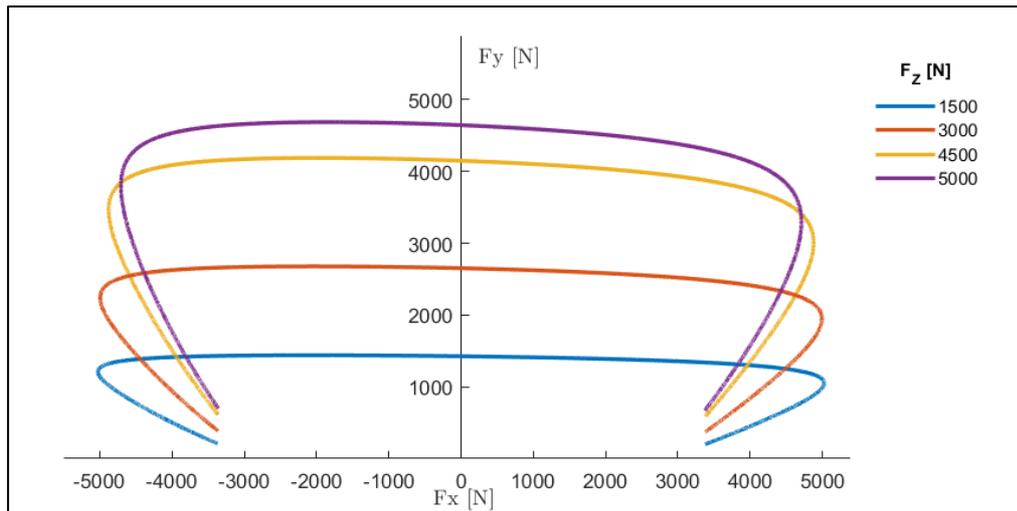


Fig. 2.33 – elisse di aderenza

Si è introdotto un blocco Simulink nel modello, “*calcolo Forza laterale & longitudinale*”, in cui sono definite le formule semi-empiriche di Pacejka e le correzioni dovute all’interazione delle forze. Tale Subsystem richiede in ingresso il coefficiente di attrito e il carico normale applicato e i parametri, influenzati direttamente dai stati del sistema, quali lo scorrimento e l’angolo di deriva (2.23).

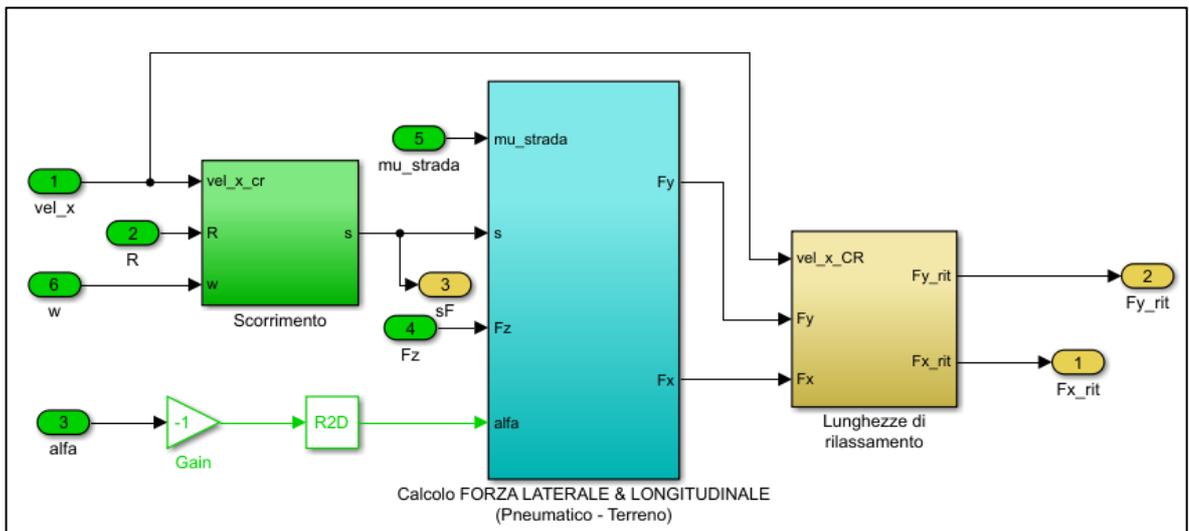
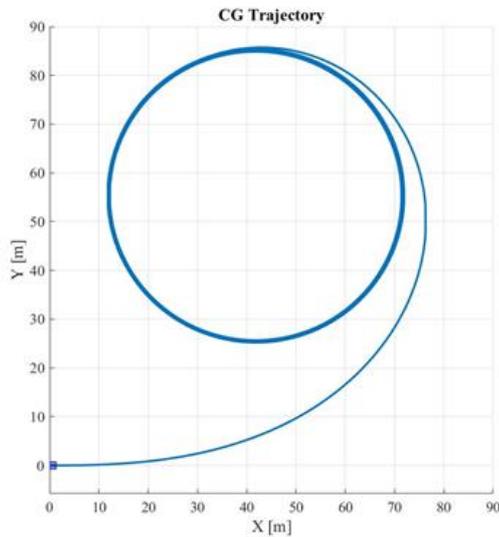


Fig. 2.34 – Implementazione in Simulink

2.6.2.1. Steering Pad

Tale manovra consiste nel seguire una traiettoria di riferimento a raggio costante mentre



Il pedale dell'acceleratore è lentamente incrementato fino al valore massimo possibile; infatti aumentando la velocità del veicolo e quindi l'accelerazione laterale il guidatore deve aggiustare l'angolo di sterzo per aumentare le forze laterali necessarie per seguire la traiettoria desiderata.

Fig. 2.35 – traiettoria manovra a raggio $R=30$ m

Il percorso di riferimento utilizzato ha un raggio costante di 30 m e di seguito verranno plottati le variabili di maggiore interesse.

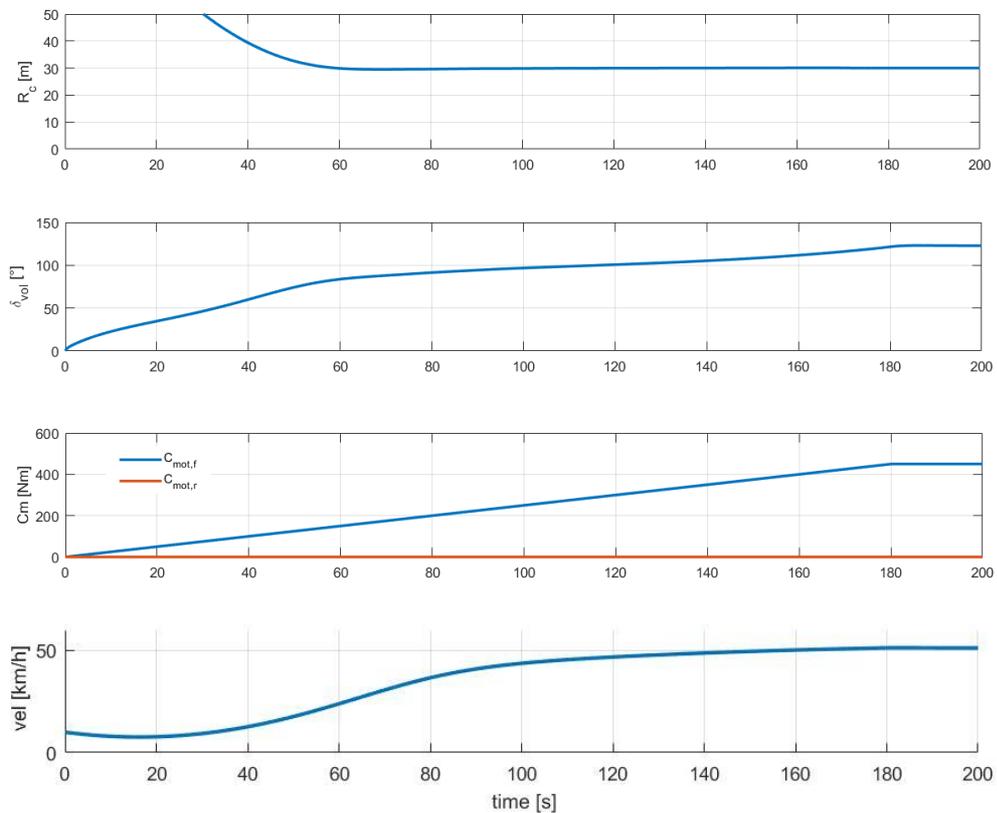


Fig. 2.36 – raggio di curvatura, angolo di sterzo veicolo, coppia motrice alle ruote e velocità assoluta

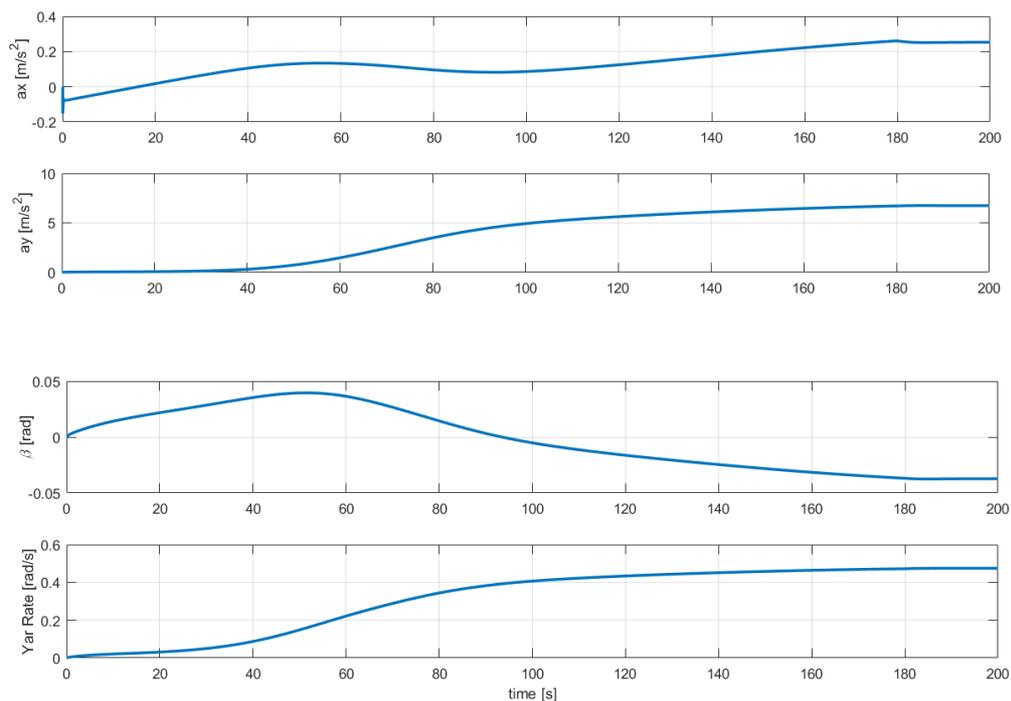


Fig. 2.37 – accelerazione longitudinale e laterale, angolo di assetto e velocità di imbardata

È bene notare come la velocità del veicolo non superi i $50 \frac{km}{h}$ anche se il pedale dell'acceleratore è ulteriormente incrementato in quanto le forze trasmesse dalle gomme tendono a saturarsi. Inoltre, come si vede in Fig. 2.36 il raggio di curvatura è mantenuto costante a 30 m in quasi tutta la manovra tranne un transitorio iniziale di ingresso in curva in cui assume valori notevolmente maggiori.

Interessante è valutare le caratteristiche di handling basate sulla correzione dell'angolo volante rispetto al valore cinematico ($\delta_s - \delta_{kin}$) funzione dell'accelerazione laterale del veicolo come mostrato in Fig. 2.38

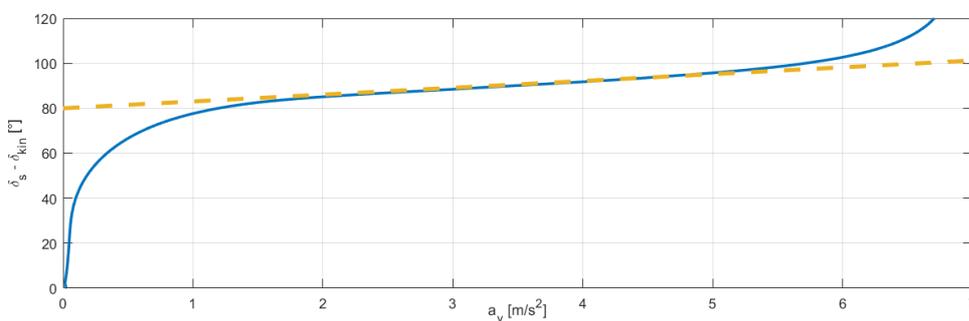


Fig. 2.38 - variazione angolo di sterzo dinamico rispetto al cinematico al variare di accelerazione laterale

Tralasciando un iniziale incremento non lineare dell'angolo di sterzo, dovuto al fatto che il veicolo parte da una moto rettilinea per poi imporre una imposta traiettoria circolare di raggio pari a 30 m, si ha all'aumentare dell'accelerazione laterale del veicolo un incremento lineare dell'angolo di sterzo rispetto al valore cinematico con un valore del gradiente di

sottosterzo di circa $0.0009 \frac{\text{rad s}^2}{\text{m}}$ (definito in Fig. 2.38 dalla curva in giallo, prossimo al 0.001 definito calcolandolo dalla 2.58) fino a che le forze laterali tendano ad esaurirsi riprendendo una caratteristica quindi non più lineare.

Se, ipotizziamo di effettuare una manovra a bassa aderenza $\mu=0.4$ può verificarsi una condizione molto pericolosa di **sottosterzo a bassa aderenza**.

Si può verificare quindi entrando in curva a velocità troppo elevate che le forze laterali massime sviluppabili non sono in grado di garantire la forza centrifuga richiesta dalla traiettoria curvilinea, riducendo la possibilità di controllare la vettura.

Si imposti una manovra di Steering Pad con un raggio di curvatura di 20 m, e si dia all'assale anteriore una caratteristica di coppia così definita:

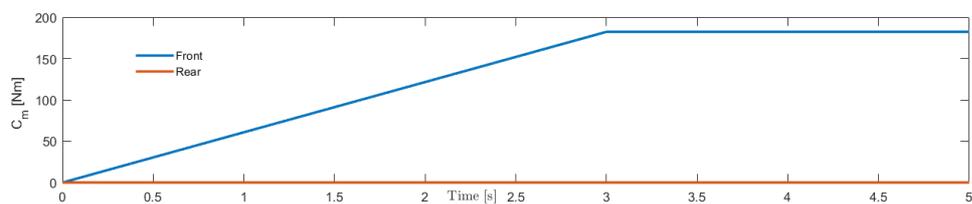


Fig. 2.39 – andamento coppia assali

A basse velocità (30 km/h), inizialmente la vettura cerca di seguire la traiettoria fino a raggiungere però un'instabilità;

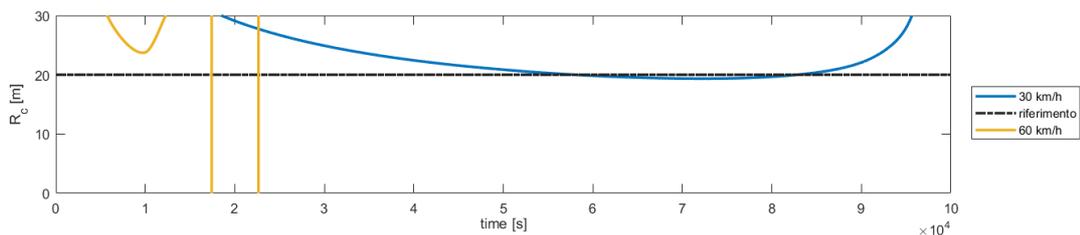


Fig. 2.40 – andamento raggio di curvatura nei due casi

incrementando la velocità (60 km/h) si verifica questa condizione critica subito, non appena si entri in curva:

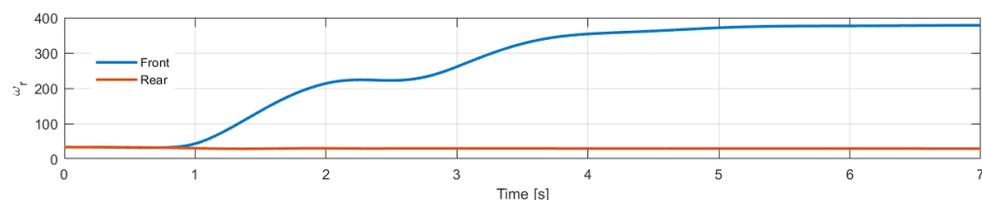


Fig. 2.41 – velocità angolare ruote

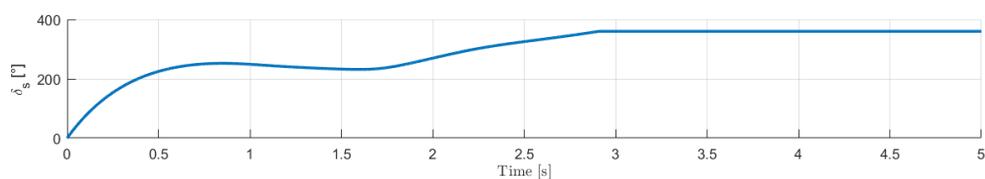


Fig. 2.42 – andamento angolo volante

la vettura inserendosi in curva perde aderenza con la strada, la ruota sterzante infatti accelera dato che non trasferisce sufficiente potenza a terra e il veicolo continua dritto generando una condizione di potenziale pericolo.

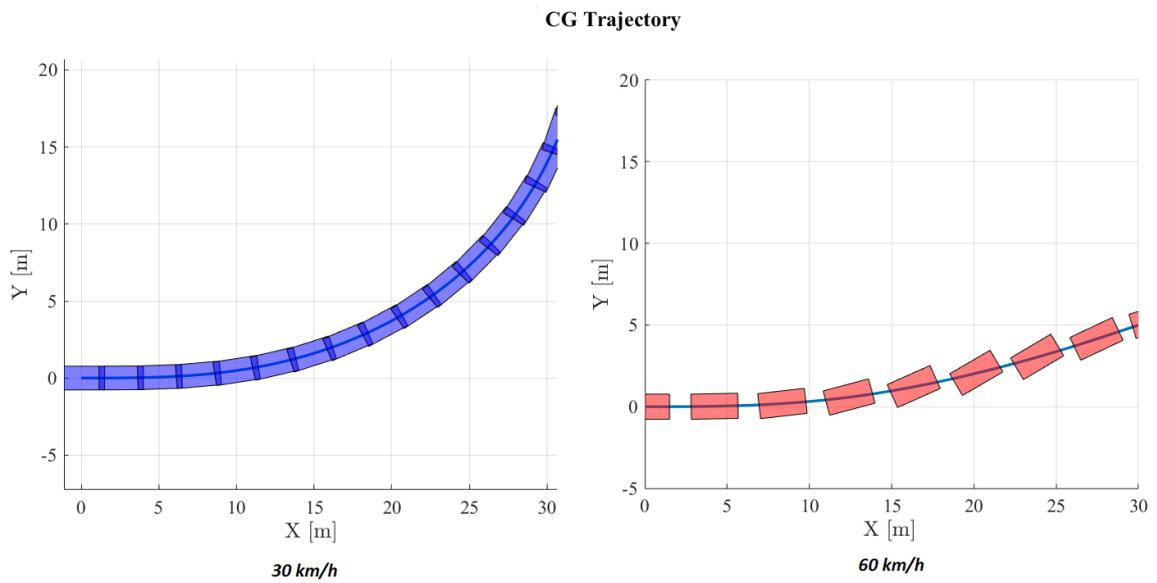


Fig. 2.43 – traiettorie in condizione safe e di sottosterzo di bassa aderenza

Inoltre, in termini di angolo di assetto e velocità di imbardata, notiamo in Fig. 2.44 come a più alta velocità si ha inserendosi in curva uno sbandamento della vettura sottolineato da un andamento oscillatorio iniziale.

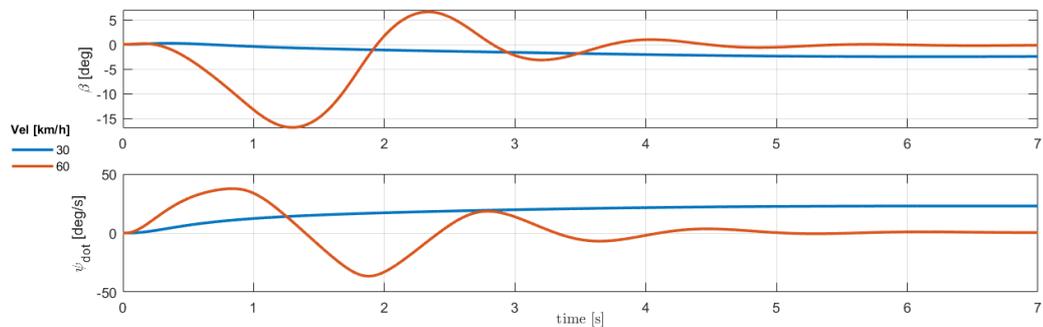


Fig. 2.44 – andamento angolo di assetto e velocità di imbardata

2.6.2.2. Manovra in Tiro e Rilascio

Le manovre in tiro e rilascio sono molto utili per analizzare il comportamento longitudinale del veicolo, di conseguenza si imporrà nulla l'angolo volante durante l'intera prova. La manovra in Tiro consiste nell'applicare una data coppia motrice alla vettura, mentre nella prova di rilascio si imporrà nulla il valore di Cm.

Per rendere più realistica la prova, si è introdotto un blocco nel modello per tener conto di come l'accelerazione longitudinale e le forze aerodinamiche presenti vadano ad influenzare il trasferimento di carico normale lungo i due assali.

Sappiamo che un veicolo in condizioni statiche subisce una ripartizione di carico definita dalla (2.80); però a seguito di un'accelerazione longitudinale e per effetto delle forze aerodinamiche che agiscono ad una certa altezza h_a da terra, il carico normale tende a ridistribuirsi caricando maggiormente il posteriore in caso di accelerazioni positive:

$$\begin{cases} F_{z,F} = \frac{mgb}{L} - \frac{\rho SC_x u^2 h_a}{2L} - \frac{m a_x h_g}{L} \\ F_{z,R} = mg - F_{z,F} \end{cases} \quad (2.80)$$

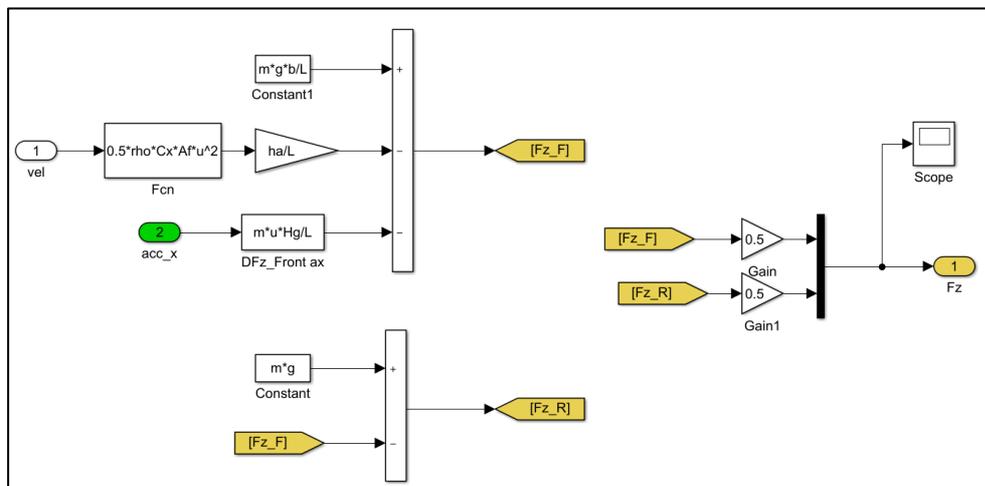


Fig. 2.45 – modello per variazione carico normale

Osservazione. La distribuzione del carico applicato definita dalla (2.80) è efficiente nel caso di modello monotraccia; se si volesse complicare il modello potremmo pensare di analizzare il veicolo con le 4 ruote e sottoposto anche ad una distribuzione di carico laterale.

^a Altezza del centro di pressione delle forze aerodinamiche da terra, in generale non coincide con il baricentro

Ipotizziamo di effettuare la prova con i seguenti dati:

<i>T</i>	Manovra in TIRO	
	Coeff. Attrito μ	0.8
	Coppia Motrice [Nm]	80
	Rapporto di cambio in prima τ	3.9
	Rapporto al ponte τ_F	4
	Velocità iniziale v_0 [m/s]	10

Con tale prova si può sottolineare come vari il comportamento al variare della ripartizione della coppia tra assale anteriore e posteriore; a tal fine sono state effettuate tre differenti prove

1. Veicolo FWD – coppia solo all’anteriore
2. Veicolo RWD – coppia solo al posteriore
3. Veicolo AWD – coppia sui due assali, con ripartizione 50-50

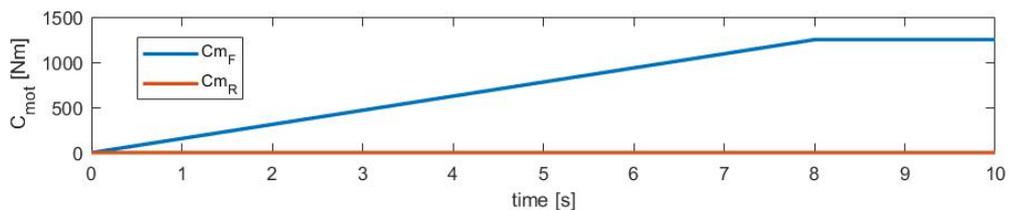


Fig. 2.46 – andamento coppia, caso FWD

Il veicolo risulta essere caricato staticamente maggiormente all’anteriore, però in tiro ciò che si verifica è che la presenza di un’accelerazione longitudinale, nonché la presenza delle forze aerodinamiche, fanno sì che dando coppia e quindi aumentando a_x si ha una distribuzione dinamica delle forze che potrebbe caricare maggiormente il posteriore e in caso di veicolo FWD saturare le forze trasmesse dagli pneumatici.

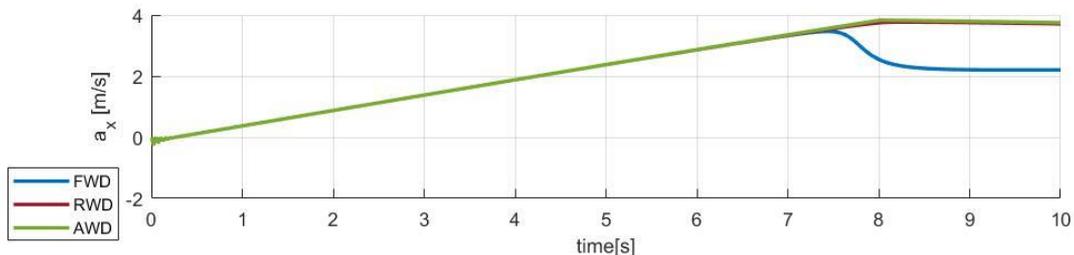


Fig. 2.47 – andamento a_x con distribuzione di coppia differente

In una manovra di Tiro è chiaro quindi, che un veicolo FWD risulta essere meno prestante di uno AWD-RWD; infatti dalla Fig. 2.47 si nota come in tali due ultime condizioni si hanno accelerazioni longitudinali maggiori il che permette di anticipare che il veicolo in questione

in condizioni di coppia solo all'anteriore non riesce a lavorare efficientemente dato che risulta essere meno caricato e quindi in grado di trasmettere a terra meno forze longitudinali e quindi garantire accelerazioni più basse.

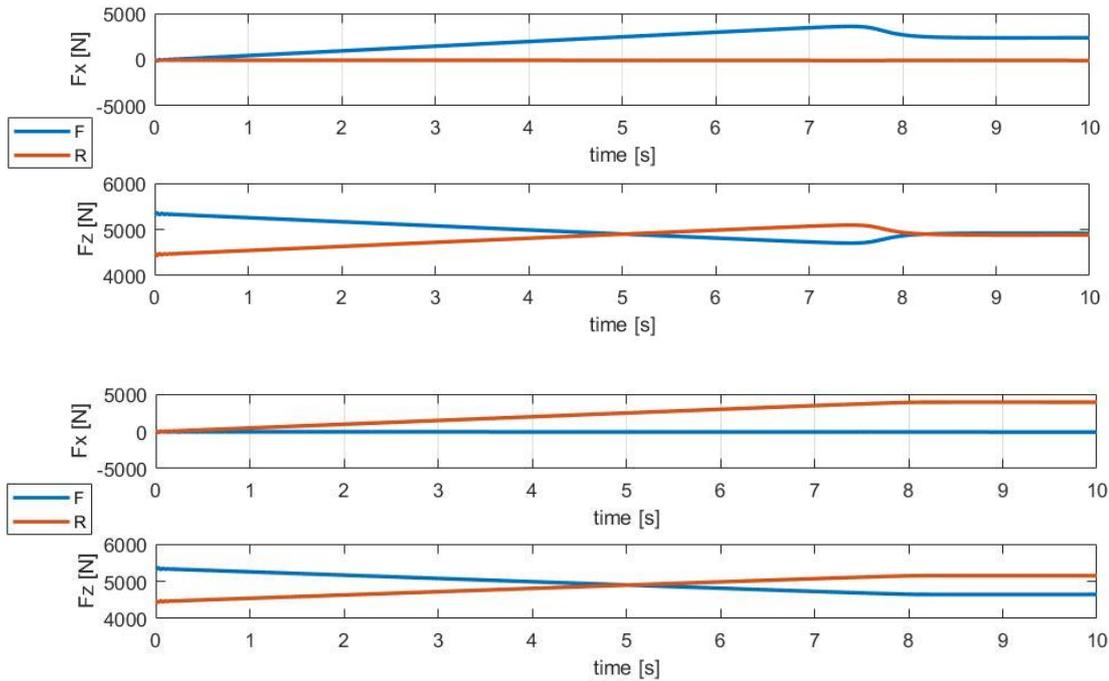


Fig. 2.48 – distribuzione forze caso FWD e RWD

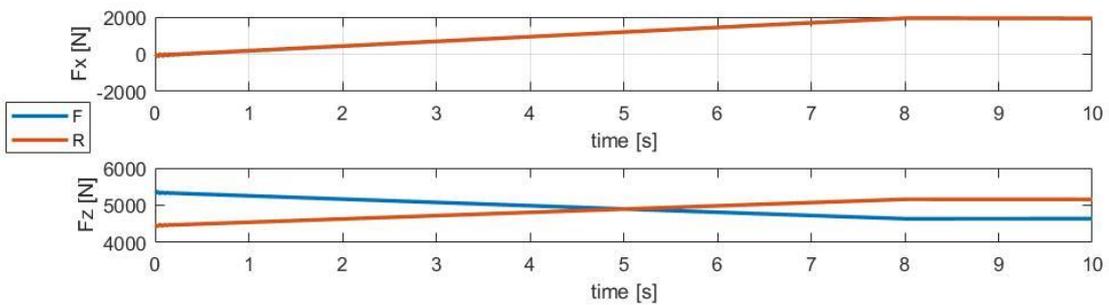


Fig. 2.49 – distribuzione forze caso AWD

Quindi concludendo tale analisi ci aspetteremo in Tiro prestazioni migliori nel caso RWD, AWD rispetto ad una trazione anteriore come sottolineano anche i seguenti grafici di velocità.

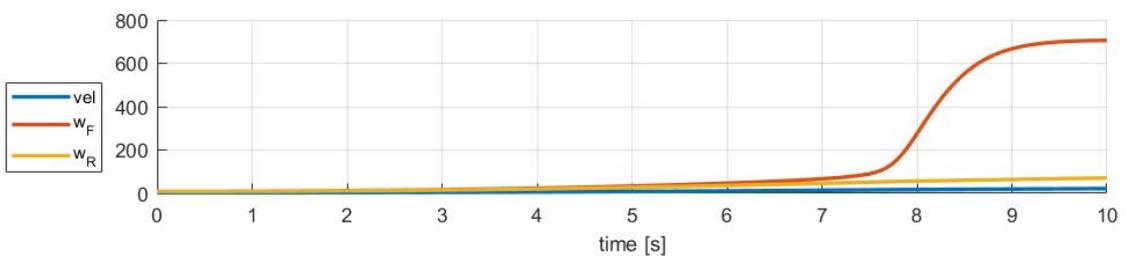


Fig. 2.50 – andamento velocità

Nel caso FWD, dando tutta la coppia all'anteriore non essendo sottoposta a delle forze normali molto elevate i pneumatici saturano e quindi l'eccesso di coppia motrici alle ruote si manifesterà inevitabilmente con un'accelerazione delle ruote anteriori generando inoltre delle velocità minori.

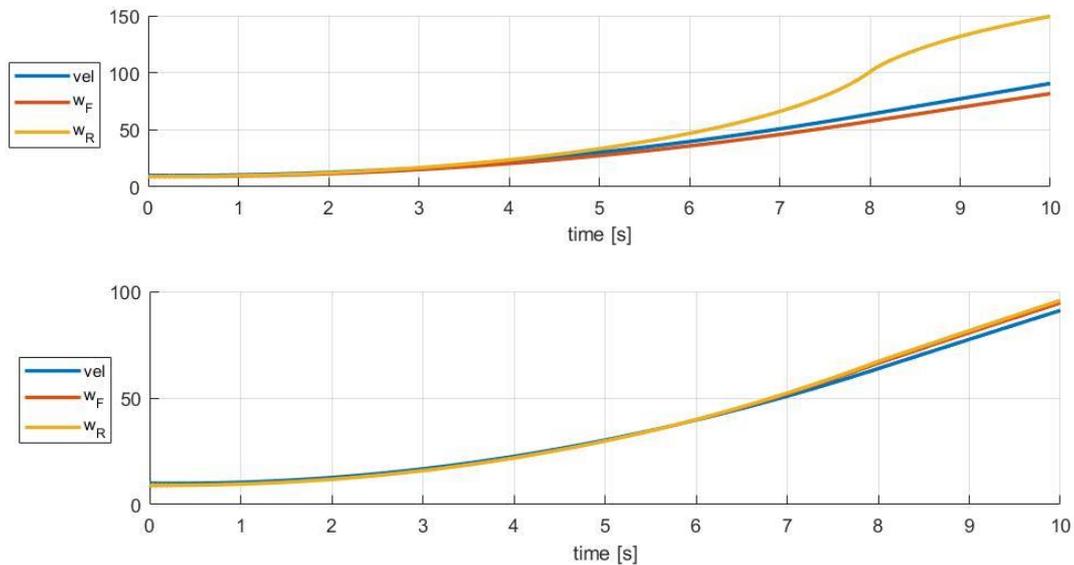


Fig. 2.51 – andamento velocità caso RWD e AWD

Come si può vedere da tale figura, le prestazioni risultano essere così nettamente migliorate; infatti al contrario in tiro aumentando il carico sulle ruote posteriori esse difficilmente tenderanno a saturare permettendo di avere velocità più elevate.

Se ipotizziamo di fare una prova di marcia in rettilineo e quindi di annullare la coppia motrice, ciò che ci aspettiamo è che il veicolo deceleri e che questa decelerazione vada ad aumentare le forze verticali distribuite sull'anteriore. Essendo una prova in decelerazione sostanzialmente non vi saranno grosse differenze in base al veicolo analizzando, allora interessante è capire quale sia la risposta in termini di forze longitudinali, accelerazione e velocità del veicolo ipotizzando di annullare la coppia ad una velocità iniziale di $80 \frac{km}{h}$

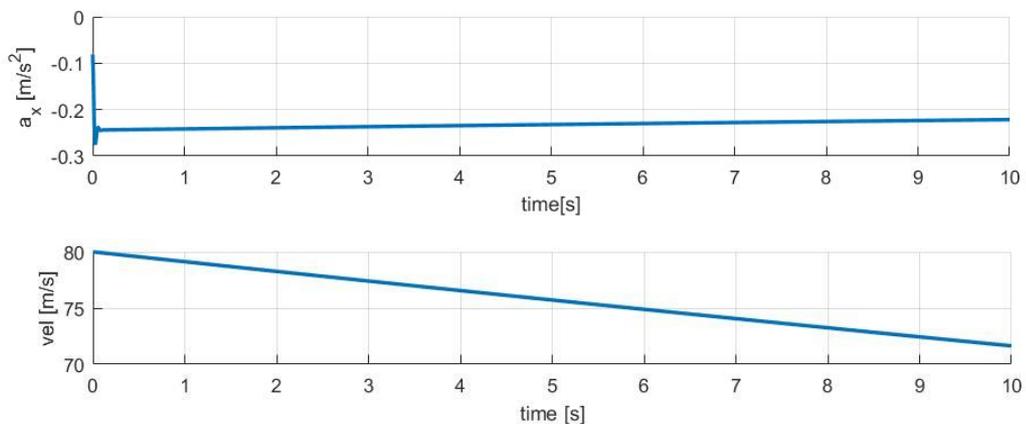


Fig. 2.52 – accelerazione e velocità del veicolo in rilascio

Il veicolo a causa delle forze aerodinamiche decelera fino a stabilizzarsi con un valore di decelerazione longitudinali di circa $0.2 \frac{m}{s^2}$. Ciò che ci aspettiamo è che nei primi istanti si ha

una distribuzione dinamica delle forze che andrà a caricare maggiormente l'anteriore e quindi ci aspetteremo in valore assoluto delle forze longitudinali trasmesse dalle ruote anteriori maggiori rispetto al posteriore

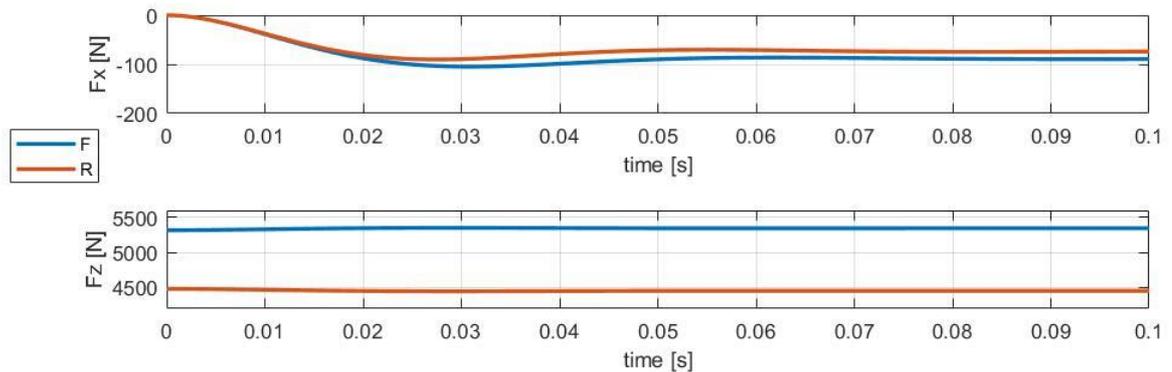


Fig. 2.53 – forze e ingrandimento forze per analizzare le variazioni dinamiche

Pensiamo ora di effettuare un'ulteriore manovra in cui si effettui una curva andando ad applicare un angolo volante con uno slope di $15^\circ/s$ ed applicando una coppia all'assale posteriore.

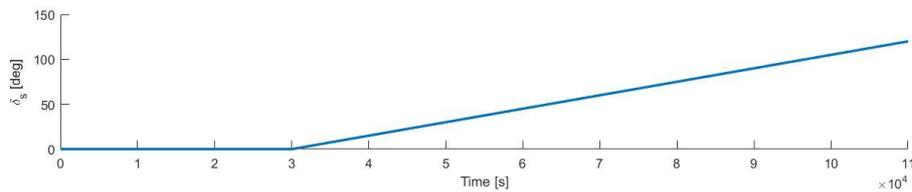


Fig. 2.54- variazione angolo volante

Pensiamo in prima battuta di dare al posteriore una coppia motrice di 40 Nm (incrementata a seguito dei precedenti rapporti di trasmissione definiti). In tali condizioni operative, avremo che il veicolo entrando in curva aumenta gli angoli di deriva e quindi genera l'insorgere di forze laterali che provocano un iniziale incremento dell'accelerazione laterale.

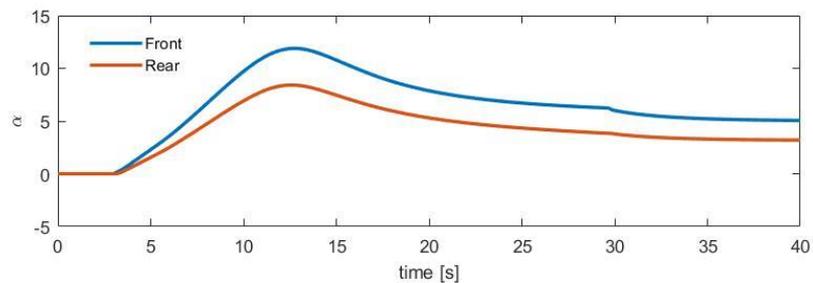


Fig. 2.55 – andamento angoli di deriva

Dando coppia al posteriore avremo che per effetto delle forze longitudinali lo pneumatico di tale assale riesce a trasmettere a terra meno forze laterali (anche in quanto risulta essere meno carico) da cui l'andamento nella seguente figura.

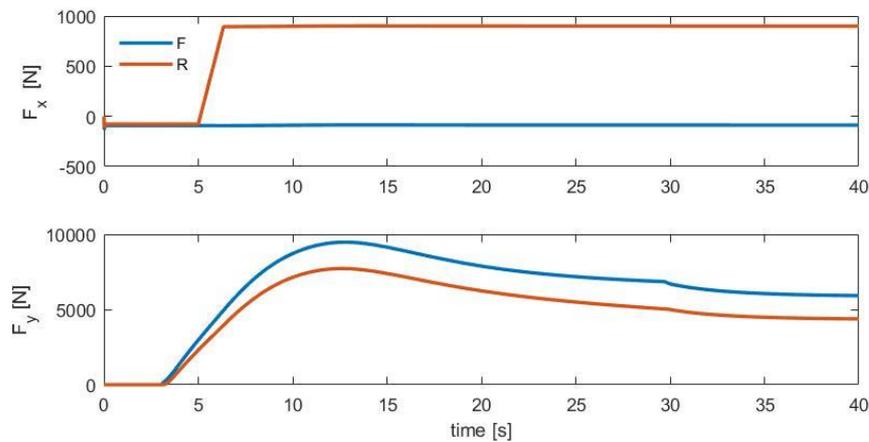


Fig. 2.56 – andamento forze longitudinali e laterali

In questa manovra non si hanno condizione molto critiche, e quindi il sistema si stabilizza dopo un dato transitorio con un valore di angolo di assetto di circa 10° .^a Se invece pensiamo di dare maggiore coppia al posteriore, si verifica il cosiddetto **sovrasterzo di potenza**.

Schematizziamo la prova come segue:

- Entriamo in curva a 50 km/h in seconda
- Incrementiamo l'angolo volante fino a 60° e manteniamo tale condizione
- Incrementiamo la coppia motrice fino al valore massimo (100 Nm), con uno slope di 50 Nm/s

Quindi diamo in input un determinato angolo volante ed una coppia del motore di 100 Nm:

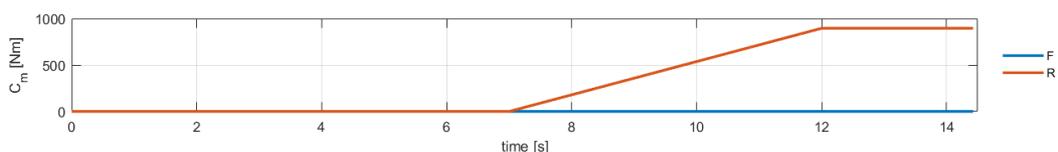


Fig. 2.57 - input sistema

Come possiamo notare, dando un angolo di sterzo alle ruote anteriori si sviluppano angoli di deriva e quindi di forze laterali. Dando coppia al posteriore si sviluppano delle forze longitudinali, come è visibile in Fig. 2.58, e ciò va ad influenzare le forze sviluppabili lateralmente. Di conseguenza, dato che lo pneumatico ha un dato limite fisico di forze a terra trasmissibili, le forze laterali non continuano a crescere come per quelle anteriori e

^a Si potrebbe notare che dando coppia al posteriore si va a ridurre il comportamento sottosterzante del veicolo, in quanto a causa del carico combinato si sviluppano meno forze laterali e quindi si genera una coppia imbardante che tende a ridurre tale comportamento.

ciò genererà negli istanti finali l'instabilità che possiamo vederla con valori di accelerazione laterale e di angoli di assetto molto grandi che porterebbero al testacoda della vettura.

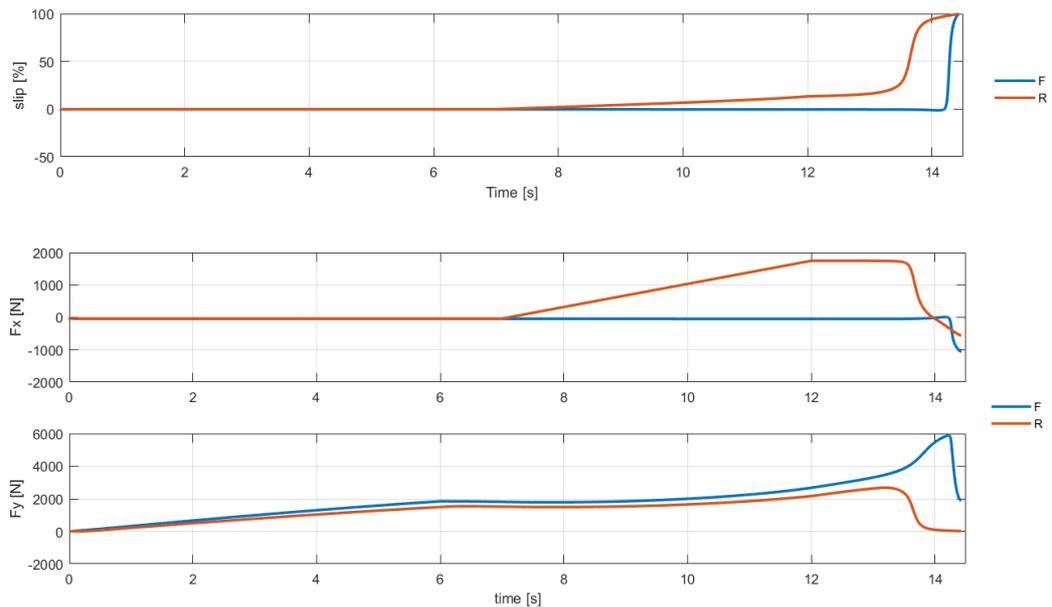


Fig. 2.58 – andamento forze longitudinali e laterali

Tale comportamento può essere visto anche in relazione all'andamento degli angoli di deriva. Infatti, entrando in curva si ha una crescita graduale degli angoli di deriva, con $\alpha_F > \alpha_R$ e quindi si ha un iniziale comportamento sottosterzante. Dando poi coppia, a causa del fatto che lo pneumatico dell'assale posteriore viene impegnato da forze longitudinali provoca negli istanti finali una riduzione delle forze laterali generando così una coppia imbardante antioraria che provoca l'instabilità del veicolo e quindi testacoda.

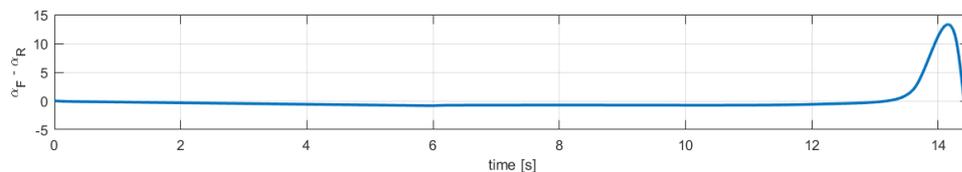


Fig. 2.59 – andamento differenza angoli di deriva

Quindi in termini di angolo di assetto e di velocità di imbardata, notiamo come alla fine della manovra si ha instabilità del veicolo; infatti si raggiungono velocità di imbardata ed angoli di assetto di notevole entità rendendo la guida altamente difficile;

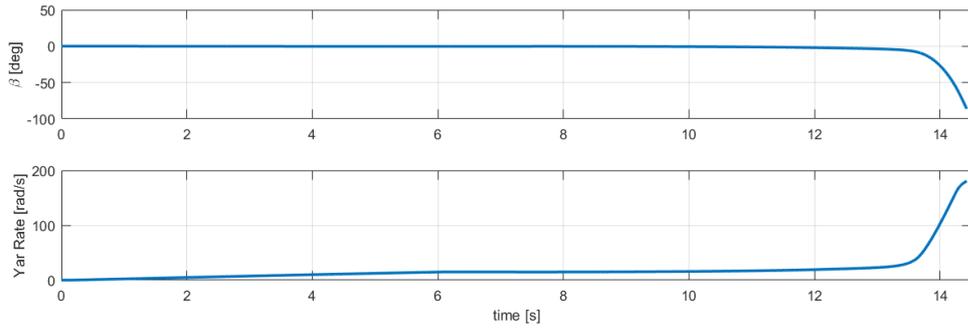


Fig. 2.60 – andamento stati sistema

infatti, come si vede dalla Fig. 2.61 in cui è mostrata la traiettoria percorsa e l'evoluzione dell'angolo di assetto, alla fine della manovra il veicolo va in testacoda sottolineando la forte instabilità.

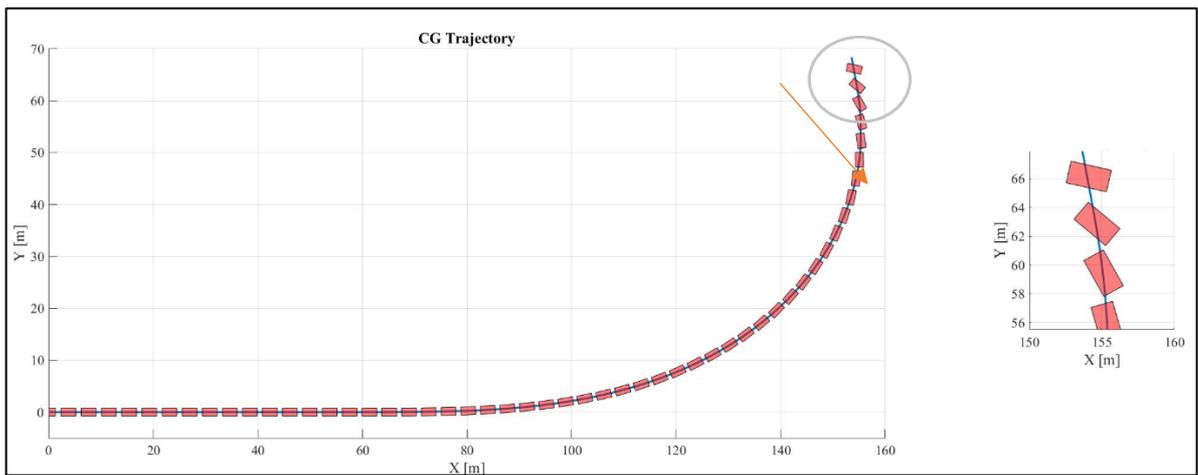


Fig. 2.61 – traiettoria ed esplicitazione angolo di assetto



Capitolo III – Analisi modellazione strade e Comfort

In tale capitolo si andrà ad analizzare la norma di riferimento per realizzare un percorso stradale approvata dalla Commissione di studio per le norme relative ai materiali stradali e costruzione e manutenzione strade costituita con Decreto del Presidente C.N.NR n. 13465 del 11 Settembre 1995 [8].

Si andranno, quindi, a definire dei criteri progettuali in modo da permettere inserimenti in curva ad una determinata velocità in sicurezza e comfort [9] il tutto adattato per veicolo a guida autonoma.

3.1. Elementi costitutivi dello spazio stradale

Ai fini delle presenti norme e tenuto conto dell'art. 3 del Codice, le denominazioni degli spazi stradali hanno i seguenti significati (*Fig. 3.1*):

Banchina: parte della strada, libera da qualsiasi ostacolo (segnaletica verticale, delineatori di margine, dispositivi di ritenuta), compresa tra il margine della carreggiata e il più vicino tra i seguenti elementi longitudinali: marciapiede, spartitraffico, arginello, ciglio interno della cunetta, ciglio superiore della scarpata nei rilevati. Si distingue in:

"Banchina in destra", che ha funzione di franco laterale destro. È di norma pavimentata ed è sostituita, in talune tipologie di sezione, dalla corsia di emergenza:

"Banchina in sinistra", che è la parte pavimentata del margine interno.

Carreggiata: parte della strada destinata allo scorrimento dei veicoli; essa è composta da una o più corsie di marcia; è pavimentata ed è delimitata da strisce di margine (segnaletica orizzontale).

Confine stradale: limite della proprietà stradale quale risulta dagli atti di acquisizione o dalle fasce di esproprio del progetto approvato; in mancanza, il confine è costituito dal ciglio esterno del fosso di guardia o della cunetta, ove esistenti, o dal piede della scarpata se la strada è in rilevato o dal ciglio superiore della scarpata se la strada è in trincea.

Corsia: parte longitudinale della strada, normalmente delimitata da segnaletica orizzontale, di larghezza idonea a permettere il transito di una sola fila di veicoli. Si distingue in:

- a) corsia di marcia: corsia facente parte della carreggiata, destinata alla normale percorrenza o al sorpasso;
- b) corsia riservata: corsia di marcia destinata alla circolazione esclusiva di una o solo di alcune categorie di veicoli;
- c) corsia specializzata: corsia destinata ai veicoli che si accingono ad effettuare determinate manovre, quali svolta, sorpasso, decelerazione, accelerazione, manovra;
- d) per la sosta o che presentino basse velocità (corsia di arrampicamento) o altro;
- e) corsia di emergenza: corsia, adiacente alla carreggiata, destinata alle soste di emergenza, al transito dei veicoli di soccorso e, eccezionalmente, al movimento dei pedoni.

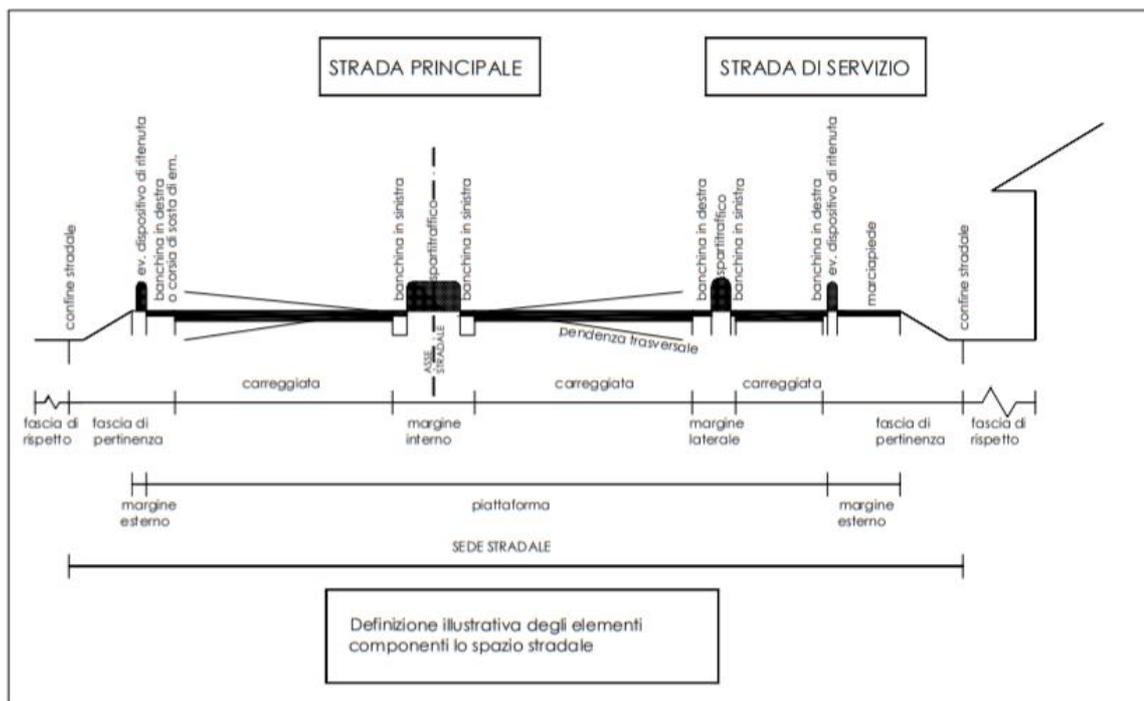


Fig. 3.1 – illustrazione grafica strada

Dispositivo di ritenuta: Elemento tendente ad evitare la fuoriuscita dei veicoli dalla piattaforma o comunque a ridurre le conseguenze dannose. È contenuto all'interno dello spartitraffico o del margine esterno alla piattaforma.

Fascia di pertinenza: striscia di terreno compresa tra la carreggiata più esterna e il confine stradale. È parte della proprietà stradale e può essere utilizzata solo per la realizzazione di altre parti della strada.

Fascia di rispetto: striscia di terreno, esterna al confine stradale, sulla quale esistono vincoli alla realizzazione, da parte del proprietario del terreno, di scavi, costruzioni, recinzioni, piantagioni, depositi e simili. Per la larghezza vedere gli articoli 26, 27 e 28 del DPR 495/92.

Fascia di sosta laterale: parte della strada adiacente alla carreggiata, separata da questa mediante striscia di margine discontinua e comprendente la fila degli stalli di sosta e la relativa corsia di manovra.

Marciapiede: parte della strada, esterna alla carreggiata, rialzata o altrimenti delimitata e protetta, destinata ai pedoni.

Margine interno: parte della piattaforma che separa carreggiate percorse in senso opposto.

Margine laterale: parte della piattaforma che separa carreggiate percorse nello stesso senso.

Margine esterno: parte della sede stradale, esterna alla piattaforma, nella quale trovano sede cigli, cunette, arginelli, marciapiedi e gli elementi di sicurezza o di arredo (dispositivi di ritenuta, parapetti sostegni, ecc.).

Parcheggio: area o infrastruttura posta fuori della carreggiata, destinata alla sosta regolamentata o non dei veicoli.

Piattaforma: parte della sede stradale che comprende i seguenti elementi:

- a) una o più carreggiate complanari, di cui la corsia costituisce il modulo fondamentale;
- b) le banchine in destra e in sinistra;
- c) i margini (eventuali) interno e laterale (comprensivi delle banchine);
- d) le corsie riservate, le corsie specializzate, le fasce di sosta laterale e le piazzole di sosta o di fermata dei mezzi pubblici (se esistenti).

Non rientra nella piattaforma il margine esterno.

Sede stradale: superficie compresa entro i confini stradali.

Sede tranviaria: parte longitudinale della strada, opportunamente delimitata, riservata alla circolazione dei tram e dei veicoli assimilabili.

Spartitraffico: parte non carrabile del margine interno o laterale, destinata alla separazione fisica di correnti veicolari. Comprende anche lo spazio destinato al funzionamento (deformazione permanente) dei dispositivi di ritenuta.

Strada di servizio: strada affiancata ad una strada principale (tipo A, B e D), avente la funzione di consentire la sosta ed il raggruppamento degli accessi dalle proprietà laterali alla strada principale e viceversa, nonché il movimento e le manovre dei veicoli non ammessi sulla strada principale stessa.

3.2. Andamento Planimetrico dell'asse

Criteria di composizione dell'asse

In genere, nelle strade a unica carreggiata si assume come asse quello della carreggiata stessa; nelle strade a due carreggiate complanari e ad unica piattaforma, l'asse si colloca a metà del margine interno. Negli altri casi occorre considerare due assi distinti.

Nella definizione dell'asse di una strada, tradizionalmente si studia separatamente l'andamento planimetrico da quello altimetrico.

Secondo tale impostazione il tracciato planimetrico è costituito da una successione di elementi geometrici tradizionali, quali i rettifili, le curve circolari ed i raccordi a raggio variabile, mentre quello altimetrico si articola in una successione di livellette e raccordi concavi o convessi. Ai fini di garantire una soluzione sicura, confortevole per gli utenti e soddisfacente dal punto di vista ottico, è necessario adottare per la planimetria e l'altimetria, soluzioni coordinate e compatibili con le velocità di progetto.

Sono possibili, per definire la linea d'asse, soluzioni alternative che si basano sulla utilizzazione di linee polinomiali; ciò può essere fatto considerando separatamente la linea planimetrica e quella altimetrica, oppure definendo la linea d'asse direttamente nello spazio. Tuttavia, nel caso in cui l'asse stradale sia definito secondo linee di tipo polinomiale o con l'impiego di curve diverse da quelle indicate in seguito, le verifiche di accettabilità devono essere effettuate riconducendo le medesime linee alle equivalenti linee tradizionali con procedimenti numerici di assimilazione.

Di seguito ci si riferisce soltanto al modo tradizionale di composizione dei tracciati.

Elementi del tracciato planimetrico

Tra due elementi a raggio costante (curve circolari, ovvero rettilo e curva circolare) deve essere inserita una curva a raggio variabile, lungo la quale generalmente si ottiene la graduale modifica della piattaforma stradale, cioè della pendenza trasversale, e, ove necessario, della larghezza. La definizione di questi elementi e la loro combinazione è connessa soprattutto ad esigenze di sicurezza.

- **Rettifili**

Per evitare il superamento delle velocità consentite, la monotonia, la difficile valutazione delle distanze e per ridurre l'abbagliamento nella guida notturna è opportuno che i rettifili abbiano una lunghezza L_r contenuta nel seguente limite:

$$L_r = 22 \times V_{p,Max} \text{ [m]} \quad (3.1)$$

dove $V_{p,Max}$ è il limite superiore dell'intervallo di velocità di progetto della strada, in km/h.

Inoltre, in genere, l'adozione dei rettifili di lunghezza limitata favorisce l'inserimento della strada nell'ambiente.

Un rettifilo, per poter esser percepito come tale dall'utente, deve avere una lunghezza non inferiore ai valori riportati nella seguente tabella; per velocità si intende la massima desunta dal diagramma di velocità per il rettifilo considerato.

<i>Velocità [km/h]</i>	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
<i>Lunghezza min [m]</i>	30	40	50	65	90	115	150	190	250	300

- **Curve circolari**

Una curva circolare, per essere correttamente percepita, deve avere uno sviluppo corrispondente ad un tempo di percorrenza di almeno 2,5 secondi valutato con riferimento alla velocità di progetto della curva. I rapporti tra i raggi R1 e R2 di due curve circolari che, con l'inserimento di un elemento a curvatura variabile, si succedono lungo il tracciato di strade di tipo A, B, C, D^a e F extraurbane, sono regolati dall'abaco in Fig 3.2. In particolare, per le strade di tipo A e B detto rapporto deve collocarsi nella "zona buona"; per le strade degli altri tipi è utilizzabile pure la "zona accettabile".

Tra un rettifilo di lunghezza L_R ed il raggio più piccolo fra quelli delle due curve collegate al rettifilo stesso, anche con l'interposizione di una curva a raggio variabile, deve essere rispettata la relazione:

$$R > L_R \text{ per } L_R < 300 \text{ m} \quad (3.2)$$

$$R > 400 \text{ m per } L_R \geq 300 \text{ m}$$

^a Dove si definisce con A – Autostrada, B – Extraurbana Principale, C – Extraurbana Secondaria, D- Urbana di Scorrimento.

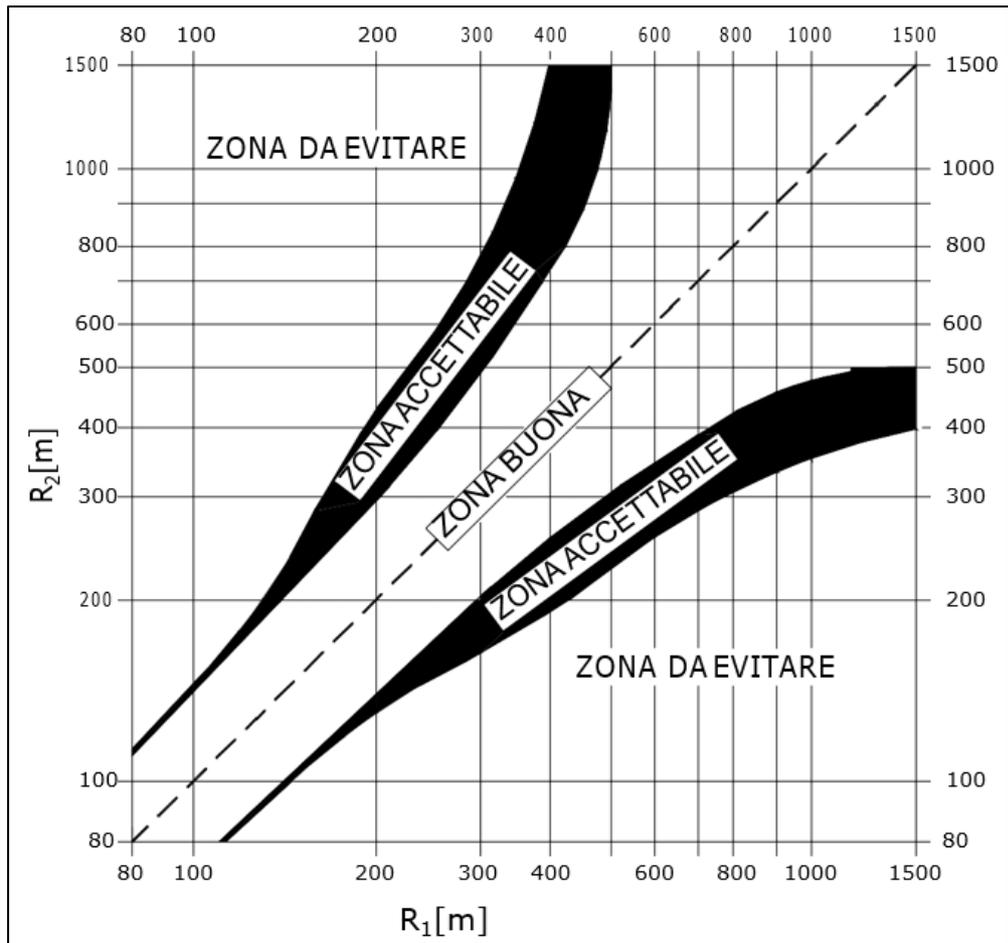


Fig. 3.2 – andamento rapporto raggi di curvatura in condizioni safe e non

- **Curve a raggio variabile**

Queste curve sono progettate in modo da garantire:

- una variazione di accelerazione centripeta non compensata (contraccolpo) contenuta entro valori accettabili;
- una limitazione della pendenza (o sovrapendenza) longitudinale delle linee di estremità della piattaforma;
- la percezione ottica corretta dell'andamento del tracciato.

Tali curve a raggio variabile vengono inserite fra elementi a raggio di curvatura differenti^a, come nel caso di rettilineo-cerchio, cerchio-cerchio percorsi in verso contrapposto (Flesso) e cerchio-cerchio percorsi nello stesso verso (Continuità).

^a Raffigurati nella Fig. rispettivamente nei casi (a), (b) e (c).

La curva a raggio variabile da impiegarsi è la clotoide, che è una particolare curva della famiglia delle spirali generalizzate definite dalla seguente equazione:

$$r x s^n = A^{n+1} \quad (3.3)$$

dove:

r = raggio di curvatura nel punto P generico s = ascissa curvilinea nel punto P generico

A = parametro di scala

n = parametro di forma; regola la variazione della curvatura $1/r$

e dove, per $n = 1$, si ottiene l'equazione della Clotoide (Fig. 3.4) che permette di avere un contraccollo costante:

$$r x s = A^2 \quad (3.4)$$

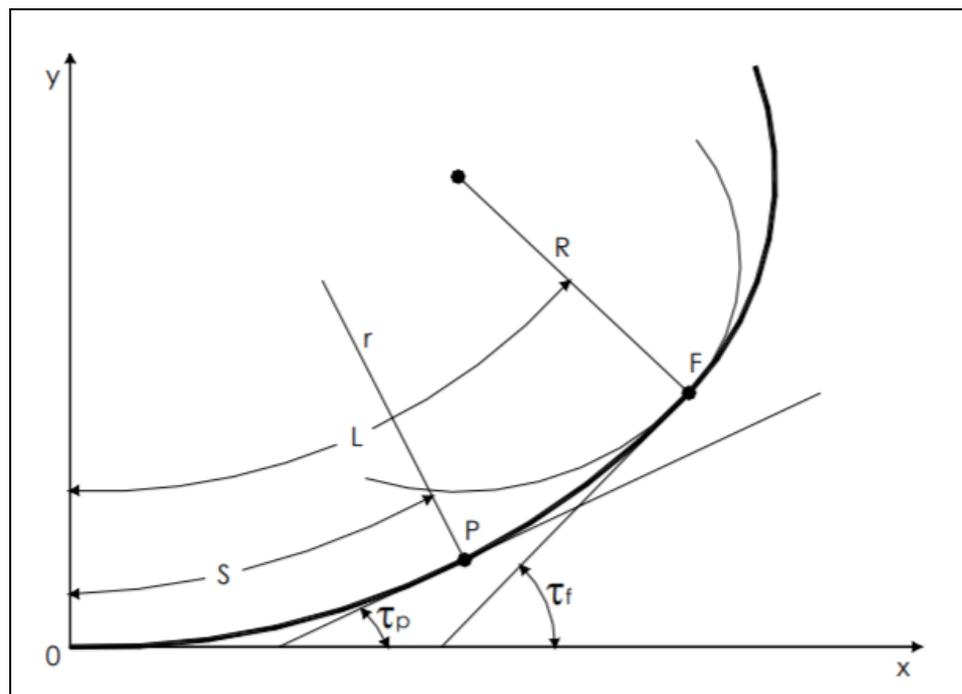


Fig. 3.4 - clotoide

e dove ancora, nella figura:

F = punto finale della clotoide

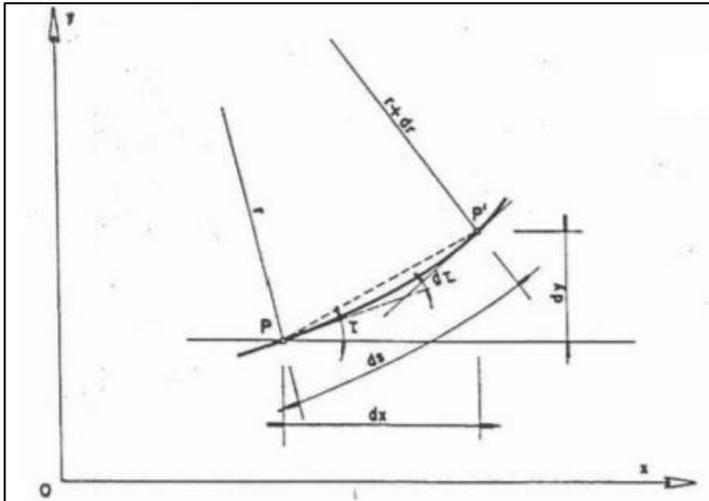
R (m) = raggio dell'arco di cerchio da raccordare

L (m) = lunghezza dell'arco di clotoide

τ_p = angolo di deviazione nel generico punto P

τ_f = angolo di deviazione nel punto di fine della clotoide

Procediamo con l'analisi matematica dell'angolo di deviazione; esso può essere definito in termini infinitesimi come:



$$d\tau = \frac{ds}{r} = \frac{s \cdot ds}{A^2}$$

Integrando l'equazione precedente si ha:

$$\tau = \int_0^\tau d\tau = \int_0^s \frac{s \cdot ds}{A^2} = \frac{s^2}{2A^2}$$

$$= \frac{s}{2r} = \frac{A^2}{2r^2}$$

Quindi, si vadano a definire le equazioni matematiche per descrivere la clotoide nel piano x-y. Dalla figura precedente si può dire che:

$$\begin{cases} dx = ds \cdot \cos\tau \\ dy = ds \cdot \sin\tau \end{cases}$$

Allora integrando:

$$\begin{cases} x_p = \int_0^s \cos\tau \cdot ds = \int_0^\tau \frac{A\sqrt{2}}{2} \cdot \tau^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos\tau \cdot d\tau = {}^b A\sqrt{2}\tau \cdot \left[\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\tau^{(2i-2)}}{(4i-3) \cdot (2i-2)!} \right] \\ y_p = \int_0^s \sin\tau \cdot ds = \int_0^\tau \frac{A\sqrt{2}}{2} \cdot \tau^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin\tau \cdot d\tau = A\sqrt{2}\tau \cdot \left[\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\tau^{(2i-1)}}{(4i-1) \cdot (2i-1)!} \right] \end{cases} \quad (3.5)$$

^a Ricordiamo che $s = A\sqrt{2}\tau$, derivando si ha $ds = \frac{A\sqrt{2}}{2} \cdot \tau^{-\frac{1}{2}} \cdot d\tau$

^b Sviluppando in serie il coseno ed il seno.

3.4. Verifica del parametro di scala

Criterio 1 (Limitazione del contraccolpo)

Affinché lungo un arco di clotoide si abbia una graduale variazione dell'accelerazione trasversale non compensata nel tempo (contraccolpo c), fra il parametro A e la massima velocità, V (km/h), desunta dal diagramma di velocità, per l'elemento di clotoide deve essere verificata la relazione:

$$A > A_{min} = \sqrt{\frac{V^3}{c} - \frac{gVR(q_f - q_i)}{c}} \quad (3.6)$$

Dove:

$$\begin{cases} q_i = \frac{i_{ci}}{100} & , \text{ con } i_{ci} = \text{pendenza trasversale nel punto iniziale della clotoide} \\ q_f = \frac{i_{cf}}{100} & , \text{ con } i_{cf} = \text{pendenza trasversale nel punto finale della clotoide} \end{cases}$$

Trascurando il secondo termine dell'espressione del radicando e assumendo per il contraccolpo il valore limite

$$c_{max} = \frac{50,4}{V} \quad \left[\frac{m}{s^3} \right]$$

Si ottiene:

$$A \geq 0.021 \cdot V^2 \quad (3.7)$$

Osservazione – Contraccolpo (Jerk)

Essere esposti a cambiamenti di moto può avere effetti biomeccanici significanti sul corpo umano, quindi molti dispositivi di trasporto sono progettati riducendo quanto possibile l'accelerazione. Le accelerazioni che normalmente sentiamo non sono costanti, quando siamo in una vettura e acceleriamo quando il semaforo diventa verde la nostra accelerazione non sarà costante; in questa situazione l'accelerazione sta cambiando e la sensazione di moto che subiamo è definita Jerk.

Dal punto di vista matematico il Jerk^a è definito come la derivata terza della nostra posizione rispetto al tempo; il Jerk può essere sentito come un incremento/decremento di

^a Accelerazione senza Jerk è solo una conseguenza di carichi statici.

forze sul nostro corpo. Infatti, l'accelerazione non si genera istantaneamente, ma essa cresce da zero ciò implica che si sviluppi inevitabilmente del Jerk.

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{dF}{dt} \frac{1}{m} \quad \left[\frac{m}{s^3} \right]$$

L'obiettivo nel nostro caso è ridurre il contraccolpo entrando in curva. Infatti, effettuando l'inserimento in curva il veicolo che ipotizziamo viaggiare a velocità costante avrà un'accelerazione centripeta pari a:

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

Se non inserissimo una curva variabile, e quindi un raggio R che vari lentamente fino al valore voluto, avremmo un forte contraccolpo^a che potrebbe generare del malessere sui passeggeri.

Critero 2 (Sovrapendenza longitudinale delle linee di estremità della carreggiata)

Nelle sezioni di estremità di un arco di clotoide la carreggiata stradale presenta differenti assetti trasversali, che vanno raccordati longitudinalmente, introducendo una sovrappendenza nelle linee di estremità della carreggiata rispetto alla pendenza dell'asse di rotazione.

Nel caso in cui il raggio iniziale sia di valore infinito (rettilineo o punto di flesso), il parametro deve verificare la seguente disuguaglianza:

$$A > A_{min} = \sqrt{\frac{R}{\Delta i_{max}} 100 B_i (q_i + q_f)} \quad (3.8)$$

dove:

B_i = distanze fra l'asse di rotazione ed il ciglio della carreggiata nella sezione iniziale della curva a raggio variabile [m]

^a In quanto la variazione nel tempo dell'accelerazione sarebbe molto brusca $a_c \rightarrow 0$ a a_c in breve tempo.

Δi_{max} (%) = sovrappendenza longitudinale massima della linea costituita dai punti che distano B_i dall'asse di rotazione; in assenza di allargamento tale linea coincide con l'estremità della carreggiata.

$$q_i = \frac{i_{ci}}{100} \quad \text{dove } i_{ci} = \text{pendenza trasversale iniziale (valore assoluto)}$$

$$q_f = \frac{i_{cf}}{100} \quad \text{dove } i_{cf} = \text{pendenza trasversale finale (valore assoluto)}$$

Nel caso in cui anche il raggio iniziale sia di valore finito (continuità) il parametro deve verificare la seguente disuguaglianza

$$A \geq A_{min} = \sqrt{\frac{B_i(q_f - q_i)}{\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_f}\right) \frac{\Delta i_{max}}{100}}} \quad (3.9)$$

dove:

R_i = raggio nel punto iniziale della curva a raggio variabile

R_f = raggio nel punto terminale della curva a raggio variabile

Critério 3 (Ottico)

Per garantire la percezione ottica del raccordo deve essere verificata la relazione:

$$A \geq R/3 \quad (R_i / 3 \text{ in caso di discontinuità}) \quad (3.10)$$

Inoltre, per garantire la percezione dell'arco di cerchio alla fine della clotoide, deve essere:

$$A \leq R \quad (3.11)$$

Campo di utilizzazione dei raccordi di clotoide

Resta definito dai valori ammissibili per il parametro A, come dalla figura 5.2. seguente:

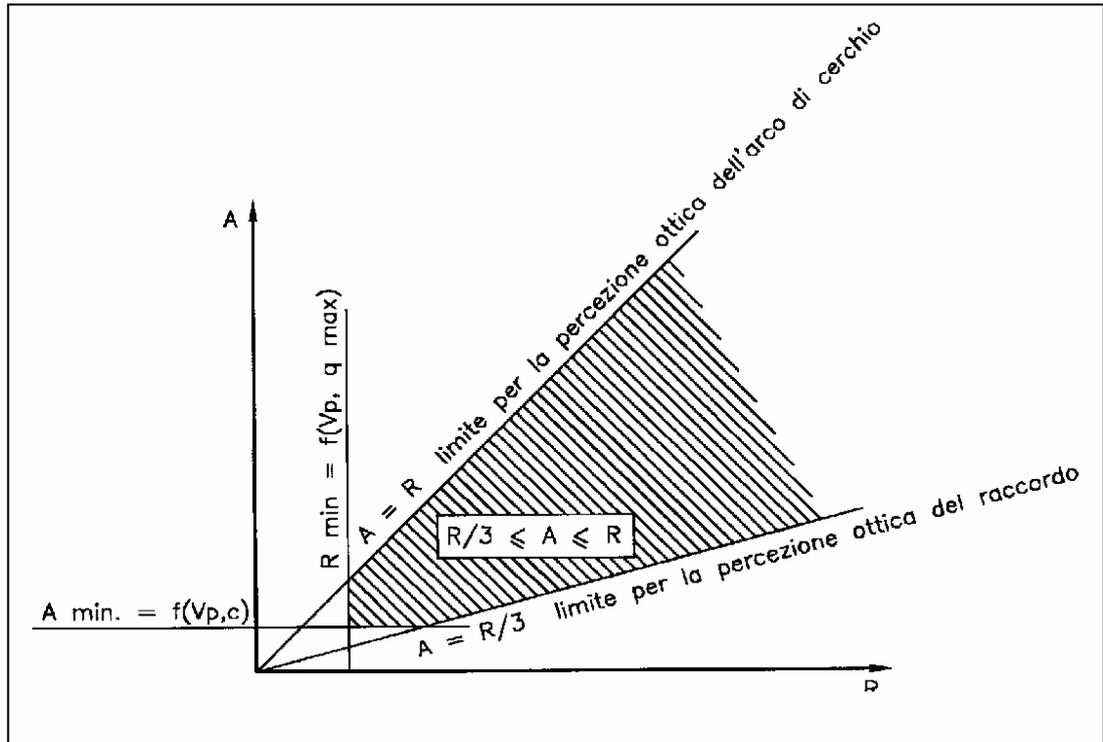


Fig. 3.5 – campo di definizione parametro A, per criterio ottico

Dove:

$$R_{min} = \frac{V_p^2}{127[f_{t,max}V_p + q_{max}]}$$

$$A_{min} = 0.021 V_p^2$$

Con $f_{t,max}$ quota parte del coefficiente di aderenza impegnato trasversalmente.

In caso di continuità $\frac{R_i}{3} < A < R$

Applicazioni

I casi più importanti nei quali la clotoide viene inserita in un tracciato sono riassunti nella figura, dove sono anche indicate le limitazioni per i valori dei parametri e sono anche indicate le situazioni da evitare.

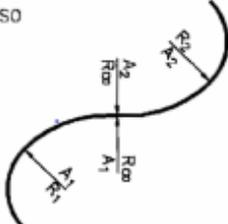
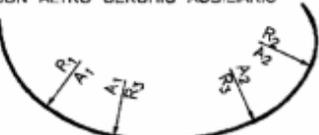
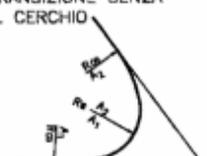
TIPOLOGIA	LIMITI	
	$A_1 \geq A_{min}$ $A_2 \geq A_{min}$ $\frac{R_1}{3} \leq A_1 \leq R_1$ $\frac{R_2}{3} \leq A_2 \leq R_2$ $\frac{2}{3} \leq \frac{A_1}{A_2} \leq \frac{3}{2}$	
	$R_2 < R_1$ $A_1 \geq A_{min}$ $A_2 \geq A_{min}$ FLESSO ASIMMETRICO $A_1 \neq A_2$ $\frac{R_1}{3} \leq A_1 \leq R_1$ $\frac{R_2}{3} \leq A_2 \leq R_2$ $\frac{2}{3} \leq \frac{A_1}{A_2} \leq \frac{3}{2}$ FLESSO SIMMETRICO $A_1 = A_2 = A$ $\frac{R_1}{3} \leq A \leq R_2$	
	$R_x < R_1$ R_x all'interno di R_1 ma non concentrico $A_{min} \leq A$ $\frac{R_1}{3} \leq A \leq R_x$	
	$A_1 \geq A_{min}$ $A_2 \geq A_{min}$ $\frac{R_3}{3} \leq A_1 \leq R_1$ $\frac{R_3}{3} \leq A_2 \leq R_2$ $\frac{2}{3} \leq \frac{A_1}{A_2} \leq \frac{3}{2}$	
CASI DA EVITARE		
		

Fig. 3.6 – limitazioni e casi da evitare per la clotoide

Nel caso del flesso è possibile inserire un rettilo di lunghezza non superiore a

$$L = \frac{A_1 + A_2}{12.5} \quad [m]$$

In questo caso non vale perciò il requisito minimo fissato.

3.5. Esempio realizzazione traiettoria

Di seguito verrà definito un esempio di tracciato che verrà analizzato nelle seguenti prove rispettando i vincoli imposti dalla normativa sopra definiti.

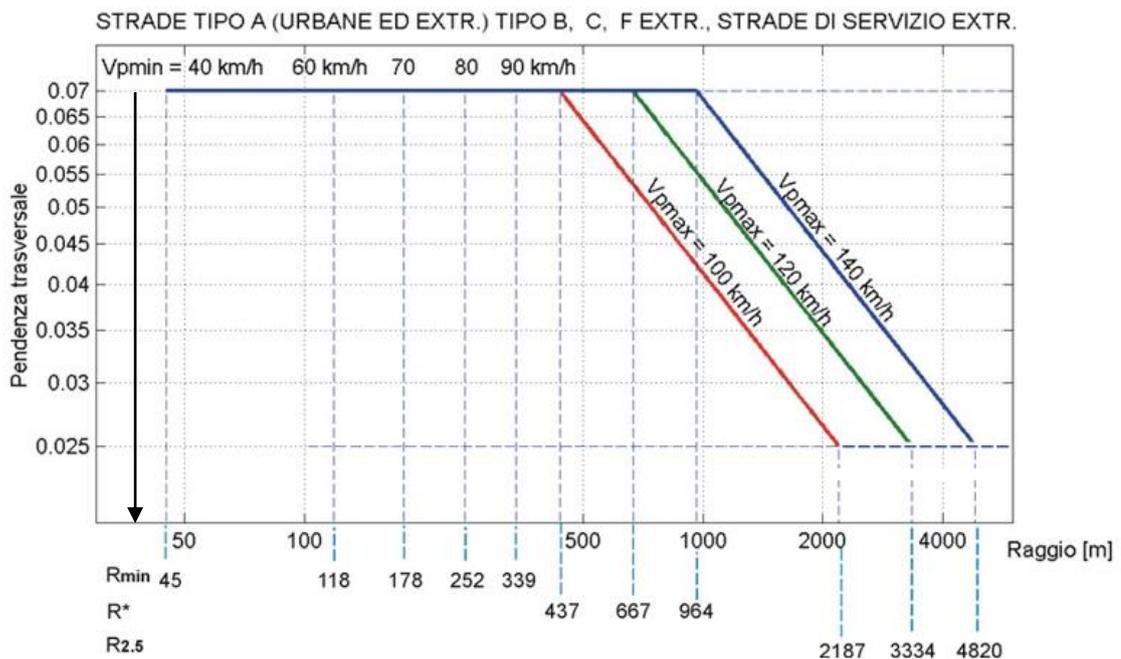
L'obiettivo è realizzare una clotoide di transizione tra un rettilineo ed una curva, di una strada extraurbana di categoria F, che presenti le seguenti caratteristiche:

$$\begin{cases} V_{p,min} = 40 \text{ km/h} \\ V_{p,max} = 100 \text{ km/h} \end{cases}$$

Innanzitutto, si definisca il limite massimo della lunghezza del rettilineo per soddisfare tutte quelle condizioni precedentemente descritte:

$$L_r = 22 \cdot V_{p,max} = 22 \cdot \frac{100}{3.6} = 611 \text{ m}$$

Di seguito tramite l'abaco di progetto si osserva che ad una velocità di 50 km/h il raggio della curva deve essere nell'ordine di 70/75 m e che la pendenza trasversale massima^a non deve superare il valore massimo 0.07.



Per trovare il valore esatto del raggio di curvatura si utilizza la seguente formula di equilibrio per il moto in curva:

$$\frac{v^2}{R} = g(q_l + f_t)$$

^a Ipotizzeremo di non avere pendenze trasversali.

Dove l'unico termine incognito è f_t (quota parte del coefficiente di aderenza impiegato trasversalmente), che viene ricavato dalle seguenti tabelle, ed assunto come primo tentativo pari a 0.19.

Velocità km/h	25	40	60	80	100	120	140
aderenza <u>trasy.</u> <u>max imp.</u> <u>f_t max</u> per strade tipo A, B, C, F extra urbane, e relative strade di servizio	-	0,21	0,17	0,13	0,11	0,10	0,09
aderenza <u>trasy.</u> <u>max imp.</u> <u>f_t max</u> per strade tipo D, E, F urbane, e relative <u>strade di servizio</u>	0,22	0,21	0,20	0,16	-	-	-

Sostituendo i valori si ottiene:

$$R = \frac{v^2}{g(q_t + f_t)} = \frac{13.89^2}{9.81(0.07 + 0.19)} = 75.71 \text{ m}$$

Adesso è possibile ricavare il fattore di scala A della clotoide, attraverso le tre verifiche indicate dalla normativa italiana (D.M. 6792/01):

- criterio 1: limitazione del contraccollo;
- criterio 2: Sovrapendenza longitudinale delle linee di estremità della carreggiata.^a
- criterio 3: Ottico.

Criterion 1 – Limitazione del contraccollo

Affinché lungo un arco di clotoide si abbia una graduale variazione dell'accelerazione trasversale non compensata nel tempo, fra il parametro A e la massima velocità di progetto V per l'elemento di clotoide deve essere verificata la relazione:

$$A \geq A_{min} = \sqrt{\frac{v^3}{c}} = \sqrt{\frac{13.89^3}{1.008}} = 51.56 \text{ m}$$

Dove

^a Non verrà analizzato ipotizzando strade con pendenze longitudinali nulle.

- c è il contraccolpo massimo pari a $c_{max} = \frac{50.4}{V} = \frac{50.4}{50} = 1.008$
- v è la velocità in m/s
- V è la velocità in km/h

La normativa permette di utilizzare un'equazione semplificata:

$$A \geq 0.021 \cdot V^2 = 52.5 \text{ m}$$

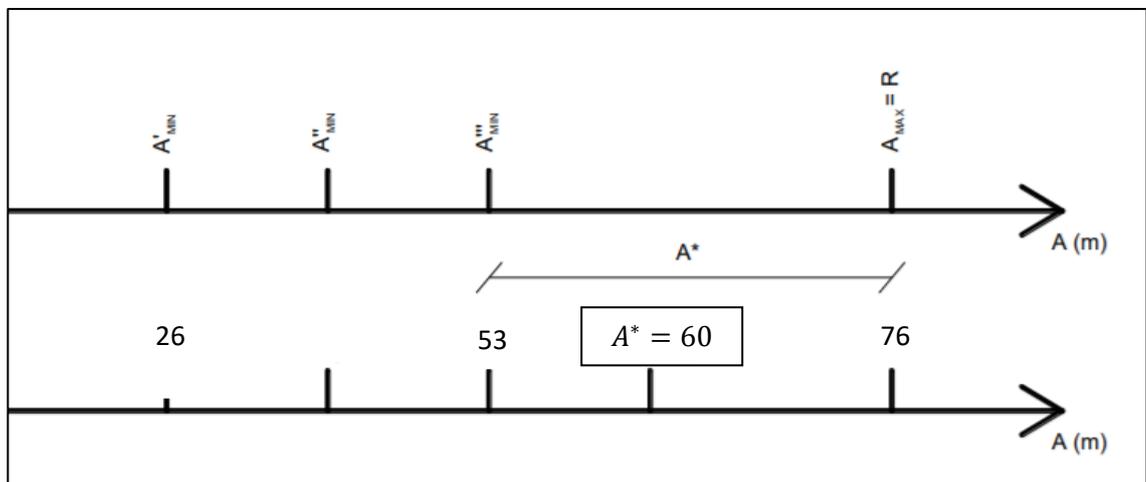
Criterion 3 – Ottico

Se parliamo di un veicolo autonomo progettato per percorrere strade realistiche progettate per la guida umana tale criterio deve essere verificato, quindi per garantire la percezione ottica del raccordo deve essere verificata la relazione:

$$A \geq \frac{R}{3} = \frac{76}{3} = 25.33 \text{ m}$$

Ed inoltre, per garantire la percezione dell'arco di cerchio alla fine della clotoide, deve essere verificata la seguente condizione:

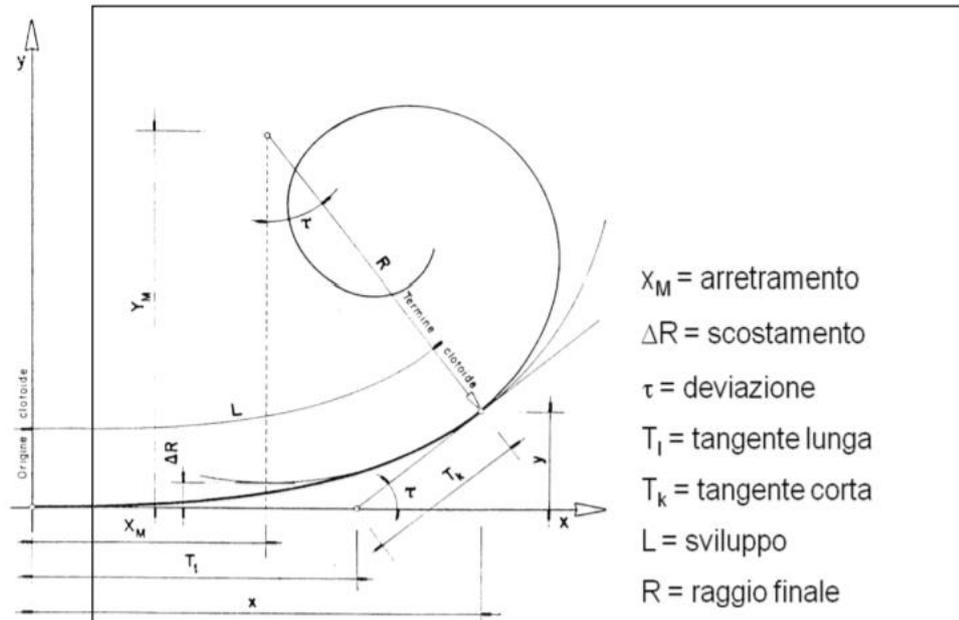
$$A \leq R = 76 \text{ m}$$



A questo punto si può scegliere un qualsiasi valore del fattore di scala compreso tra 53 m e 76 m; in tal caso si è scelto $A^* = 60 \text{ m}$.

Costruzione della clotoide di transizione

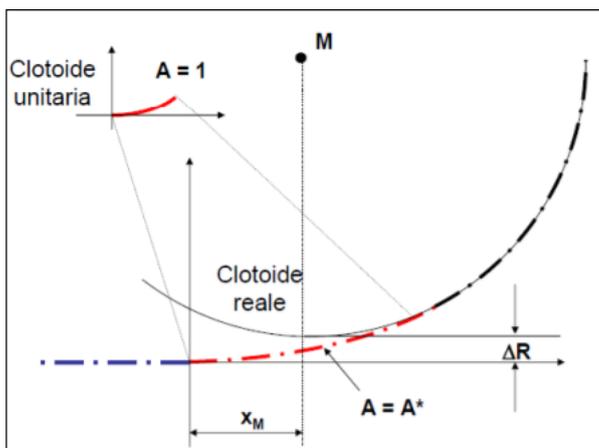
È ora possibile procedere con il vero e proprio dimensionamento della clotoide di transizione, di cui si riporta di seguito una figura:



Bisogna innanzitutto calcolare l'angolo di deviazione con la seguente formula:

$$\tau = \frac{s}{2r} = \frac{A^2}{2r^2} = \frac{60^2}{2 \cdot 76^2} = 0.312 \text{ rad} \rightarrow 17.885^\circ$$

A questo punto si utilizzano le tabelle della clotoide unitaria per ricavare gli altri parametri di dimensionamento della clotoide stessa.



Dato che nella tabella non si trova un valore dell'angolo di deviazione uguale a quello ricavato, se ne prende uno leggermente superiore (oppure si procede interpolando linearmente i valori):

$$\tau = 17.904931^\circ$$

Ciò comporta che il raggio dell'arco di cerchio sarà leggermente inferiore ai

26 m, ma le verifiche imposta sono comunque soddisfatte.

Entrando, quindi, nella tabella ricaviamo i valori per la clotoide unitaria:

s	σ	x_f	y_f	x_M	y_M	Δr	t_x	t_y	r	σ'	I_c
0.745	17.666994	0.739283	0.068537	0.371546	1.359463	0.017182	0.498685	0.250169	1.342282	5.885152	0.742453
0.750	17.904931	0.744089	0.069916	0.374013	1.350862	0.017529	0.502088	0.251899	1.333333	5.964306	0.747367

E moltiplicandoli per il fattore di scala A, si ottiene:

$$R = r \cdot A = 1.33333 \cdot 60 = 80 \text{ m}$$

$$L = x_f \cdot A = 0.744089 \cdot 60 = 44.645 \text{ m}$$

$$y = y_f \cdot A = 0.069916 \cdot 60 = 4.195 \text{ m}$$

$$x_M = x_{M,1} \cdot A = 0.374013 \cdot 60 = 22.441 \text{ m}$$

$$\Delta R = \Delta r \cdot A = 0.017529 \cdot 60 = 1.052 \text{ m}$$

$$y_M = \Delta R + R = 1.052 + 80 = 81.052 \text{ m}$$

Per il tracciamento della clotoide, per punti, si divide la lunghezza L in n parti uguali calcolando l'angolo relativo a ciascuna parte e calcolando poi, con il metodo esatto, le coordinate x e y del punto.

Per fare ciò si andranno a determinare per ogni punto i valori di τ e quindi delle coordinate x e y associate:

i	A	R	L	τ	x	y
P	60	76	44.645	0.2897	44.645	4.195
1	60	76	2.976	0.001287	3.04465	0.001307
2	60	76	5.953	0.00515	6.0893	0.010453
3	60	76	8.929	0.011587	9.13393	0.035279
4	60	76	11.905	0.0206	12.17855	0.083623
5	60	76	14.882	0.032187	15.22314	0.163319
6	60	76	17.858	0.046349	18.26767	0.282192
7	60	76	20.834	0.063087	21.31214	0.448052
8	60	76	23.811	0.082399	24.3565	0.66868
9	60	76	26.787	0.104286	27.400747	0.951805
10	60	76	29.763	0.128748	30.444826	1.305099
11	60	76	32.740	0.155786	33.488706	1.736132
12	60	76	35.716	0.185398	36.532347	2.242345
13	60	76	38.692	0.217585	39.5757	2.8610
14	60	76	41.669	0.252347	42.62872	3.569159
15	60	76	44.645	0.2897	44.645	4.195

Il procedimento consiste quindi nel dividere l'arco della clotoide ricavata in N punti, di conseguenza ad ogni punto si andrà a determinare

$$\tau_N = \int_0^{\tau} d\tau = \int_0^s \frac{s \cdot ds}{A^2} = \frac{s_N^2}{2A^2}$$

E

$$\begin{cases} x_N = A\sqrt{2\tau} \cdot \left[\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\tau^{(2i-2)}}{(4i-3) \cdot (2i-2)!} \right] \\ y_N = A\sqrt{2\tau} \cdot \left[\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\tau^{(2i-1)}}{(4i-1) \cdot (2i-1)!} \right] \end{cases}$$

Tramite iterazione su foglio di calcolo Excel.

Di seguito viene mostrata la traiettoria per effettuare un inserimento in curva con raggio di curvatura di 76 m introducendo la clotoide definita nei calcoli precedenti:

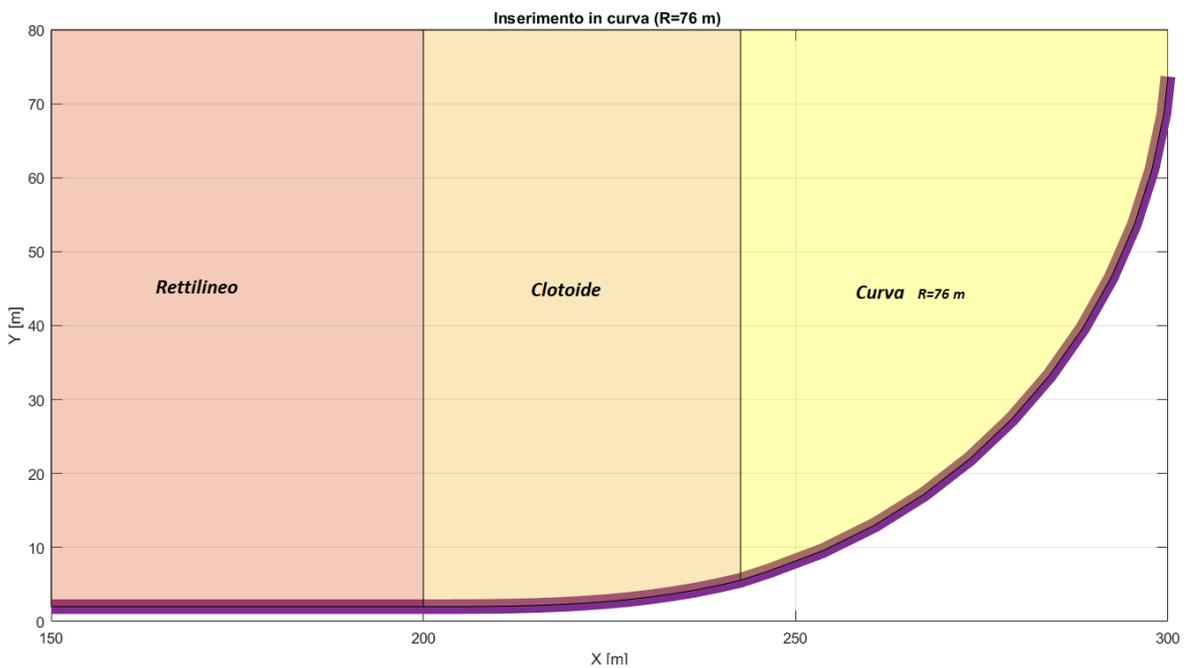


Fig. 3.7 – traiettoria di inserimento in curva

Interessante è effettuare un'analisi di sensitività al parametro A della clotoide in modo tale da capire come l'introduzione della clotoide e la sua caratteristica influenzi l'inserimento in curva del veicolo.

Per fare ciò andremo a definire diverse clotoidi realizzare con un valore diverso di A e focalizzeremo l'attenzione a come andrà a variare la risposta del veicolo nell'inserimento in curva.^a

Sono state effettuate diverse prove con valori del parametro A crescenti, rispettivamente 40,60 e 76.

In termini di accelerazione si è appunto verificato come all'aumentare del parametro A e quindi della lunghezza della clotoide si ha un andamento, in tal tratto, dell'accelerazione sempre più graduale dell'accelerazione laterale.

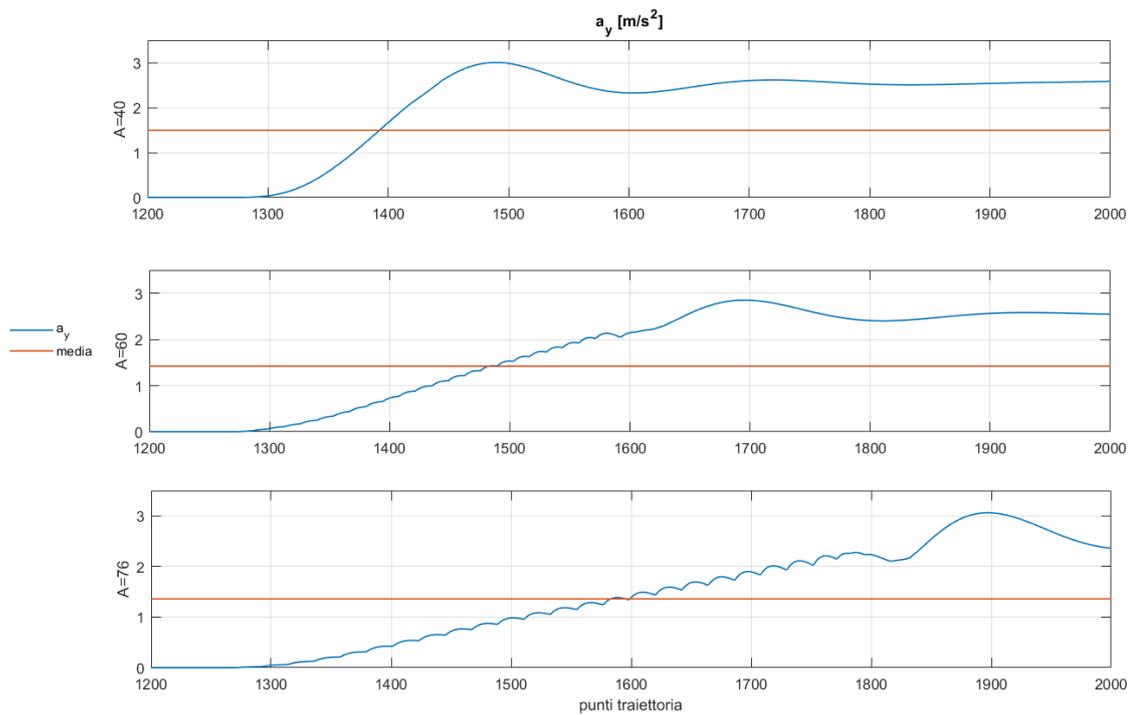


Fig. 3.8 – andamento accelerazione laterale al variare di A

Con un valore del parametro A pari a 40 m si ottiene un'accelerazione media di manovra pari a $1.494 \frac{m}{s^2}$, incrementandolo fino a 60 m si ottiene una riduzione del 4.88 % fino a spingerci ad una riduzione di accelerazione laterale media per A=76 m del 9.5%.

Inoltre, dall'immagine si nota come la presenza del controllo risulta influenzare molto la trattazione; di conseguenza per un'analisi dettagliata relativa al comfort è necessario eliminare quelle frequenze che non risultano interessare la sensibilità del guidatore e quindi introdurre opportuni filtri che verranno analizzati successivamente.

^a Per fare ciò andremo ad anticipare il concetto di controllo di traiettoria del veicolo, che andremo ad analizzare nel dettaglio nel capitolo successivo.

3.6. Comfort di guida

Abbiamo introdotto precedentemente il concetto di comfort, il quale è ampiamente trattato dalle normative internazionali ISO 2631-1 [41] ed ISO 5349 [42].

Studi epidemiologici e sperimentali consolidati a livello italiano e internazionale hanno dimostrato che una prolungata esposizione ad elevati livelli di vibrazioni può provocare importanti disturbi e lesioni a carico degli arti superiori e della colonna vertebrale.

Gli effetti avversi delle vibrazioni al corpo intero possono avvenire nel range delle frequenze medio-basse; studi mostrano che il sovraccarico biomeccanico della colonna vertebrale dovuto a fenomeni di risonanza avviene per frequenze di vibrazione tra i 4 e i 10 Hz. Tali normative offrono metodiche valutative del rischio da esposizione a vibrazioni e si differenziano per il tipo di vibrazione e per la zona del corpo in esposizione. In particolare, la ISO 2631-1 riguarda le vibrazioni trasmesse all'intero corpo, mentre la ISO 5349 analizza le vibrazioni trasmesse al braccio e mano.

Le vibrazioni sono molto complesse contenendo molte frequenze e propagandosi in diverse direzioni e nel tempo. L'effetto dell'esposizione meccanica alle vibrazioni sui passeggeri viene valutato tramite l'analisi di Whole Body Vibrations (WBV). I parametri dell'esposizione alla WBV vengono ricavati ponderando i valori delle accelerazioni ottenute sulla superficie del sedile utilizzando particolari filtri.

Dopo aver misurato, tramite opportuni accelerometri, l'accelerazione subita dal corpo umano nel dominio del tempo, essa deve essere ponderata attraverso l'utilizzo di appositi filtri ricavati sperimentalmente.

Le metodiche si basano sulla misura della grandezza fisica espressa dalla seguente equazione:

$$a_{rms} = \sqrt{\left(\frac{1}{T} \int_0^T a_w^2(t) dt\right)} \quad (3.12)$$

Dove

- a_w è il generico segnale di accelerazione pesata in funzione del tempo
- a_{rms} è il valore r.m.s. dell'accelerazione ponderata
- T è la durata della misurazione in secondi

L'analisi rms può essere effettuata inoltre nel dominio in frequenza; quindi, l'accelerazione in ingresso nel dominio del tempo viene trasformata in frequenza in bande di un terzo di ottava secondo le specifiche della normativa IEC 1260 [10] e successivamente filtrata, ottenendo la formula seguente:

$$a_w = \sqrt{\left[\sum_i (W_i a_i)^2 \right]} \quad (3.13)$$

Dove:

- a_w è l'accelerazione rms in frequenza filtrata
- W è il fattore di ponderazione per la i -esima banda di 1/3 di ottava
- a_i è l'accelerazione rms per l' i -esima banda di 1/3 di ottava

Tale rms deve essere calcolato per ogni direzione di misura, a ciascuna delle quali si applica una diversa ponderazione. Le vibrazioni vengono misurate nel punto in cui si ritiene che entrino nel corpo umano, quindi in questo caso considereremo quelle che si sviluppano tra il sedile e la persona.

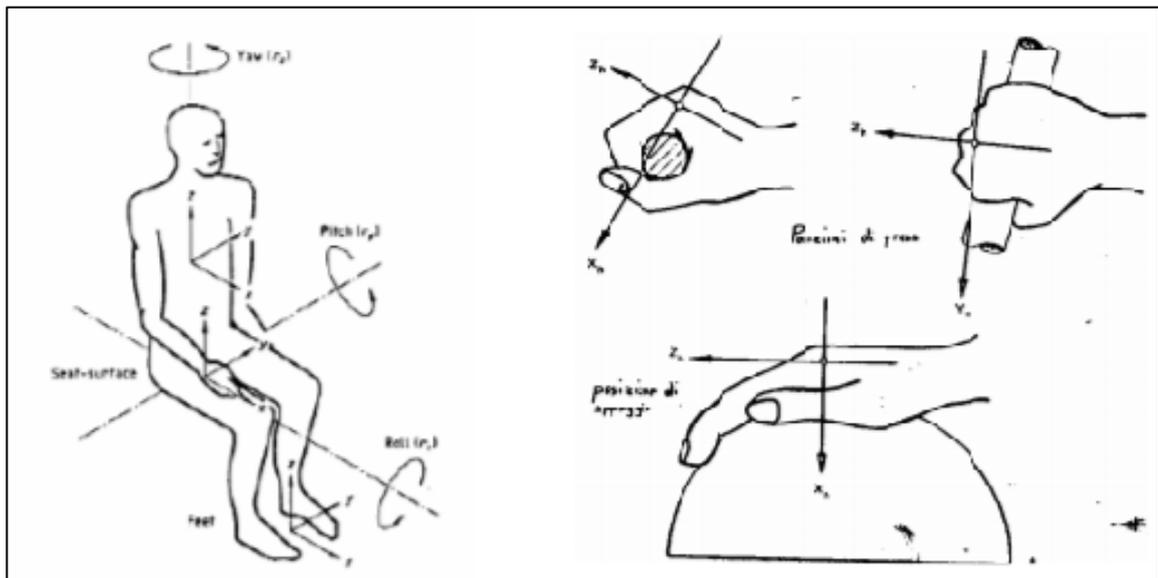


Fig. 3.9 – direzione di misura indicata da normativa

In figura si riportano le direzioni di misura indicate dalle normative. Lo scopo della ponderazione è quello di evidenziare determinate frequenze particolarmente fastidiose per il corpo umano, rispetto ad altre meno nocive, o impercettibili. La presenza della ponderazione genera un decremento delle ampiezze a partire dai 10 Hz e al di sotto dei 4 Hz.

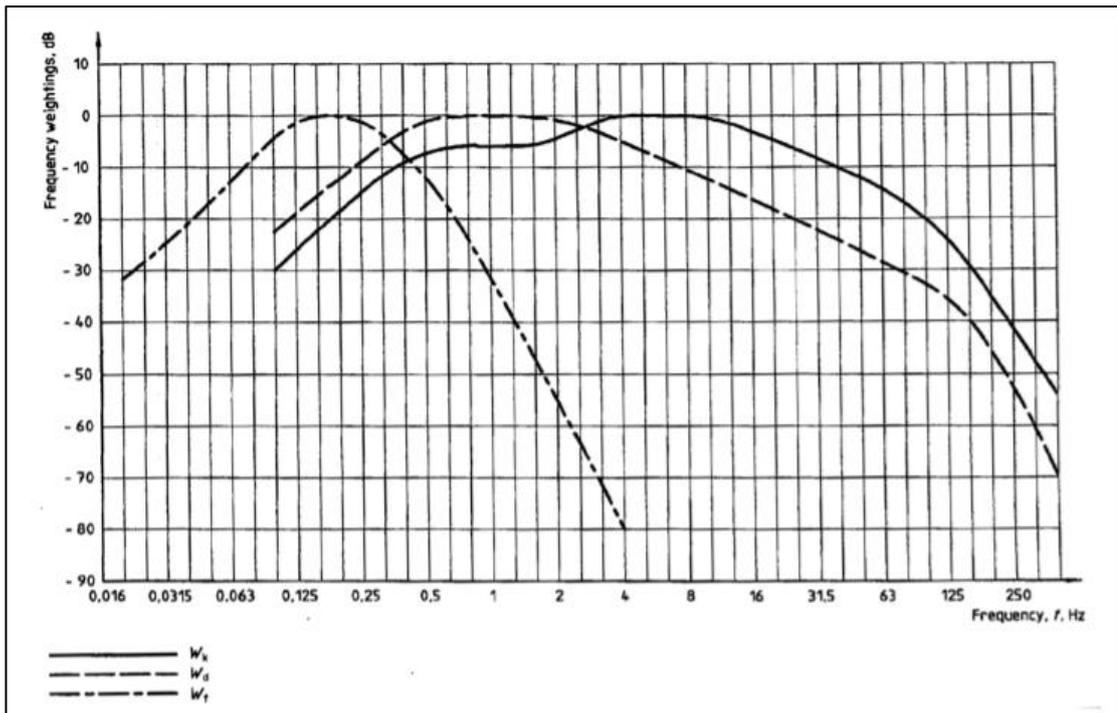


Fig. 3.10 – L'immagine descrive gli andamenti dei diversi filtri. Nella ponderazione delle frequenze vengono utilizzati filtri che limitano la banda (passo alto a 0.4 Hz e passa basso a 100 Hz).

I principali filtri per ponderare le frequenze relative a salute, comfort e percezione sono i seguenti:

- W_k per la direzione z, in direzione verticale
- W_d per gli assi x e y
- W_e per la misurazione di vibrazioni riferite alla rotazione

Secondo la norma ISO 2631 dopo aver calcolato i valori di rms mediate nelle tre direzioni di misura, il valore totale di vibrazioni a cui è esposto il corpo si ottiene mediante la media pesata indicata come segue:

$$a_{WBV,t} = \sqrt{a_{W,x}^2 + a_{W,y}^2 + a_{W,z}^2} \quad (3.14)$$

A differenza di quanto accade per l'analisi della salute del passeggero, non ci sono differenze tra le direzioni.

È possibile definire una classificazione del comfort in base al valore di rms dell'accelerazione equivalente ponderata in frequenza:

$a_{WBV,t}$	{	$< 0.315 \frac{m}{s^2}$	Confortevole
		$da\ 0.315 \frac{m}{s^2}\ a\ 0.63 \frac{m}{s^2}$	Poco confortevole
		$da\ 0.5 \frac{m}{s^2}\ a\ 1 \frac{m}{s^2}$	Leggermente confortevole
		$da\ 0.8 \frac{m}{s^2}\ a\ 1.6 \frac{m}{s^2}$	Non confortevole
		$da\ 1.25 \frac{m}{s^2}\ a\ 2.5 \frac{m}{s^2}$	Molto sconfortevole
		$> 2 \frac{m}{s^2}$	Estremamente sconfortevole

3.6.1. Realizzazione Filtro

Andremo ora a descrivere il procedimento e le formule utilizzate per la creazione dei filtri^a da utilizzare per l'analisi rms sopra descritta.

La realizzazione del filtro si ottiene componendo quattro distinte parti descritte dalla normativa:

- Funzione filtro passa alto
- Funzione filtro passa basso
- Transizione accelerazione – velocità
- Upward step

Il modulo della funzione di trasferimento del *filtro passa alto* è la seguente:

$$|Hh(p)| = \left| \frac{1}{1 + \sqrt{2} \frac{\omega_1}{p} + \left(\frac{\omega_1}{p}\right)^2} \right| \quad (3.15)$$

Dove:

- $\omega_1 = 2\pi f_1$
- $p = j2\pi f$
- f è il range di frequenza utilizzato per la funzione [0.1 – 400 Hz]
- f_1 è la frequenza di taglio del filtro in Hz per la quale si ha un'attenuazione dell'ampiezza di -3db ed uno sfasamento di 90°

^a Seguirà la trattazione della realizzazione del filtro W_d relativo alle accelerazioni laterali e longitudinali; nel nostro caso andremo a trascurare le accelerazioni verticali.

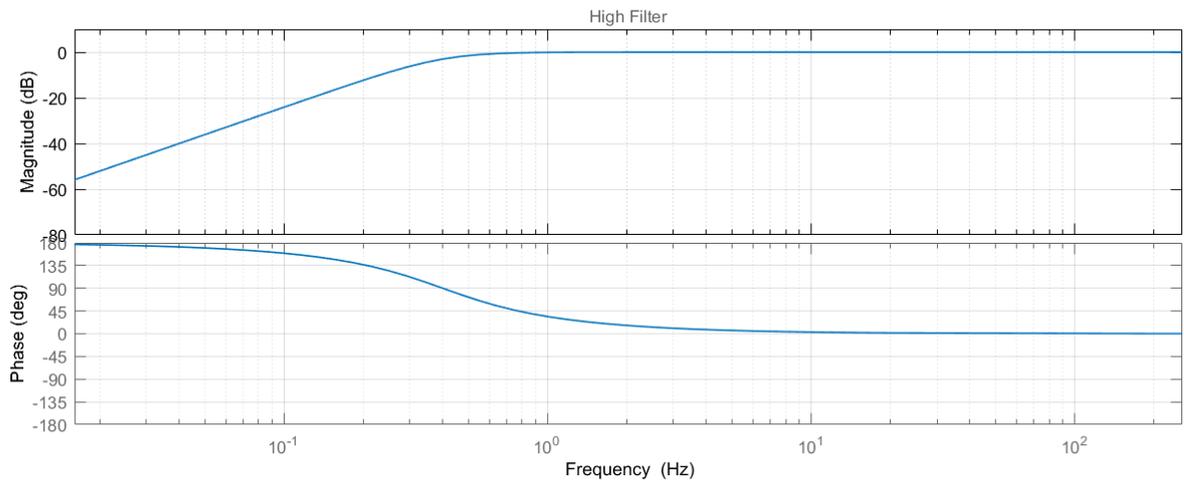


Fig. 3.11 – filtro passa alto, esso permette il passaggio delle frequenze superiori alla frequenza di taglio mentre attenua e sfasa quelle inferiori.

Per quanto riguarda il *filtro passa basso*, la funzione è la seguente:

$$|Hl(p)| = \left| \frac{1}{1 + \sqrt{2} \frac{p}{\omega_2} + \left(\frac{p}{\omega_2}\right)^2} \right| \quad (3.16)$$

Dove

- $\omega_2 = 2\pi f_2$

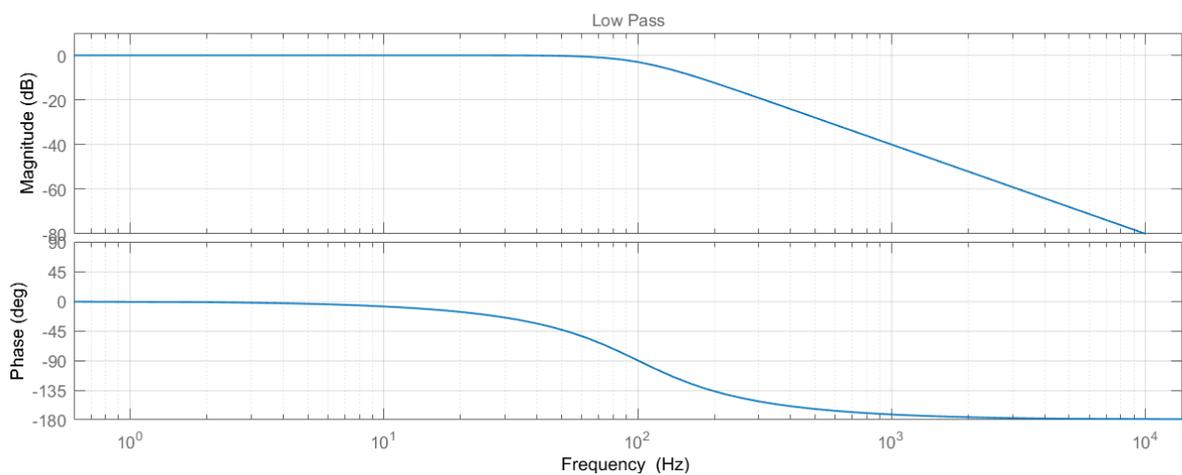


Fig. 3.12 – filtro passo basso, in cui la frequenza di taglio è di 100 Hz.

La funzione di *transizione accelerazione – velocità* è una funzione proporzionale all'accelerazione per basse frequenze e proporzionale alle alte con la velocità; la funzione di trasferimento è la seguente:

$$|Ht(p)| = \left| \frac{1 + \frac{p}{\omega_3}}{1 + \frac{p}{Q_4 \cdot \omega_4} + \left(\frac{p}{\omega_4}\right)^2} \right| \quad (3.17)$$

Dove:

- $\omega_3 = 2\pi f_3$
- $\omega_4 = 2\pi f_4$

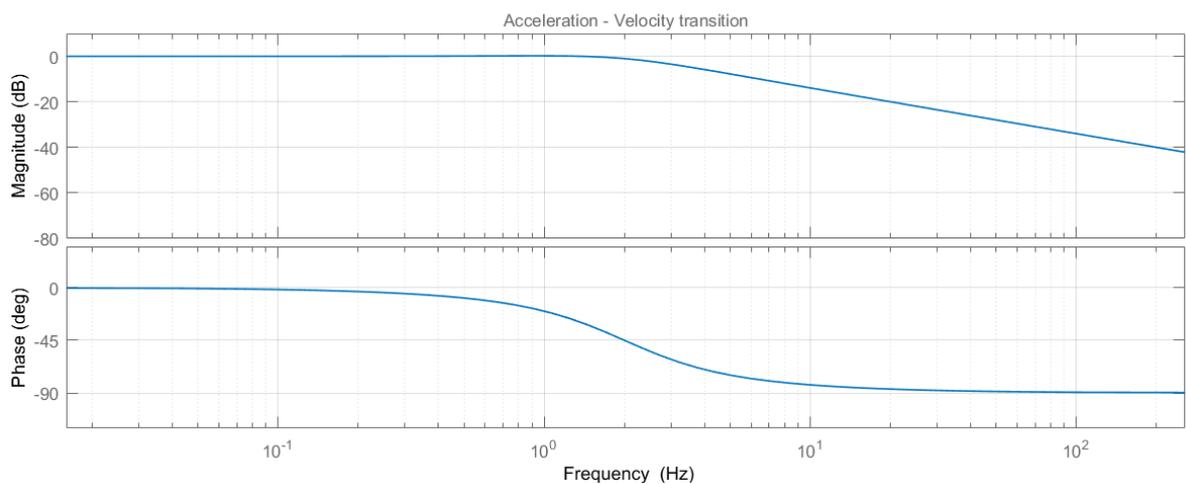


Fig. 3.13 – andamento filtro transizione accelerazione-velocità

Infine, la formula per l'Upward step è la seguente:

$$|Hs(p)| = \left| \frac{1 + \frac{p}{Q_5 \cdot \omega_5} + \left(\frac{p}{\omega_5}\right)^2}{1 + \frac{p}{Q_6 \cdot \omega_6} + \left(\frac{p}{\omega_6}\right)^2} \cdot \left(\frac{\omega_5}{\omega_6}\right)^2 \right|_a \quad (3.18)$$

Dove:

- $\omega_5 = 2\pi f_5$
- $\omega_6 = 2\pi f_6$

Dalla normativa è possibile ricavare le varie costanti precedentemente analizzate per le varie tipologie di vibrazione:

^a Hs(p)=1 per W_d e W_e

Filtro	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	Q_4	Q_5	Q_6
W_k	0.4	100	12.5	12.5	2.37	3.35	0.63	0.91	0.91
W_d	0.4	100	2.0	2.0	Inf.	Inf.	0.63	0	0
W_e	0.4	100	1.0	1.0	Inf.	Inf.	0.63	0	0

Tab. II – costanti per funzione di trasferimento Upward step

La funzione di trasferimento finale per il filtro definitivo è ottenuta moltiplicando le quattro funzioni precedentemente descritte.

Quindi, la funzione utilizzata sarà data dalla seguente espressione:

$$H = H_h \cdot H_l \cdot H_t \cdot H_s \quad (3.19)$$

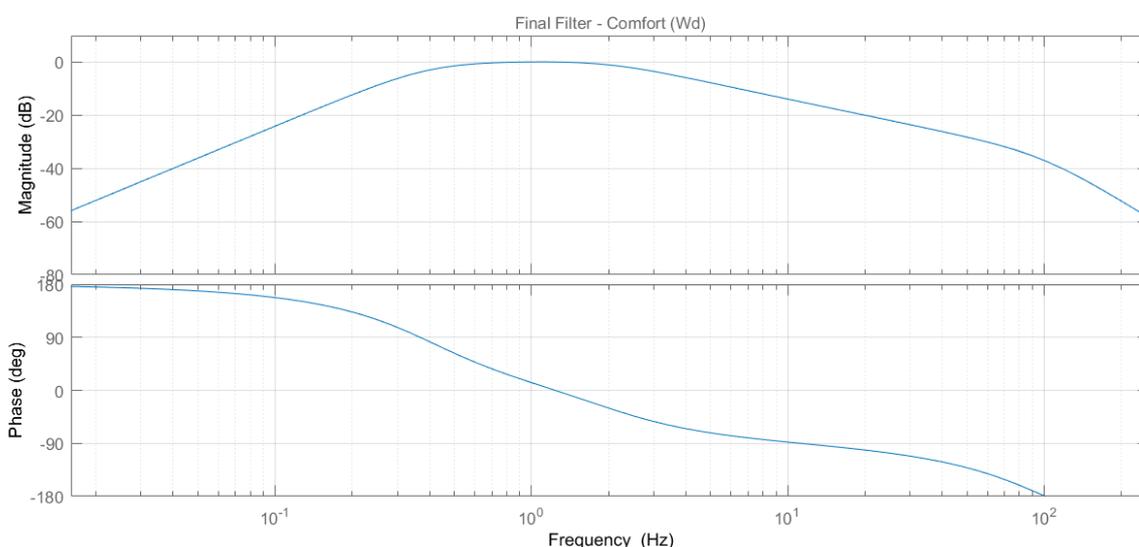


Fig. 3.14 – andamento del fattore di ponderazione

3.6.3. – Analisi in frequenza e bande di ottava

Generalmente i dati sono disponibili nel dominio del tempo, però per effettuare l'analisi secondo la normativa ISO è necessario passare nel dominio delle frequenze ricavando uno spettro del segnale accelerometrico caratterizzato da una suddivisione dell'asse delle frequenze in bande di 1/3 di ottava. Lo spettro è una rappresentazione grafica su un diagramma cartesiano che presenta in ascissa le frequenze ed in ordinata una grandezza rappresentativa dell'ampiezza della vibrazione.

Un metodo per effettuare l'analisi in frequenza dei segnali prevede l'utilizzo di una serie di filtri passa banda (come i filtri di ottava) che permettono il passaggio solo di un determinato range di frequenze, escludendo le componenti di vibrazioni a frequenze maggiori e minori.

Graficamente è possibile rappresentare un filtro passa-banda con una zona in cui il guadagno è pressoché costante e pari a 0 dB (*banda efficace* Δf) e con due zone esterne alla prima, in cui il guadagno è trascurabile. La banda efficace è compresa tra f_1 e f_2 , dette

frequenze di taglio, con un guadagno $G(f_1) = G(f_2) = -3$ dB; mentre definiremo frequenza di centro banda f_c con guadagno $G(f_c) = 0$ dB.

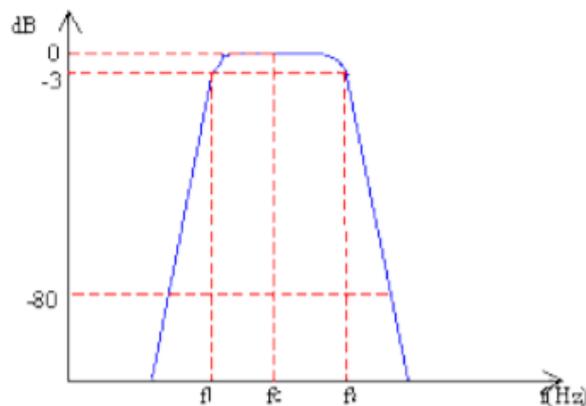


Fig. 3.15 – schema grafico filtro passa-banda

Teoricamente, un filtro ideale dovrebbe avere come curva del guadagno un impulso rettangolare, ma essendo il dispositivo realizzato con componenti passivi i fronti di salita e di discesa non potranno mai essere perfettamente verticali. La pendenza dei fronti della caratteristica deve comunque essere contenuta all'interno di una tolleranza definita dall'I.E.C [11].

Si definisce quindi l'ottava come intervallo in cui la frequenza minima f_1 e quella massima f_2 verificano la relazione:

$$f_2 = \sqrt{2}f_c$$

$$f_1 = \frac{f_c}{\sqrt{2}}$$

In sostanza, la frequenza massima è esattamente il doppio della minima.

In molte applicazioni vi è la necessità di usare filtri a banda più stretta (*a frazione d'ottava*), che mantengono sempre però la proporzione tra la larghezza di banda e la frequenza di centro banda:

$$\frac{\Delta f}{f_c} = \frac{f_2 - f_1}{f_c} = const \quad (3.20)$$

Tra questi, la più nota è quella di 1/3 di ottava, è caratterizzata dall'aver il rapporto tra la frequenza superiore e quella inferiore pari a $2^{\frac{1}{3}}$. Essa è caratterizzata dall'aver

$$\left| \begin{array}{l} \Delta f = 0.26 f_1 \\ f_c = 1.122 f_1 \\ \frac{\Delta f}{f_c} = 0.2357 \end{array} \right.$$

È possibile quindi definire la serie di filtri passa banda per l'analisi in 1/3 di ottava;

possiamo quindi definire per ogni banda la frequenza di centro banda f_c ottenuto come segue:

$$N = 3$$

$$FBN = x_{min}:1:x_{max}$$

$$f_c = 2^{\frac{FBN}{N}}$$

Dove

- N indica il numero di banda per ottava
- FBN indica il range di bande contenuto dalla normativa ISO 2631-1

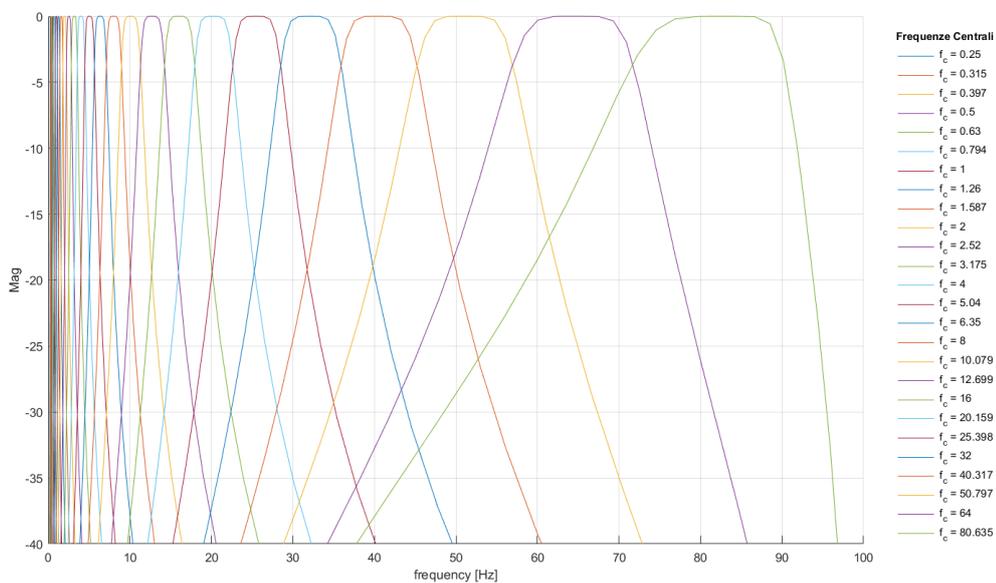


Fig. 3.16 – serie di filtri da 1/3 di ottava

Quindi, adesso definito un valore dell'accelerazione laterale del veicolo, a seguito di una determinata manovra^a, andremo ad analizzare lo spettro in terze di ottava ottenuto trasformando l'accelerazione dal dominio del tempo al dominio delle frequenze.

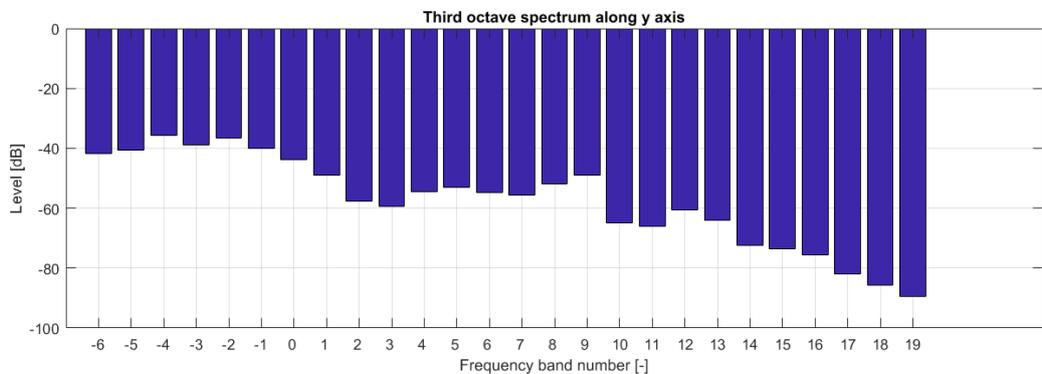


Fig. 3.17 - analisi spettro in terze di ottava

^a Si effettuerà una manovra di inserimento in curva (R=76m) ad una velocità di 50 km/h con un controllo di inseguimento di traiettoria tramite logica Pure Pursuit

Sulla base di tale spettro è possibile effettuare l'analisi del comfort, andando quindi ad attenuare il segnale con i valori di ponderazione della normativa per poi ricavare il valore di rms.

$$a_{w,y} = 0.025 \frac{m}{s^2}$$

E quindi non abbiamo una condizione sconfortevole.

Tale analisi è stata effettuata, definendo una curva variabile per favorire l'inserimento in curva col parametro A=60. Possiamo quindi vedere come varia, in termini di comfort, tale condizione al variare di tale parametro; le analisi effettuate sono identiche a quanto descritte, di conseguenza andremo a definire il valore di rms al variare di tale parametro, come segue:

A	$a_{w,y}$	<i>Risultato</i>
40	0.053	Confortevole
60	0.025	Confortevole
76	0.029	Confortevole



Capitolo IV – Sistemi di controllo

La necessità di realizzare un veicolo di livello 4-5 in grado di gestire in alta/completa autonomia il trasporto richiede la capacità di definire la traiettoria, tramite opportuna sensoristica, di azionare acceleratore, freni e sterzo per seguire correttamente la traiettoria imposta grazie a sistemi di controllo basati su modelli geometrici, cinematici e dinamici analizzati in maniera oculata da Snider [8] ed infine l'implementazione di una logica di controllo in grado di determinare ostacoli, statici e dinamici, e ricalcolare opportune traiettorie alternative in grado di evitare la collisione.

In tale capitolo verranno definiti nel dettaglio i vari modelli di controllo presenti in letteratura, quali modello Pure-Pursuit, Stanley 'method [16] e modello Ibrido [21], per il controllo della traiettoria. Successivamente, si andrà a realizzare un modello in ambiente Matlab-Simulink.

Modelli di Path-Tracking

Uno dei più importanti e popolari classi di metodi di path-tracking è quello basato su relazioni geometriche tra il veicolo ed il percorso richiesto.

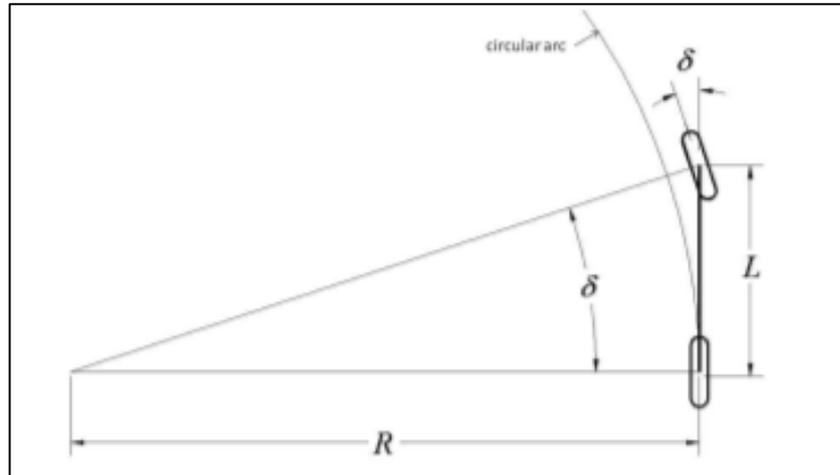


Fig. 4.1 – Modello geometrico a bicicletta

In un'analisi puramente geometrica è possibile definire un modello semplificato di veicolo, sintetizzando il comportamento dell'avantreno e del retrotreno con una singola ruota all'anteriore ed una al posteriore come in Fig.1.

Altra semplificazione è che il veicolo può muoversi solo in un piano, ciò permette di definire una relazione geometrica tra l'angolo di sterzo della ruota anteriore e la curvatura R

$$\tan(\delta) = \frac{L}{R}$$

4.1 Pure Pursuit

Consiste nel calcolo geometrico della curvatura di un arco circolare che collega la posizione dell'assale posteriore al punto di riferimento situato sul percorso desiderato

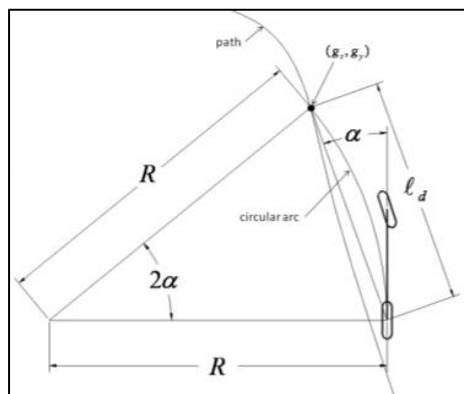


Fig. 4.2 – geometria Pure Pursuit

Il punto obiettivo sulla traiettoria è determinato dalla distanza l_d .

L'angolo di sterzo δ è ottenuto applicando la legge dei seni

$$\frac{l_d}{\sin(2\alpha)} = \frac{R}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}$$

$$\frac{l_d}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)} = \frac{R}{\cos(\alpha)}$$

e quindi

$$\frac{l_d}{\sin(\alpha)} = 2R$$

Dalla quale è possibile determinare la curvatura dell'arco (4.1) e quindi l'angolo di sterzo

$$\rho = \frac{2\sin(\alpha)}{l_d} \quad (4.1)$$

$$\delta = \tan^{-1}(\rho L) \quad (4.2)$$

Combinando l'equazione (4.1) e (4.2) si ottiene la legge di controllo:

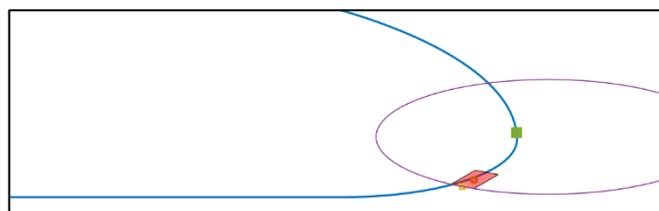
$$\delta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{2L\sin(\alpha(t))}{l_d}\right) \quad (4.3)$$

Semplificando, la legge di controllo può essere riscritta scalando la distanza l_d , che è comunemente saturata con un minimo valore di 3m ed un valore massimo di 25m, con la velocità longitudinale del veicolo; risultando:

$$\delta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{2L\sin(\alpha)}{kv_x(t)}\right) \quad (4.4)$$

Dove k risulta essere un parametro di tuning del controllo; aumentando k aumenta anche l_d e l'inseguimento della traiettoria diventa sempre meno oscillatorio.

Si è realizzato un modello di controllo dell'angolo volante seguendo le leggi del Pure Pursuit; si definiranno nelle pagine seguenti gli script usati per la realizzazione della traiettoria, della bolla e del punto sulla traiettoria alla distanza l_d base di analisi di tale logica per definire l'angolo volante da impartire.



Prima di definire nel dettaglio l’algoritmo utilizzato e le problematiche, è ben dire che si sta effettuando uno studio su un modello lineare del veicolo a velocità costante.

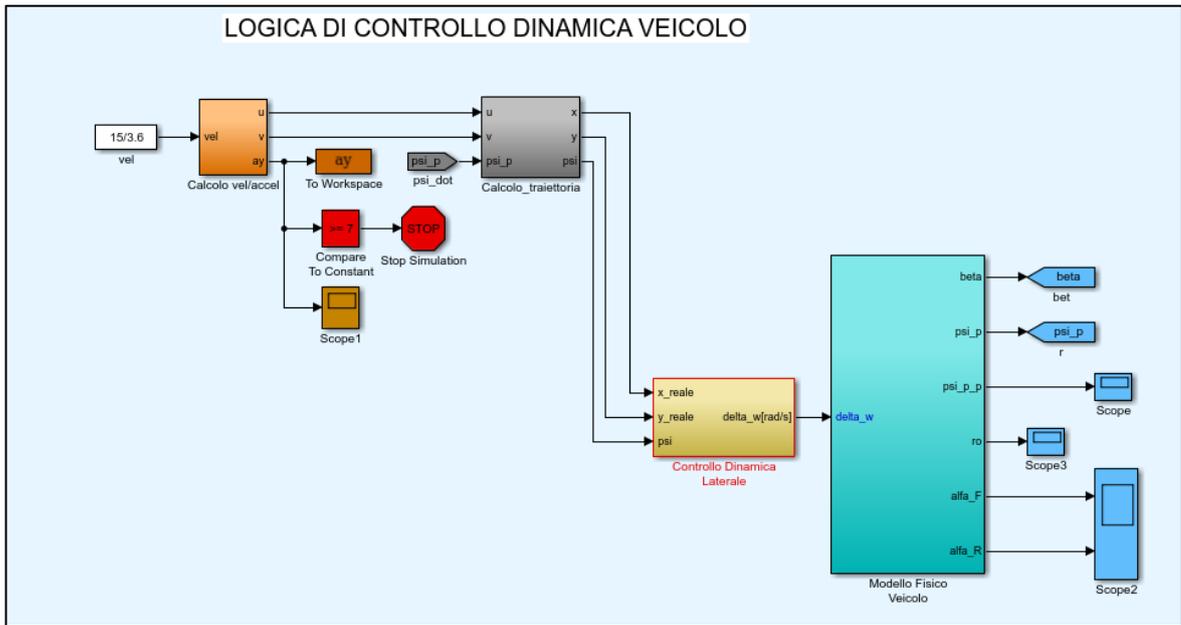


Fig. 4.3 – modello Simulink

Innanzitutto, si è definita una Traiettoria di riferimento costituito da un rettilineo iniziale di 20 m per poi eseguire una curva con raggio R (30 m) e con elemento di raccordo tra le parti.

```

%% Traiettoria Riferimento

t=0:0.01:pi/2;

x_rif=[R*cos(t)]';
y_rif=[r+R*sin(t)]';

x_rett=[0:0.1:(R-r)]';
y_rett=[zeros(length(x_rett),1)];
cord_rett=[x_rett,y_rett];

t=-pi/2:0.01:0;

x_racc=[(R-r)+r*cos(t)]';
y_racc=[r+r*sin(t)]';
cord_racc=[x_racc,y_racc];

cord=[cord_rett;
      x_racc(:),y_racc(:);
      x_rif(:),y_rif(:)]; % punti della traiettoria.

figure
plot(cord(:,1),cord(:,2),'LineWidth',2)
hold on
cordx=cord(:,1);
cordy=cord(:,2);
    
```

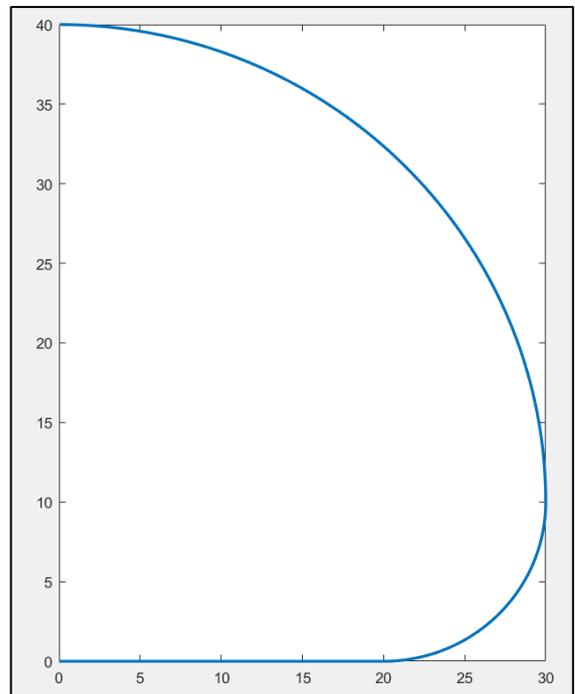


Fig. 4.4 - script utilizzato per la traiettoria (sx) e traiettoria (dx)

Per ridurre il peso computazionale, è necessario definire una “bolla” intorno al veicolo in modo tale da effettuare le analisi solo in pochi punti interni ai limiti definiti dalla stessa.

Innanzitutto, è necessario definire una circonferenza di un determinato raggio *radius* realizzata in modo tale che il centro non sia il baricentro ma leggermente spostato in avanti in modo tale che la bolla vada a prendere solo punti anteriori al retrotreno in tal modo, si ha un'ottimizzazione del tutto).

```

X = X_G(cont1)+[-b a a -b]';
Y = Y_G(cont1)+[-Tf/2 -Tf/2 Tf/2 Tf/2]';
vert = [X,Y];
fac = [1 2 3 4];
hVeicolo = patch('Faces',fac,'Vertices',vert,'FaceColor','red','FaceAlpha',.5);
direction = [0 0 1];
xlim([X(1)-5 X(2)+3]);
ylim([Y(1)-5 Y(3)+3]);

hold on

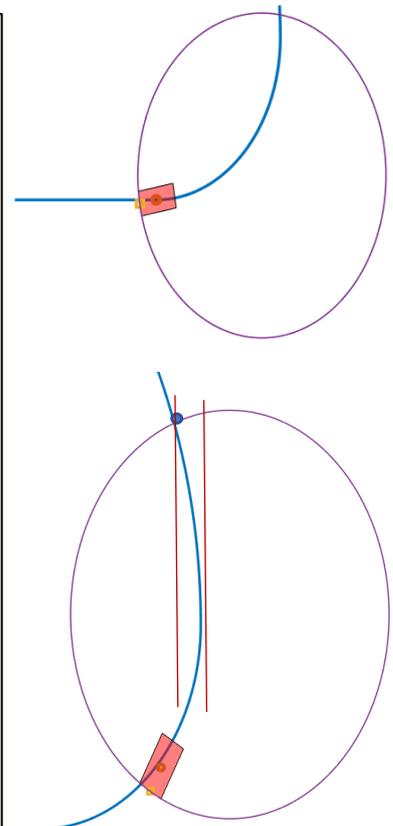
x0 = X_G(cont1);
y0 = Y_G(cont1);

plot(x0,y0,'o','LineWidth',3,'MarkerSize',5)

z0 = 0;
ORIGIN = [x0,y0,z0];
rotate(hVeicolo,direction,psi(cont1,2),ORIGIN);
hold on

t=linspace(0,2*pi,length(cord));
x_r=(x0-b*cos(psi(cont1,2)*pi/180));
y_r=(y0-b*sin(psi(cont1,2)*pi/180));
plot(x_r,y_r,'square','LineWidth',3)
hold on
x_b=[((x0-b*cos(psi(cont1,2)*pi/180))+radius*cos(psi(cont1,2)*pi/180)+radius*cos(t))];
y_b=[((y0-b*sin(psi(cont1,2)*pi/180))+radius*sin(psi(cont1,2)*pi/180)+radius*sin(t))];
plot(x_b,y_b,'LineWidth',1)

```



Adesso, è necessario trovare un algoritmo in grado di determinare i punti interni alla bolla. In tal modo, non essendoci in Matlab funzioni in grado di effettuarlo si è deciso di implementare il seguente algoritmo.

Innanzitutto, è stato necessario realizzare un algoritmo per definire i punti di intersezione^a e successivamente è stato pensato un algoritmo in modo tale da determinare i punti della traiettoria di riferimento tra questi due valori limiti. La realizzazione di questo algoritmo è stata abbastanza ostica e forse troppo complesso per la sua semplicità, ciò è dovuto alla presenza della zona di raccordo, in quanto come è possibile vedere nella figura sovrastante nel caso in cui la bolla definisce un limite superiore con coordinata x minore della massima coordinata interna alla bolla, sarebbero nati dei problemi di non acquisizione dei punti con coordinate appartenenti alla zona definita dalle due linee rosse.

^a Ciò in quanto il comando polxypoly di matlab da problemi di lettura/esecuzione nel blocco Simulink Matlab Function utilizzato per il controllo.

```

indicatore=zeros(length(cord(:,1)),1);

%%il ciclo è definito da cicli for e if; innanzitutto si ha un primo ciclo
%%for per definire iterativamente i vari punti della traiettoria di
%%riferimento. Estraggo ad ogni ciclo le coordinate x,y della stessa e le
%%confronto con le coordinate della bolla (for k=1:length(x_b)).
%%se le coordinate differiscono di un minimo di 0.1 allora dico
%%all'indicatore di mettere un riconoscimento (1) altrimenti resta (0).
%%Quindi laddove ho 1 vuol dire che il punto è prossimo al valore di
%%intersezione e viceversa.

for i=1:length(cord)
    cordx=cord(i,1); %x  traiettoria
    cordy=cord(i,2); %y  traiettoria

    for k=1:length(x_b)
        if abs((cordy-y_b(k))<0.2
            if abs((cordx-x_b(k))<0.2
                indicatore(i)=1;
            end
        end
    end
end

pp=find(indicatore==1);

XI=[cord(pp(1),1);cord(pp(end),1)];
YI=[cord(pp(1),2);cord(pp(end),2)];

XI=sort(XI);
YI=sort(YI);

%Estraggo dalla traiettoria di riferimento, solo quei punti interni alla
%bolla di riferimento, per alleggerire il peso computazionale
%Ho due limiti [XI(1),XI(2)] e [YI(1),YI(2)]
cord_new=zeros(length(cord),2);
mas=max(cord(:,1));

for k=1:length(cord)
    if YI(1)==0 & YI(2)==0
        if cord(k,1)>XI(1) & cord(k,1)<XI(2)
            cord_new(k,:)=[cord(k,1),cord(k,2)];
        end
    elseif YI(1)==0 & YI(2)>0
        if cord(k,1)>XI(1) & cord(k,2)<YI(2)
            cord_new(k,:)=[cord(k,1),cord(k,2)];
        end
    elseif YI(1)>0 & YI(1)<=r
        if cord(k,2)>YI(1) & cord(k,2)<YI(2)
            cord_new(k,:)=[cord(k,1),cord(k,2)];
        end
    elseif YI(1)>r
        if cord(k,1)>XI(1) & cord(k,1)<XI(2) & cord(k,2)>YI(1) & cord(k,2)<YI(2)
            cord_new(k,:)=[cord(k,1),cord(k,2)];
        end
    end
end
end

```

Fig. 4.5 – script per definire i punti interni alla bolla

Definiti i punti interni, è necessario definire il punto interno alla traiettoria in cui (seguendo la legge Pure-Pursuit) la distanza tra il punto di riferimento e il retrotreno sia pari ad un valore l_d definito ex-ante. Definito il punto, è poi necessario calcolare l'angolo alfa tra la retta congiungente il punto definito P ed il retrotreno R e la retta congiungente R con l'avantreno F.

```

%% calcolo distanza Retrotreno - punti traiettoria

% Sia R=Retrotreno e P=punto traiettoria
dist_RP=sqrt((x_int-x_r).^2+(y_int-y_r).^2);

% calcolo punto con distanza pari a ld

[A,pos]=min(abs(dist_RP-ld));
cord_pp=[x_int(pos),y_int(pos)];
plot(cord_pp(1),cord_pp(2),'square')

% determino prima il minimo della funzione distanza tra il retrotreno e il
% punto sulla traiettoria meno ld voluto; in tal modo ottendo il punto con
% un valore di ld prossimo a quello voluto. Poi con la funzione min, ricavo
% la posizione della funzione dist_RP che genera tale valore minimo. Dato
% che tale funzione dist_RP dipende sostanzialmente da x_int e y_int allora
% ricavo i valori di x_int e y_int (cioè della traiettoria) che mi danno
% quel ld ricercato. Poi plotto tale punto sulla traiettoria di
% riferimento.

%% Calcolo angolo ALFA_pp tra P-R e F-R

%Ricordiamo le coordinate del punto della traiettoria
x_p=cord_pp(1);
y_p=cord_pp(2);

%le coordinate del Retrotreno
x_r=x_r;
y_r=y_r;

%le coordinate dell'avantreno
x_f=(x0+a*cos(psi(cont1,2)*pi/180));
y_f=(y0+a*sin(psi(cont1,2)*pi/180));

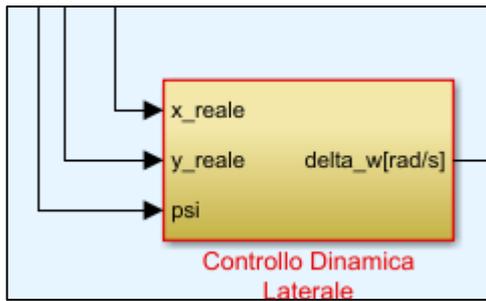
%le pendenze delle due rette saranno
m_PR=(y_p-y_r)/(x_p-x_r);
m_FR=(y_f-y_r)/(x_f-x_r);

%allora l'angolo ALFA sarà
alfa_pp=atan((m_PR-m_FR)/(1+m_PR*m_FR));%in radianti

```

Fig. 4.6 – script per calcolare il punto alla distanza l_d e calcolo di α

Tale algoritmo definito, per definire istante per istante l'angolo alfa necessario per calcolare l'angolo di sterzo da dare per seguire la traiettoria, è stato introdotto in ambiente Simulink tramite una Matlab Function.



Definite le coordinate reali del veicolo (x_g , y_g e φ) entro in tale Subsystem in cui è introdotta la Matlab Function con l’algoritmo prima discusso.

Tale Matlab Function avrà in ingresso oltre alle coordinate del veicolo, anche le coordinate della traiettoria e la lunghezza l_d (caratteristica del Pure Pursuit, con valori tra 3 e 25m).

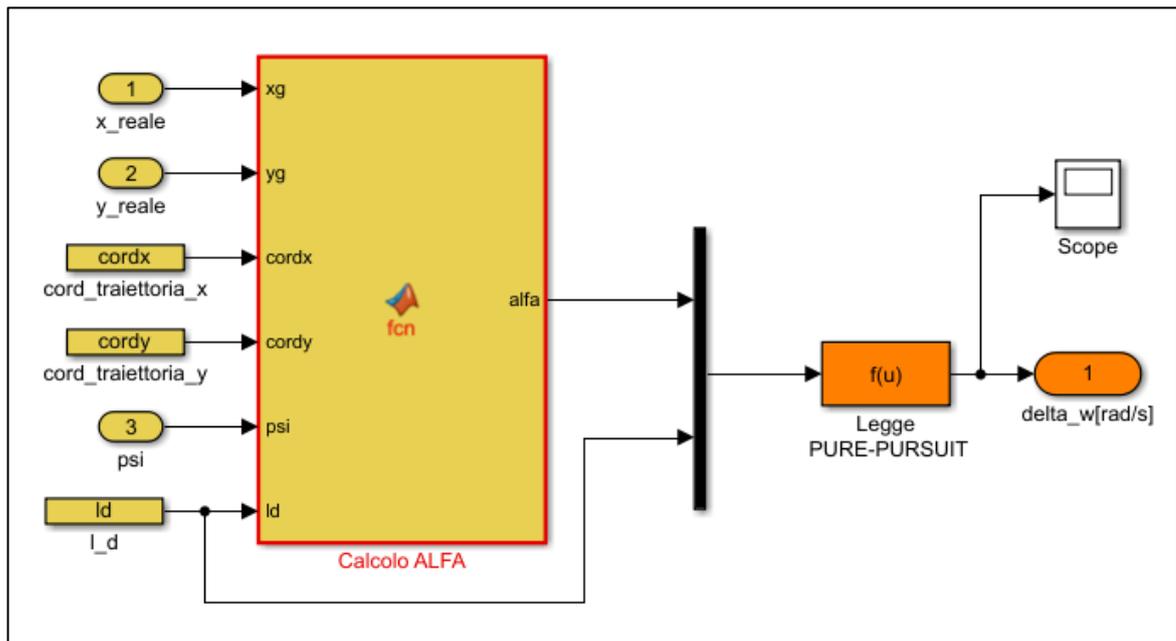


Fig. 4.7 – Subsystem “Controllo dinamica laterale”

In uscita, il modello restituirà il valore di alfa in radianti che permette di definire l’angolo di sterzo da dare alle ruote per garantire l’inseguimento di traiettoria.

Si è riuscito ad ottenere un buon inseguimento di traiettoria, come viene messo in luce nella successiva immagine, in gran parte della traiettoria con un maggiore errore nell’inserimento in curva che poi ad una leggera instabilità del sistema fino a stabilizzarsi seguendo la traiettoria a curvatura costante.

L’algoritmo utilizzato, sebbene riesca a dare un risultato risulta essere davvero molto pesante. In tal senso, il lavoro maggiore in tale ottica è stato effettuato nella ricerca di un algoritmo che permetta di ridurre il peso computazionale del modello evitando tempi di calcolo elevati, non gestibili in real-time.

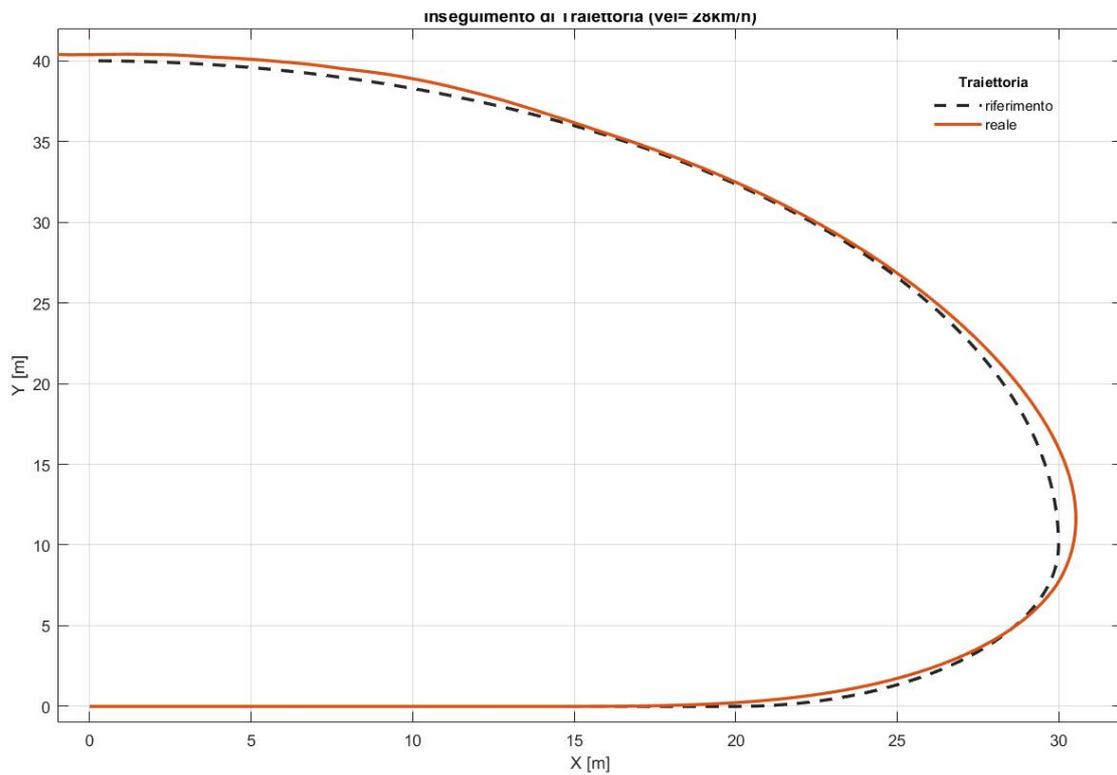
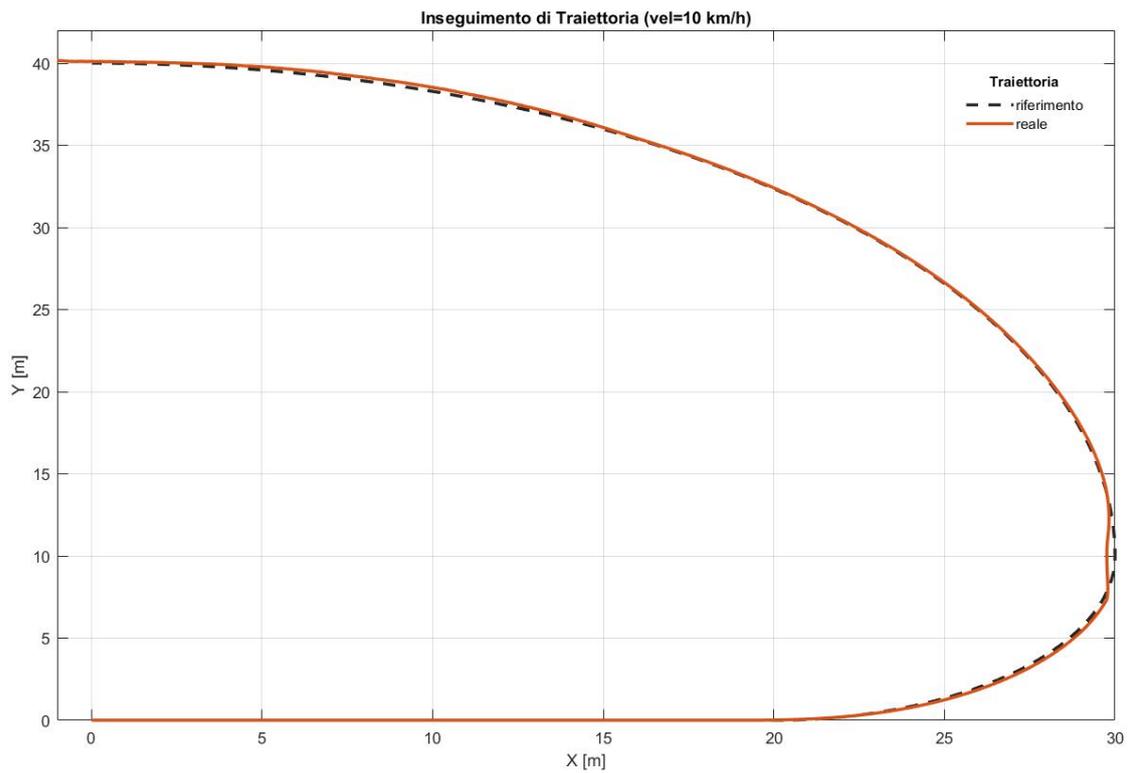


Fig. 4.8 – variazione della traiettoria reale percorsa al variare della velocità

Come si nota dalle immagini, all'aumentare della velocità peggiora l'accuratezza con la quale viene seguita la traiettoria di riferimento.

Infatti, andando ad effettuare la prova su una traccia numericamente più pesante^a si è notato come l'algoritmo precedentemente discusso fosse non applicabile. Il maggior numero di dati da elaborare, e quindi di calcoli, rendeva inattuabile la simulazione causa tempi di calcolo molto elevati.

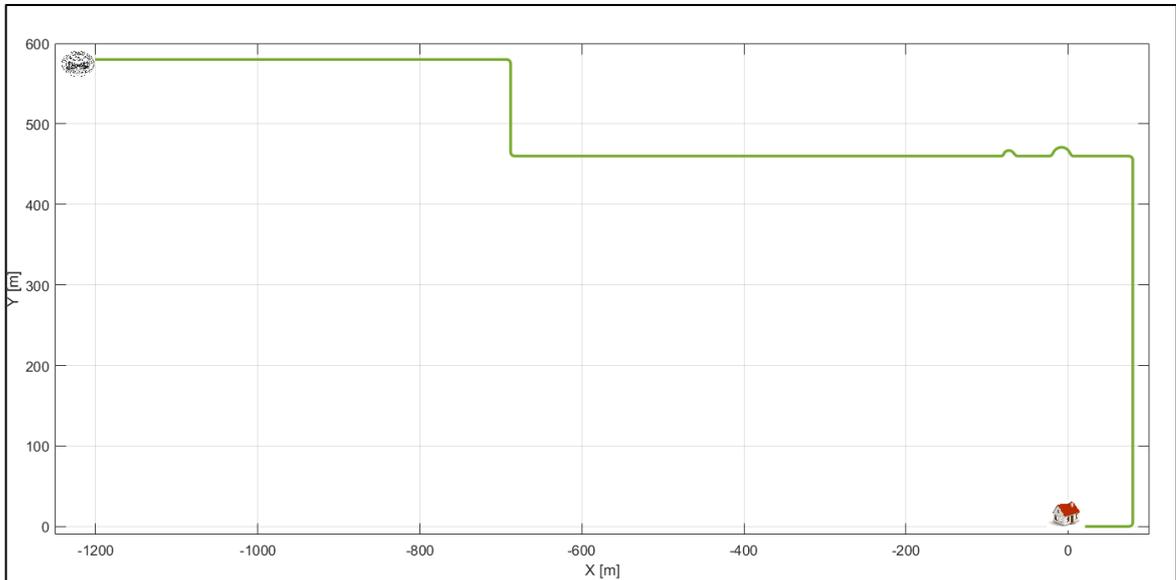


Fig. 4.9 - nuova traiettoria

Di conseguenza, si è deciso di cambiare l'algoritmo rendendolo più snello e la strategia adottata è la seguente.

Sono stati eliminati i vari cicli for presenti nell'algoritmo, in prima battuta utilizzati in quanto sembrava essere l'unica soluzione attuabile, utilizzando pochi comandi *find* in modo tale da effettuare i calcoli su un numero ristretto di parametri decisi a priori, nel nostro caso 100. Quindi:

1. Si determini, le coordinate x, y della traiettoria prossima al retrotreno

```

if y_r<=5 || (abs(y_r-460)<=0.5 & (80-x_r)>=2)
    pos1=sort(find(abs(cordx-x_r)<=20 & abs(cordy-y_r)<=20));
    cord_riferimento=cordx(pos1);
    pos=sort(find(abs(cord_riferimento-x_r)<=1));
    pos=pos(end);
    pos_def=pos1(pos);

else pos1=sort(find(abs(cordx-x_r)<=10 & abs(cordy-y_r)<=10));
    cord_riferimento=cordy(pos1);
    pos=sort(find(abs(cord_riferimento-y_r)<=1));
    pos=pos(end);
    pos_def=pos1(pos);
end

x_int=cordx(pos_def:(pos_def+100));
y_int=cordy(pos_def:(pos_def+100));
    
```

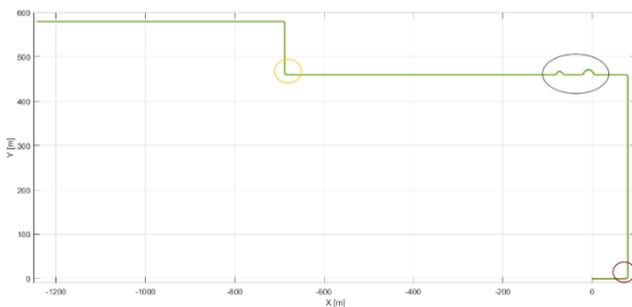
^a Si è deciso di effettuare il controllo di traiettoria su un percorso di qualche km, da Via Bertola all'ingresso del Dipartimento di Ingegneria Meccanica.

Cioè si è pensato di realizzare un algoritmo andando a determinare rispettivamente la coordinata x sui tratti longitudinali e la coordinata y sui tratti verticali con un errore minimo con la rispettiva coordinata del retrotreno.

2. Si definisca il numero di punti della traiettoria da controllare e si vadano ad effettuare i calcoli solo per quel numero di punti scelti successivi alla posizione del retrotreno.

```
x_int=cordx(pos_def:(pos_def+100));
y_int=cordy(pos_def:(pos_def+100));
```

Sono state effettuate diverse prove al variare del parametro k (k=1,2,3; ciò andrà ad influenzare la lunghezza l_d) e della velocità (v=18,22 km/h).



Si analizzeranno, maggiormente nel dettaglio, le zone segnalate in figura in quanto risulteranno essere quelle più difficili da seguire e che genereranno un maggior errore (calcolato come distanza tra il baricentro della vettura e la traiettoria).

Ciò che risulta dalle analisi è che aumentando il parametro l_d l'errore d'inseguimento aumenta anche se la vettura risulta avere una variazione dell'angolo di sterzo più graduale di che permette di evitare criticità e di mantenere la linearità del modello^a.

V=18 km/h

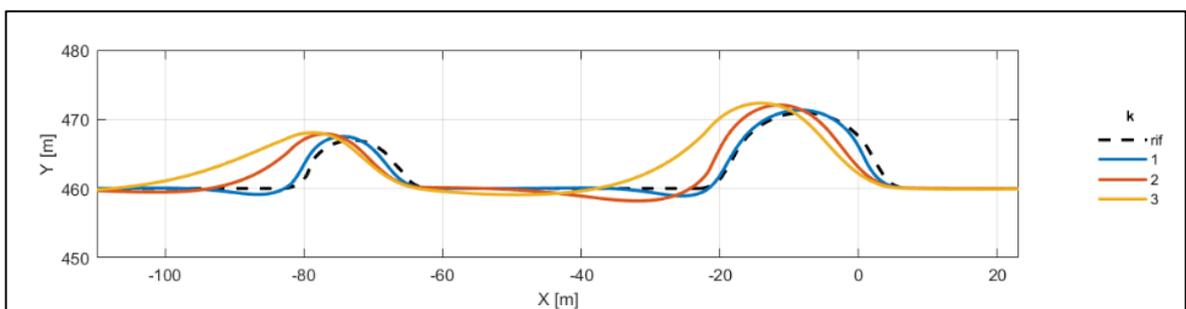


Fig. 4.10 – Traiettoria reale al variare del parametro k per velocità di 18 km/h

^a Infatti, a velocità maggiori (v=22 km/h) un k=1 e quindi un $l_d=6.1$ m rende troppo brusca la variazione dell'angolo volante lungo la prima rotonda generando accelerazioni laterali superiori a 7 m/s^2 .

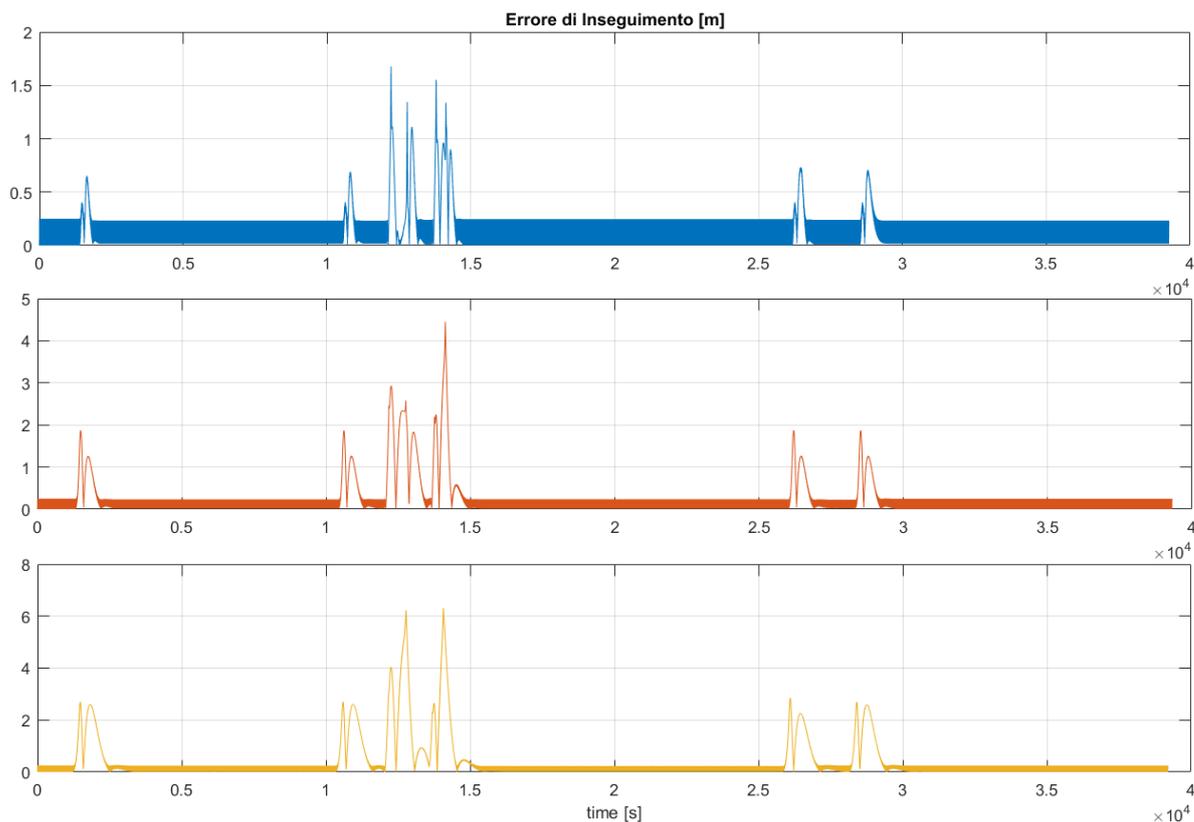


Fig. 4.12 – errore di inseguimento al variare di k a 18 km/h

È chiaro quindi come all'aumentare del parametro k, l'errore tende ad aumentare. Inoltre, dalla precedente immagine, in cui si definisce l'errore di inseguimento nel tempo, si notano dei picchi che si hanno nelle zone di raccordo o nelle rotonde; in quanto la vettura non riesce a seguire, con tal metodo, immediatamente la traiettoria ma ha bisogno di un tempo per poter stabilizzarsi e raggiungere la posizione voluta.

V=22 km/h

Si effettua, inoltre, una simulazione ad una velocità maggiorata. Come è possibile vedere nella successiva immagine, l'errore tende ad aumentare così come aumenterà all'aumentare del valore di k fino a valori dello stesso non accettabili (k=3) non seguendo in maniera idonea il tratto delle due rotonde.

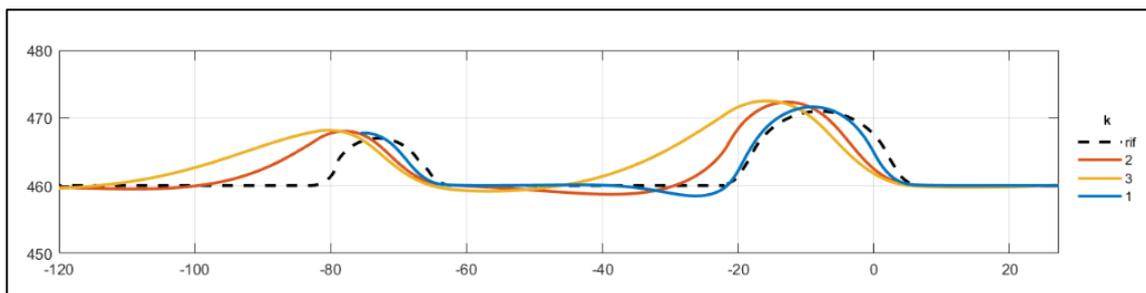


Fig. 4.13 – esplicitazione grafica variazione errore in corrispondenza delle due rotonde

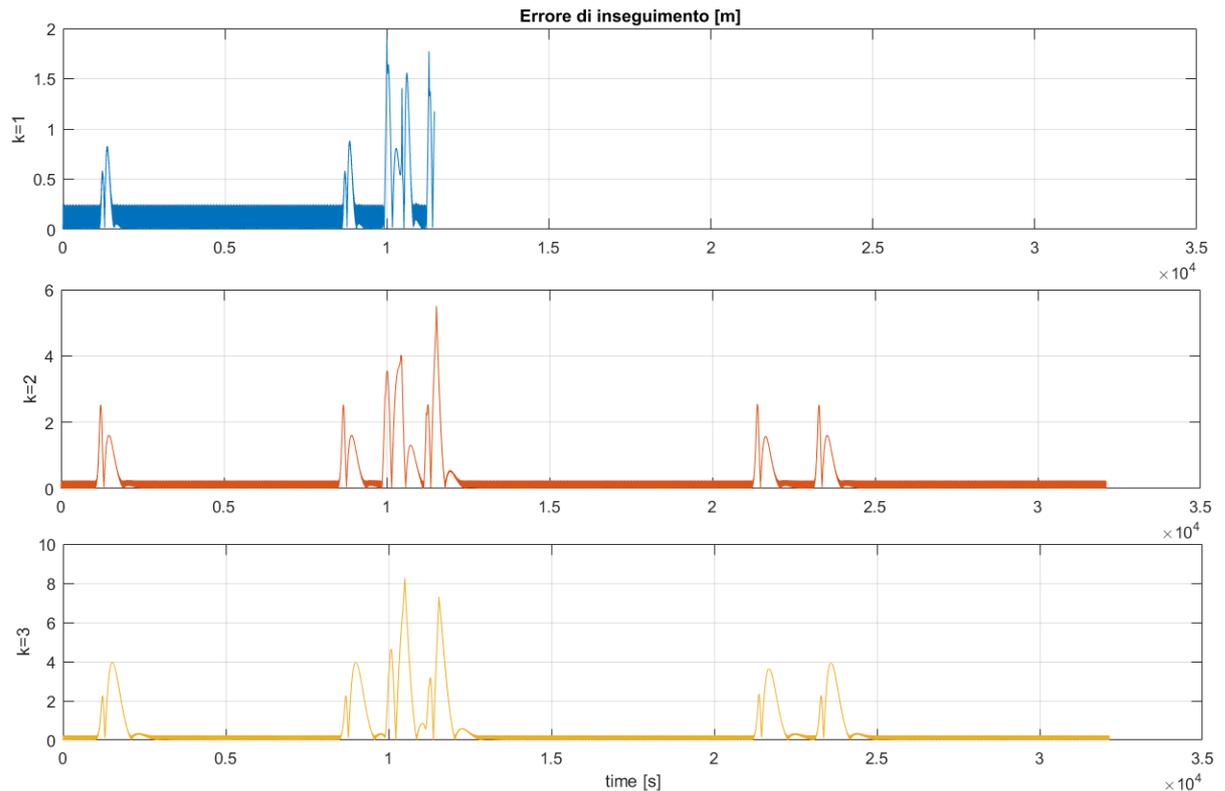


Fig. 4.14 – errore di inseguimento al variare di k a 22 km/h

L'analisi dell'errore all'aumentare della velocità è figlia di quanto detto in precedenza, solo che si nota come all'aumentare di V appunto l'errore a parità di fattore k tende ad avere valori assoluti superiori.

In generale si ha che un valore di k troppo basso provoca instabilità mentre uno troppo elevato causa errori di traiettoria maggiori. Compromesso tra stabilità e buona risposta del modello è difficile da ottenere, in parte dovuto al fatto che tale metodo ignora la curvatura del percorso. Inoltre, tale metodo garantisce buona risposta al transitorio anche ad alte velocità – Robustezza (Solidità) alle discontinuità presenti nel percorso.

È possibile scegliere un valore di k ottimale per percorsi a curvatura costante, valore che però potrebbe essere non più congeniale se dovesse variare la curvatura. Ciò è dovuto alla discrepanza tra la traiettoria effettiva e quella predetta dal modello, a causa del fatto che si ignora la dinamica laterale del veicolo influenzata sia dalla velocità che dalla curvatura del percorso.

Quindi, in test condotti a velocità costante e curvatura costante tale effetto dinamico può essere compensato incrementando k quando il percorso stimato è più stretto del reale.

4.1. Modello di Stanley

Consiste in una funzione retroattiva non lineare dell'errore laterale di tracciamento della traiettoria e_{fa} misurando dal centro dell'assale anteriore al punto più vicino, discretizzando la traiettoria, (c_x, c_y) .

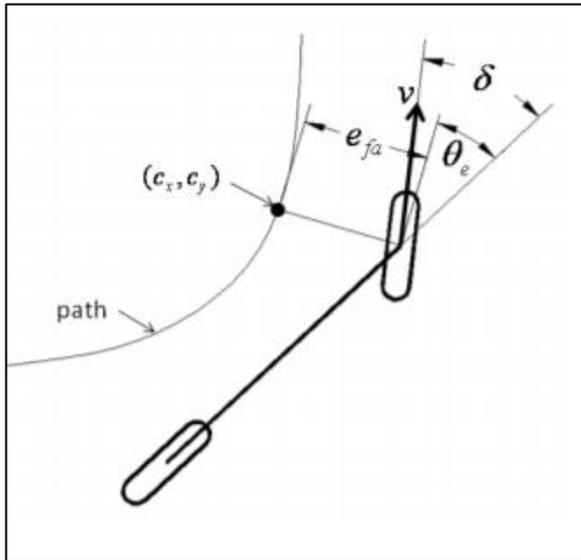


Fig. 4.15 – Metodo geometrico di Stanley

La legge di controllo è data da

$$\delta(t) = \theta_e(t) + \tan^{-1}\left(\frac{ke_{fa}(t)}{v_x(t)}\right) \quad (4.5)$$

Dove θ_e è l'errore di traiettoria, cioè è pari all'angolo di sterzo necessario per allineare il veicolo alla traiettoria desiderata.

$$\theta_e = \theta - \theta_p \quad (4.6)$$

Dove θ definisce la traiettoria del veicolo, mentre θ_p quella del percorso relativamente ad un sistema cartesiano globale.

Quando e_{fa} non è nullo il secondo termine della legge di controllo dello sterzo modifica δ così che la traiettoria stimata intersechi la tangente al percorso voluto a $kv(t)$ unità dall'assale anteriore. Per la realizzazione di tale modello bisogna tener conto della duplicità della legge di controllo; cioè la variazione di angolo volante è dettata da due contributi, il primo relativo alla variazione angolare tra la tangente alla traiettoria effettiva e l'asse del veicolo ed il secondo è legato, invece, alla distanza tra la vettura e la traiettoria.

Di conseguenza, l'obiettivo è determinare la variazione del comportamento di inseguimento di traiettoria al variare del parametro k ; un incremento di k rende più attivo il contributo relativo alla distanza di traiettoria e viceversa.

Innanzitutto, è necessario determinare come vari il parametro θ_p , angolo della traiettoria.

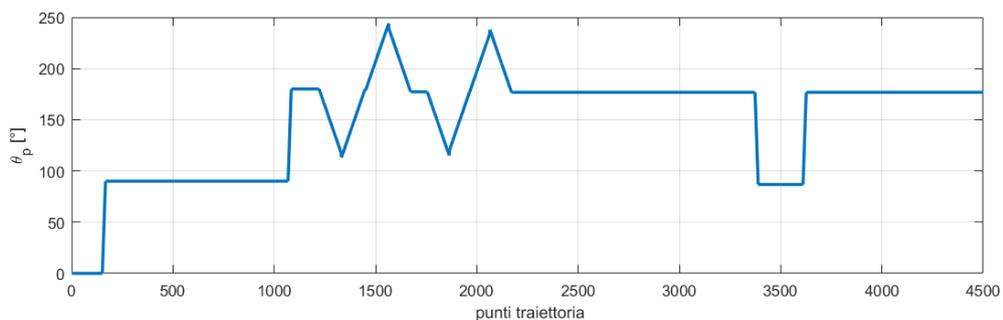


Fig.4.16 – Andamento angolo traiettoria

Per il calcolo dell'errore relativo di traiettoria, tra l'avantreno e il punto del percorso più vicino ad esso, si è utilizzato un comando *min* in Matlab per definire il minimo tra le distanze dei punti^a del percorso con la ruota anteriore.

Per il secondo contributo, è stato inoltre necessario introdurre due righe nel codice per definire il segno dello stesso, negativo o positivo in base alla posizione del veicolo rispetto alla traiettoria di riferimento.

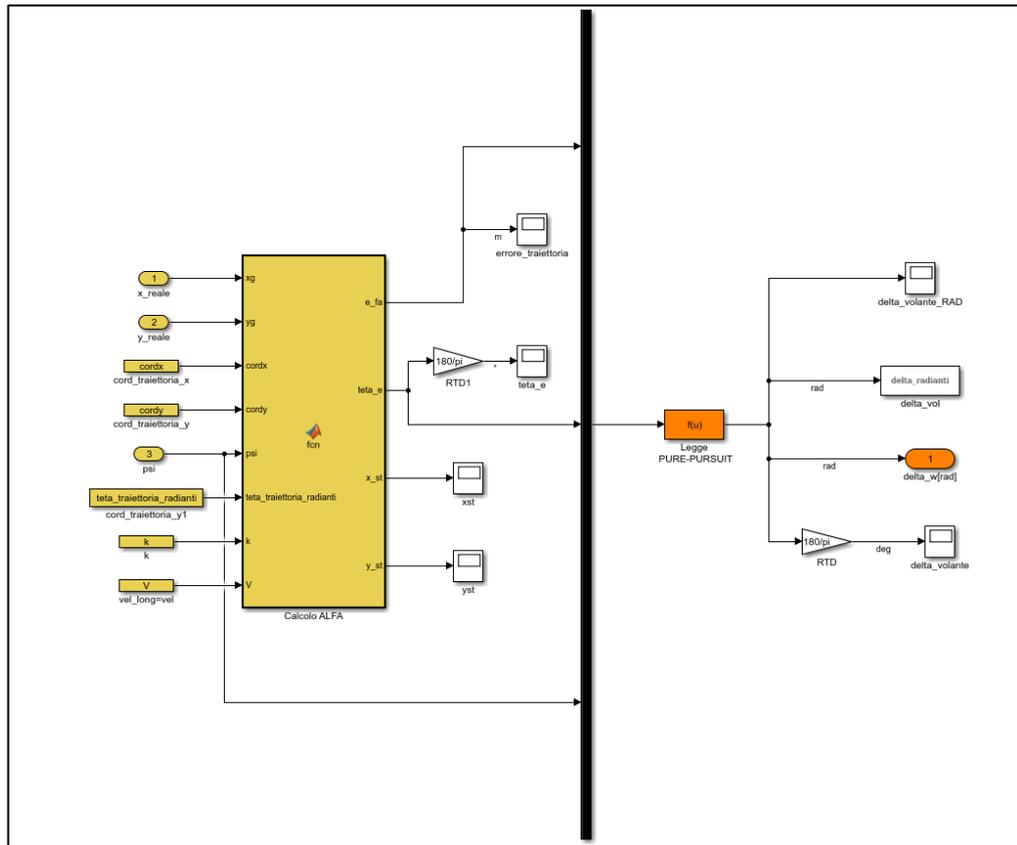
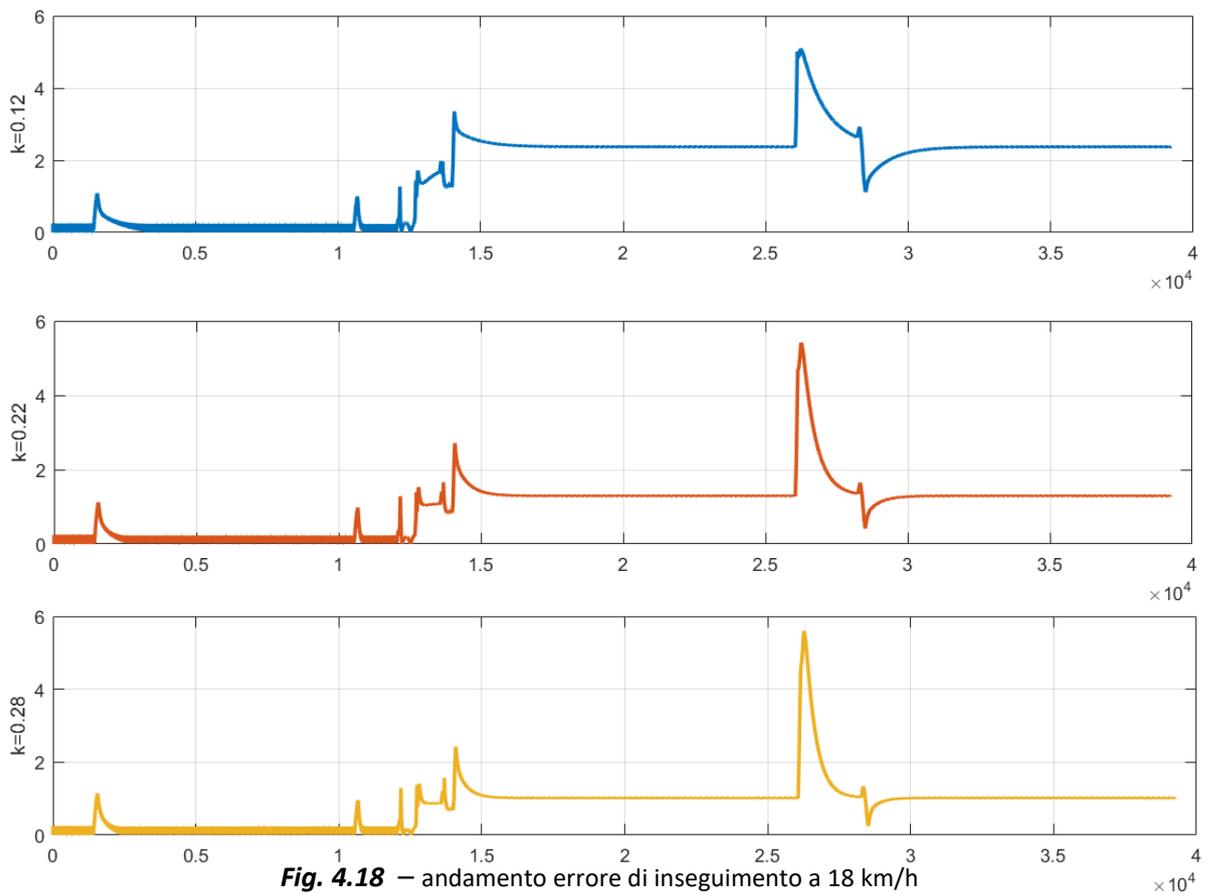


Fig. 4.17– schema a blocchi modello Stanley

Nel percorso complesso la taratura del parametro semplice non è semplice; valori troppo elevati di k ($k > 0.3$) così come valori troppo bassi ($k < 0.1$) generano delle accelerazioni laterali in curva troppo elevate. Di conseguenza il set di parametri che permette di completare la traiettoria non oltrepassando i limiti di linearità e fisici sono molto limitati.

^a Anche in tal caso il calcolo viene effettuato solo su pochi punti della traiettoria adiacenti al veicolo



Quello che si può notare è che nella fascia precedentemente descritta ($0.1 < k < 0.3$) all'aumentare di k l'errore medio tende a diminuire. Inoltre, rispetto al Pure-Pursuit tale metodo risulta garantire degli errori medi nettamente più elevati rispondendo molto male in prossimità delle varie curve. Inoltre, a più elevate velocità il modello risulta essere inefficace causa elevate accelerazioni laterali dovute all'assenza di quell'elemento di previsione della traiettoria del Pure-Pursuit che permette variazioni di angolo volante meno brusche

Osservazione – Prova di cambio corsia

Possiamo sottolineare le differenze tra i due modelli sopra elencati tramite una semplice prova di cambio corsia.

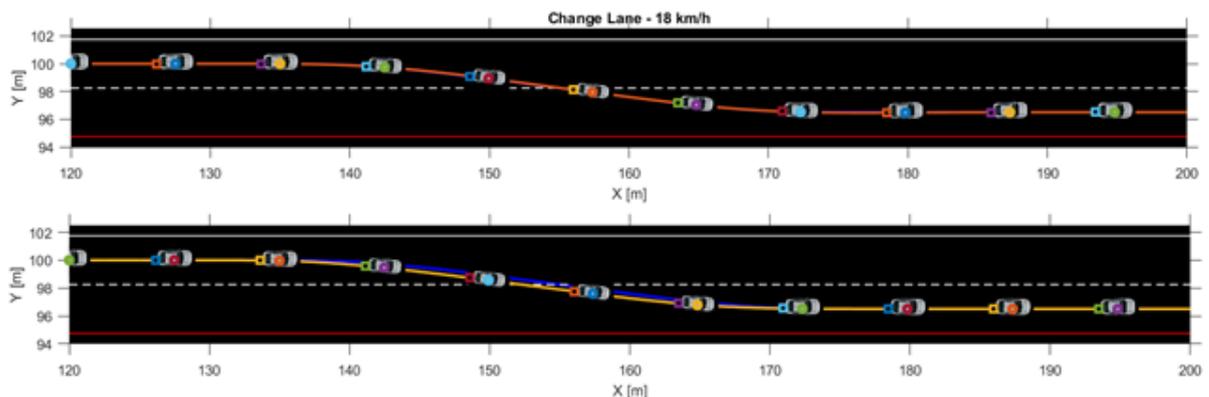


Fig. 4.19 – Change Lane Pure Pursuit (sopra), Stanley (sotto)

Quello che si nota appunto è che il modello Pure-Pursuit come detto in precedenza risponde molto bene alle variazioni del raggio di curvatura grazie alla sua caratteristica predittiva della traiettoria; di contro non essendoci per lo Stanley, tale modello di fronte a variazioni di traiettoria come in tale prova presenta un errore maggiore come evidenziano le figure successive che descrivono l'errore di inseguimento di traiettoria nei due casi.

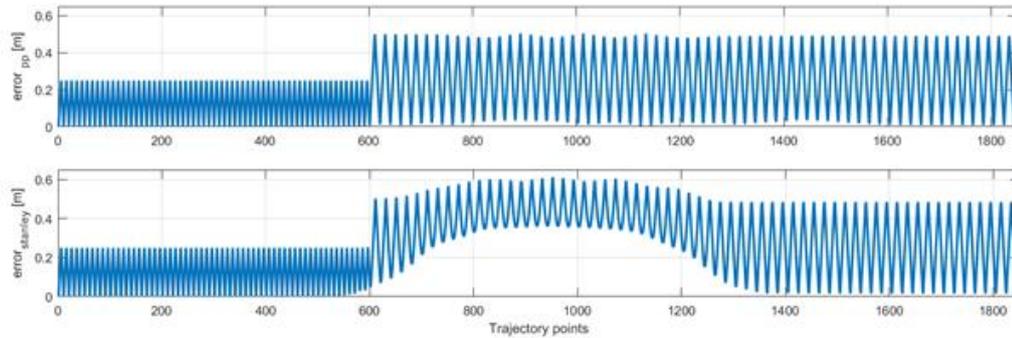


Fig. 4.20 – andamento errori

Mentre l'errore si mantiene pressoché uguale nei due casi lungo il rettilineo entrando in curva si nota come il veicolo nel modello Pure-Pursuit tenda ad oscillare intorno alla traiettoria di riferimento con errore medio minore mentre la traiettoria nel secondo caso tende invece ad oscillare andando ad incrementare l'errore medio.

4.2. Modello Ibrido

I metodi precedentemente descritti hanno i loro vantaggi e svantaggi. È chiaro che lo Stanley Method ha prestazioni migliori su traiettorie dolci con curvature continue. Comunque, dato che tale metodo non ha possibilità di anticipare la variazione dell'angolo di sterzo prevedendo variazioni del percorso in anticipo, forti cambiamenti di traiettoria provocano deviazioni marcate. Al contrario, il Pure Pursuit è capace di prevedere in anticipo una variazione del percorso ma su un percorso dolce tale metodo ha prestazioni inferiori a quello di Stanley.

Cibooglu [5] definisce un controllo ibrido in grado di sfruttare i vantaggi dei due metodi sopra-citati.

Viene utilizzato un fattore di peso, variabile con la dolcezza del percorso. Quando il percorso diventa più dolce, il fattore peso che definisce il metodo di Stanley aumenta mentre in presenza di variazioni brusche il peso relativo al Pure Pursuit viene aumentato.

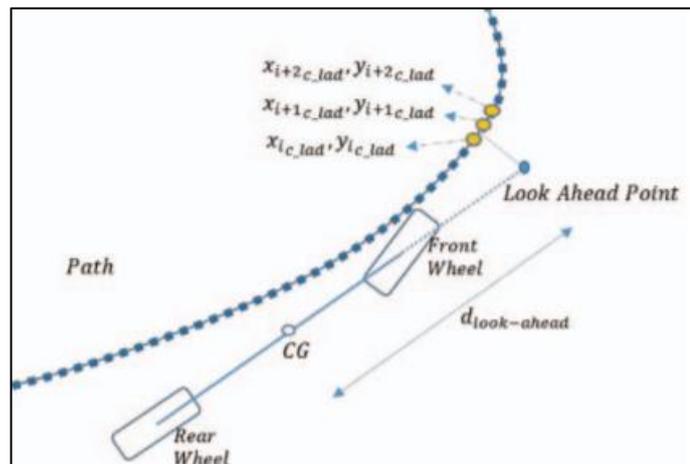


Fig. 4.21 – schema grafico per determinazione punti per calcolo dolcezza curva

Una rappresentazione schematica del problema è mostrata in Fig.6. Determinato il punto target sulla traiettoria più vicino al così detto “Look Ahead Point” viene calcolato l'angolo θ_{dif} tra il segmento sul quale giace il punto target ed il suo successivo:

$$\theta_{dif} = \tan^{-1} \left(\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \quad (4.7)$$

È possibile poi definire una legge che descrive la variazione del peso dei due modelli:

$$\delta_{Hybrid}(t) = \begin{cases} 0.1\delta_{PP}(t) + 0.9\delta_{Sta}(t) & , |\theta_{dif}| \leq 15^\circ \\ 0.9\delta_{PP}(t) + 0.1\delta_{Sta}(t) & , |\theta_{dif}| > 15^\circ \end{cases} \quad (4.8)$$

I due metodi non vengono completamente eliminati in ogni caso per evitare di perdere quelle caratteristiche positive che contraddistinguono ciascuno dei due metodi.

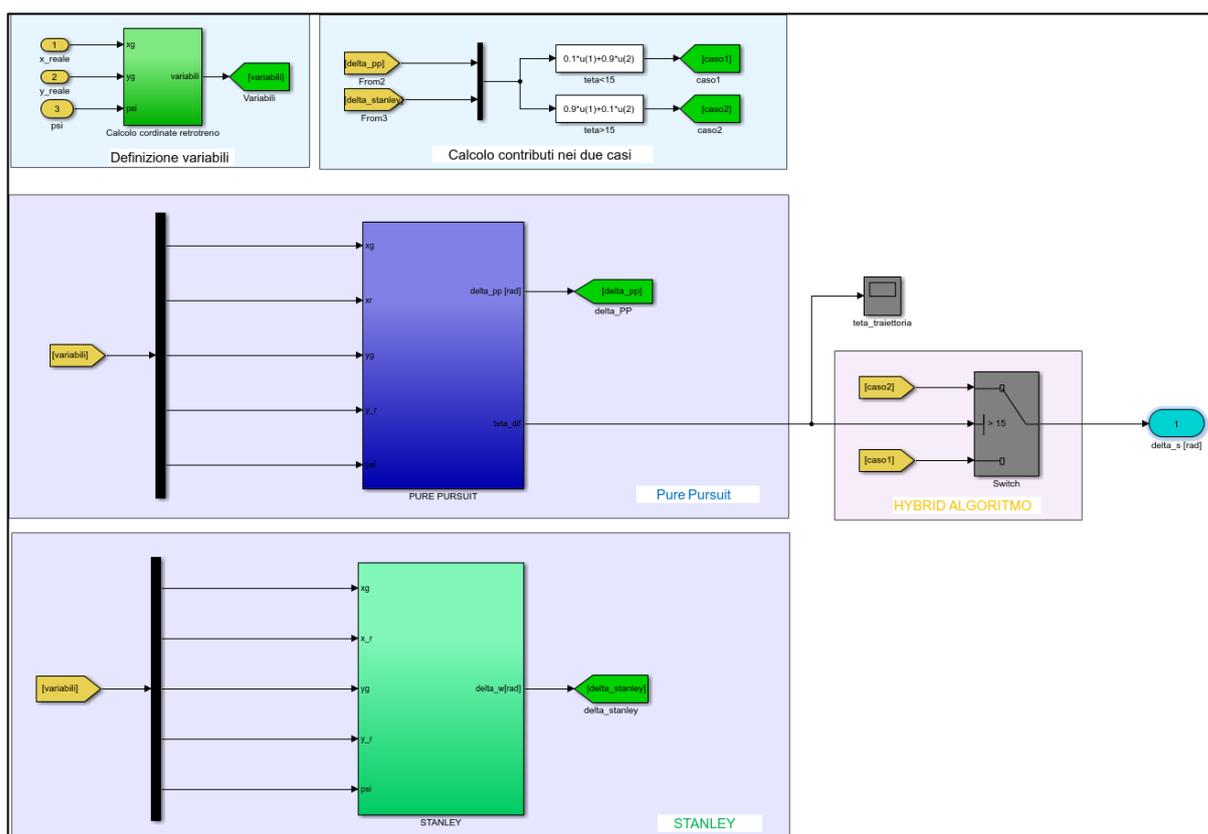


Fig. 4.22 – Implementazione su Simulink del modello Ibrido

Il metodo è testato su 2 diversi percorsi.

Il primo è definito “R50 Circle Track”, ed è un percorso circolare con un raggio di 50m. Il secondo è un percorso rettangolare di 150m di ampiezza e 120m di lunghezza. I punti del percorso sono generati ogni 1m lungo il percorso.

L’errore di traiettoria viene misurato sulla base dell’errore di posizionamento laterale. Tale errore risultante viene misurato in due modalità differenti.

Come errore medio assoluto:

$$E_1 = \frac{\sum |e_i|}{k} \quad (4.9)$$

O tramite norma Euclidea:

$$E_2 = \sqrt{\sum e_i^2} \quad (4.10)$$

Dove k rappresenta il passo temporale.

Il percorso circolare è dolce, cioè la variazione dell'angolo tra i segmenti della traiettoria è molto piccolo. Quello che si è ottenuto è che il modello Pure-Pursuit tende a minimizzare l'errore medio a basse velocità, mentre aumentando la velocità risulta essere più affidabile il modello Stanley o Ibrido.

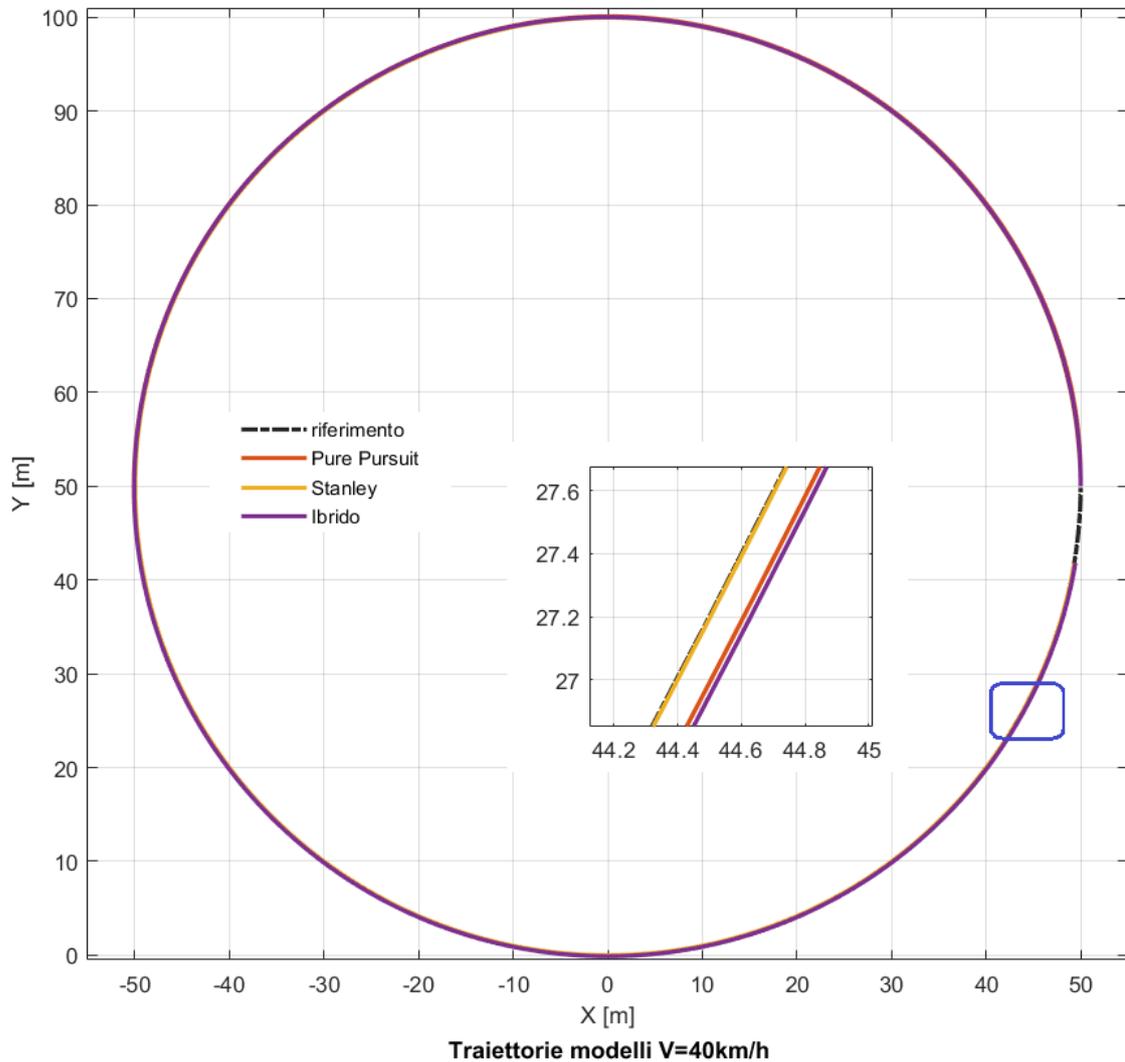


Fig. 4.23 – traiettoria R50 a 40km/h nei vari modelli di controllo

Circle R50		Pure Pursuit	Stanley	Hybrid
10 Km/h	E1	0.1279	0.1772	0.1665
	E2	15.29	12.8273	24.7830
20 Km/h	E1	0.1293	0.1754	0.1502
	E2	10.8281	8.2160	10.8922
40 Km/h	E1	0.1369	0.1335	0.1459
	E2	7.9446	6.1680	4.979

Tabella IV.1 – andamento errori nei vari modelli per traiettoria circolare

Di maggiore interesse è il percorso rettangolare, in quanto presenta delle brusche variazioni di traiettoria e quindi sarà più netta la differenza tra i metodi Pure Pursuit e Stanley.

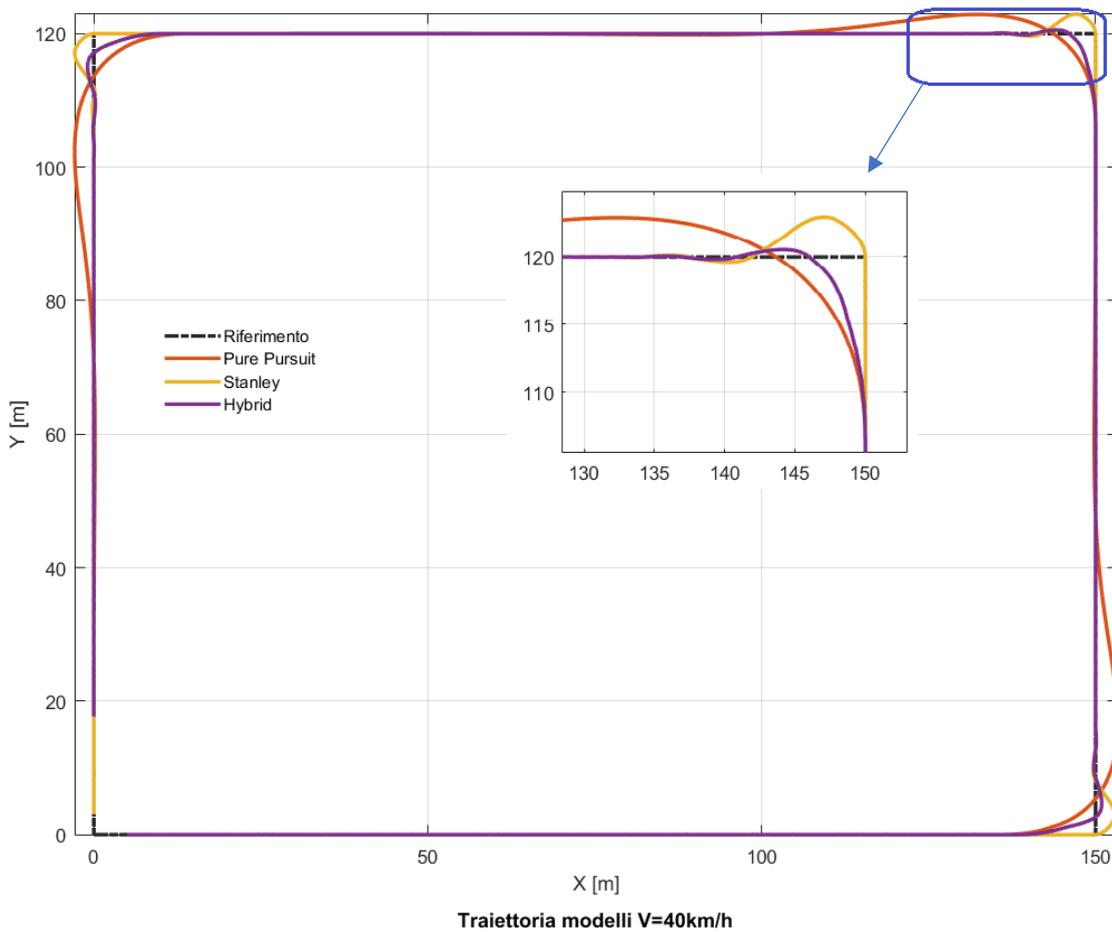


Fig. 4.24 – Andamento traiettoria con i vari modelli descritti a 40 km/h

Come è possibile notare dalla figura sopra, col metodo di Stanley la sterzata non inizia finché il veicolo giunge in prossimità del punto target. Negli altri metodi, grazie al comportamento “look-ahead” la sterzata inizia prima e ciò, inevitabilmente, produce degli errori di traiettoria più contenuti.

Rectangular 150x120		Pure Pursuit	Stanley	Hybrid
10 km/h	E1	0.2815	0.2663	0.2621
	E2	46.4827	45.4594	41.9711
15 km/h	E1	0.2986	0.2714	0.2688
	E2	40.649	38.8694	37.0968
20 km/h	E1	0.3516	0.2769	0.2623
	E2	44.6115	35.4841	29.7917
40 km/h	E1	0.7046	0.3357	0.3026
	E2	74.3670	37.5524	26.8514

Tabella IV.II – andamento errori nei vari modelli per traiettoria rettangolare

Dalla tabella si può notare che a basse velocità il modello Ibrido risponde meglio rispetto anche allo Stanley; ciò perché a tali velocità la possibilità di prevedere il percorso grazie al comportamento “look-forward” del modello migliora le performance del metodo di Stanley.

Osservazione

Però, se c'è un forte cambiamento come una rotazione di 90°, il valore di ϑ_{dif} sarà molto maggiore di 15° ma solo in quell'istante. Allora il cambiamento alla logica Pure Pursuit non genererà effetti benevoli sul comportamento del veicolo, avendo solo un istante di tempo per funzionare. Quindi per superare tale problematica, si introduce un *timer* per rendere immediatamente valida la legge (in 1-2 secondi) quando si manifesta un cambiamento della legge.

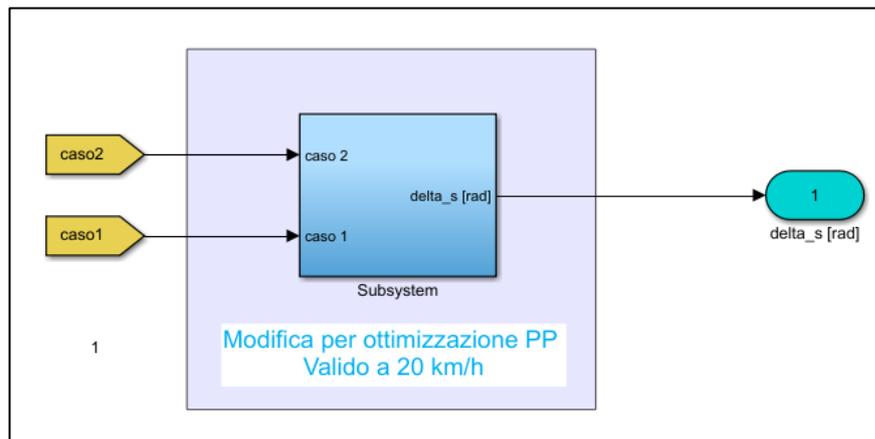


Fig. 4.25 – modello per ottimizzare il controllo Ibrido

Cioè per far sì che il controllo Ibrido abbia i vantaggi del modello Pure Pursuit nelle curvature brusche è necessario che quando si osserva una variazione marcata della traiettoria si applichi il meccanismo Looking Forward per un tempo sufficiente in modo tale che si vada a percorrere la curva in maniera ottimale.

$$t_h = \begin{cases} |\theta_{dif}| > 15^\circ & \text{timer: ON} \\ t_h > 1 \text{ sec} & \text{timer: OFF} \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\delta_{Hybrid}(t) = \begin{cases} 0 < t_h < 1 & 0.9\delta_{PP}(t) + 0.1\delta_{Sta}(t) \\ \text{else} & 0.1\delta_{PP}(t) + 0.9\delta_{Sta}(t) \end{cases}$$

Dove t_h è la variabile tempo.

In tal senso, si è operato introducendo un Subsystem in cui tramite diversi operatori logici (AND e OR) si dia al controllo un maggior contributo della logica Pure Pursuit per un determinato tempo in modo tale da ridurre l'errore di traiettoria in curva.

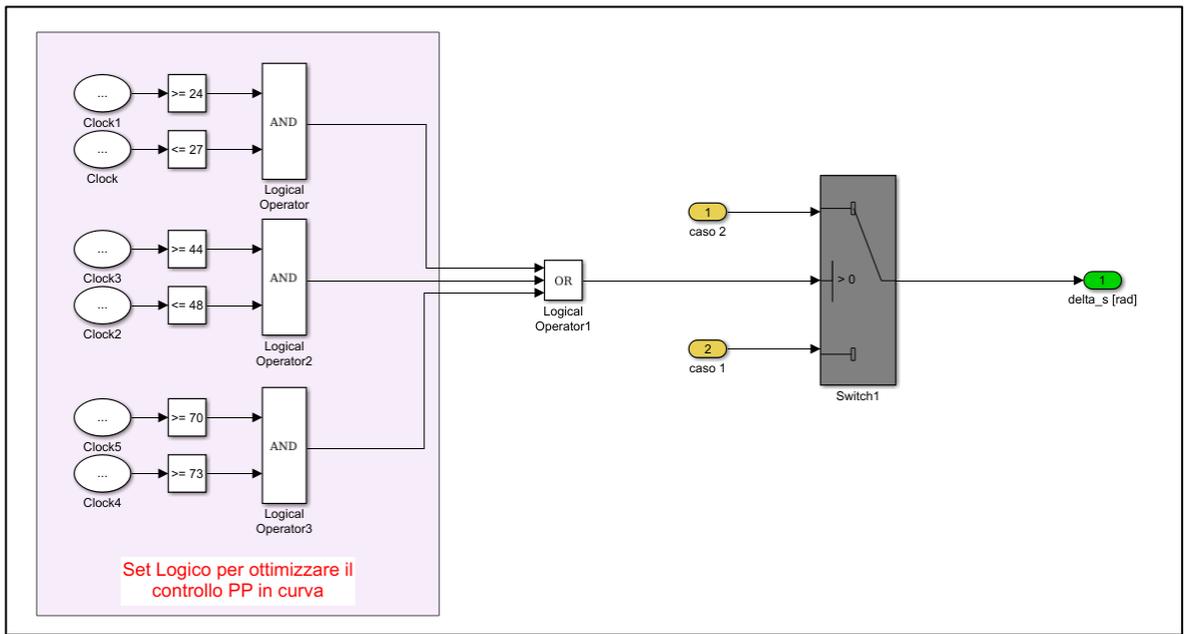


Fig. 4.26 – modellazione Simulink timer per controllo Ibrido

4.3. Advanced Driver Assistance Systems

Il continuo progresso tecnologico ha visto negli ultimi anni le moderne automobili diventare veri e propri laboratori viaggianti dotati di **sistemi elettronici di assistenza alla guida** sviluppati per tutelare al massimo l'incolumità di guidatore e passeggero. Questi ausili elettronici vengono indicati con l'acronimo **ADAS**, cioè Advanced Driver Assistance Systems, e con questa sigla si identificano tutti i dispositivi presenti sull'auto per incrementare il comfort di guida e i livelli di sicurezza.

Quando si parla di "**sistema ADAS**" si intendono quindi i dispositivi come, tra i tanti, i sensori pioggia, il sensore crepuscolare, il cruise control adattivo, la frenata automatica d'emergenza, i sensori di parcheggio, l'avviso di cambio corsia o il riconoscimento automatico dei segnali. Tutti questi dispositivi sono installati sulle vetture di nuova omologazione per ridurre al minimo i rischi di incidente ed agevolare la vita a bordo dell'automobile.

Il **cruise control adattivo (ACC)**, ovvero il controllo di velocità, è uno dei sistemi di sicurezza auto maggiormente apprezzati poiché consente, dopo aver impostato la velocità di crociera desiderata e la distanza di sicurezza preferita, di lasciare guidare autonomamente la vettura. Grazie a questo dispositivo sarà quindi l'auto ad accelerare e frenare in base alle condizioni di traffico presenti ed il conducente avrà la possibilità di rilassarsi al posto di guida mantenendo sempre sotto controllo la situazione.

Altri **sistemi di sicurezza auto** che si stanno diffondendo sempre più rapidamente sulle moderne vetture sono quelli relativi al mantenimento di carreggiata. Anche in questo caso il cervello del veicolo interagisce con le telecamere ed i radar piazzati sulla vettura e riconosce la linea di demarcazione della carreggiata avvisando il guidatore quando la oltrepassa. Un esempio concreto viene dall'utilizzo in autostrada, dove il sistema ADAS interviene quando il conducente oltrepassa la linea di carreggiata senza aver prima utilizzato l'indicazione di direzione. Il **sistema ADAS di mantenimento della carreggiata** più avanzato è il Lane Keeping System che, oltre ad avvisare il conducente del superamento della linea di corsia, riporta automaticamente il veicolo nella carreggiata.

Nel mese di novembre del 2017 il Parlamento Europeo ha approvato la proposta di rendere i **sistemi ADAS obbligatori** per tutte le nuove auto. I sistemi di sicurezza auto quali la frenata automatica e il mantenimento della carreggiata di marcia dovranno così essere forniti di serie su tutte le nuove vetture così come avviene già adesso per altri dispositivi di sicurezza come l'ABS e l'ESP. Allo stato attuale, quindi, questi **sistemi ADAS** non sono ancora presenti di serie su tutte le nuove automobili. Toccherà attendere per comprendere tempi e modalità dell'entrata in vigore di questo obbligo. In attesa che il futuro, non troppo prossimo, ci regali le auto a guida autonoma, i sistemi di assistenza alla guida attualmente sviluppati dai costruttori, e presenti sempre in maggior numero anche su vetture non ricadenti nel settore premium, consentono agli automobilisti di poter viaggiare a bordo della propria macchina in **condizioni di sicurezza notevolmente superiori** rispetto a quanto avveniva solo pochi anni fa.

Creazione Scenario

Prima di analizzare le varie modalità di controllo è bene definire in che modo realizzare lo scenario di riferimento. Andremo ad effettuare diverse prove, quali mantenimento di corsia, sorpasso, superamento ostacoli e per realizzare questi diversi scenari si è utilizzato il "Driving Scenario" Toolbox di Matlab.

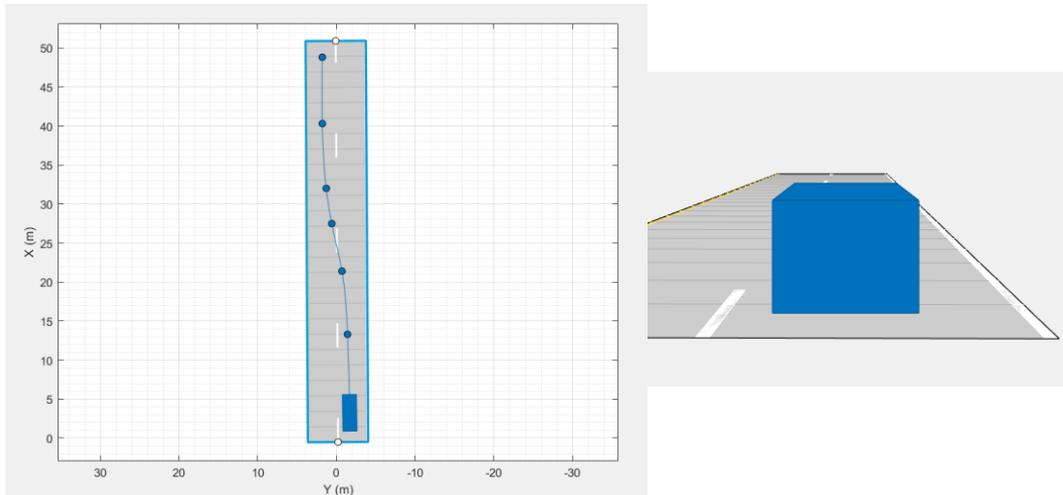


Fig. 4.27 – esempio creazione scenario

Quindi semplicemente, si definisce la strada, i veicoli e le loro traiettorie come in Fig. 4.27.

4.3.1. Controllo Longitudinale

Adaptive Cruise Control (ACC)

Un' ACC installato garantisce due obiettivi principali quali il mantenimento di una certa velocità imposta e di una distanza di sicurezza dal veicolo che segue (Lead Car) aggiustando l'accelerazione dell'Ego car.

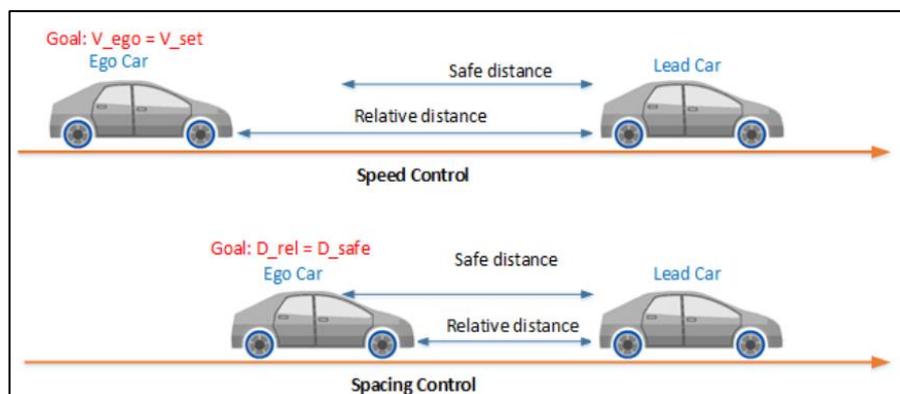


Fig. 4.28 – schema funzionamento ACC

Un veicolo dotato di ACC ha un sensore, cioè un radar, in grado di misurare la distanza dal veicolo che lo precede e di misurare la velocità relativa tra i due.

Si agisce come segue:

- Se $D_{Rel} > D_{Safe}$ si attiva il controllo di velocità, e si mantiene la velocità desiderata
- Altrimenti si attiva il controllo sulla distanza di sicurezza.

L'ambiente Matlab/Simulink presenta un toolbox, "Adaptive Cruise Control System", in grado di definire degli algoritmi di controllo ACC, che darà come output un segnale di accelerazione per l'Ego car.

Gli **inputs** di tale blocco sono:

- Velocità fissata dell'ego car
 - Time gap (T_{Gap})
 - Velocità dell'ego car (V_{ego})
 - Distanza relativa
 - Velocità relativa
- | Generalmente ricavata da Radar

Si può pensare di approssimare un ambiente realistico di guida con un'accelerazione della Lead Car sinusoidale. Per entrambi i veicoli la dinamica tra l'accelerazione e la velocità è modellata come segue:

$$G = \frac{1}{s(0.5s + 1)}^a \quad (4.12)$$

La quale approssima la dinamica del pedale dell'acceleratore e dell'inerzia del veicolo.

Il sistema ACC è modellato utilizzando in Simulink il Blocco "Adaptive Cruise Control System".

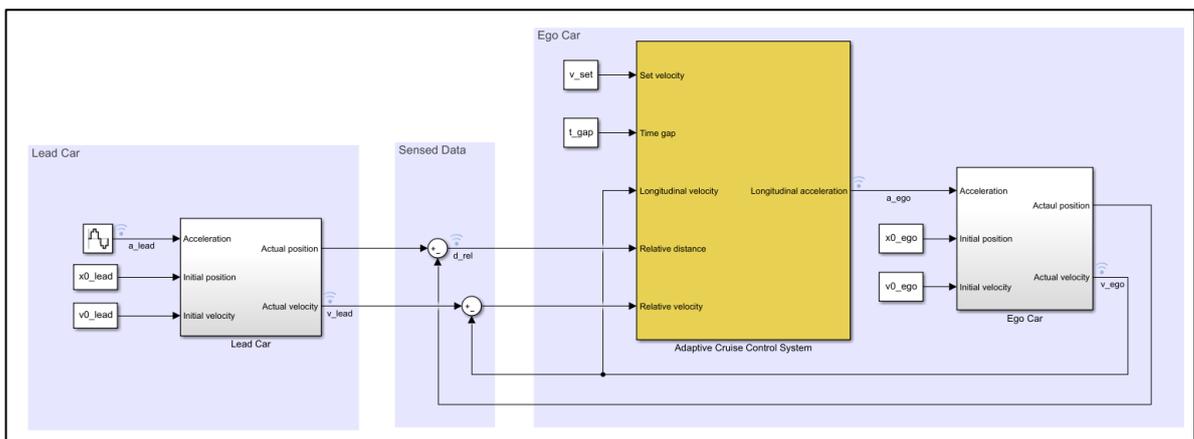


Fig. 4.29 – schema blocco ACC

^a la funzione di trasferimento che lega accelerazione a velocità è un integratore puro: $1/s$. La presenza del termine aggiuntivo a denominatore è dovuta probabilmente alla volontà di filtrare eventuali contributi di alta frequenza nel segnale di accelerazione richiesta

Tale blocco modella la distanza di sicurezza in funzione della velocità dell'Ego Car, come segue:

$$D_{Safe} = D_{Default} + T_{Gap} \cdot V_{ego}^a \quad (4.13)$$

In quest'analisi ipotizzeremo un andamento dell'accelerazione del veicolo che precede l'ego car di tipo sinusoidale e una velocità da voler mantenere di 30 m/s.

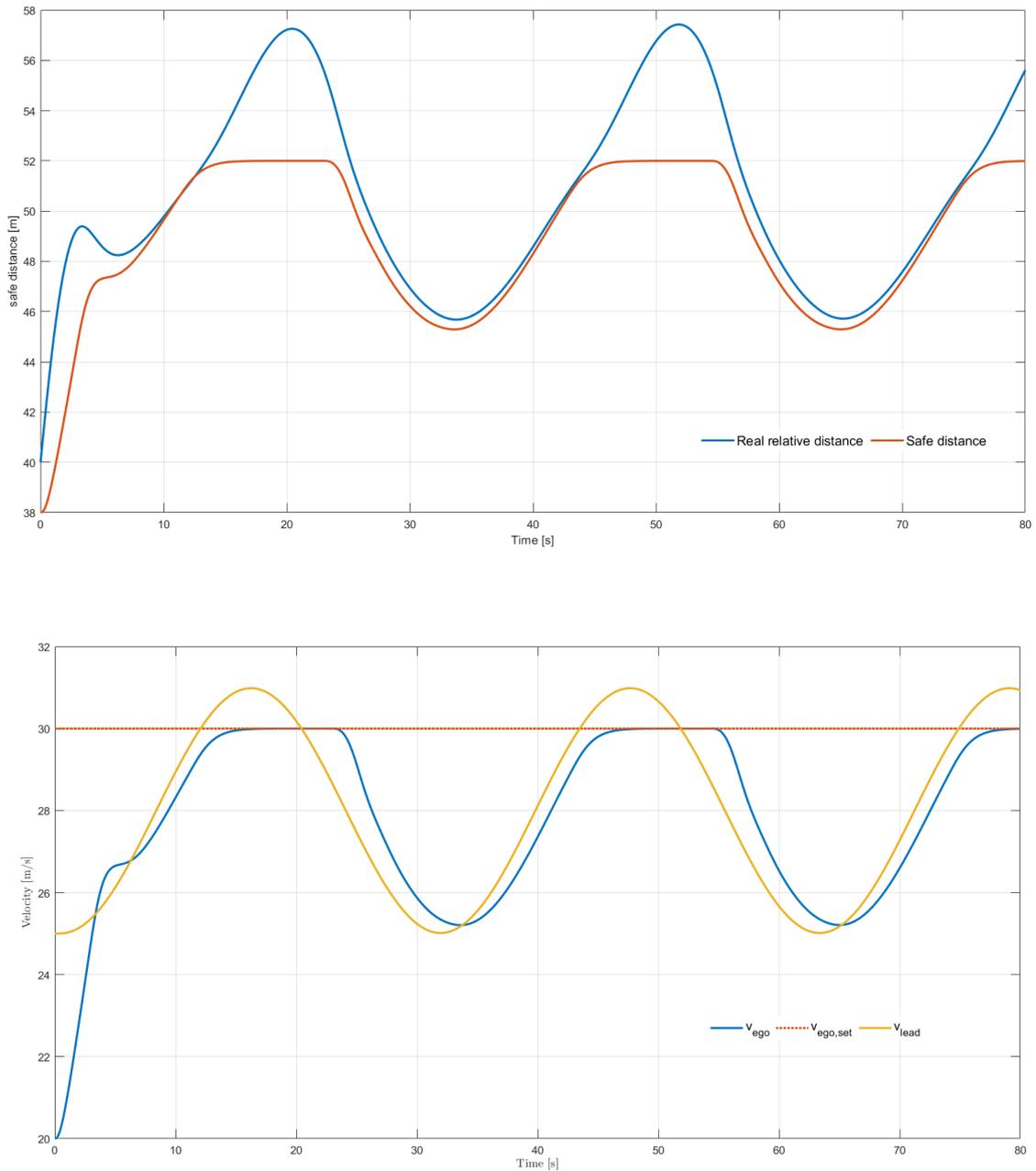


Fig. 4.30 - andamento distanza (sopra) di sicurezza e velocità dell'ego e della lead car (sotto)

L'Ego Car parte da una velocità di 20 km/h quindi nei primi secondi esso accelera a pieno carico; successivamente dato che la Lead Car accelera lentamente, l'Ego accelera meno

^a Valori specifici della distanza di default e del time gap sono rispettivamente 10 m e 1.4 s.

marcatamente in modo tale da rispettare il vincolo di distanza di sicurezza. Dopo aver raggiunto la velocità fissata di 30 km/h, e mantenuta per circa 10 secondi, l'Ego car riduce la propria velocità in quanto in questa fase si ha una decelerazione della Lead Car che provoca una forte riduzione della distanza di sicurezza. Tale Analisi si ripete poi fino alla fine della simulazione.

Ipotizziamo ora uno scenario differente. Si ipotizzi che la Lead Car acceleri in un primo tratto, per poi decelerare e viaggiare a velocità costante fino a 30 secondi. Infine, si ha una leggera decelerazione per circa 8 secondi.

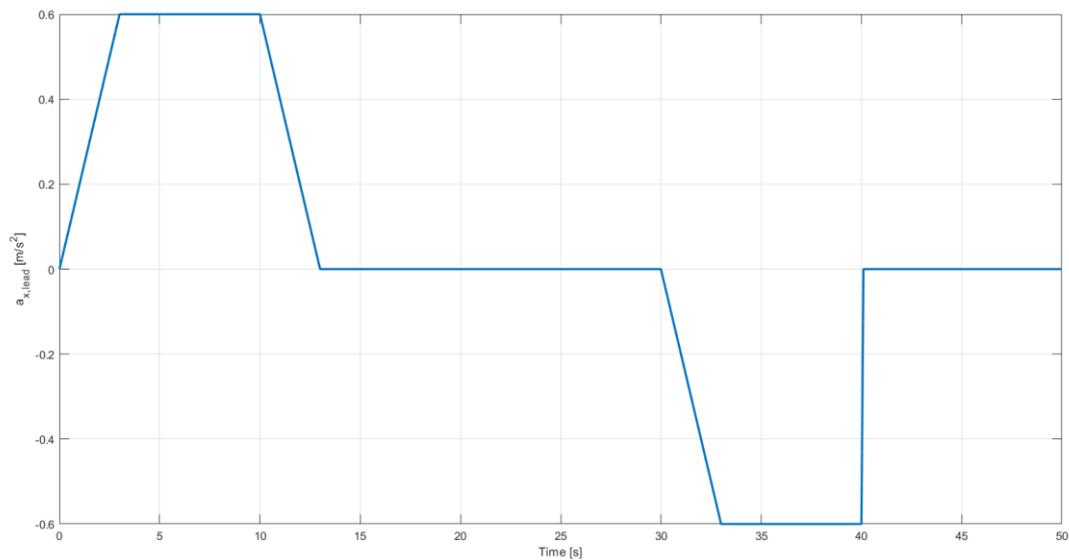


Fig. 4.31 - andamento accelerazione Lead Car

Come si vede in Fig. 4.31 inizialmente entrambi i veicoli accelerano comportando una riduzione della distanza di sicurezza fin quando non avviene la fase di decelerazione della Lead Car. Da qui in poi l'Ego Car continua ad accelerare fino al raggiungimento dopo 15 secondi della velocità voluta di 30 km/h. L'effettiva distanza tra i due veicoli continua ad aumentare fin quando il veicolo che precede decelera. Di conseguenza, la distanza relativa tra i due veicoli si riduce obbligando verso fine prova l'Ego Car a decelerare per rispettare la distanza di sicurezza.

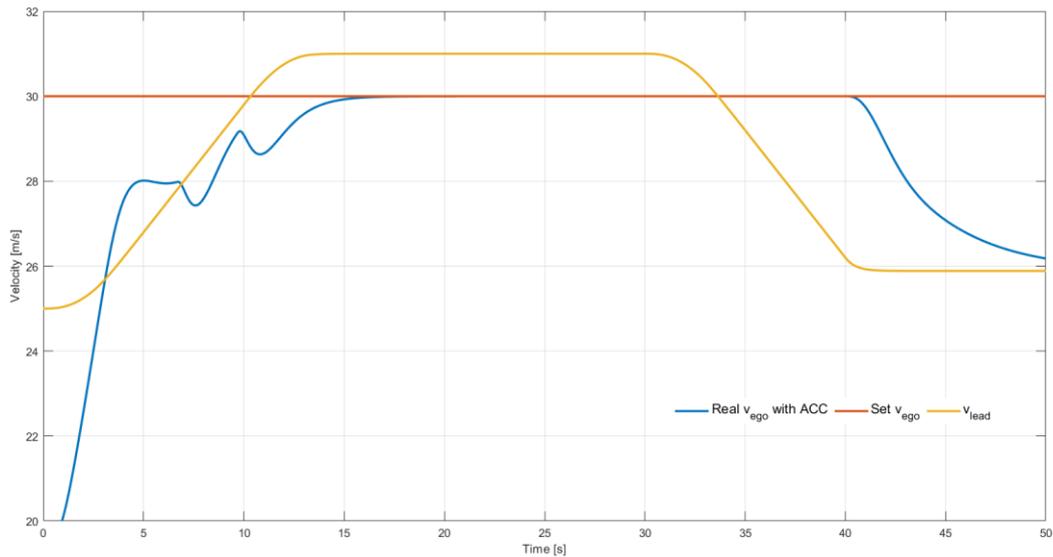


Fig. 4.32 – andamento velocità lead car, della velocità dell’ego car fissata e quella reale con ACC

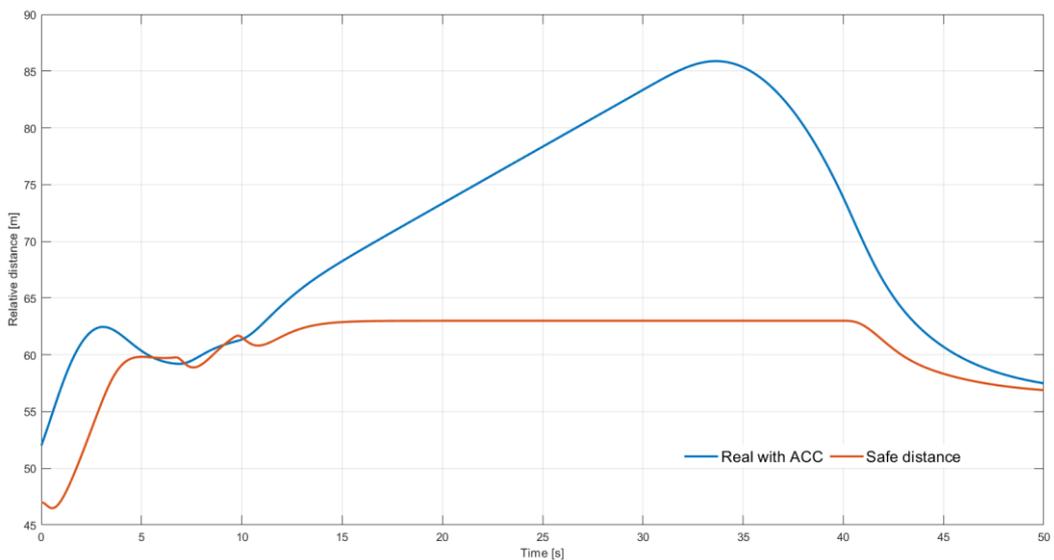


Fig. 4.33 – Distanza relativa veicoli nelle condizioni reali con ACC attivato e distanza di sicurezza

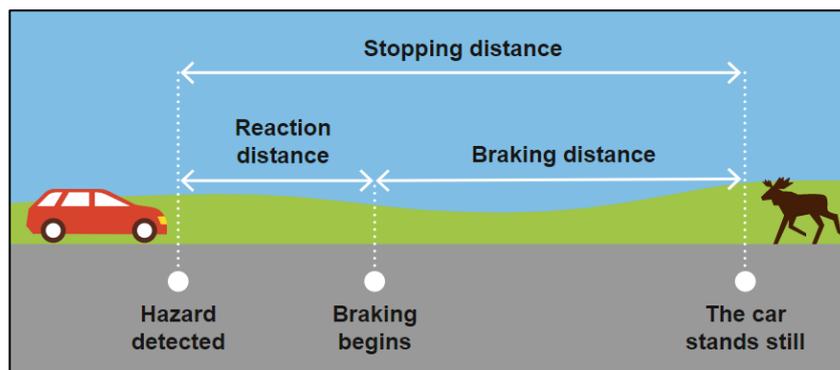
Osservazione – Verifica valori T_{Gap} e $D_{Default}$

La distanza di sicurezza è la distanza che ogni veicolo deve mantenere da quello che lo precede, per potersi arrestare, quando necessario, senza tamponarlo. Nella valutazione della distanza di sicurezza è importante tenere in considerazione alcuni fattori: la prontezza di riflessi del conducente, il tipo e lo stato di efficienza del veicolo, la velocità, la visibilità e le condizioni atmosferiche, le condizioni del traffico, la pendenza della strada e le caratteristiche e condizioni del manto stradale e l'entità del carico.

La distanza di reazione è la distanza che si percorre dal punto in cui si rileva il pericolo fin quando si inizia a frenare. Essa è influenzata dalla velocità del veicolo e dal tempo di reazione del conducente che in genere è di 0.5 – 2 secondi. In formula tale distanza è definita come segue:

$$d = \frac{(s \cdot r)}{3.6} \quad (4.14)$$

Dove s è la velocità in km/h, r è il tempo di reazione in secondi e 3.6 è il fattore di conversione per avere il risultato in metri.



La distanza di frenatura, invece, è la distanza che il veicolo percorre dal momento in cui si inizia la frenata fin quando il veicolo si ferma. Essa è influenzata dalla velocità del veicolo, dalle condizioni del terreno nonché dal sistema frenante^a. È molto complesso determinare una legge che descriva tale distanza dato che le condizioni della strada possono variare molto. Comunque, si può dare una legge di carattere generale come segue:

$$d = \frac{s^2}{(250 \cdot f)} \quad (4.15)$$

Dove s è la velocità in km/h, f è il coefficiente di attrito e 250 è una costante generalmente usata.

Quindi, la distanza di sicurezza sarà data dalla somma della (4.14) e (4.15):

$$d_{safe} = \frac{s^2}{(250 \cdot f)} + \frac{(s \cdot r)}{3.6} \quad (4.16)$$

Andiamo a confrontare la *stopping distance* effettiva con quella calcolata tramite le equazioni su descritte. Facciamo delle prove al variare della velocità per vedere se rientriamo nella distanza su descritta. Si ipotizzi una condizione di frenata di emergenza con una coppia frenante totale di 4000 Nm ripartita al 50% sulle ruote anteriori e posteriori.

^a Tecnologia dell'impianto di frenatura, quante ruote stanno frenando etc.

Innanzitutto, è stata fatta una prova in condizioni asciutte $\mu = 0.8$ al variare della velocità, come è possibile vedere in Fig. 4.34.

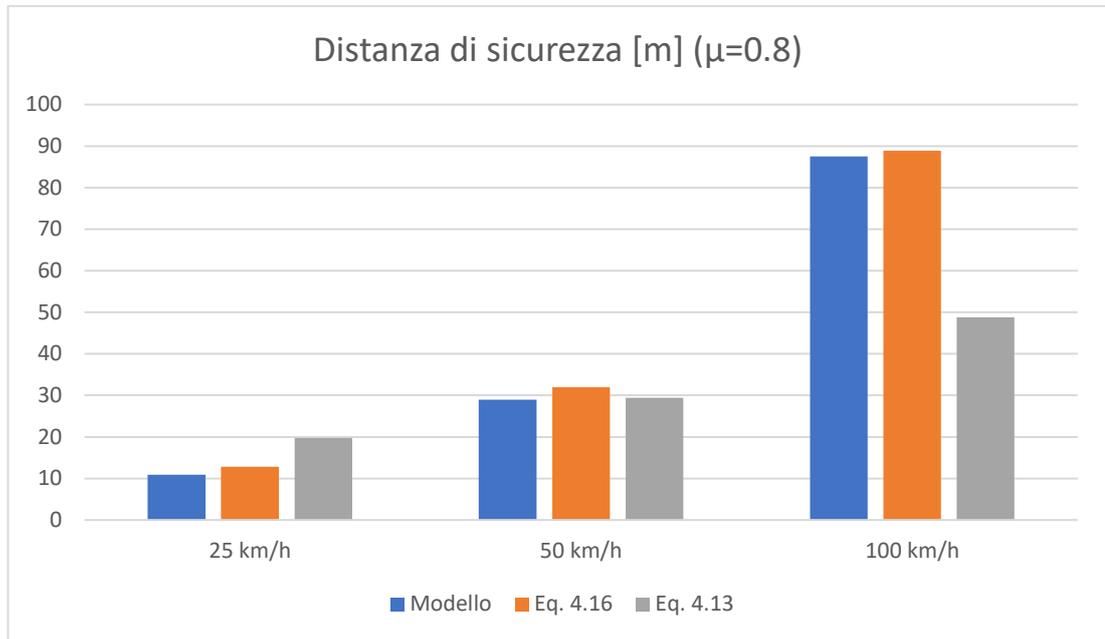


Fig. 4.34 – valore distanza di sicurezza ottenute tramite le equazioni su descritte rispetto al valore ottenuto tramite simulazione

Come si vede in figura, a basse velocità l'equazione (4.13) può dare risultati accettabili della distanza di sicurezza, mentre già a più elevate velocità si nota che la distanza di sicurezza introdotta da tale equazione risulta essere nettamente inferiore alla distanza di sicurezza imposta dalla simulazione. Invece, in tali condizioni con un tempo di reazione pari a 1.4 s l'equazione (4.16) sovrastima la distanza di sicurezza rispetto al modello.

Ci si metta nelle condizioni più critiche di pioggia andando ad intervenire sul coefficiente di aderenza al suolo $\mu=0.3$.

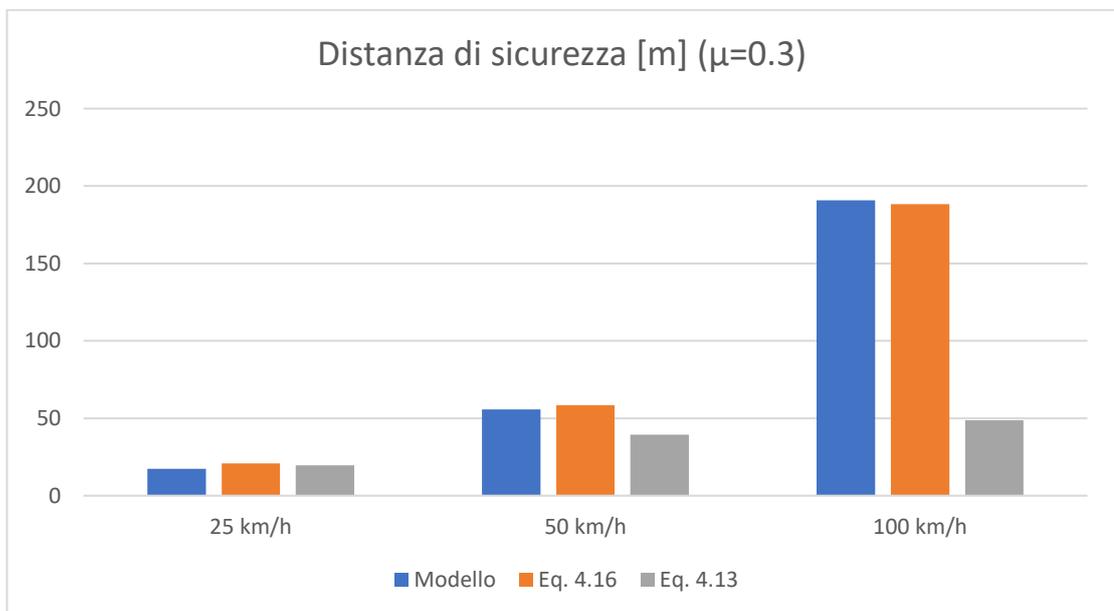


Fig. 4.35 – andamento distanza relativa ego e lead car durante frenata brusca

In tal caso, l'imposizione di un $T_{Gap} = 1.4 s$ e $D_{Default} = 10 m$ non garantisce valori accettabili di sicurezza (secondo la 4.13) se non a velocità molto basse. Invece, ipotizzando un $T_{Gap} = 1.8 s$ si riesce ad avere valori di distanza di sicurezza confrontabili con quelli del modello utilizzando la (4.16). Quindi, risulta forzata imporre una $D_{Default} = 10 m$ fissa al variare della velocità e delle condizioni del manto stradale. Di conseguenza, in condizioni più critiche converrebbe utilizzare la (4.16).

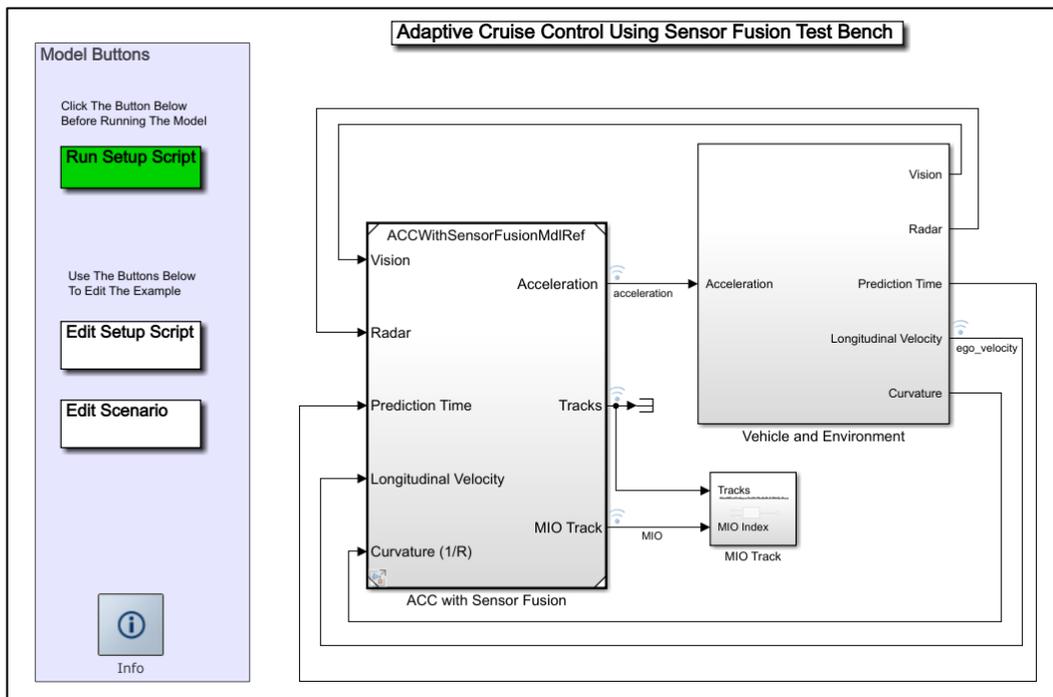
Adaptive Cruise Control with sensor Fusion

Si può migliorare l'ACC definito introducendo sistema che combini le misure fatte da più sensori e un miglioramento del sistema di controllo.

Un sistema di tracciamento e un sistema in grado di far fronte all'unione dei segnali dei sensori montati genera molteplici benefici.

Aggiunge alla miglior misura della posizione e velocità laterale ottenuta da sensori visivi l'ampiezza visiva dei radar. Un sensore visivo può tracciare corsie, stimare la distanza della corsia dall'ego car e la posizione relativa degli altri veicoli da essa.

Inoltre, un avanzato MPC controller aggiunge l'abilità di reagire a manovre più aggressive degli altri veicoli nell'ambiente circostante. A differenza di un classico controllore che usa un PID con guadagni costanti, l'MPC controller regola la velocità dell'ego car mantenendo sempre la distanza di sicurezza imposta.



Il modello contiene due sottosistemi principali:

- ACC with Sensor Fusion, il quale **modella la fusione dei sensori e controlla l'accelerazione longitudinale del veicolo**. Qui si può scegliere se utilizzare un modello classico o predittivo di controllo.
- Vehicle and Environment, il quale **modella il moto dell'Ego car e definisce l'ambiente circostante**. Inoltre, qui viene simulato il radar e il sensore di visione.

Il "Bird's-Eye scope" mostra il risultato della fusione dei sensori. Il radar ed il sensore visivo rilevano i veicoli nel range di copertura.

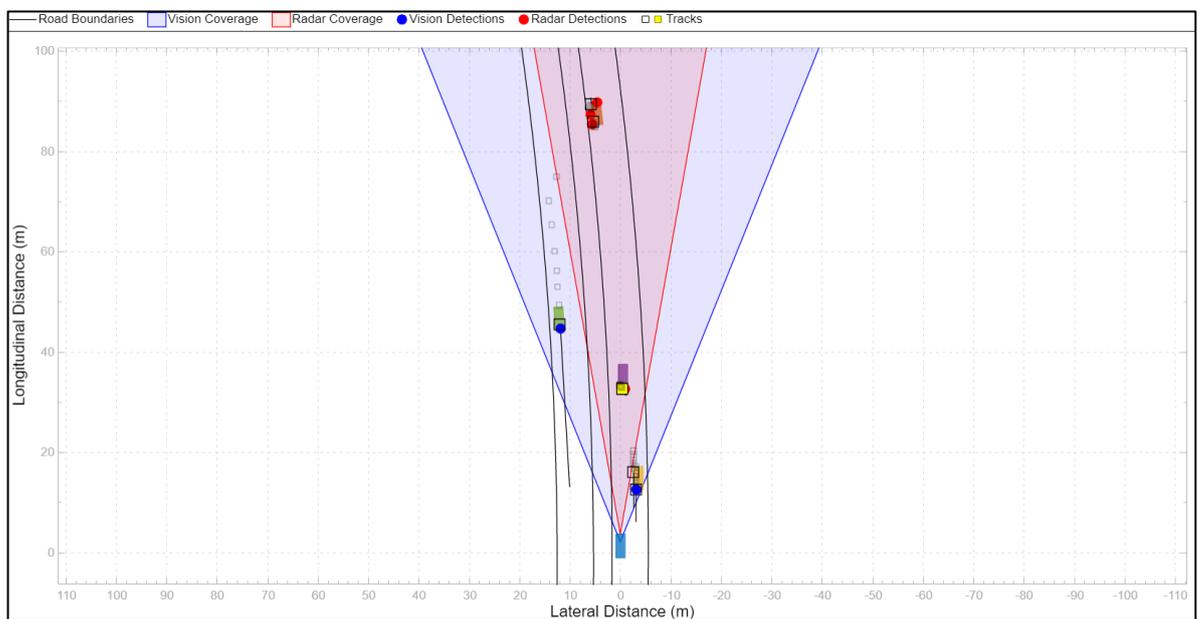


Fig. 4.36 – Bird's-Eye scope

Definito lo scenario di riferimento, è possibile avere un maggior dettaglio sulla posizione, distanze relative e velocità dei veicoli che risultano essere presenti nello scenario di riferimento. In tal modo l'Ego Car avrà maggiori dettagli sulle molteplici vetture permettendo risposte adeguate anche in presenza di brusche variazioni del comportamento dei veicoli nell'ambiente, rendendo il sistema di controllo più robusto ed attuabile in commercio.

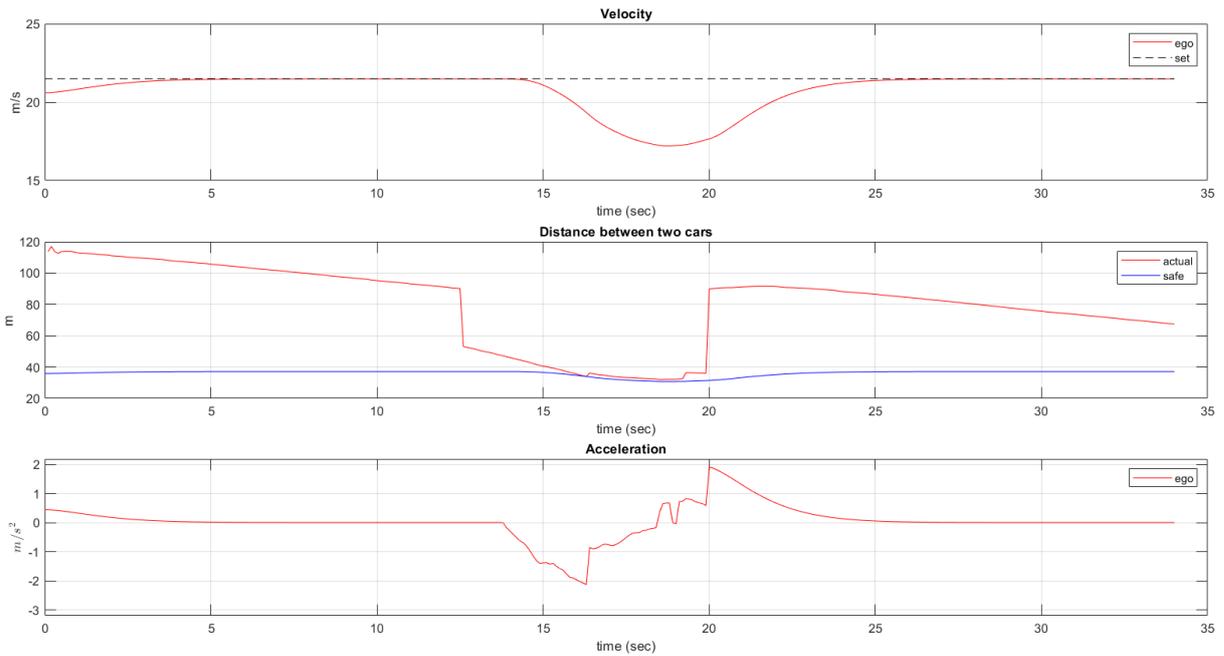
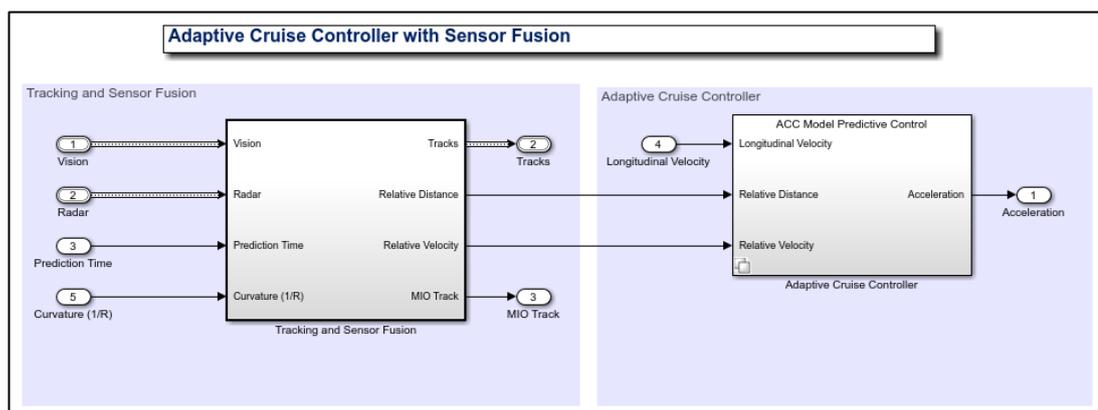


Fig. 4.37 – andamento velocità, distanza relativa e accelerazione

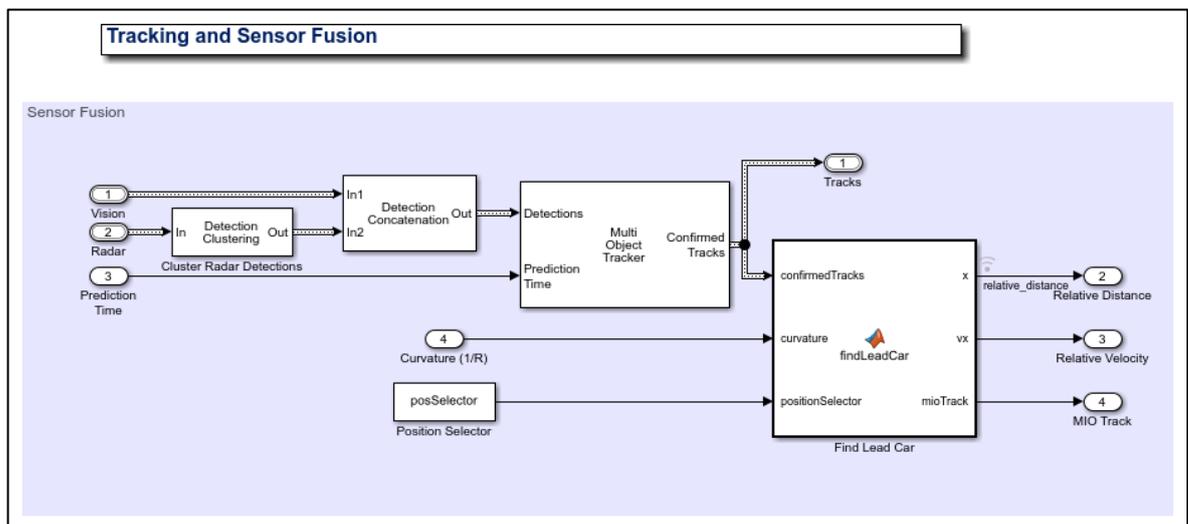
Il sistema di controllo agisce come in figura, si ha un iniziale accelerazione nel primo tratto in modo tale da raggiungere la velocità desiderata, in quanto la lead car è sufficientemente lontana dall’ego car (nei primi 11 secondi). Il veicolo continua a velocità costante rilevando una distanza del veicolo sulla stessa corsia superiore alla distanza di sicurezza; successivamente l’Ego car si avvicina sempre più al veicolo di fronte e decelera in modo tale da mantenere la distanza voluta fin quando tale veicolo si sposta lungo la corsia di decelerazione garantendo la possibilità del veicolo di procedere indisturbato alla velocità di target. L’ultimo diagramma dimostra che l’accelerazione rientra nel range $[-3,2] \frac{m}{s^2}$.

Analizziamo come funzionano nel dettaglio i due principali sottosistemi. L’ **“Adaptive Cruise Controller with Sensor Fusion”** contiene due principali componenti:

- Tracking and Sensor Fusion
- Adaptive Cruise Controller



- Il sottosistema “*Tracking and Sensor Fusion*” tratta il rilevamento dei radar e sensori visivi dell’ambiente che circonda il veicolo. Inoltre, esso fornisce una stima del veicolo più vicino nella corsia dell’ego car.



Il principale blocco di tale sottosistema è il “*Multi-Object Tracker*”, che ha come input l’insieme dei rilevamenti dei vari sensori e il tempo di predizione. Tale blocco da come output una lista di tracce confermate.

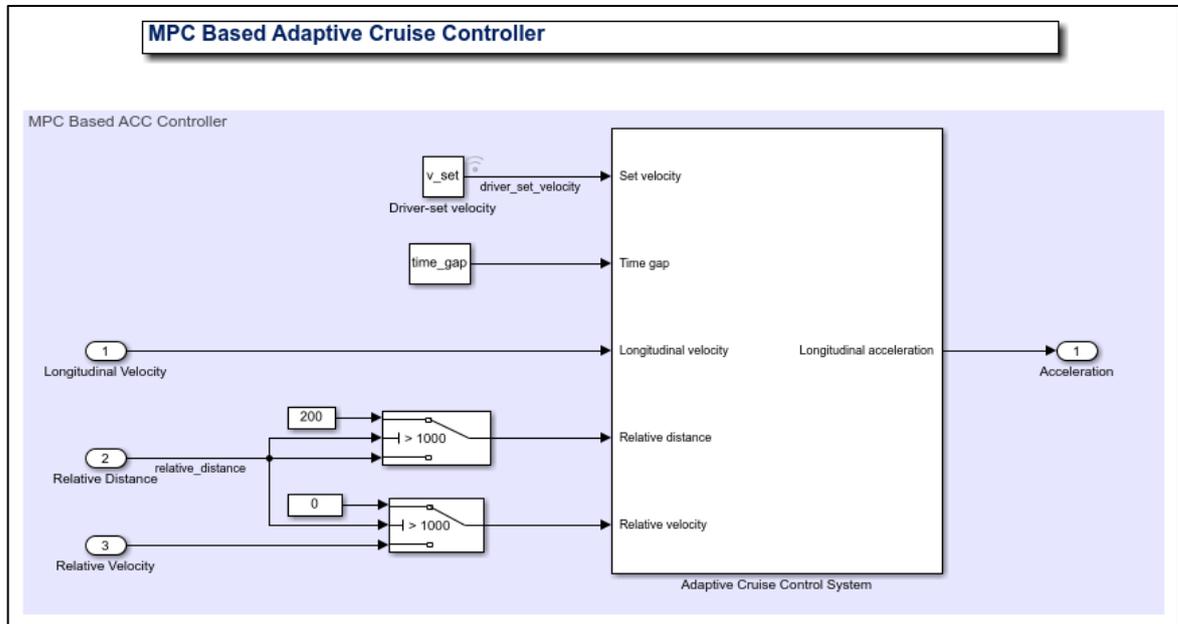
Il blocco “*Detection Concatenation*” lega i rilevamenti dei due sensori. Il “*Detection Clustering*” agglomera molteplici rilevamenti del radar, in quanto si aspetta che si abbia al più un rilevamento, dal singolo sensore, per oggetto da rilevare.

Infine, è presente il blocco “*Find Lead Car*”, esso è una Matlab Function che ha come obiettivo di determinare il veicolo più vicino all’ego car sulla sua stessa corsia. Tale funzione fornisce la posizione, velocità relativa all’ego car.

- Il sottosistema “*Adaptive Cruise Controller*” presenta due tipologie di ACC; un ACC classico (di default) e uno basato su un sistema di controllo MPC. L’ACC fornisce l’accelerazione longitudinale^a, u , sulla base di vari input quali velocità longitudinale dell’ego car, distanza relativa e velocità relativa tra la lead car e l’ego car. Per il classico ACC se la distanza relativa è inferiore a quella di sicurezza, allora l’obiettivo principale è rallentare mantenendo la distanza voluta. Invece, se la distanza è superiore allora l’obiettivo è quello di raggiungere la velocità fissata. Per l’ACC basato su controllo MPC, l’ottimizzazione del problema è formulata introducendo un vincolo. Esso impone che la distanza relativa sia sempre maggiore di quella di sicurezza andando a spostare la velocità rispetto al valore di riferimento quando possibile.

^a Limitata nel range [-3,2] m/s² per questioni di comfort.

$$\begin{aligned} & \underset{u}{\text{minimize}} && |V - V_{set}|^2 \\ & \text{subject to} && D_{relative} - D_{safe} \geq 0 \\ & && -3 \leq u \leq 2 \end{aligned} \tag{4.17}$$



Analizziamo ora il sottosistema principale “*Vehicle and Environment*” che è costituito da due parti:

- Vehicle Dynamics and Global Coordinates
- Actor and Sensor Simulation

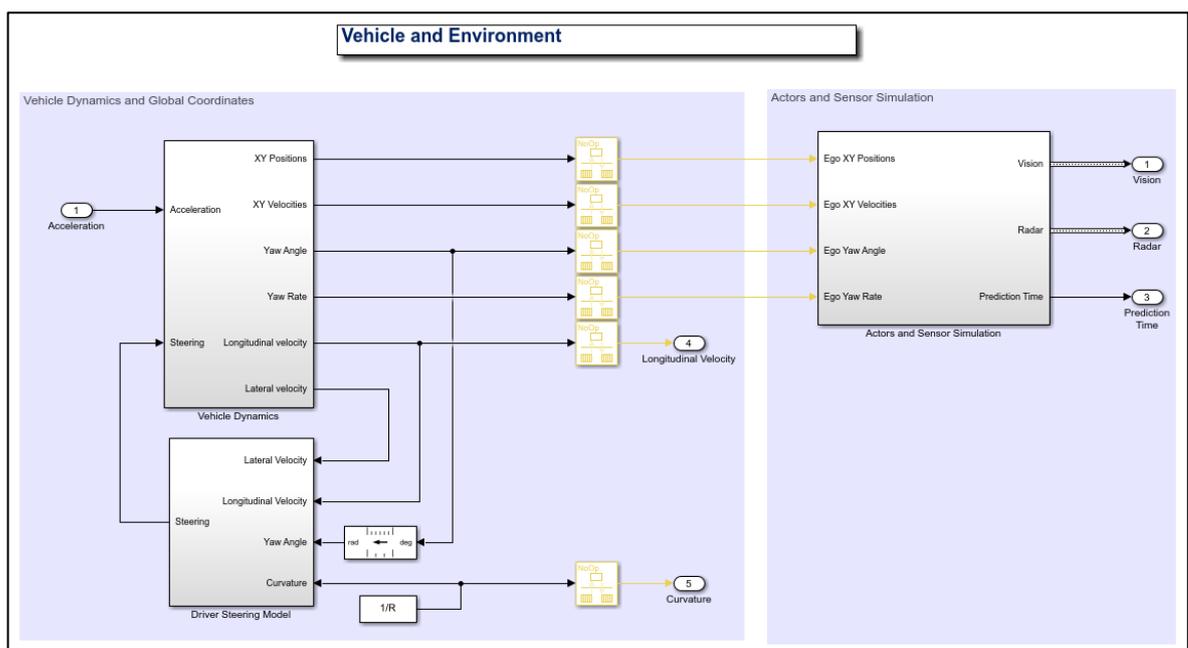


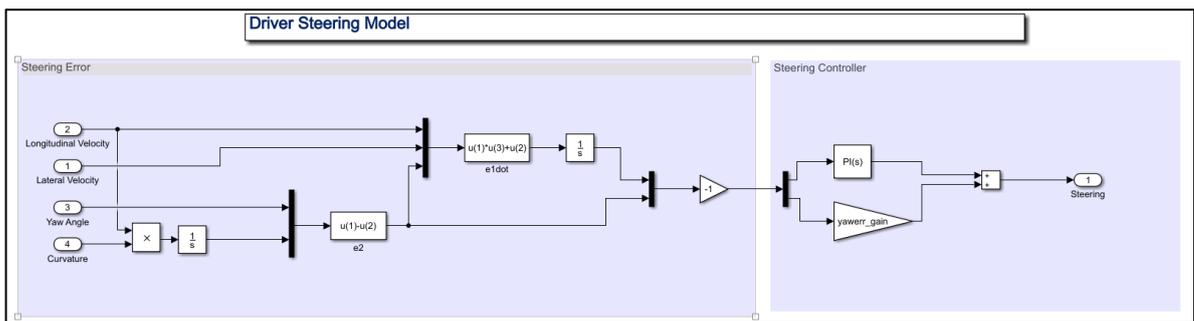
Fig. 4.38 – schema a blocchi Vehicle and Environment

- Il sottosistema “*Vehicle Dynamics*” modella la dinamica del veicolo analizzando un modello a bicicletta^a. Il sottosistema ha come **input l’accelerazione longitudinale u e l’angolo di sterzo δ** delle ruote anteriori, e la sua dinamica è approssimata dal seguente state space:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} V_y \\ \psi \\ \dot{\psi} \\ V_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2C_f + 2C_r}{mV_x} & 0 & -\frac{2C_f l_f - 2C_r l_r}{mV_x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2C_f l_f - 2C_r l_r}{I_z V_x} & 0 & -\frac{2C_f l_f^2 + 2C_r l_r^2}{I_z V_x} & 0 \\ 0 & 0 & V_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_y \\ \psi \\ \dot{\psi} \\ V_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2C_f}{m} \\ 0 \\ \frac{2C_f l_f}{I_z} \\ 0 \end{bmatrix} \delta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_x \end{bmatrix}$$

Inoltre, esso ha come output gli stati del sistema $Y = I \cdot X$, dove I è la matrice identità. Inoltre, sarà poi possibile determinare la posizione del baricentro del veicolo come nella (2.2).

(4.18)



L’obiettivo del “*Driver Steering Model*” è di mantenere il veicolo sulla sua corsia e seguire la curvatura della strada controllando l’angolo di sterzo.

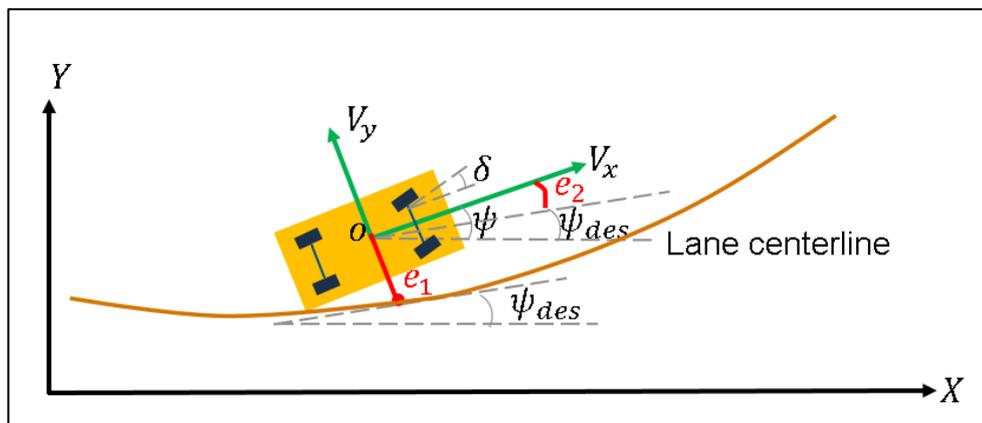


Fig. 4.39 – schema rappresentativo della deviazione laterale del veicolo rispetto alla traiettoria di riferimento

^a In conformità con il modello lineare a bicicletta descritto dalla 1.47 nel Capitolo II.

Tale obiettivo è raggiunto riducendo a zero l'errore sull'angolo di imbardata e sulla deviazione laterale:

$$\dot{e}_1 = V_x e_2 + V_y \quad (4.19)$$

$$e_2 = \psi - \psi_{des}^a \quad (4.20)$$

La Fig. 4.39 mostra un sistema di riferimento inerziale X,Y mentre il sistema di riferimento fissato al veicolo sarà ruotato di un angolo ψ rispetto a quello inerziale. Definiamo e_1 la distanza tra il baricentro e il punto della traiettoria più vicino al veicolo. La velocità con cui varia tale distanza è:

$$\dot{e}_1 = V \sin(\beta + \Delta\psi) \quad (4.21)$$

Dove $\Delta\psi = \psi - \psi_{des} = e_2$ è l'angolo tra la tangente alla traiettoria e l'asse x del veicolo. Linearizzando $\sin(\beta + \Delta\psi) \approx \beta + \Delta\psi$, la deviazione laterale nel centro di gravità e_1 cambia secondo la seguente espressione:

$$\dot{e}_1 = V(\beta + \Delta\psi) \quad (4.22)$$

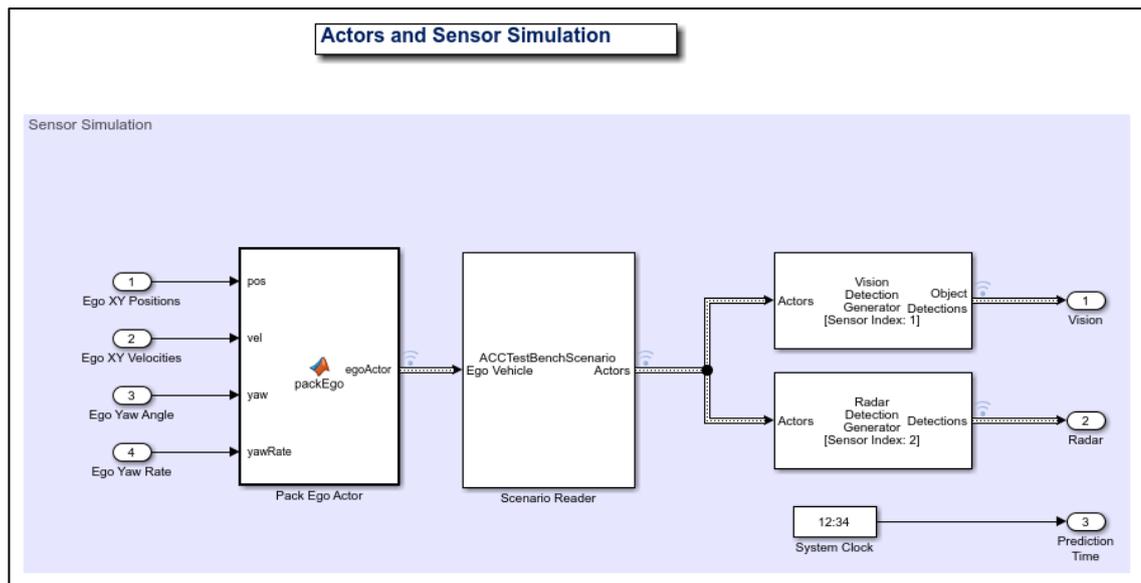
Da cui essendo $V\beta = V_y$ e $V\Delta\psi = V_x e_2$ otteniamo la (4.19).

Quindi, andando a determinare le due componenti di velocità del veicolo, l'angolo di imbardata e il raggio di curvatura della traiettoria è possibile andare a determinare tali due errori. Successivamente un controllore PID andrà ad agire sull'angolo di sterzo del veicolo con l'obiettivo di ridurre a zero l'errore di traiettoria del veicolo.

- Il sottosistema "Actor and Sensor Simulation^b" genera i dati dei sensori necessari per il tracciamento e la fusione degli stessi. A differenza degli altri "attori" definiti nello scenario di riferimento, il moto dell'ego car viene controllato dal sistema di controllo e quindi non essi vengono derivati ad ogni istante di simulazione dal blocco "Vehicle Dynamics". A tal proposito si utilizza il blocco "Pack Ego Actor" in modo tale da definire l'attore ego-car, introducendolo quindi nello scenario precedentemente definito, raggruppando tutti i parametri dello stato.

^a Si ricorda che la velocità di imbardata desiderata è data da $\frac{V_x}{R}$, dove R è il raggio di curvatura della strada. Di conseguenza è possibile determinare l'angolo di imbardata voluto integrando tale valore.

^b Prima di avviare la simulazione, è necessario creare uno scenario con una strada di riferimento e molteplici attori (veicoli) con le loro relative traiettorie.



Successivamente si entra in un blocco definito “*Scenario Reader*” che permette appunto di introdurre nello scenario l’ego car e di leggere gli altri attori definiti in precedenza. Poi si utilizzano altri due blocchi “*Vision Detection Generator*” e “*Radar Detection Generator*” che appunto permettono il rilevamento dei veicoli di fronte la traiettoria del veicolo principale.

Avviso di collisione – Forward Collision Warning (FCW)

È una feature molto importante nell’assistenza alla guida ed ha come obiettivo la definizione corretta, al tempo giusto di eventuali avvisi di pericolo al guidatore prima di una possibile collisione con il veicolo che lo segue.

Per fare ciò, i veicolo devono essere equipaggiati con sensori visivi e radar. Inoltre, la combinazione dei dati ricevuti dalle diverse tipologie di sensori aumenta la probabilità di avvisi veritieri, minimizzando il falso allarme.

Il veicolo dovrà essere equipaggiato con:

- **Sensori visivi**, quali Radar e telecamere che permettono di ottenere una lista di oggetti rilevati con una classificazione^a nonché informazioni sui confini della corsia.
- **Sensori Radar** a medio e lungo raggio, che permettono il rilevamento di oggetti senza classificazione. La tecnologia più recente utilizza l’intera banda di frequenza da 76 a 81 GHz e garantisce il massimo delle performance.
- **Sensori inerziali IMU**, che percepiscono l’ambiente circostante in grado di rilevare e rispondere alle condizioni stradali, in tutte le condizioni atmosferiche. Gli IMU combinano nello stesso package accelerometri e giroscopi multasse, nonché l’elettronica di elaborazione e calibrazione. Essi, in combinazione con i ricevitori

^a In base al livello di importanza per ogni oggetto, importante per identificare l’oggetto più importante definito MIO.

satellitari contribuiscono a determinare l'esatta posizione, la velocità e la direzione di marcia del veicolo.

- **Video camera**, che effettuerà un video della scena di fronte alla macchina utilizzato per verifiche della traiettoria inseguita.

Il modello è definito da uno Script in Matlab. Innanzitutto, bisogna definire un algoritmo in grado di tracciare gli oggetti dell'ambiente, per fare è creato un *Multi-Object Tracker*.

Dalla lista di oggetti riportati dai sensori visivi e radar, tale algoritmo traccia gli oggetti intorno all'ego car. Vengono, inoltre, combinati i dati dalle due tipologie di sensori diversi per ridurre la probabilità di falso allarme. È necessario poi andare ad eliminare tutte quei rilevamenti che creano confusione. Infatti, il radar fornisce molti oggetti che sono fissi, come guard-rails, segnali stradali, ecc. Se questi rilevamenti vengono utilizzati possono creare confusione.

Una volta definite le tracce degli oggetti intorno all'ego car, bisogna definire l'oggetto più importante (MIO). Esso è definito come la traccia che è nella stessa corsia dell'ego car e alla minima distanza da essa. Una volta che si è determinato il MIO si calcola la velocità relativa tra la vettura ed essa. Infatti, dalla distanza relativa e dalla velocità relativa si determina l'allarme di possibile collisione.



Fig. 4.40 – schema di FCW

Esistono tre casi differenti di FCW:

1. **Sicuro (Verde)**: non vi è alcuna vettura sulla corsia dell'ego car oppure il MIO si sta allontanando dalla macchina o la distanza da essa resta costante.
2. **Cautela (Giallo)**: il MIO si sta avvicinando all'ego car ma è ancora ad una distanza superiore della distanza FCW. Tale distanza è calcolata usando un test di protocollo EURO NCAP AEB. Tale distanza varia con la velocità relativa tra il MIO e la vettura.

$$d_{FCW} = 1.2v_{rel} + \frac{v_{rel}^2}{2a_{max}^a}$$

^a È la massima decelerazione, definita come il 40% dell'accelerazione di gravità.

3. Pericolo (Rosso): il MIO si sta avvicinando molto all'ego car e la sua distanza di sicurezza è minore della distanza FCW (d_{FCW}).

Frenata di emergenza – Autonomous Emergency breaking (AEB)

Utilizzando il toolbox Automated Driving in Matlab è possibile realizzare un sistema di frenata di emergenza molto utilizzato in molte auto.

La frenata di emergenza autonoma è un sistema avanzato di sicurezza attivo che aiuti i conducenti ad evitare o ridurre collisioni con altri veicoli o pedoni.

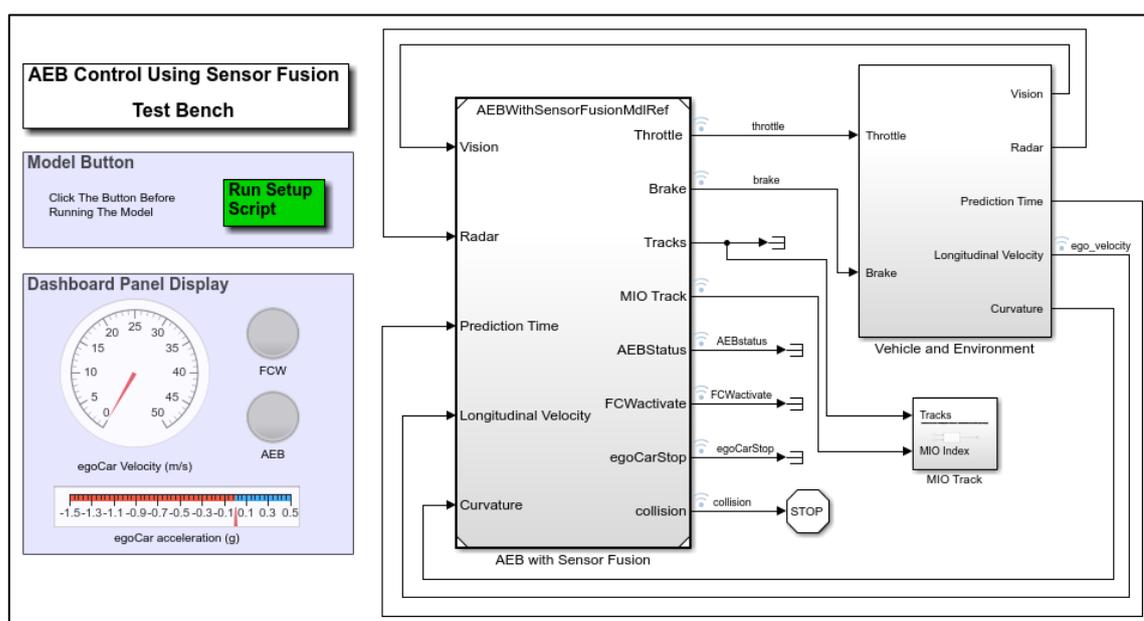


Fig. 4.41 – schema generale AEB in Simulink

Il modello è costituito da due principali sottosistemi:

- **AEB with Sensor Fusion**, che contiene un algoritmo per la fusione dei sensori e un controllore AEB
- **Vehicle and Environment**, che modella la dinamica dell'ego car e dell'ambiente che lo circonda. Esso include il lettore del Driving Scenario e sistemi di rilevamento segnali dai radar e dai sistemi visivi.

Analizziamo dapprima il primo sottosistema.

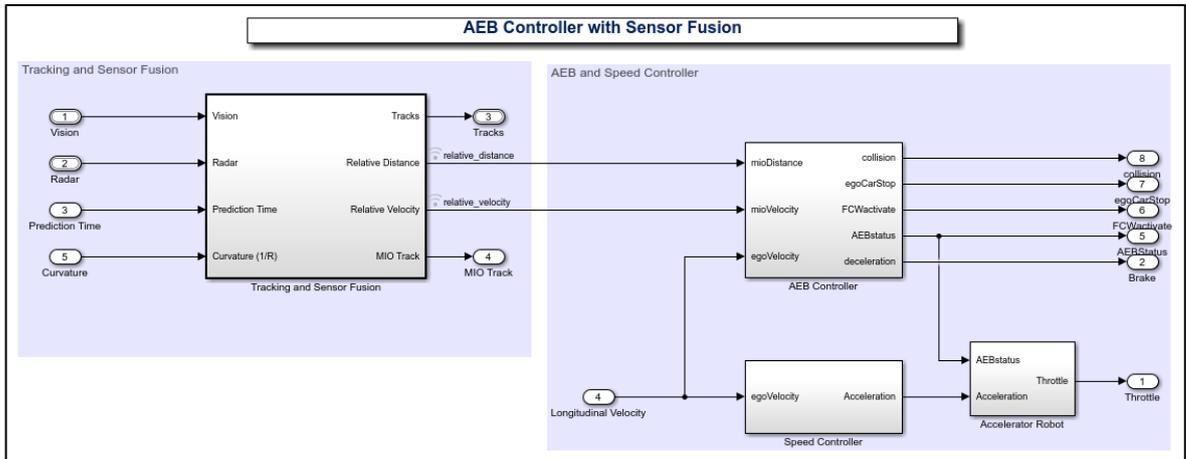


Fig. 4.42 – Blocchi Simulink AEB Controller with Sensor Fusion

Dalle telecamere e dai radar si ottengono delle informazioni che vengono elaborate dal sottosistema Tracking and Sensor Fusion dando come output la posizione e la velocità dell'oggetto di maggior interesse (MIO) relativa a quella dell'ego car.

Nel sottosistema Speed Controller viene modificata la velocità dell'ego car in modo tale da viaggiare alla definita velocità utilizzando un controllore PI.

Invece, il sottosistema AEB Controller implementa l'allarme di collisione imminente (Forward Collision Warning – FCW) e l'algoritmo di controllo AEB.

Tale algoritmo si basa su un approccio legato al calcolo del così definito Stopping Time. Tale parametro si riferisce al tempo da quando l'ego car inizia a decelerare con una decelerazione a_{brake} fino al suo definitivo arresto. Può essere ottenuto dalla seguente espressione:

$$\tau_{stop} = \frac{v_{ego}}{a_{brake}} \quad (4.24)$$

Da quando il sistema FCW informa il guidatore di un imminente collisione, esso reagirà e inizierà a frenare con un ritardo temporale τ_{react} .

Di conseguenza, il tempo totale dell'ego car prima che esso tamponi la macchina che segue è espressa dalla seguente formula:

$$\tau_{FCW} = \tau_{react} + \tau_{stop} = \tau_{react} + \frac{v_{ego}}{a_{brake}} \quad (4.25)$$

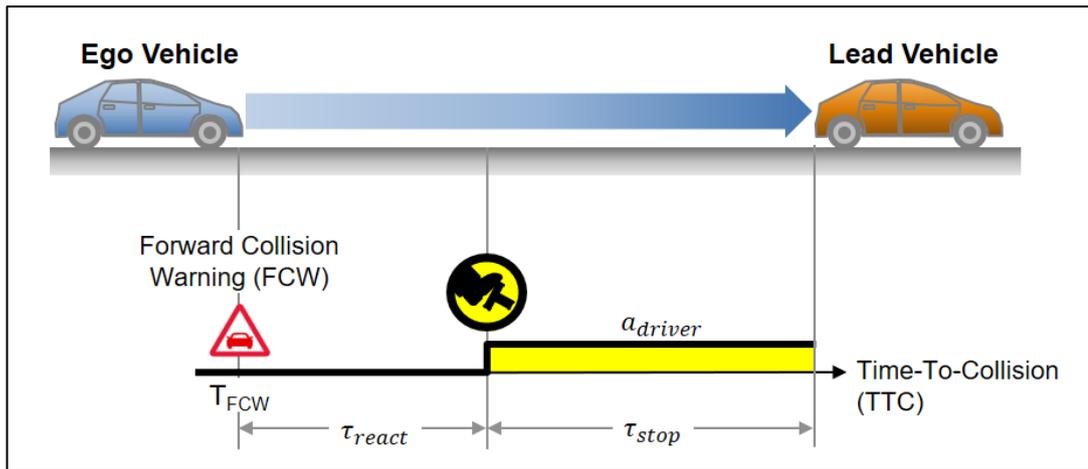


Fig. 4.43 – rappresentazione tempi di reazione e di arresto

Quindi quando il Time-to-collision (TTC) diventa minore del τ_{FCW} allora l'allarme FCW si attiva. Se il guidatore non riesce ad agire sul pedale del freno in tempo il sistema AEB agisce indipendentemente dal conducente per evitare la collisione. Generalmente il sistema AEB applica una serie di frenate a diversa intensità per poi concludere con una frenata finale a pieno pedale schiacciato.

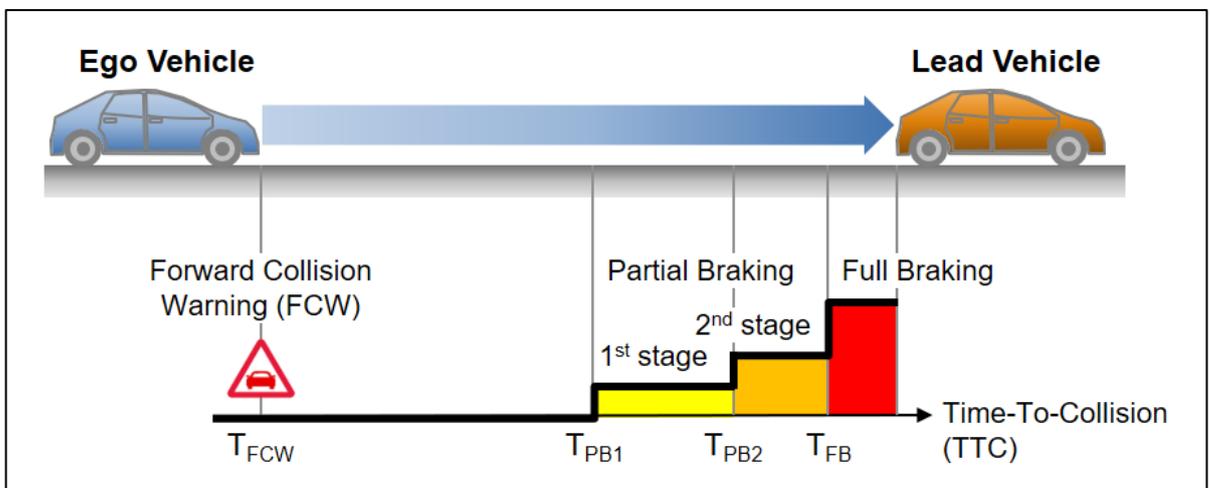


Fig. 4.44 – rappresentazione frenata a cascata dell'AEB.

Si analizzi, ora, più nel dettaglio il controllore AEB. Esso è costituito da diversi blocchi.

- TTC Calculation, che calcola il time-to-collision usando la distanza relativa e la velocità relativo dal veicolo che segue o del MIO.

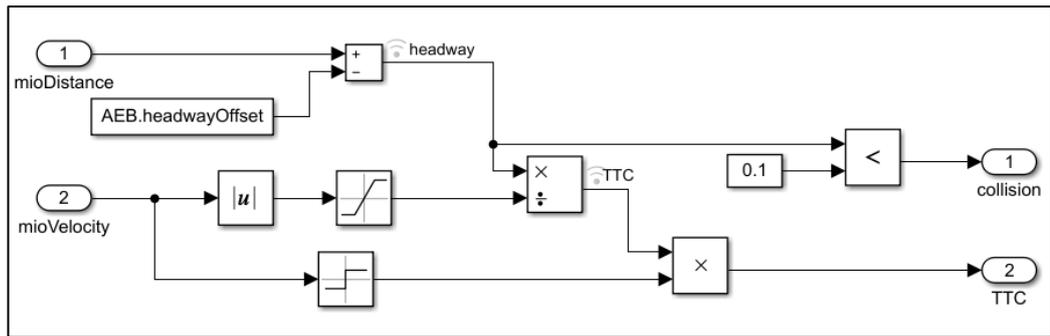


Fig. 4.45 – schema TTCalculation

Quindi, il TTC sarà definito come:

$$TTC = \frac{d_{rel}}{v_{rel}} \quad (4.26)$$

Dove d_{rel} e v_{rel} sono rispettivamente la distanza e la velocità relativa tra il MIO e il veicolo. Inoltre, come si vede dallo schema in Fig. , quando la distanza relativa diventa inferiore a 0.1 m verrà dato un segnale di collisione.

- StoppingTimeCalculation, che calcola gli Stopping times per il calcolo del FCW, la prima e la seconda frenata parziale nonché la completa frenata. Come si vede nello schema nella figura successiva, la definizione dello Stopping Time riprende le equazioni descritte in precedenza. Come abbiamo detto in precedenza generalmente il sistema AEB applica una serie di frenate di diversa intensità.

$$\tau_{PBi} = \frac{v_{ego}}{a_{partial,brake,i}} \quad (4.27)$$

Dove τ_{PBi} è il tempo in cui si aziona la frenata parziale i-esima, ed $a_{partial,brake,i}$ è la decelerazione associata a tale fase.

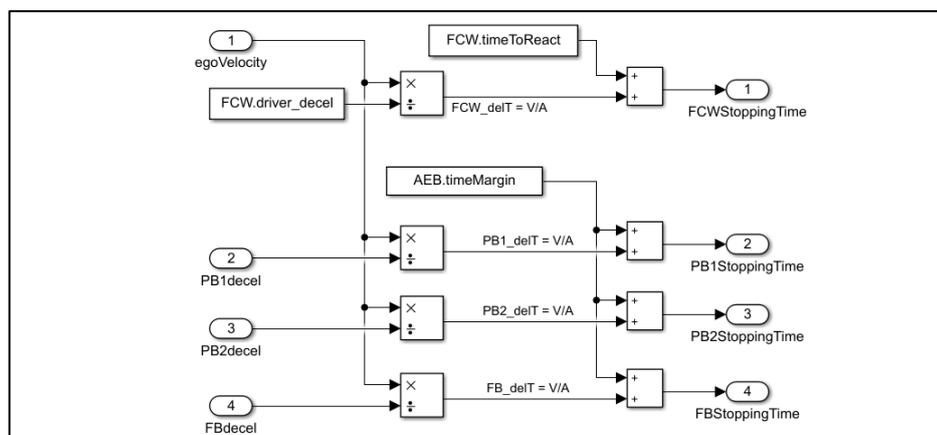


Fig. 4.46 – schema dei tempi caratteristici delle varie fasi di frenata

- AEB Logic, che compara il TTC con lo stopping time per determinare l'attivazione del FCW e dell'AEB.

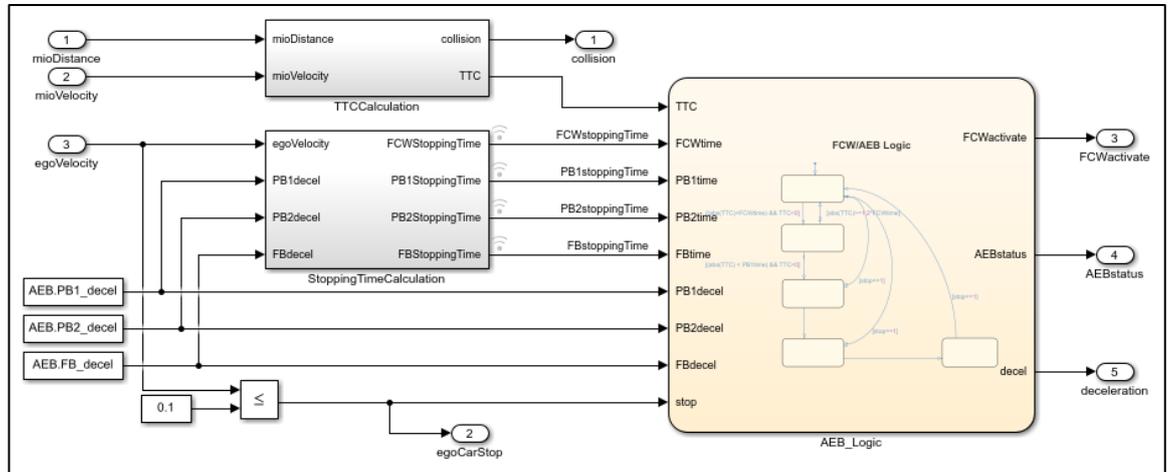


Fig. 4.47 – Schema controllore AEB

Quindi a seconda se il TTC è inferiore al τ_{FCW} o ai τ_{PBi} , viene attivato o meno l'AEB con un opportuna fase di frenata.

Si va, ora, a testare il modello Simulink AEB. Avviando la simulazione viene dapprima letta un file che tiene conto dello scenario di riferimento costituito dall'ego car, da due veicoli ed un pedone.

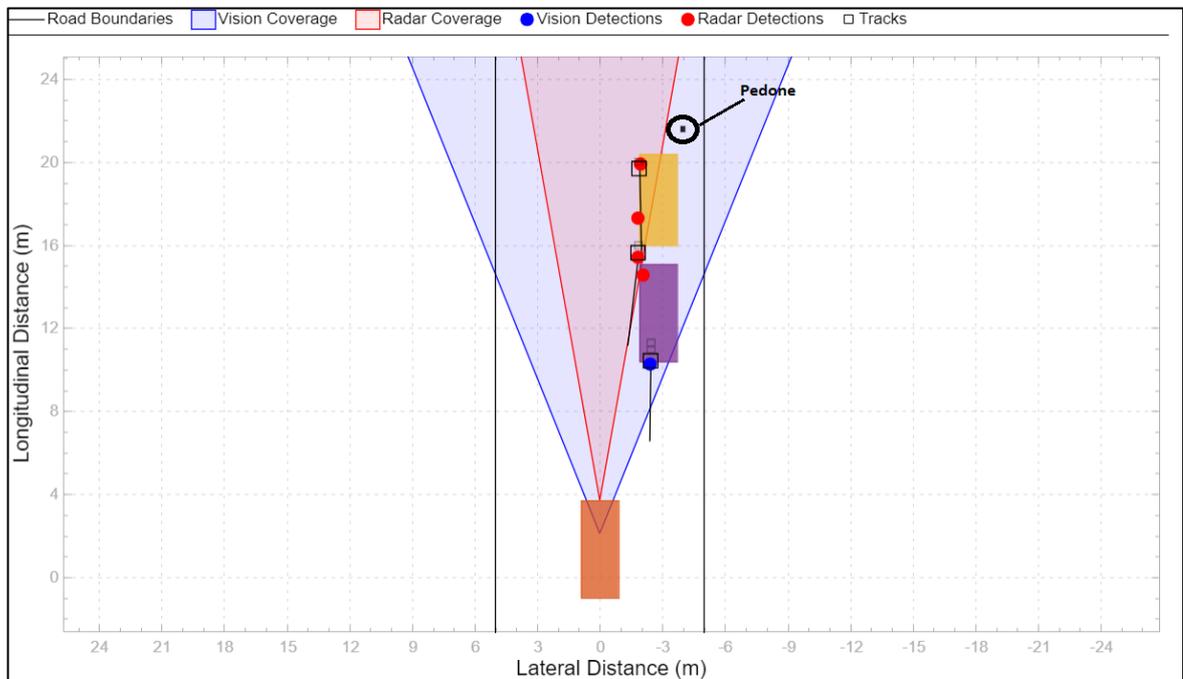


Fig. 4.48– Bird's-Eye Scope a 0.1 s

Si simuli il modello per 0.1 s. Dal Bird's-Eye Scope notiamo la presenza dei due veicoli e del pedone. Però, tale grafico sottolinea come in tale istante i rilevamenti dei radar e dei sistemi visivi non riescono a rilevare la presenza del pedone essendo ostacolato dai due veicoli precedenti.

Si simuli il modello per 3.8 s. In tal caso, il grafico mostra che il pedone viene rilevato come l'oggetto più importante e che il sistema ha attivato i freni per evitare la collisione.

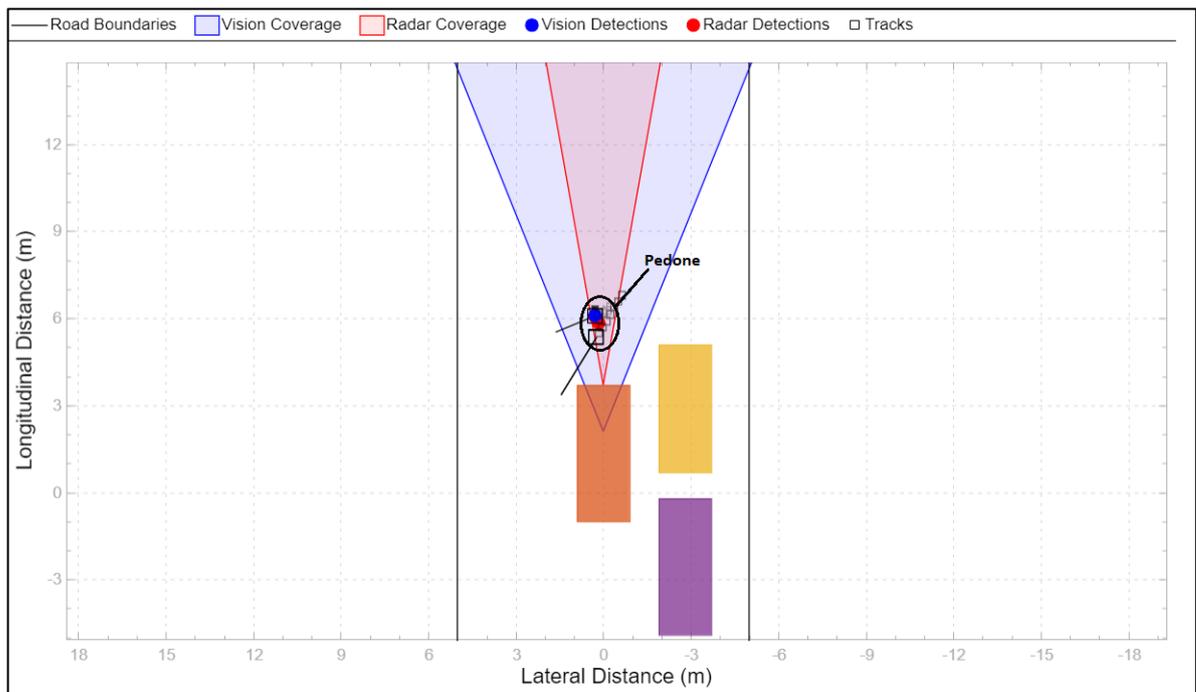
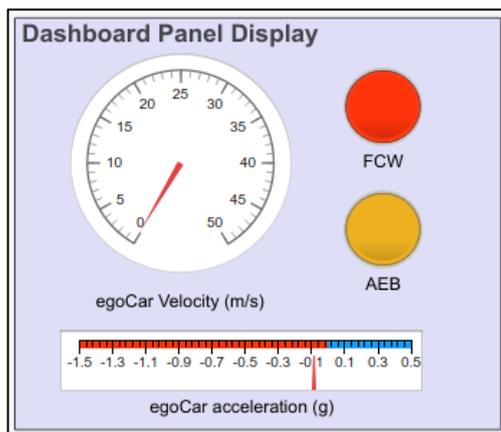


Fig. 4.49 – Bird's-Eye Scope dopo 3.8 s



Infine, bisogna analizzare il Dashboard Panel Display, che da una rappresentazione intuitiva della velocità dell'ego car, della sua velocità ed indica il livello di attivazione dell' AEB:

- Grigio, se non ho l'attivazione
- Giallo, quando è attivata la prima fase di frenata parziale.
- Arancione, quando è attivata la seconda fase
- Rosso, quando è attivata la frenata

In conclusione, si analizzino i risultati della simulazione dai grafici in Fig. 4.49.

Il primo grafico (TTC vs. Stopping Time) confronta il Time-to-collision (TTC) e gli stopping time per l'FCW, il primo step della frenata parziale, il secondo step e la completa frenata.

Il secondo mostra come gli stati dell'AEB determini l'attivazione del FCW e AEB basato sul confronto derivato dal primo grafico.

Il terzo grafico mostra l'accelerazione dell'ego car, il quarto grafico invece la sua velocità.

L'ultimo grafico, infine, mostra la distanza tra l'ego car e il MIO.

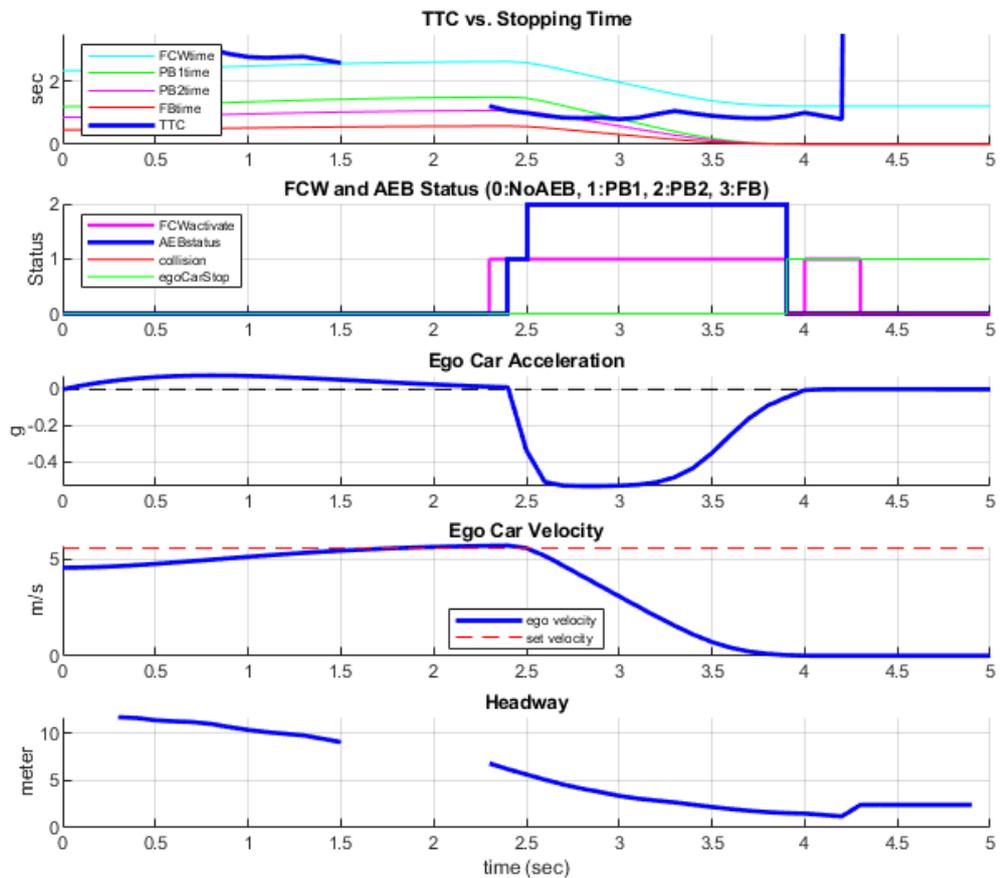


Fig. 4.50 – risultati simulazione

Allora, nei primi 2 secondi la velocità dell'ego car aumenta per raggiungere la velocità voluta. A 2.3 secondi, i sensori iniziano a rilevare il pedone. Immediatamente dopo il rilevamento l'FCW si attiva.

A 2.4 secondi, è applicata la prima fase di frenata parziale e l'ego car inizia a rallentare. La seconda fase della frenata parziale viene invece attivata a 2.5 secondi.

Quando l'ego car si ferma a 3.9 s, la distanza con il pedone è circa 2.4 m. Il sistema AEB ha così evitato la collisione.

4.3.2. Controllo Laterale

Si descrive la dinamica laterale del veicolo utilizzando un modello a bicicletta con due gradi di libertà, posizione laterale e angolo di imbardata.

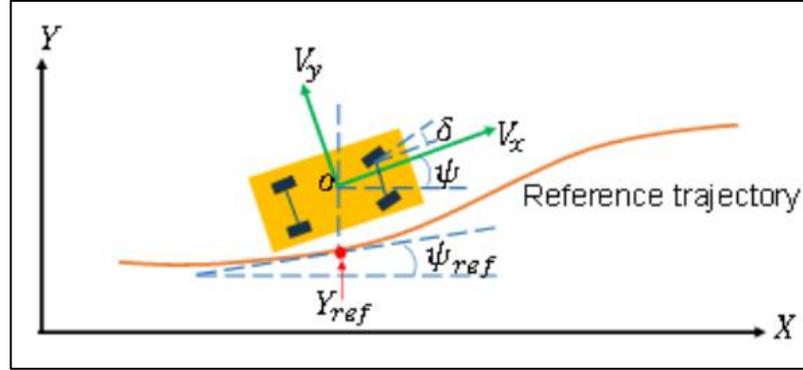


Fig. 4.51 – schema grafico parametri modello

La dinamica longitudinale è separata da quella laterale. Inoltre, la velocità longitudinale è assunta costante. Analizzeremo la dinamica laterale del veicolo usando un sistema lineare a tempo invariante LTI con i seguenti stati, input e output.

$$\dot{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_y \\ \dot{\psi} \\ \dot{r} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2C_F + 2C_R}{mV_X} & 0 & -V_X - \frac{2C_F l_F - 2C_R l_R}{mV_X} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2C_F l_F - 2C_R l_R}{I_Z V_X} & 0 & -\frac{2C_F l_F^2 + 2C_R l_R^2}{I_Z V_X} & 0 \\ 1 & V_X & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_y \\ \psi \\ r \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2C_F}{m} \\ 0 \\ \frac{2C_F l_F}{I_Z} \\ 0 \end{bmatrix} \delta_F \quad (4.28)$$

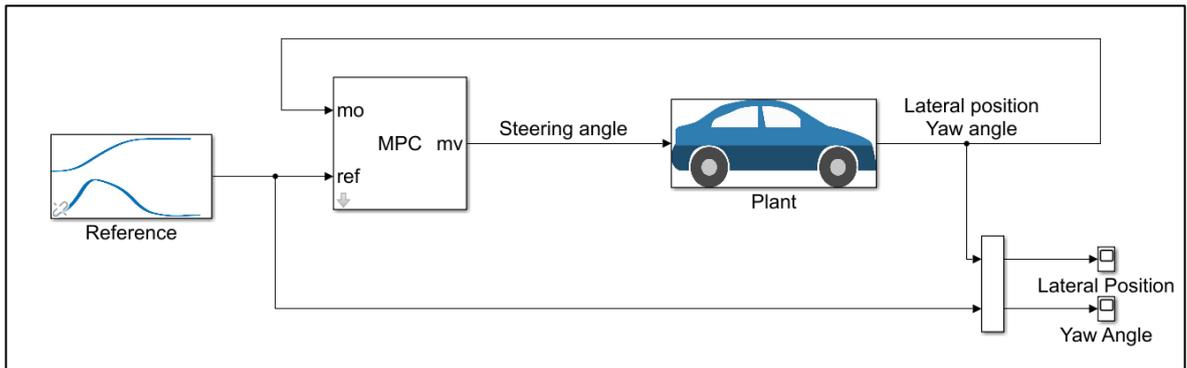
Dove:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} V_y \\ \psi \\ r \\ Y \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \delta_F \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} Y \\ \psi \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -\frac{2C_F + 2C_R}{mV_X} & 0 & -V_X - \frac{2C_F l_F - 2C_R l_R}{mV_X} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2C_F l_F - 2C_R l_R}{I_Z V_X} & 0 & -\frac{2C_F l_F^2 + 2C_R l_R^2}{I_Z V_X} & 0 \\ 1 & V_X & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \frac{2C_F}{m} \\ 0 \\ \frac{2C_F l_F}{I_Z} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il modello in questione è definito in ambiente Simulink come segue:



In esso sono presenti diversi blocchi:

- Reference per definire i valori di posizione laterale e angolo di imbardata di riferimento
- Plant è il blocco che prende in ingresso l'angolo di sterzo computato dal controllore MPC dando in uscita la risposta del modello lineare del veicolo in termini di Posizione laterale e angolo di imbardata che verranno utilizzati dal controllore in modo tale da minimizzare gli errori rispetto ai valori di riferimento.
- MPC Block è il blocco Simulink in grado di progettare il controllore.

Definita la traiettoria di riferimento tramite il toolbox su definito si vanno a definire nel blocco Reference i valori di riferimento di posizione laterale e angolo di imbardata che saranno l'ingresso del MPC. Esso, opportunamente progettato con un Prediction Horizon di 10 ed un Control Horizon di 3, darà la seguente risposta in termini di angolo di sterzo e di inseguimento di traiettoria:

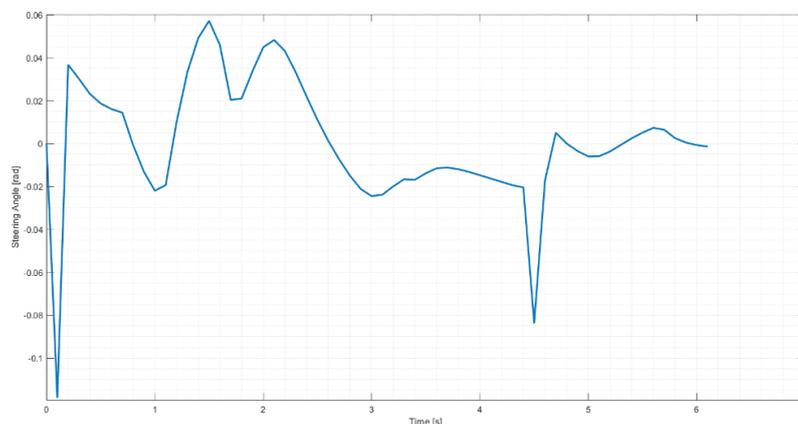


Fig. 4.52 – andamento angolo di sterzo

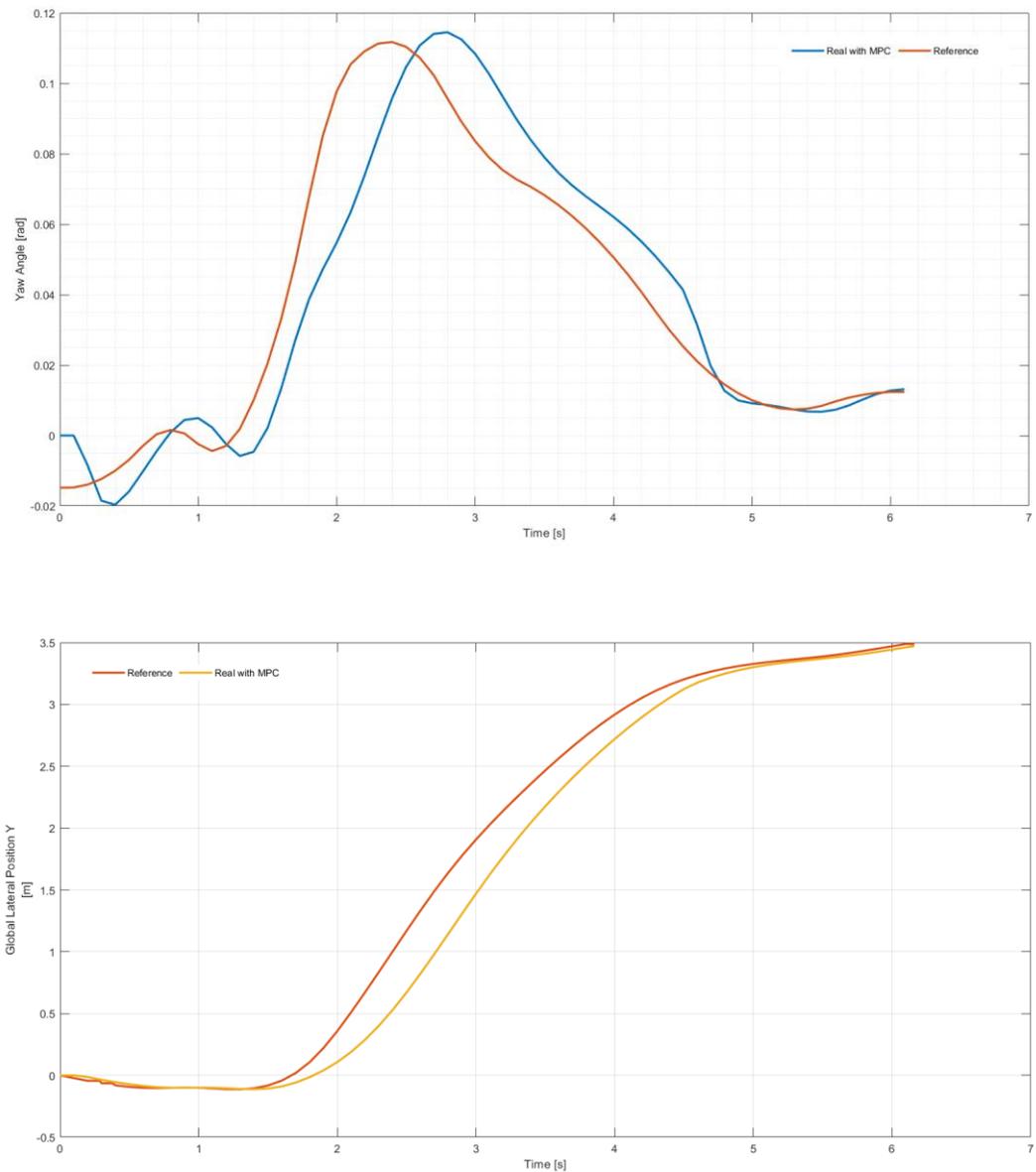


Fig. 4.53 – Andamenti angolo di imbardata e posizione laterale rispetto al riferimento

Come si vede nelle precedenti figure il sistema risponde bene anche se con un leggero ritardo; le cose diventano nettamente peggiori all'aumentare della velocità fino ai 30 m/s. Infatti, a velocità elevate il controllo non risponde più bene, il che è un limite del MPC tradizionale.

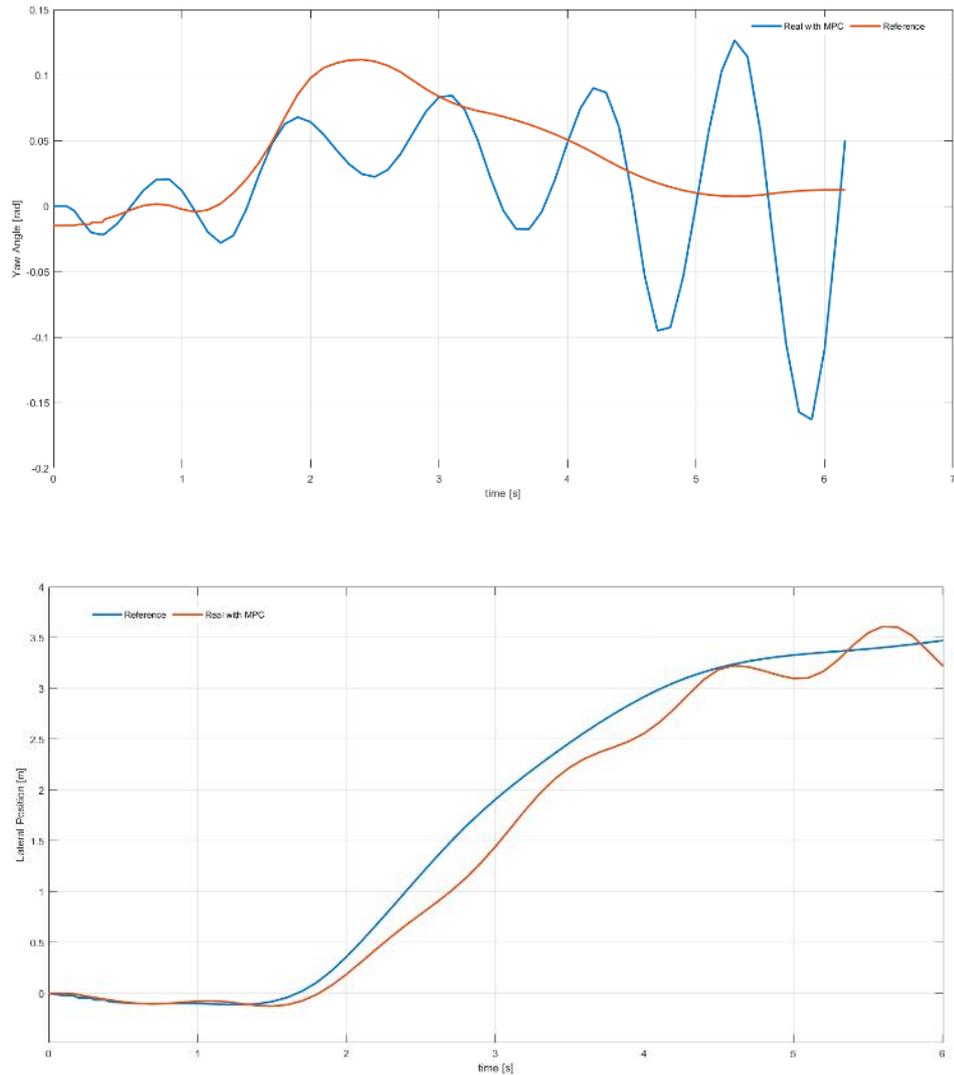


Fig. 4.54 – andamento angolo di imbardata e posizione laterale rispetto al riferimento a velocità di 30 m/s

Possiamo ora utilizzare un MPC Adattivo per sterzare un veicolo la quale dinamica laterale cambia nel tempo a causa di una variazione della velocità longitudinale. Nel caso precedente si era assunto che il veicolo ha una velocità longitudinale costante e quindi la dinamica del sistema non cambiava e perciò la matrice A era costante.

Per controllare tale sistema si è usato un tradizionale MPC, ma ora la matrice di stato A varierà nel tempo con la variazione della velocità longitudinale; di conseguenza il controllore tradizionale MPC non lavora bene in tali condizioni.

Quindi per controllare un sistema dinamico che varia nel tempo useremo un MPC Adattivo. Esso richiede un modello discreto del sistema, quindi bisogna prima convertire il modello State-Space continuo in uno discretizzato nel tempo^a.

^a Vi sono vari modi per fare questo. Si è quindi utilizzato il comando Matlab `c2d` che effettua tale conversione.
`Ct_plant= mpc1.Model.Plant; dt_plant=c2d(ct_plant, Ts)`

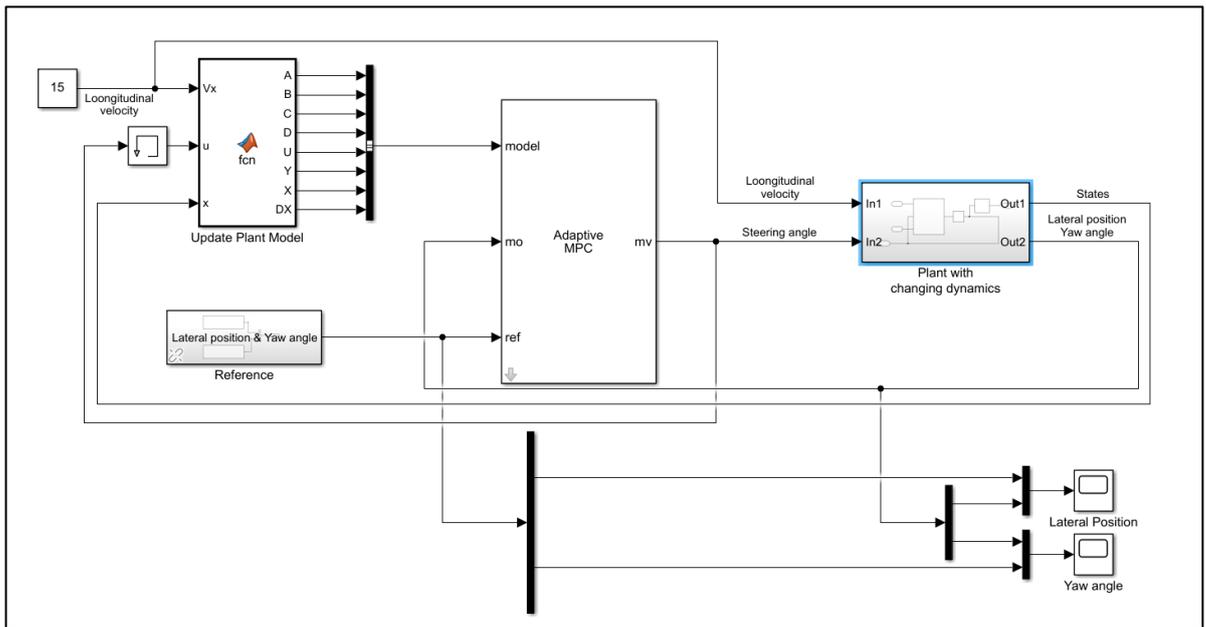
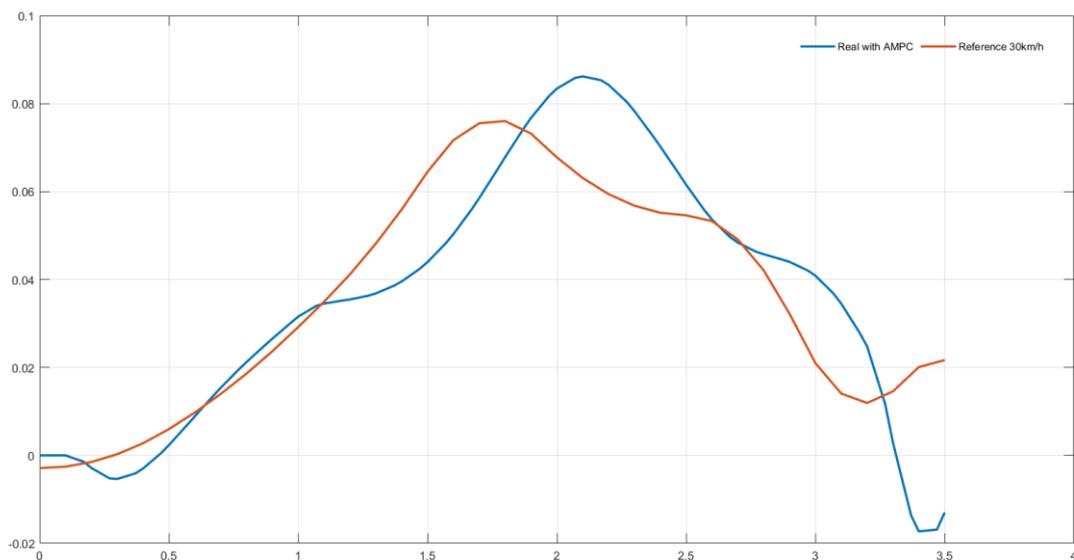


Fig. 4.55 – Modello Simulink Adaptive MPC

Cambiando la dinamica con la variazione della velocità longitudinale, quest'ultima diventerà ora un ingresso nel nostro sistema. A differenza del tradizionale MPC, quello qui discusso ha bisogno in ingresso anche il modello del sistema che viene ricalcolato ad ogni tempo di calcolo.

Tale "Update Plant Model" innanzitutto definisce ad ogni istante di calcolo le matrici caratterizzante lo state space per poi definire il modello discretizzato e modifica le condizioni nominali con la condizione operativa corrente.



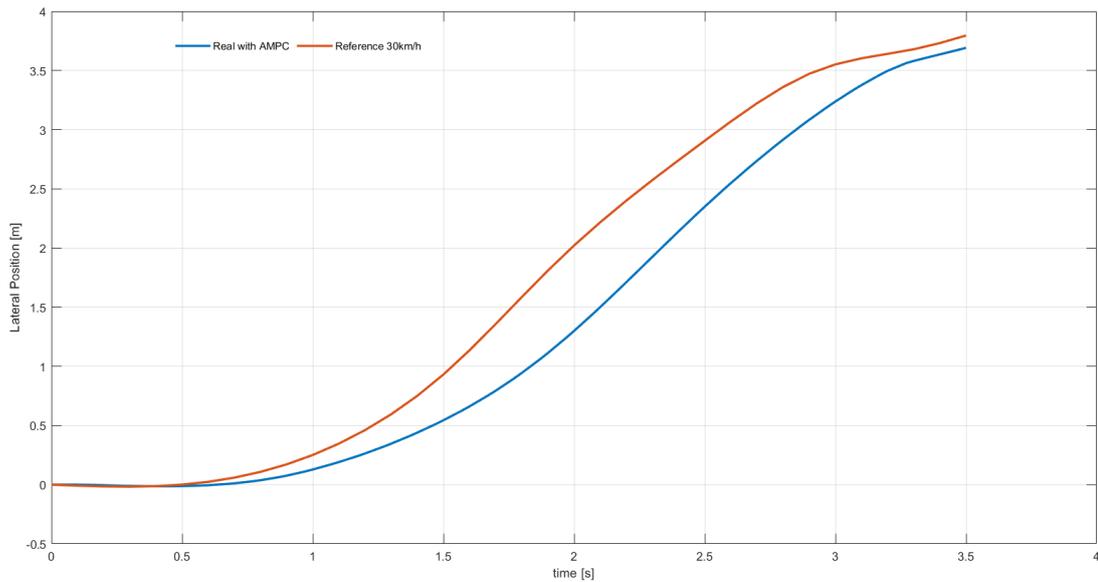
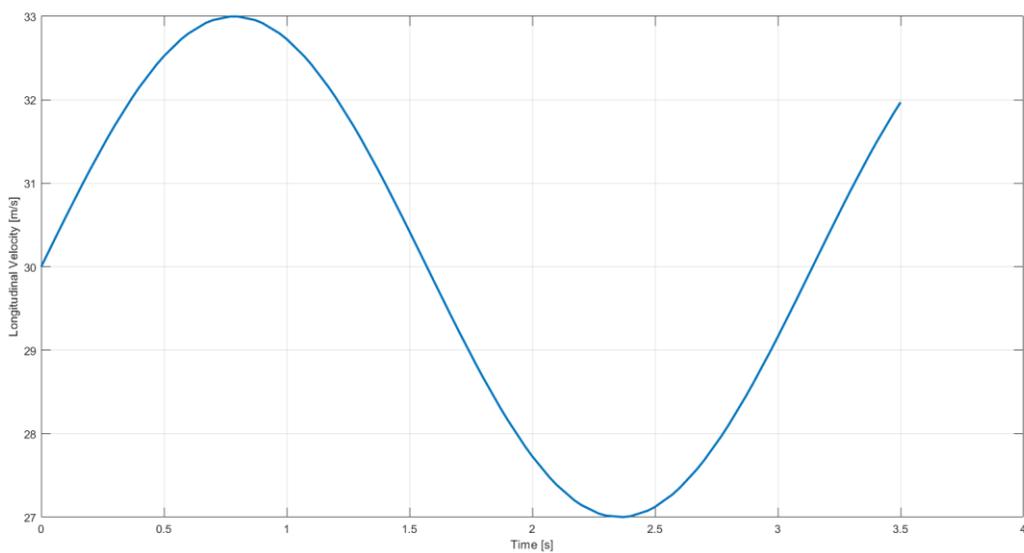


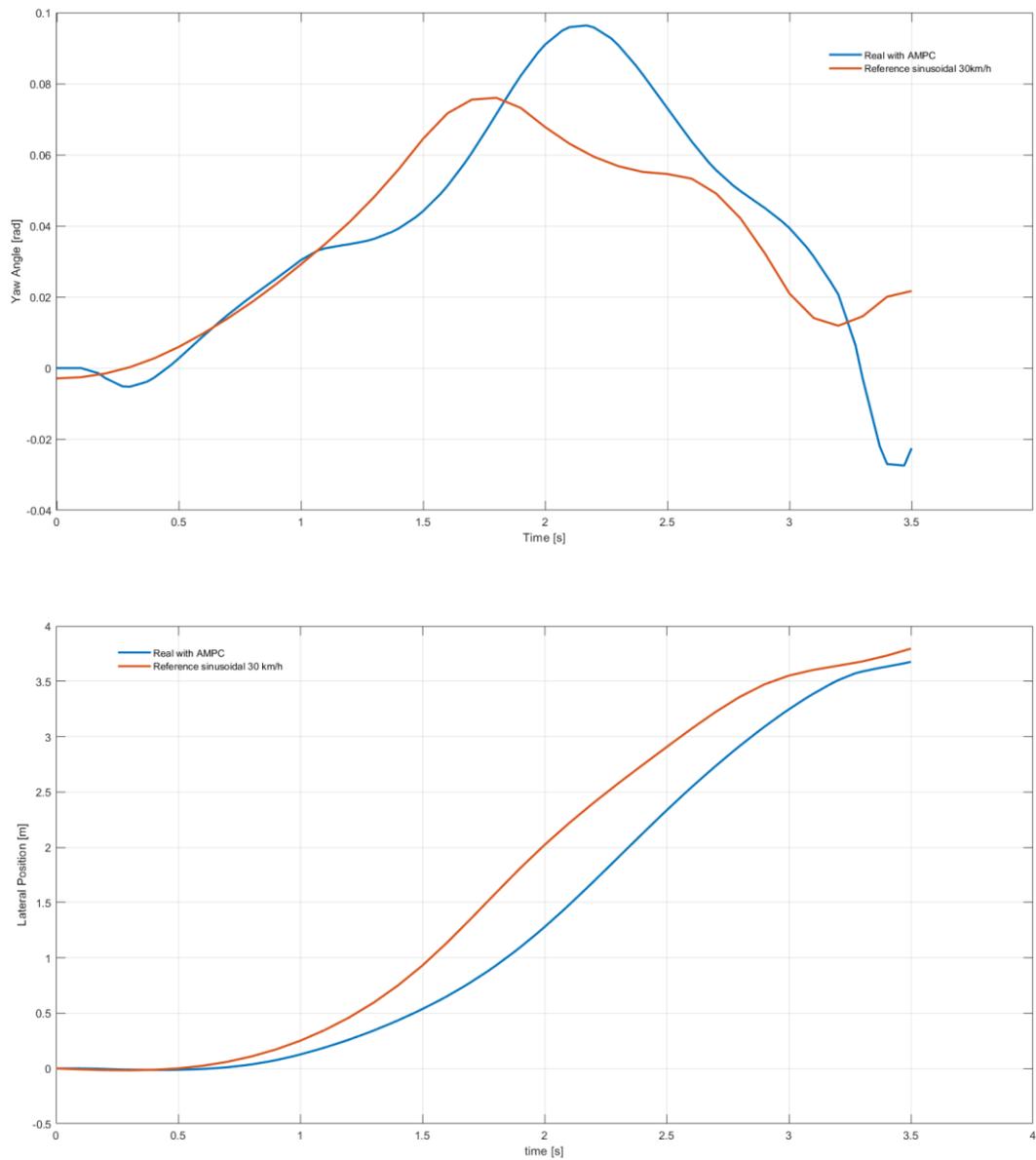
Fig. 4.56 – andamento angolo di imbardata e posizione laterale a 30 km/h con controllo MPC Adattativo

Tale controllo quindi riesce a garantire un miglior livello di inseguimento di traiettoria, come è possibile vedere dai due diagrammi su posizionati in cui si mette in relazione la risposta del sistema a seguito dell'introduzione del controllo

Adesso ipotizziamo di ragionare a velocità variabile, si ipotizzi un andamento della velocità longitudinale di tipo sinusoidale come segue.



il modello per quanto detto in precedenza risponderà bene alla variazione della dinamica dando i seguenti risultati in termini di angolo di imbardata e posizione globale laterale del veicolo.

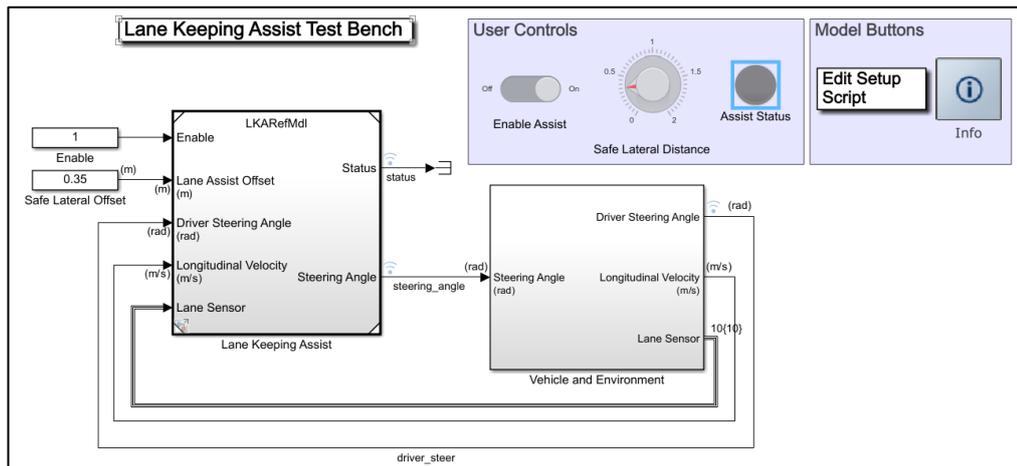


Fig, 4.57 – andamento angolo di imbardata e posizione laterale del veicolo nelle ipotesi di velocità variabile.

Lane Keeping Assist (LKA)

Un veicolo (definito Ego Car) equipaggiato con un sistema LKA ha un sensore, quale una camera, che misura la deviazione laterale e l'angolo relativo di imbardata che si sviluppa tra la mezzzeria della corsia e l'ego car.

Il sensore, inoltre, misura la curvatura corrente della corsia e la sua derivata. La curvatura di fronte all'ego car può essere calcolata direttamente dall'attuale curvatura e la sua derivata.

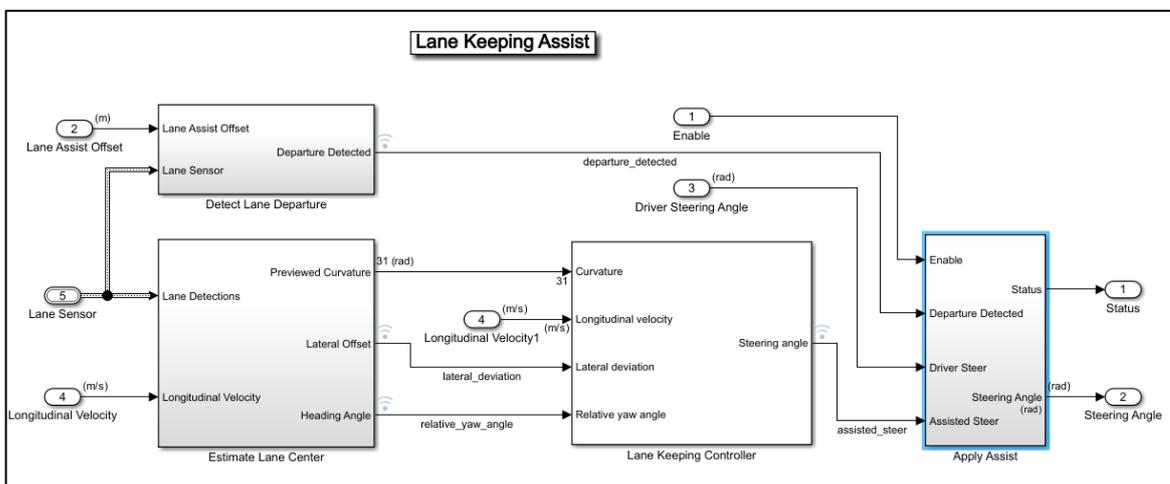


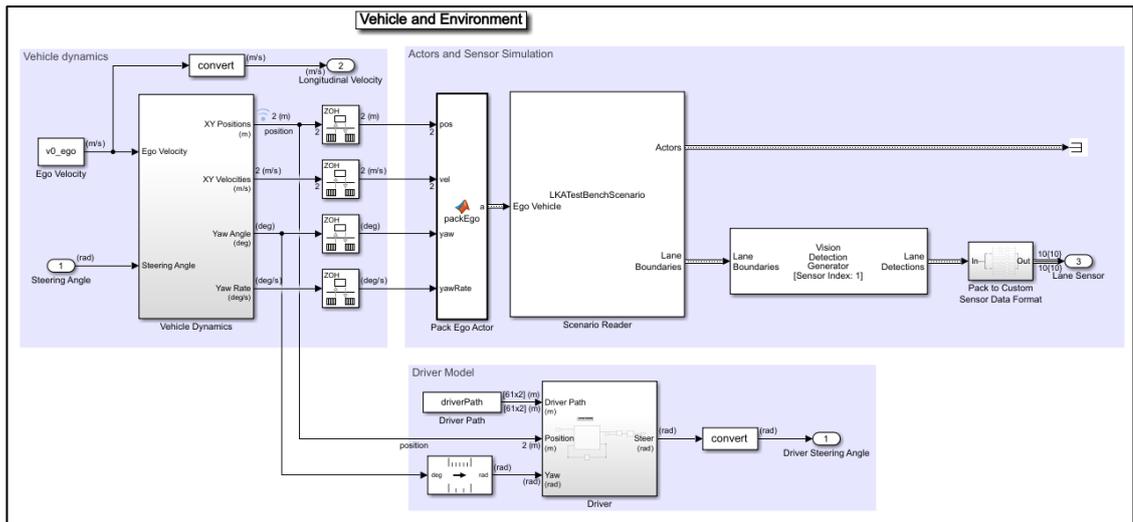
Un sistema LKA è un sistema di controllo che aiuta il guidatore nel mantenere una marcia sicura nella corsia di percorrenza. Tale sistema rileva quando il veicolo devia da una corsia e automaticamente aggiusta lo sterzo in modo tale da rimanere nella corsia senza input aggiuntivi del guidatore.

Per poter funzionare correttamente, l'ego car deve essere in grado di determinare i limiti della corsia ed in che modo essa curva nei tratti successivi.

Il modello prevede due sottosistemi principali:

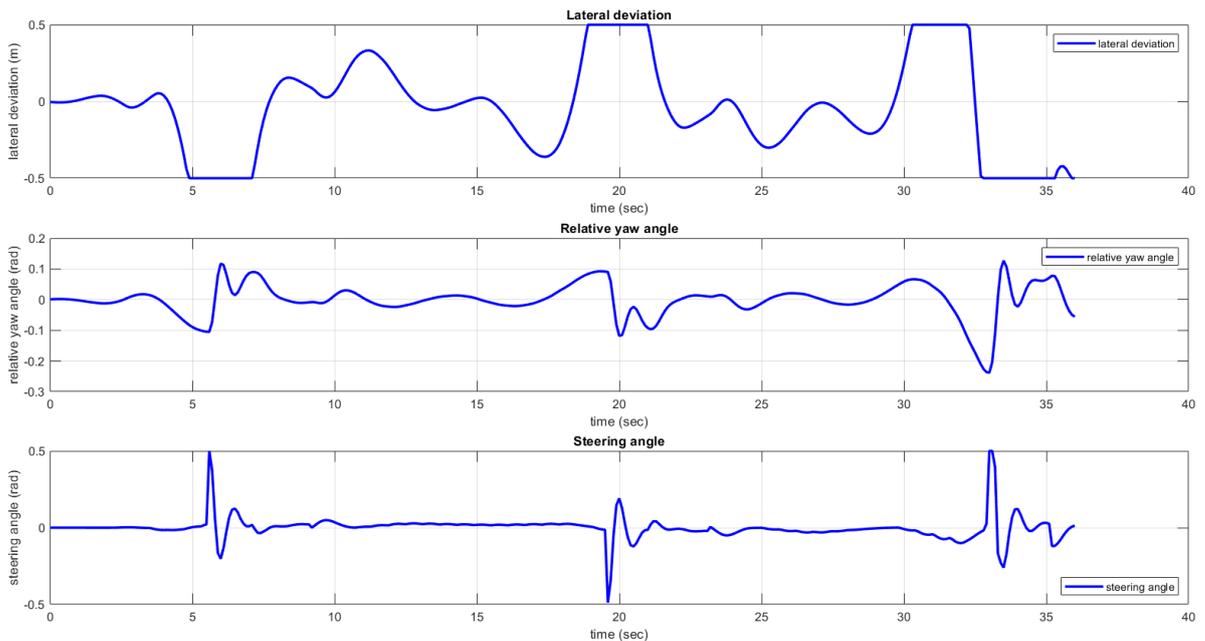
- Lane Keeping Assist, che controlla l'angolo di sterzo del veicolo;
- Vehicle and Environment, il quale modella il moto dell 'ego car e modella l'ambiente.





Entrando con la velocità e l'angolo di sterzo si definiscono le posizioni, le velocità, l'angolo di assetto dell'ego car. Con tali parametri di definisce tramite il blocco "PackEgo" l'Ego car e tramite il blocco "Scenario Reader" si definiscono i limiti della corsia. Al contempo nel sottosistema "Driver" sulla base della traiettoria voluta e nota la posizione e l'angolo di imbardata del veicolo, si definisce l'angolo di sterzo. Nel sottosistema "Lane Keeping Assist" viene innanzitutto definita la curvatura della corsia, la deviazione laterale e l'errore angolare; essi risulteranno l'input per il "Lane Keeping Controller" che darà come input l'angolo di sterzo da dare al volante.

Se il modello avverte una deviazione dal centro corsia maggiore del limite imposto^a e se l'angolo di sterzo del Driver rispetto a quello del controllo non sono simili, il sistema si rende conto che quella manovra imposta non è sufficiente e che quindi per mantenere la corsia è necessario dare quell'angolo volante su calcolato.



^a Blocco "Detect Lane Departure"

E di seguito viene mostrata come varia la traiettoria rispetto a quella senza controllo in modo tale che attivando LKA si tenga la corsia lungo tutto il percorso voluto.

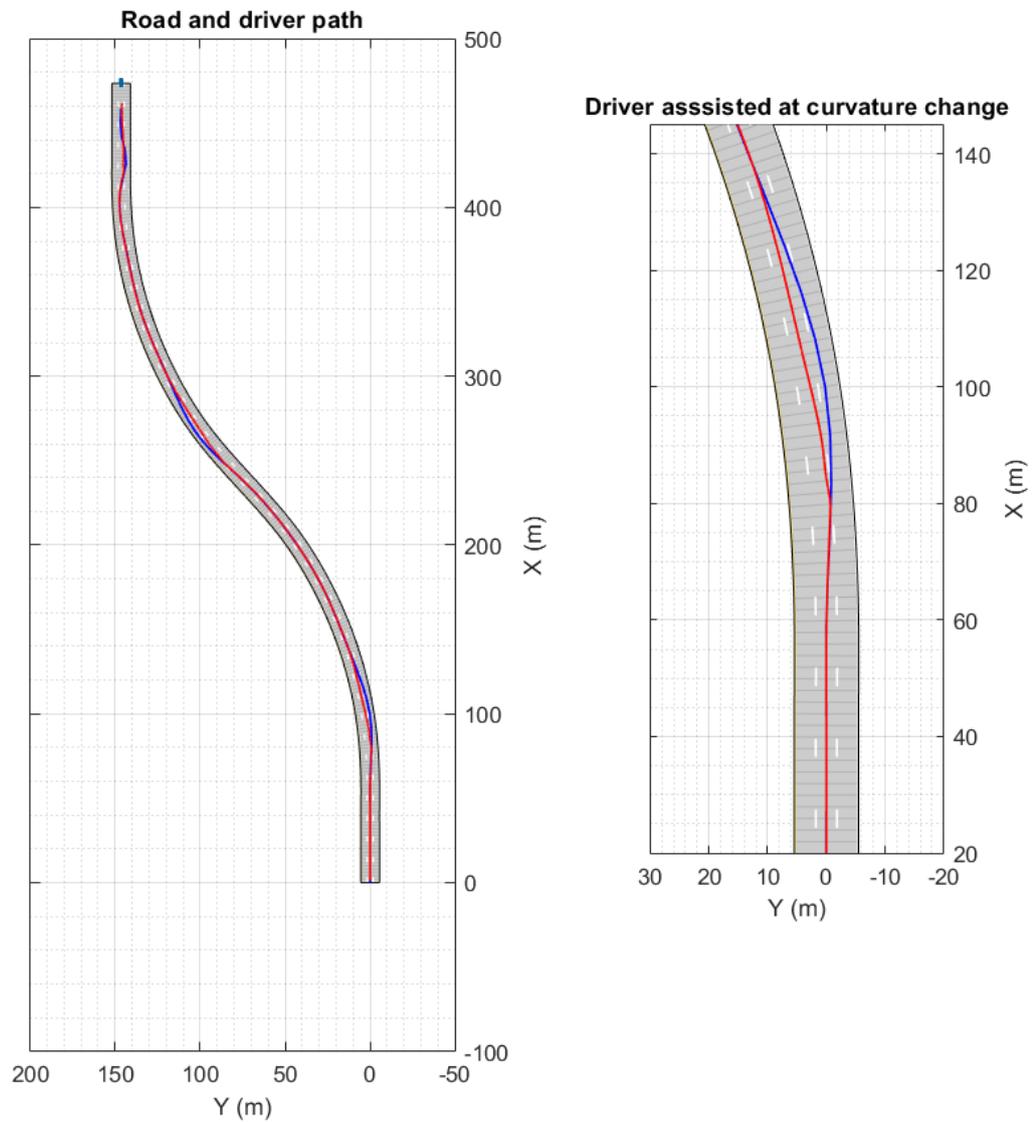
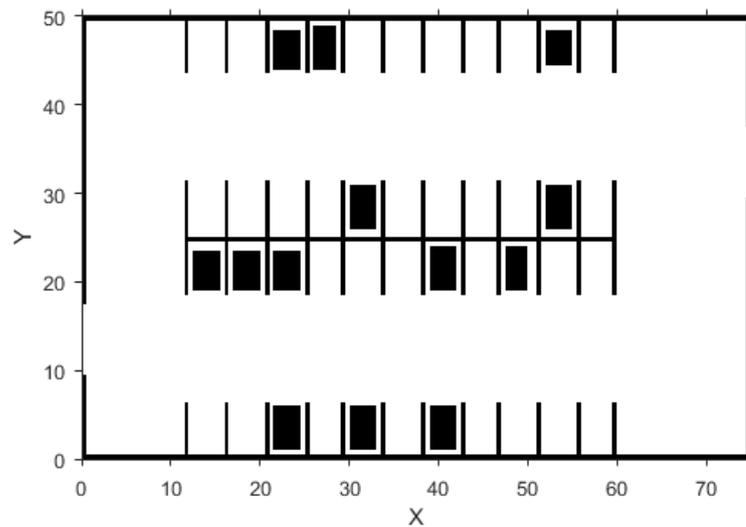


Fig. 4.58 - rappresentazione grafica traiettoria con LKA attivato (in rosso) e con LKA disattivato in blu)

Parcheggio automatizzato

Esiste inoltre un modello su Matlab/Simulink in grado di definire un sistema di parcheggio del veicolo automatizzato. Il modello ha come obiettivo quello di determinare un percorso nell'ambiente di riferimento ed utilizzare un controllore in grado di seguire la traiettoria definita.

Si definisce innanzitutto una mappa statica del parcheggio, che contiene informazioni su ostacoli statici e macchine parcheggiate.



Poi vengono dati degli obiettivi da raggiungere per arrivare nella zona voluta definiti sulla base delle coordinate ed il sistema di pianificazione della traiettoria cercherà di determinare la giusta traiettoria^a per soddisfare gli obiettivi voluti.

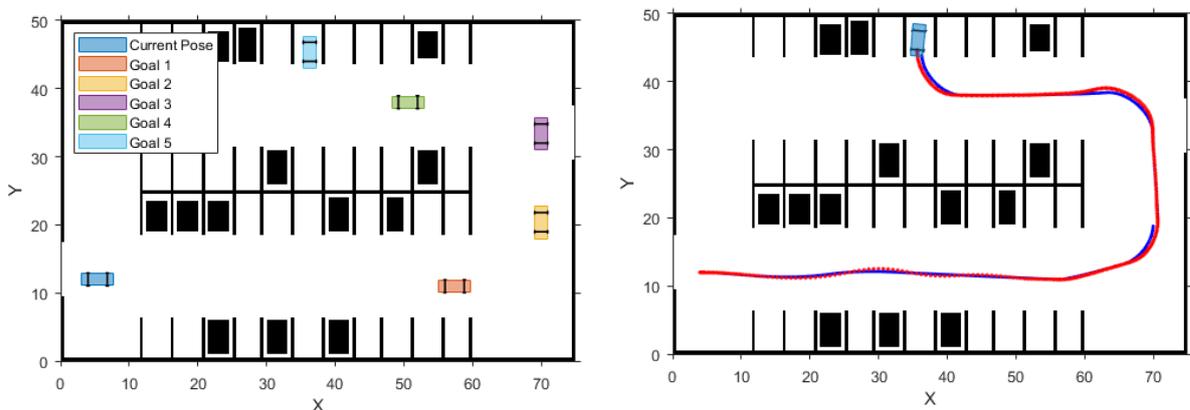


Fig. 4.59 – punti di riferimento per la generazione della traiettoria (sx) e traiettoria reale (dx)

^a Si utilizzerà un algoritmo RRT utilizzato per generare traiettorie open-loop per sistemi non lineari con vincoli .

4.4. Sensoristica

Esistono diversi approcci che utilizzano differenti tipi di sensori: ad esempio sensori di immagine (C_{mos} ; infrarossi e stereo), radar (24 GHz per distanze ravvicinate e 77 GHz per lunghe distanze) e Lidar. Ognuna di queste tecnologie può essere di grande aiuto al guidatore ma nessuna, se utilizzata da sola, è in grado di garantire le condizioni ideali di sicurezza necessarie per realizzare un valido sistema completo per la sicurezza attiva.

È indispensabile ricorrere alla elaborazione di dati provenienti da fonti diverse: la cosiddetta “data fusion”, fusione dei dati. La combinazione di diversi flussi di dati richiede una elevata potenza di calcolo e la disponibilità di diverse unità centrali (core) per poter riconoscere differenti situazioni contemporanee, e reagire di conseguenza. Quest’elevata potenza di calcolo può essere utilizzata come elemento di base di un sistema di sicurezza attiva che riceve ingressi da diverse fonti (videocamera, radar, GPS, sistema di comunicazione tra veicoli).



Per avere un'analisi completa della situazione ambientale in cui si trova l'automobile, il sistema radar sfrutta due classi di sensori.

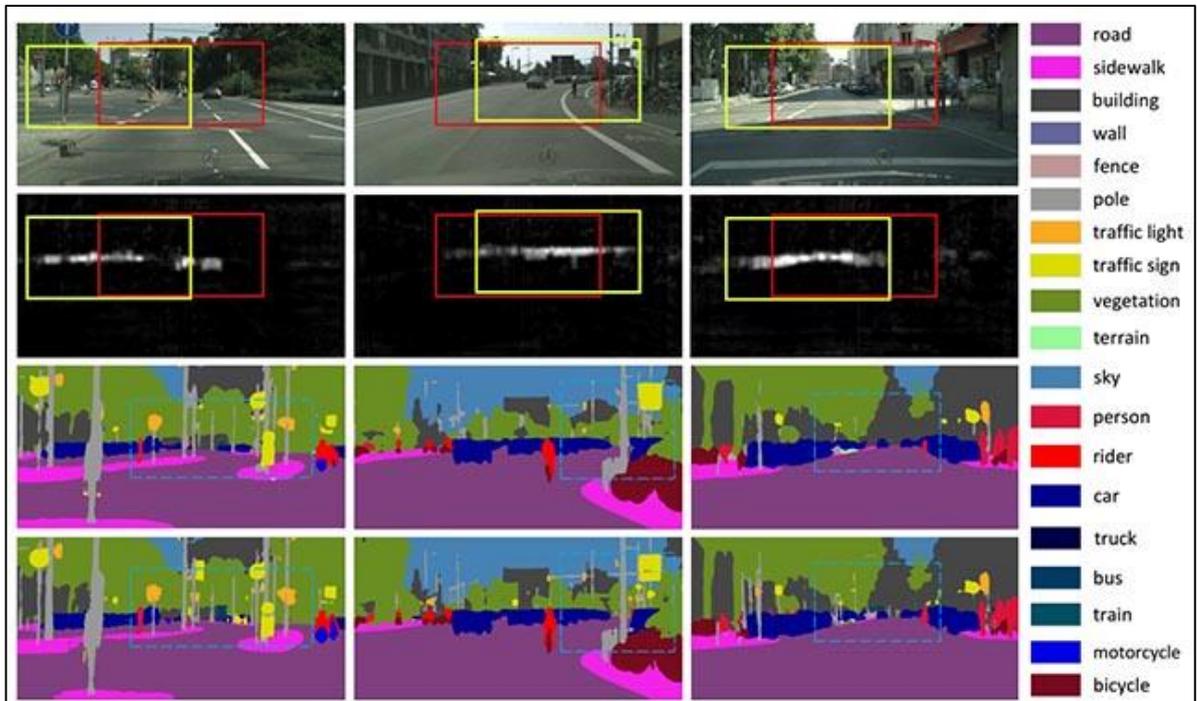
Nella parte frontale, è presente generalmente un **radar frontale** utile per definire gli ostacoli (altri veicoli, pedoni, oggetti estranei in mezzo alla carreggiata) nonché la loro distanza dal veicolo.

Osservazione

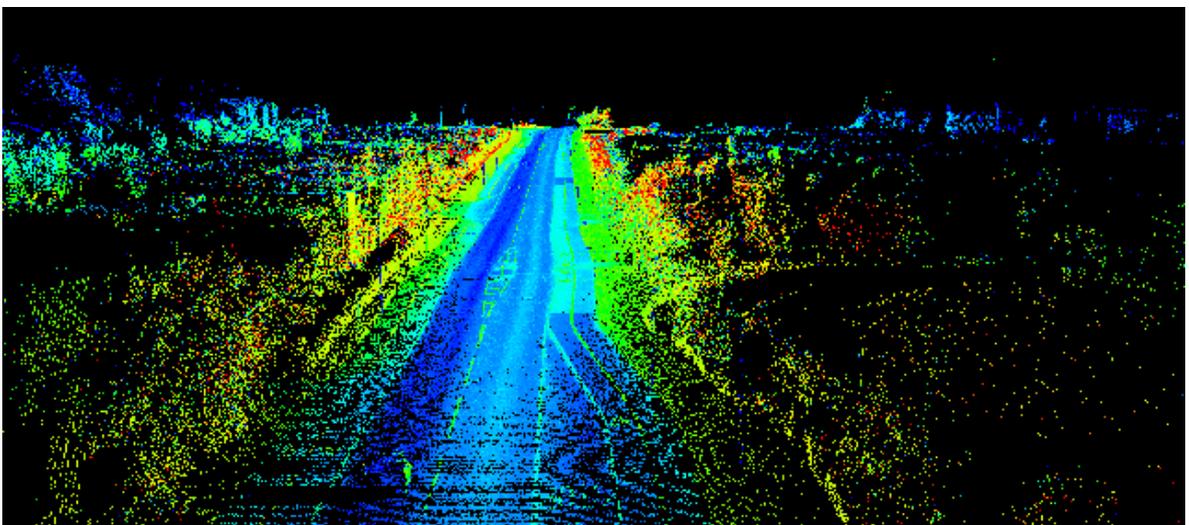
I sensori LRR (*Long-range radar, radar per lunghe distanze*) coprono un angolo frontale limitato ($\pm 10^\circ$) davanti alla vettura, per distanze che vanno da pochi metri fino a 200 m; sono normalmente utilizzati nelle applicazioni di ACC (*Autonomous cruise control, controllo autonomo della velocità di crociera*). I sensori SSR (*Short-range radar, radar per distanze ravvicinate*) coprono una parte significativa dell'ambiente circostante (da 100° a 360°) a distanze fino a 25 m. L'utilizzo di più sensori SRR opportunamente posizionati permette di rilevare oggetti a distanze comprese tra 0,1 m e 25 m e apre la strada a diverse applicazioni per il comfort e la sicurezza: allarmi preventivi di urto imminente, riduzione dei rischi di collisione, identificazione di ostacoli nell'angolo morto di visione, assistenza al parcheggio,

assistenza al cambiamento di corsia, allarme di urto posteriore, stop and go, riduzione dei tamponamenti nel traffico cittadino.

Importante, come abbiamo detto sono i sistemi visivi. Esse sono **telecamere ottiche a lungo raggio**. Servono per fornire informazioni più dettagliate, come il colore o la forma esatta degli elementi in prossimità dell'auto. Tali telecamere servono anche per riconoscere i vari cartelli stradali e adeguarsi alla velocità consentita.

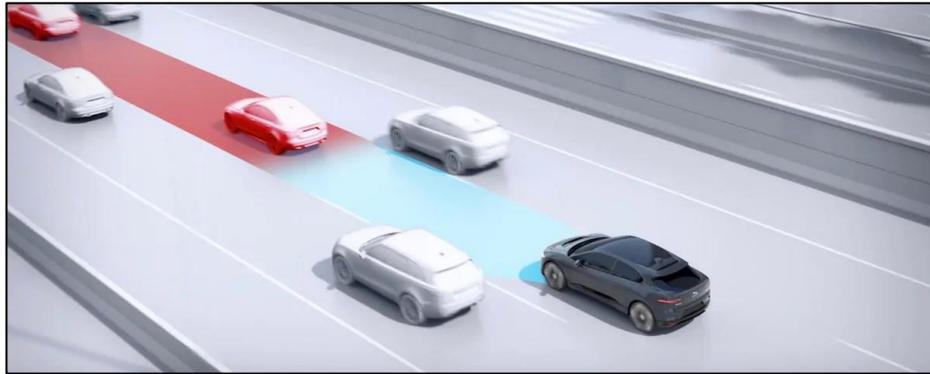


Infine, importante è il **sensore Lidar**. Esso è in grado di ricostruire lo spazio che circonda l'auto sfruttando i tempi di ritorno delle onde sonore e fornisce informazioni dettagliate sugli spazi di manovra. In tal modo si può capire se la strada è libera o meno, se un pedone sta per attraversare da dietro un altro veicolo anche se le telecamere non lo vedono, ecc.



Sensori per ACC

Generalmente viene utilizzato un radar sul paraurti anteriore ed in alcuni casi di una telecamera multifunzione. Alcuni costruttori montano un sensore RADAR racchiuso nel complessivo specchietto retrovisore insieme alla telecamera multifunzione.



Il RADAR attraverso microonde che vengono riflesse dai veicoli è in grado di determinare il traffico dinnanzi al veicolo calcolando distanza, direzione e velocità relativa. Inoltre, calcola la propria traiettoria definendo perciò se la posizione degli altri veicoli è ininfluente per la velocità di crociera e quindi per il mantenimento della distanza di sicurezza.

Sensori per il Forward Collision Warning (FCW)

Anche qui generalmente viene utilizzato un Radar frontale, una telecamera ed eventualmente un LiDAR.

Sensori per il Lane Keeping Assist (LKA)

Il sistema è governato da una telecamera anteriore che rileva le linee di corsia poste davanti alla vettura.



Sensori per assistenza al cambio di corsia e angolo cieco

In tal caso sono presenti diversi sensori posteriori alla vettura per il monitoraggio dell'angolo morto, per l'assistenza al cambio corsia, per sistemi di precrash posteriore e per l'assistenza all'uscita da un parcheggio.



Per quanto riguarda l'assistenza al cambio di corsia il campo di rilevamento dei sensori radar è di circa 50 metri dietro e 3.60 metri accanto al veicolo.

Conclusioni

In tale tesi sono stati definiti diversi modelli di veicolo. Il primo modello, quello lineare senza dinamica longitudinale, risulta essere ottimale per quei controlli di inseguimento di traiettoria, LKA in cui è ipotizzata la velocità del veicolo costante. Invece, nei modelli di controllo della dinamica longitudinale come ACC/AEB si richiede un modello di veicolo lineare che tenga conto anche della dinamica longitudinale.

Dal punto di vista dei controlli, sono stati innanzitutto realizzati e analizzati le ben note logiche Pure Pursuit e Stanley. Dall'analisi dei pregi e delle criticità di ognuna si è determinato un modello Ibrido in grado di dare risultati ottimali in termini di inseguimento di traiettoria. Inoltre, sono stati analizzati diversi sistemi ADAS, vedendone la struttura Simulink e la logica di base.

Per quanto riguarda il Comfort e la Motion sickness si è realizzato i filtri di ponderazione delle accelerazione secondo normativa ISO 2631-1 e sono state fatte diverse prove rms per diverse clotoidi caratterizzanti l'inserimento in curva del veicolo.

In ottica futura è interessante determinare una tipologia di controllo che non solo vada a dare risultati ottimali in termini di inseguimento di traiettoria ma che sia anche in grado di garantire una guida confortevole per i passeggeri.

Bibliografia

[1] Darpa Challenge.

[2] Tota, Antonio (2017). *Integration of Active Systems for a Global Chassis Control Design*. PhD thesis.

[3] E. Galvagno, M. Velardocchia. *Meccanica del Veicolo – Esercitazioni*. CLUT, 2017.

[4] M. Guiggiani - *Dinamica del veicolo*. CittàStudiEdizioni, 2007.

[5] Mitsuji Sampei, Member, IEEE, Takeshi Tamura, Tadaharu Kobayashi, Nobuhiro Shibui. *Arbitrary Path Tracking Control of Articulated Vehicles Using Nonlinear Control Theory*. IEEE Transactions on control systems technology, Vol. 3, No. 1, March 1995.

[6] P. Falcone, F. Borrelli, J. Asgari, H. E. Tseng, D. Hrovat. *Predictive Active Steering Control for Autonomous Vehicle Systems*. IEEE Transactions on control systems technology, Vol. 3, No., January 2007.

[7] Jeffery Brian Saunders, Brandon Call, Andrew Curtis, Randal W. Beard, and Timothy W. McLain. *Static and Dynamic Obstacle Avoidance for Miniature Air Vehicles*. Brigham Young University, Provo, UT 84602

[8] Jarrod M. Snider. *Automatic Steering Methods for Autonomous Automobile Path Tracking*. Robotics Institute Carnegie Mellon University Pittsburgh, Pennsylvania. February 2009.

[9] Jinghua Guo, Yugong Luo, Keqiang Li, Yifan Dai. *Coordinated path-following and direct yaw-moment control of autonomous electric vehicles with sideslip angle estimation*. Mechanical Systems and Signal Processing 105 (2018) 183–199.

[10] Roberto Bucher. *Matlab e Simulink nella regolazione automatica*. Dipartimento di informatica ed elettronica, Scuola Universitaria Professionale della Svizzera Italiana. 7 aprile 2003.

- [11] Chih-Lyang Hwang, Wei-Li Fang. *Global Fuzzy Adaptive Hierarchical Path Tracking Control of a Mobile Robot With Experimental Validation*. IEEE transactions on fuzzy systems, Vol. 24, No. 3, June 2016.
- [12] Yunxiao Shan, Cheng Chen, Wei Yang Bijun Li. *Improved path tracking approach for unmanned vehicles based on Clothoid Curve*. 2015 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV) June 28 - July 1, 2015. COEX, Seoul, Korea.
- [13] Alexander Keck, Karl Lukas Knierim, Oliver Sawodny. *SAMMY - an algorithm for efficient computation of a smooth path for reference trajectory generation*. Proceedings of the 6th International Conference on Automation, Robotics and Applications, Feb 17-19, 2015, Queenstown, New Zealand.
- [14] Chang Mook Kang, Seung-Hi Lee. *On-Road Path Generation and Control for Waypoints Tracking*. Special Section on the IEEE-IV'15 Symposium.
- [15] Adrian Ilka, Vojtech Vesely. *Robust LPV-based infinite horizon LQR design*. 2017 21st International Conference on Process Control (PC) June 6–9, 2017, Štrbské Pleso, Slovakia.
- [16] Sebastian Thrun, Sven Strohband, Gary Bradski. *Stanley: The Robot that Won the DARPA Grand Challenge*. Stanford Artificial Intelligence Laboratory Stanford University Stanford, California 94305. Journal of Field Robotics—2006.
- [17] Shilp Dixit, Saber Fallah, Umberto Montanaro, Mehrdad Dianati, Alan Stevens, Francis Mccullough, Alexandros Mouzakitis. *Trajectory planning and tracking for autonomous overtaking: State-of-the-art and future prospects*. Annual Reviews in Control 000 (2018) 1–1.
- [18] Paolo Medici. *Teoria dei Veicoli Autonomi*. Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione di Parma. 18 gennaio 2013.
- [19] Eugenio Alcalá, Vicenç Puig, Joseba Quevedo, Teresa Escobet, Ramon Comasolivas. *Autonomous vehicle control using a kinematic Lyapunov-based technique with LQR-LMI tuning*. Control Engineering Practice 73 (2018) 1–12.
- [20] Luca Baglivo. *Navigazione di Veicoli Autonomi Pianificazione e Controllo di Traiettorie*. Appunti per il corso di “Robotica Spaziale” per Ingegneria Aerospaziale.
- [21] Mertcan Cibooglu, Umut Karapinar, Mehmet Turan Soylemez. *Hybrid Controller Approach for an Autonomous Ground Vehicle Path Tracking Problem*. 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED). July 3-6, Valletta, Malta.
- [22] Adem F. Idriz, Arya S. Abdul Rachman, Simone Baldi. *Integration of auto-steering with adaptive cruise control for improved cornering behavior*. IET Intelligent Transport Systems. Research Article.
- [23] Yoshikazu Hattori, Eiichi Ono, and Shigeyuki Hosoe. *An Optimum Vehicle Trajectory Control for Obstacle Avoidance with the Shortest Longitudinal Traveling Distance*. Proceedings of 2008 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation.

- [24] Ioannis M. Delimpaltadakis, Charalampos P. Bechlioulis, and Kostas J. Kyriakopoulos. *Decentralized Platooning With Obstacle Avoidance for Car-Like Vehicles With Limited Sensing*. IEEE Robotics and automation letters, Vol. 3, No. 2, April 2018.
- [25] Jinghua Guo, Ping Hu, and Rongben Wang. *Nonlinear Coordinated Steering and Braking Control of Vision-Based Autonomous Vehicles in Emergency Obstacle Avoidance*. IEEE Transactions on intelligent transportation systems, Vol. 17, No. 11, November 2016.
- [26] Muhannad Mujahed, Dirk Fischer, Bärbel Mertsching. *Admissible gap navigation: A new collision avoidance approach*. Robotics and Autonomous Systems 103 (2018) 93–110.
- [27] Ashish Tewari. *Modern Control Design with MATLAB and SIMULINK*. Indian Institute of Technology, Kanpur, India. JOHN WILEY & SONS, LTD.
- [28] Carlos E. Garcia, David M. Prettì and Manfred Morari. *Model Predictive Control: Theory and Practice – a Survey*. Vol. 25, No. 3, pp. 335-348, 1989 Printed in Great Britain.
- [29] Kandula, Prasanth Babu. *Dynamics and Control of an Electric Power Assist Steering System*. (2010). ETD Archive. Paper 413.
- [30] U. Guidoni R. Sebastiani A. Gherso C. Stolfi. “*Smart Roads, veicolo connessi ed autonomi. Mobilità e assicurazione nel prossimo futuro: RC Auto o RC prodotti?* “.Associazione Nazionale fra le Imprese Assicuratrici.
- [31] Marco Bassani, Roberto Melotti. *Progetto di Infrastrutture Viarie*. Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile.
- [32] Ministero delle Infrastrutture e dei Trasporti. *Norme funzionali e geometriche per la costruzione delle strade*. Decreto Ministeriale 5 Novembre 2001.
- [33] Taku Takahama, Daisuke Akasaka. *Model Predictive Control Approach to Design Practical Adaptive Cruise Control for Traffic Jam*. Society of Automotive Engineers of Japan, Inc.
- [34] H. Aoki, M. Mukai, T. Kawabe. *Model Predictive Control for Eco-Driving Based on Prediction of Preceding Vehicle Motion with Traffic Signal Information*. SICE Annual Conference (2014).
- [35] Enrico Galvagno. *Complementi di Meccanica del Veicolo*. Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale – DIMEAS.
- [36] Sean Whitsitt and Jonathan Sprinkle. *A Passenger Comfort Controller for an Autonomous Ground Vehicle*. 51st IEEE Conference on Decision and Control December 10-13, 2012. Maui, Hawaii, USA.
- [37] Rahi Avinash Shet, Frederik Schewe. *Performance Evaluation of Cruise Controls and their Impact on Passenger Comfort in Autonomous Vehicle Platoons*. 978-1-7281-1217-6/19/\$31.00 ©2019 IEEE.
- [38] Roman Schmied, Harald Waschl, Luigi del Re. *Comfort Oriented Robust Adaptive Cruise Control in Multi-Lane Traffic Conditions*. IFAC-PapersOnLine 49-11 (2016) 196-201.

[39] Cyriel Diels, Tugra Erol, Milena Kukova, Joscha Wasser, Maciej Cieslak, William Payre, Abhijai Migliani, Neil Mansfield, Simon Hodder, Jelte Bos. *Designing for Comfort in Shared and Automated Vehicles (SAV): a Conceptual Framework*. 1 st International Comfort Congress. Salerno, June 7th and 8th, 2017.

[40] Normativa ISO 2631-1

[41] Normativa ISO 5349

Ringraziamenti

Ed eccoci qui alla fine di un percorso lungo, con diversi momenti difficili ma tante gioie e soddisfazioni. Circa tre anni fa, per la tesi triennale non ho fatto alcun ringraziamento e molte persone rimasero perplesse. Quindi eccomi qui.

Devo ringraziare una persona che grazie alla sua autostima, voglia di affrontare i problemi e di spingersi sempre oltre mi ha aiutato a completare questo percorso. Grazie a me medesimo. Sarò un pochino autoreferenziale, ma credetemi se non era per me dubito che ci sarei riuscito.

Però, ahimè, anche senza voi difficilmente sarei stato qui commosso a condividere uno dei momenti più importanti della mia vita. Non saranno dei normali ringraziamenti ma più delle dediche.

Dedico questa tesi, quindi, alla mia famiglia che grazie al denaro versato mi hanno permesso di affrontare una realtà stimolante nonché di crescere come uomo. Una dedica forte va a mia sorella. È vero, non è quel rapporto di amore puro ma è una persona che apprezzo molto, che merita questa dedica più degli altri. Accettatelo.

Dedico questo percorso alle donne della mia vita, à mamm e à nonn. Mamma mia come son fortunato. Due persone molto diverse, ma accomunate da una dolcezza ed un amor incondizionato che merita il mio orgoglio.

Altra dedica va a mio padre, che nonostante la distanza è sempre stato presente nei momenti in cui ero al limite della depressione. Grazie davvero.

Non posso non dedicarla a mio nonno che è l'unico della mia famiglia che si è subito fin da piccolino le mie ripetizioni, le mie lamentele e i miei progetti. Mi ha sempre appoggiato e sostenuto. Dedica e grazie va a Marco che mi ha dato coraggio e mi ha spinto ad intraprendere questa avventura Torinese, mi ha appoggiato ed è stato fonte di sostegno continua.

Dedico (ancora, che du palle) questo percorso agli amici di una vita (il Covo) e che hanno dovuto accettare questa mia lontananza. Sapete quanto male mi ha fatto allontanarmi da voi, ma come mi avete sempre detto ciò non ha cambiato nulla. Promettetemi che sarà davvero così!

Dedico questo percorso a chi mi ha invece dovuto sopportare quotidianamente in questi anni e non curanti mi hanno accettato come coinquilino. Vi ringrazio davvero tanto per aver reso semplice questo passaggio difficile della mia vita.

Infine, ringrazio te Franca. Ci siamo conosciuti tardi, ma con te ho vissuto una delle esperienze più forti della mia vita. Sei ancora qui e spero di poterti dedicare tante altre cose.

Grazie a tutti, grazie a chi non ho ringraziato ma grazie soprattutto a me medesimo, il più grande di sempre.

Adios.