

**Politecnico di Torino**

---

I FACOLTA DI INGEGNERIA  
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

TESI DI LAUREA



**Simulazione Numerica di suoni a bassa  
frequenza in acqua poco profonda**

Candidato:  
**Francesco Poggio**  
Matricola 252962

Relatore:  
**Prof. Renzo Arina**

---

Ottobre 2019



Simulazione Numerica di suoni a bassa frequenza in acqua  
poco profonda

Francesco Poggio

15/10/2019

# Indice

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduzione</b>                              | <b>3</b>  |
| 1.1      | Panoramica della situazione attuale . . . . .    | 3         |
| 1.1.1    | Contromisure . . . . .                           | 8         |
| 1.2      | Breve storia dell'idroacustica . . . . .         | 8         |
| 1.3      | Applicazioni . . . . .                           | 10        |
| <b>2</b> | <b>Caratteristiche del suono</b>                 | <b>15</b> |
| 2.1      | Efficienza acustica . . . . .                    | 15        |
| 2.2      | Unità di misura . . . . .                        | 17        |
| 2.3      | Trasformata di Fourier . . . . .                 | 21        |
| <b>3</b> | <b>Onde</b>                                      | <b>24</b> |
| 3.1      | Onda piana . . . . .                             | 28        |
| 3.2      | Onda sferica . . . . .                           | 33        |
| <b>4</b> | <b>Onde sonore in un mezzo</b>                   | <b>36</b> |
| 4.1      | Potenziale acustico . . . . .                    | 43        |
| 4.2      | Onde piane . . . . .                             | 45        |
| 4.3      | Onda sferica . . . . .                           | 47        |
| <b>5</b> | <b>Sorgenti</b>                                  | <b>52</b> |
| 5.1      | Equazione generale del suono . . . . .           | 55        |
| 5.2      | Trascurabilità del quadrupolo in acqua . . . . . | 57        |
| 5.3      | Monopolo . . . . .                               | 58        |
| 5.4      | Dipolo . . . . .                                 | 61        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>6</b> | <b>Simulazione</b>                                | <b>66</b>  |
| 6.1      | Interfaccia aria-acqua . . . . .                  | 69         |
| 6.2      | Somma di monopoli . . . . .                       | 74         |
| 6.3      | Sorgenti vicino alla superficie . . . . .         | 76         |
| 6.4      | Simulazione dell'interfaccia acqua-aria . . . . . | 83         |
| 6.5      | Simulazione fondale marino . . . . .              | 92         |
| 6.6      | Simulazione completa . . . . .                    | 98         |
| 6.7      | Dipolo . . . . .                                  | 107        |
| 6.8      | Approssimazione . . . . .                         | 118        |
| <b>7</b> | <b>Conclusioni</b>                                | <b>119</b> |
| 7.1      | Ulteriori sviluppi . . . . .                      | 121        |

# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Panoramica della situazione attuale

Oramai è chiaro come l'impatto dell'uomo sulla Terra stia crescendo ad un ritmo insostenibile. La traccia più evidente si trova nell'inquinamento delle risorse, si passa dall'immissione di gas combustibili nell'atmosfera sino alla contaminazione delle falde acquifere. Questi squilibri portano ad alterare l'ecosistema del pianeta; uno degli effetti più evidenti è il riscaldamento globale che porta a fenomeni meteorologici estremi, e in alcuni casi anche catastrofici, sempre più frequenti.

L'inquinamento ambientale è certamente la fonte più grave di disturbo alla flora e alla fauna ma non è l'unico fattore, infatti in questi anni si sta prendendo coscienza dei danni che possono essere arrecati dalla presenza del rumore eccessivo. Le prime precauzioni sono state prese per la salute delle persone, basti pensare alle norme antirumore presenti vicino agli aeroporti e le barriere antirumore che vengono costruite attorno alle autostrade e ai treni ad alta velocità.

Di recente l'attenzione si è rivolta anche verso l'inquinamento acustico che viene generato all'interno del mare e degli oceani; questo tipo di rumore non colpisce in prima battuta l'uomo, poiché il rumore generato in acqua non si propaga in aria, ma interagisce con la fauna e la flora marina, andando a cambiare delle dinamiche che, danneggiando l'ecosistema marino, possono infliggere danni più grandi.

La preoccupazione internazionale sta crescendo per i danni che creano l'uso eccessivo dei Sonar militari, le indagini sismiche, le trivellazioni per il petrolio e i motori delle navi. I picchi di rumore, come ad esempio le esplosioni, possono creare danni all'ap-

parato uditivo, mentre i disturbi più lievi, ma costanti nel tempo, possono alterare i comportamenti degli animali marini, dalla comunicazione alla nutrizione.

A tal proposito lo scorso novembre le Nazioni Unite hanno approvato una risoluzione sulla conservazione della salute degli oceani in cui viene espresso l'urgente bisogno di ricerca e cooperazione per valutare gli effetti del rumore sottomarino di natura antropogenica. L'Unione Europea ha varato dei provvedimenti, che entreranno in vigore dal 2020, per creare un ambiente marino sano, uno dei quali si assicura che il rumore non condizioni negativamente lo sviluppo della vita marina. Inoltre dal 2014 la IMO *International Maritime Organization* ha istituito delle linee guida per limitare l'impatto delle navi commerciali.

Nonostante la comunità internazionale si stia muovendo nella direzione giusta il problema non è ancora pienamente inquadrato e compreso. Infatti a causa dell'estrema pervasività del fenomeno è molto difficile comprendere a pieno le relazioni che intercorrono tra causa ed effetto. In natura è molto difficile trovare un ecosistema che sia isolato dal sistema acustico e di conseguenza non si possono fare i confronti tra un ambiente sano ed uno compromesso. Non si riescono ancora a definire in modo chiaro i limiti entro i quali l'ambiente marino è in grado di adattarsi ai disturbi esterni. Per questa ragione gli scienziati sono sempre più interessati nel trovare gli estremi della scala sonora per riuscire a trovare delle differenze marcate. Gli oceanografi sono ben consci del fatto che l'inquinamento acustico rappresenti un problema minore all'ecosistema marino che è minacciato dal cambiamento climatico assieme all'inquinamento ambientale. Il timore fondato della comunità scientifica risiede nella possibilità che i due disturbi si possano alimentare a vicenda così che la somma delle singoli parti sia inferiore al complesso dei due effetti.

Questo compito è reso ancora più arduo dalla continua espansione dei mezzi che trafficano negli oceani. Infatti l'impatto umano ha avuto un ruolo sempre più grande all'interno del panorama acustico marino. Negli anni non si è stati in grado di tracciare una mappa globale del rumore all'interno degli oceani ma si stima che dal 1950 al 2000 il traffico navale sia aumentato di circa 3 dB per decade, che si traduce in un raddoppio dell'intensità, essendo l'unità di misura del decibel espressa in scala logaritmica.

Poi come già espresso in precedenza i suoni dannosi alla fauna marina si dividono in 2 grandi categorie e possono essere udibili anche a distanza di chilometri :

- Suoni impulsivi ad alta intensità, vengono considerati tali quelli oltre il 160 dB; sono generati da dispositivi quali le pistole ad aria compressa per scansionare il fondale e dalle trivelle.
- Suoni continui a bassa intensità, rientrano in questa categoria quelli inferiori ai 120 dB; sono generati per lo più dal traffico navale.

Entrambi danneggiano gli animali che abitano l'oceano ma in modo differente. I primi scatenano nei cetacei delle immersioni immediate causate dal panico che provocano un embolia gassosa ed emorragie all'interno del cervello e del cuore. Altri sintomi dovuti alla sovraesposizione a forti rumori sono i danni all'apparato uditivo che è fondamentale per l'orientamento delle balene. Infatti dal 1900 sino al 1950 i ricercatori hanno registrato solamente sette arenamenti di massa; mentre dal 1950 al 2004, da quanto sono stati introdotti i dispositivi ad alta potenza nelle operazioni navali, il numero è salito vertiginosamente sino a superare i 120. Però gli impulsi ad alta pressione creano danni anche agli invertebrati, infatti in alcuni casi la pressione è così alta da uccidere gli zoo-plankton che si trovano nel raggio di un chilometro.

Invece il rumore di sottofondo ha un effetto meno diretto degli impulsi sonori, ma i danni che provoca si vedono sul lungo periodo. Infatti la presenza continua di un disturbo genera una condizione di stress perenne che fa aumentare la produzione di determinati ormoni; questi ultimi inducono una variazione comportamentale nelle varie specie. Ad esempio, alcuni pesci *Pomacentrus amboinensis* e granchi passano più tempo in stato di allerta che a procurarsi del cibo; nella barriera corallina la percentuale di sopravvivenza della Damigella dai due occhi è diminuita della metà. Queste variazioni comportamentali interessano anche i mammiferi marini; in particolare i delfini e le balenottere cambiano la frequenza a cui emettono suoni e questo genera confusione nelle comunicazioni tra elementi della stessa specie. Infine è stato notato che le orche assassine che abitano al largo delle coste pacifiche del Canada, passano il 25% del tempo in meno a nutrirsi quando sono circondate dai rumori delle barche, rispetto ad una condizione di quiete.

Infine è utile evidenziare come i rumori presenti nell'oceano rappresentino un ampio spettro di frequenze e quindi non sia facile limitarli tutti contemporaneamente; inoltre è anche molto ampio lo spettro di ricezione da parte degli animali acquatici. Quindi per limitare i rumori bisogna anche stare attenti a non spostare la frequenza di emissione

per non danneggiare delle specie animali a favore di altre.

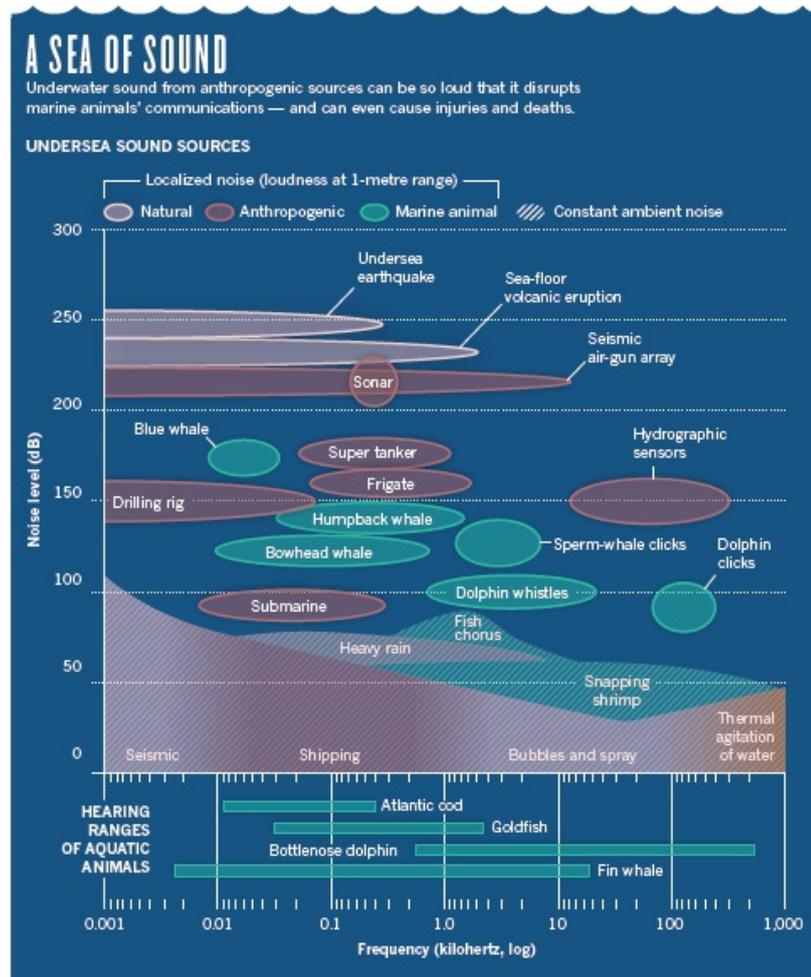


Figura 1.1: Intensità sonora su frequenza

La 1.1 mostra il livello di intensità acustica delle sorgenti di rumore, antropologiche e non, più comuni all'interno del mare. Si può notare come i Sonar e le pistole sismiche registrino i valori più alti e siano relativamente vicini ai terremoti sottomarini e alle esplosioni vulcaniche del fondale. Oltre ad essere molto intense ricoprono anche molte frequenze e quindi risultano rilevabili da quasi tutti gli animali marini. Al contrario il rumore causato dalle navi e dai sottomarini ha valori più bassi e frequenze più contenuta ma la loro pericolosità non arriva dall'intensità ma bensì dalla persistenza del segnale. Infine vi sono una serie di segnali che rimangono concentrati su frequenze più specifiche. Ad esempio si vede come la frequenza dei segnali emessi dalle balene sia la stessa delle petroliere e delle navi militari che perciò creano un disturbo sensibile

nella comunicazione tra questi animali. Ai rumori generati dall'uomo e dagli animali si aggiungono quelli generati dal movimento geologico e dall'ambiente stesso, come ad esempio le piogge e l'agitazione termica dell'acqua. Quindi nonostante l'uomo non sia in grado di captare in modo diretto i rumori presenti negli oceani, in realtà si è scoperto che quest'ambiente è molto rumoroso, assunzione in aperto contrasto con le prime idee che si avevano sul mare. E' interessante vedere come la prima idea sul mondo marino sia cambiata radicalmente nel corso degli anni; nel 1956, quando l'attenzione per l'acustica marina doveva ancora nascere, l'oceanografo francese Jacques Cousteau girò un documentario intitolato *Le monde du silence*, un'affermazione che dopo 50 anni di studi è ormai stata ribaltata.

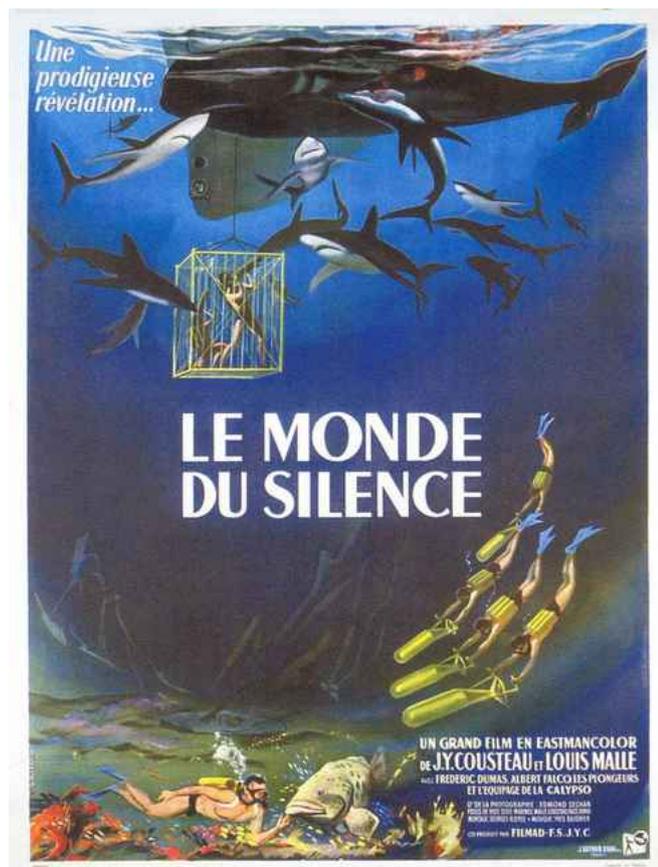


Figura 1.2: Locandina del documentario

### 1.1.1 Contromisure

Nei prossimi anni si prevede che l'impatto dell'uomo sull'ambiente marino sia destinato ad aumentare se non verranno prese delle misure a riguardo. Per quanto riguarda i suoni a bassa intensità le soluzioni consistono nel progettare dei nuovi propulsori più silenziosi con un progetto a lungo termine e cambiare le rotte e i tempi delle navi commerciali. La prima soluzione può essere raggiunta sollevando i motori rispetto alla chiglia della nave e si stanno sviluppando dei motori che riducono la cavitazione; l'esplosione di queste piccole bolle d'aria è la maggiore fonte di rumore dei motori; infine sta prendendo sempre più piede l'uso dei motori elettrici; in parte per recare meno disturbo ai passeggeri, ma i vantaggi coinvolgono anche la fauna marina.

Invece la modifica del rotte è una soluzione che è già stata implementata nell'area di Haro Straits, in Canada vicino all'Isola di Vancouver, dove è stato imposto di limitare la velocità massima da 18 sino ad 11 nodi e in alcuni casi la riduzione di una velocità di soli 3 nodi ha diminuito l'intensità acustica della metà. Ovviamente questo ha prolungato il tempo di viaggio delle navi; quindi è necessario trovare un accordo con le società di trasporto marittime per ridurre il rumore senza penalizzare troppo le loro attività. Tuttavia uno studio dell'oceanografo Williams ha rivelato che su un campione di 1500 imbarcazioni la metà del rumore proveniva dal 15% delle navi più grandi; quindi è importante concentrarsi soprattutto sui questi ultimi casi per avere dei vantaggi sensibili.

Infine per quanto riguarda i rumori ad alta intensità si stanno sviluppando delle nuove tecnologie che risultano meno invasive rispetto a quelle utilizzate sin'ora. Le pistole ad aria compressa utilizzate per sondare la composizione dei fondali possono essere rimpiazzate con degli oscillatori che hanno un picco di pressione più basso e sono meno invasivi per la vita sottomarina. Inoltre si stanno anche adottando dei metodi più silenziosi per inserire ed utilizzare le trivelle anziché martellarle.

## 1.2 Breve storia dell'idroacustica

Il rumore è definito come una piccola perturbazione di pressione che si propaga attraverso un mezzo. Gli esseri umani vivendo immersi nell'aria hanno sviluppato un sistema che rileva le variazioni di pressione all'interno di quest'ultimo. Il suono viene convogliato all'interno del canale uditivo e provoca la vibrazione della membrana del

timpano: la frequenza dipende dal suono captato. Dopodichè le vibrazioni provocano il movimento delle cellule ciliate che generano segnali neurali; questi ultimi vengono trasmessi al cervello attraverso il nervo acustico. Il sistema di ricezione si è sviluppato in base al mezzo in cui il segnale si propaga; per questa ragione l'orecchio umano non è ugualmente efficace in acqua.

Nonostante ciò già Aristotele, nel 400 a.C. , fu uno dei primi a notare che il suono era in grado di trasmettersi anche in acqua. Tuttavia, prima di avere delle prove empiriche bisognerà aspettare circa 2000 anni quando Leonardo Da Vinci osservò che i rumori delle navi potevano essere rilevati a grandi distanze utilizzando un tubo la cui estremità era inserita in acqua; in questo modo provò che le informazioni acustiche sono in grado di viaggiare anche in acqua.

In seguito, i primi studi teorici riguardarono l'acustica in generale, ma le stesse considerazioni espresse per l'aria possono essere opportunamente riadattate all'acqua. Nel 1600 sia Marin Mersenne che Galileo Galilei scoprirono le leggi che caratterizzano un corpo che vibra e le collegarono alla generazione del suono; la prima formulazione di una teoria matematica riguardo la propagazione del suono, invece, è attribuita a Newton che la incluse all'interno del *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Infine nel 1877 si può segnare l'inizio dello studio moderno dell'acustica quando Lord Rayleigh pubblicò *La teoria del suono* in cui viene formulata l'equazione delle onde come strumento matematico per descrivere la propagazione del segnale.

I primi esperimenti rudimentali riguardo l'idroacustica vennero svolti nel 1743 da Abbé J. A. Nollet che rilevò come un segnale generato sott'acqua non fosse percepito da un ricevitore in aria, ma solamente da quello nell'acqua, evidenziando uno dei punti caratteristici del fenomeno.

Pochi anni dopo, nel 1826, è stata svolta la prima misura della velocità del suono in acqua. Sul lago di Ginevra il fisico Jean-Daniel Colladon e il matematico Charles-Francois Sturm si posizionarono su due barche distanti 10 miglia. Ad una barca era collegata una campana che veniva suonata contemporaneamente all'ignizione di polvere da sparo; sull'altra barca invece si trovava un ricevitore simile a quello utilizzato da Leonardo Da Vinci. Il tempo che intercorreva tra il bagliore generato dalla polvere da sparo e la ricezione del segnale in acqua veniva utilizzato per calcolare la velocità del suono in acqua, ottenendo dei risultati che risultano essere abbastanza accurati. Nonostante i mezzi rudimentali misurarono una velocità del suono in acqua fresca, alla temperatura

di 8 gradi centigradi, pari a 1435 m/s, valore che differisce di soli 3 m/s rispetto ai valori misurati ai giorni d'oggi.

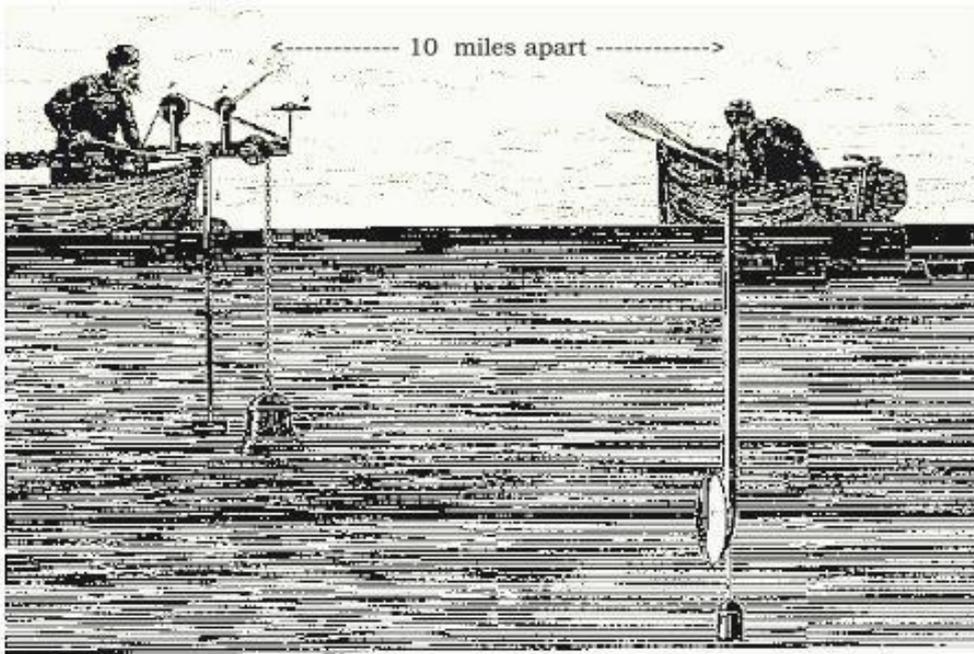


Figura 1.3: Rappresentazione dell'esperimento

### 1.3 Applicazioni

Una volta trovata la velocità del suono in acqua gli scienziati iniziarono ad utilizzare i suoni come uno strumento per conoscere meglio l'ambiente marino. Infatti le prime applicazioni pratiche riguardano l'utilizzo dell'eco come strumento per misurare la profondità del fondale marino. I primi tentativi svolti da nel 1879 da Matthew Fontaine Maury fallirono per colpa dell'uso erroneo del ricevitore, ma in seguito la tecnica si sviluppò diventando una delle principali applicazioni pratiche dei fenomeni idroacustici. Tuttavia i primi passi decisivi verso le tecnologie moderne iniziarono alla fine del 1800 con lo sviluppo del traffico navale e dei pericoli legati alla navigazione; inoltre i segnali emessi dai fari non erano sempre in grado di raggiungere le navi ad una distanza tale da avvertirle del pericolo di scogli ed acqua bassa.

Per questo motivo si pensò di sfruttare le caratteristiche della propagazione del segnale acustico sott'acqua, l'elevata velocità di trasmissione del segnale e la limitata perdita di intensità. Nel 1901 venne fondata la *Submarine Signal Company* che aveva lo scopo di aumentare la sicurezza della navigazione posizionando delle campane subacquee vicino ai fari così da emettere un segnale che poteva essere rilevato dai rilevatori installati sulle navi; questi ultimi erano formati dagli stessi microfoni progettati da Thomas Edison per il telefono ed erano inseriti all'interno di contenitori impermeabili. Alla fine l'idea si rivelò irrealizzabile per l'elevata presenza del rumore di sottofondo che non permetteva di distinguere chiaramente il segnale generato dalla campana.

Per migliorare il progetto la *Submarine Signal Company* contattò Reginald A. Fessenden per migliorare gli idrofoni. Quest'ultimo, invece, propose di rendere più potente la sorgente sonora con dei generatori di suoni elettrici utilizzati per trasmettere il codice Morse tramite segnali acustici. La *Submarine Signal Company* non si rivelò interessata a questo progetto, ma Fessenden perseguì ugualmente le sue idee, migliorò i ricevitori e unendo i due prodotti progettò l'*Oscillatore Fessenden* che era in grado sia di produrre che ricevere dei segnali acustici. L'obiettivo era quello di sfruttare l'eco per misurare la distanza tra le navi e i vari ostacoli. Era così nato il progenitore del Sonar.

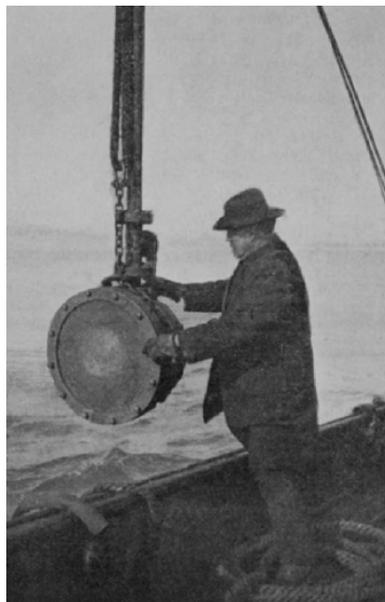


Figura 1.4: Fessenden con il suo oscillatore

Nel gennaio del 1913 riuscì a trasmettere un messaggio tra due navi che distavano di-

verse miglia al largo del porto di Boston e un anno dopo fu in grado di individuare un iceberg alto 40 metri e lungo 150 a più di due miglia di distanza. Nonostante gli incoraggianti risultati, la *Submarine Signal Company* non finanziò ulteriormente il progetto che venne accantonato sino al 1923 quando la compagnia si decise a produrre degli *Oscillatori Fessenden* a bassa frequenza. Successivamente negli anni 30 ogni sottomarino e telegrafo subacqueo utilizzava il sistema ideato dall'ingegnere statunitense. Nel frattempo continuava a crescere anche la conoscenza teorica della materia; nel 1919 Lichte applicò la legge di Snell della rifrazione ipotizzando che le onde sonore venivano rifratte e riflesse allo stesso modo della luce quando passa da un mezzo all'altro. Nel caso delle onde sonore in mare, però, questo accade anche quando sono presenti dei cambi di temperatura, salinità e pressione. Egli inoltre ipotizzò che anche le correnti oceaniche influenzassero il processo di propagazione. Questi mezzi teorici vennero utilizzati per interpretare al meglio la forma dei segnali utilizzati nelle misure di distanza attraverso il fenomeno dell'eco.

In particolare, si sviluppò l'utilizzo dell'ecoscandaglio che utilizza i suoni per tracciare la forma del fondale marino ed evitare le zone di acqua bassa per non incagliarsi. Inoltre con l'uso dello scandaglio emerse il fatto che le basse frequenze sono in grado di penetrare il fondale marino e la riflessione delle onde dipende dalla formazione di quest'ultimo. In questo modo diventò possibile scoprire cosa si trovava al di sotto del fondale marino, ottenendo uno strumento fondamentale per trovare dei giacimenti di metano e petrolio. Successivamente la tecnica venne affinata sino a produrre le pistole ad aria che generano alta energia a basse frequenze per penetrare il più possibile all'interno del terreno.

In questo periodo si svilupparono tecniche acustiche per individuare la presenza di animali marini, in particolare i pesci. L'idea fu suggerita per la prima volta nel 1924 da Portier che rivelò delle anomalie nell'uso dell'ecoscandaglio. Infatti, i sistemi di rilevamento si basano proprio sull'interferenza che i pesci creano. Le onde sonore vengono riflesse dall'aria presente all'interno della vescica dei pesci e il segnale riflesso rivela la loro presenza. In questo modo, le frequenze utilizzate per rilevare i pesci sono più alte di quelle per rilevare il fondale perchè non serve che il segnale si propaghi per grandi distanze pur avendo una precisione maggiore.

**Applicazioni militari** Negli stessi anni in cui si stava sviluppando l'interesse della comunità scientifica verso l'idroacustica ha avuto anche un'importanza non trascurabile l'interesse bellico in questa disciplina. Infatti sia nella Prima che nella Seconda Guerra Mondiale riuscire ad individuare i sottomarini e le mine nemiche oppure trasmettere messaggi in modo efficace rappresentava un vantaggio vitale. Quindi furono destinate ingenti risorse per sviluppare le tecnologie nel modo più efficace possibile facendo progredire la ricerca scientifica, nonostante non fosse l'obiettivo principale.

Durante la Prima Guerra Mondiale l'idroacustica veniva utilizzata per rilevare la presenza di mine e sottomarini: all'inizio era un sistema piuttosto rudimentale che sfruttava il rumore generato dai motori e lo rilevava attraverso un sistema analogo ad un tubo in cui una delle due estremità era inserita nell'acqua. Nel 1917 un fisico francese, Paul Langevin, utilizzò l'effetto piezoelettrico per costruire un *echo-ranging system*; viene generata un'onda sonora alla frequenza desiderata applicando l'opportuna differenza di potenziale ad un materiale piezoelettrico che si espande e contrae. Si può definire come il primo passo verso i moderni Sonar.

Nella Seconda Guerra Mondiale invece il sistema Sonar era già stato sviluppato, quindi gli studi, che rimasero secretati per molti anni, si concentrarono sui fattori che influenzano le prestazioni dei Sonar in modo da interpretare nel modo corretto i segnali ricevuti e cercare dei metodi per rendere i propri mezzi meno individuabili. In particolare la ricerca si concentrò su 3 aspetti :

- Acustica delle alte frequenze: i segnali sono emessi ad una frequenza che parte da qualche migliaia di Hertz sino a salire e si estende per pochi chilometri. Queste frequenze venivano utilizzate soprattutto per localizzare i sottomarini e le mine. In particolare si scoprì la presenza del *Deep Scattering Layer*, ovvero uno strato che riflette il segnale e varia la sua profondità in base al periodo del giorno. Questo strato è dovuto alla presenza di piccoli organismi, meduse e pesci di piccole dimensioni, che interferiscono con il segnale e se non presi in considerazione cambiano il significato dei rilevamenti.
- Acustica delle basse frequenze: i segnali sono emessi ad una frequenza che arriva sino a qualche migliaia di Hertz e può raggiungere centinaia di chilometri di distanza. I segnali a bassa frequenza sono in grado di raggiungere distanze più elevate rispetto quelli ad alta frequenza perchè il segnale subisce una minore

dissipazione. In particolare se il segnale arriva ad un'opportuna profondità può viaggiare sino a 1000 chilometri di distanza sfruttando il *Sofar Channel*. Prima della fine della Seconda Guerra Mondiale le trasmissioni a lungo raggio venivano utilizzate per identificare la posizione delle zattere di salvataggio nel caso di naufragio; successivamente con l'avvento della guerra fredda venne istituito un sistema di sorveglianza ad ampio raggio d'azione.

- Rumore Ambientale: la conoscenza del livello di disturbo ambientale era necessaria per calibrare i livelli a cui le mine dovevano esplodere: lo scopo dell'ordigno era saltare nel momento in cui si rileva acusticamente il passaggio di una nave. Per fare ciò era necessario conoscere i rumori ambientali per questo vennero svolti una serie di esperimenti a varie frequenze dall'Università della California. Si giunse alla conclusione che l'intensità dei disturbi aumenta con il crescere della velocità del vento e l'altezza delle onde. In seguito, i risultati ottenuti da questi studi hanno dato vita al *WOTAN (Wind Observations Through Ambient Noise)* che determina le condizioni ambientali del mare in base ai rumori di sottofondo che registra.

## Capitolo 2

# Caratteristiche del suono

### 2.1 Efficienza acustica

Il suono è una piccola perturbazione di pressione che si propaga mediante onde longitudinali; la generazione si può dividere in 2 casi : può essere volontaria per comunicare oppure una conseguenza indesiderata di un altro processo meccanico. La Seconda Legge della Termodinamica si afferma che non è possibile svolgere un lavoro senza perdere della potenza, similmente ogni volta che si ha un processo meccanico si producono delle vibrazioni e queste vengono trasformate in rumore. Quest'ultimo va ridotto, non per aumentare l'efficienza meccanica ma per irradiare meno rumore possibile. I suoni antropologici all'interno degli oceani fanno parte di questa categoria.

Le caratteristiche del segnale dipendono sia dal mezzo in cui si propaga che dalla frequenza e dalla potenza; e questi due fattori sono estremamente variabili. Ad esempio nel caso di un suono in aria la frequenza udibile dall'orecchio umano va dai 20 Hz sino ai 20 KHz mentre la potenza da un minimo di  $10^{-10}W$ , un bisbiglio, a un massimo di  $10^7W$  nel caso di un propulsore a razzo.

In acqua invece l'ampiezza dello spettro della potenza sonora è molto più ristretto; un sottomarino che procede a bassa velocità produce un rumore con una potenza acustica dell'ordine di  $10mW$  mentre una nave irradia dai 5 W ai 100 W.

Mettendo a confronto i due mezzi acustici si può notare che la frazione di energia meccanica convertita in energia acustica è molto più bassa nel caso dell'acqua rispetto a quello dell'aria; ma nonostante ciò i rumori subacquei sono ugualmente pericolosi. Infatti a parità di potenza acustica un suono in acqua rimane udibile a distanze molto più

elevate rispetto al caso in cui si propaghi in aria; questo fenomeno è dovuto ai mezzi di propagazione. In acqua le alte pressioni sono associate a bassi valori di potenza e il rilevamento del suono è associato ai valori di pressione quindi risulta ugualmente udibile nonostante la sua energia sia bassa.

Per valutare meglio il fenomeno del rumore generato da un meccanismo è utile introdurre l'efficienza acustica di conversione; ovvero il rapporto tra la potenza irradiata e quella meccanica prodotta dalla sorgente.

$$\eta_{ac} = \frac{\text{Potenza Acustica}}{\text{Potenza Meccanica}} = \frac{W_{ac}}{W_{mec}} \quad (2.1)$$

$\eta_{ac}$  ha valori molto più bassi in acqua, dove è comune trovare un'efficienza di  $10^{-8}$ ; invece in aria si raggiungono spesso valori che oscillano tra  $10^{-4}$  e  $10^{-2}$ . La differenza di efficienza nei due mezzi è causata dalla diversa comprimibilità. L'aria è molto più comprimibile e la generazione del suono avviene attraverso cicli periodici di compressione e rilassamento del mezzo; per questa ragione a parità di potenza meccanica la potenza acustica irradiata in aria è più alta rispetto all'acqua.

La comprimibilità relativa di un mezzo è misurata attraverso il numero di Mach; qui definito come il rapporto tra la velocità meccanica e la velocità del suono nel mezzo. Di conseguenza l'efficienza si può esprimere in funzione di questo parametro adimensionale.

$$M = \frac{U}{c} \quad (2.2)$$

$$\eta_{ac} \sim M^n \quad (2.3)$$

Nell'espressione 2.3 l'esponente  $n$  ha un valore superiore all'unità e quindi a bassi numeri di Mach (inferiori all'unità) corrispondono valori di efficienza ancora più piccoli; è un indicatore di come l'efficienza acustica sia più alta in aria.

Inoltre la produzione del rumore può essere suddiviso in tre processi differenti; generazione del moto vibratorio, trasmissione della radiazione alla superficie irradiante e radiazione del suono all'interno del mezzo. Di conseguenza l'efficienza acustica di conversione può essere espressa come prodotto delle tre singole efficienze.

$$\eta_{ac} = \eta_{vibrazione} \cdot \eta_{trasmissione} \cdot \eta_{radiazione} \quad (2.4)$$

L'ultimo termine è quello che dipende dal numero di Mach ed è quindi quello che cambia sensibilmente al variare del mezzo; invece gli altri due termini rimangono praticamente invariati nei due casi.

Questa nuova riscrittura è anche utile per valutare dove si trovi effettivamente la maggior fonte di rumore e di conseguenza come migliorare l'efficienza acustica nel modo più opportuno.

- Ridurre la frazione di energia meccanica che viene convertita in energia vibrazionale. Non è molto utilizzato perchè necessita la modifica delle macchine e quindi una riprogettazione del sistema.
- Isolare la sorgente dalle superfici irradianti. Di solito si preferisce questo metodo perchè si ottiene più facilmente interponendo degli ostacoli acustici tra le due parti.
- Ridurre l'efficienza di radiazione della superficie irradiante. Anche questa soluzione non è semplice da attuare perchè richiede l'utilizzo di complessi rivestimenti anti-radiazione.

## 2.2 Unità di misura

I livelli di potenza acustica ricoprono un intervallo estremamente ampio perciò una scala lineare risulterebbe troppo dispersiva; per questa ragione si preferisce utilizzare una scala logaritmica. Inoltre anche la risposta umana agli stimoli acustici ha una forma logaritmica. Come unità di misura si è scelto di utilizzare i Decibels.

Questo sistema venne ideato nei primi anni 20 nell'industria delle comunicazioni elettroniche per valutare le capacità delle reti di trasportare potenza; notarono che finchè la rete era lineare il rapporto tra potenza in uscita e in entrata rimaneva costante; poi siccome i rapporti erano elevati decisero di esprimerli in quantità logaritmiche.

$$\text{Rapporto di trasmissione} = \log_{10} \frac{W_{\text{out}}}{W_{\text{in}}} \quad (2.5)$$

L'unità di misura fu chiamata *Bel* in onore dello sviluppatore del telefono Alexander Bell. In seguito si decise di moltiplicare l'unità per dieci per evitare di lavorare con le

frazioni.

$$\text{Rapporto di trasmissione in dB} = 10 \log_{10} \frac{W_{\text{out}}}{W_{\text{in}}} \quad (2.6)$$

Poi la stessa grandezza può essere espressa sfruttando il fatto che la potenza è proporzionale al quadrato della differenza di potenziale e sfruttando le proprietà dei logaritmi 2.6 può essere riscritta come :

$$\text{Rapporto di trasmissione in dB} = 10 \log_{10} \frac{e_{\text{out}}^2}{e_{\text{in}}^2} = 20 \log_{10} \frac{e_{\text{out}}}{e_{\text{in}}} \quad (2.7)$$

Analogamente si può definire un rapporto di trasmissione nel caso acustico e in questo caso la tensione corrisponde alla tensione mentre l'intensità alla potenza e il rapporto di trasmissione diventa *Transmission Loss (TL)*

$$\text{Rapporto di trasmissione in dB} = 10 \log_{10} \frac{I_{\text{out}}}{I_{\text{in}}} \quad (2.8)$$

$$\text{Rapporto di trasmissione in dB} = 20 \log_{10} \frac{p_{\text{out}}}{p_{\text{in}}} \quad (2.9)$$

In generale però il valore della pressione non rimane costante nel tempo quindi le grandezze scritte in precedenza vanno riferite al valore quadratico medio; nel caso di un segnale periodico l'integrazione viene svolta sul periodo "T", altrimenti è possibile definire una media per T che tende ad infinito.

$$p_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T p(t)^2 dt \quad (2.10)$$

$$p_{\text{rms}}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0 - T/2}^{t_0 + T/2} p(t)^2 dt \quad (2.11)$$

In generale però non basta avere un rapporto tra due grandezze ma si vuole conoscere anche il suo valore assoluto, per questa ragione si definiscono dei livelli di riferimento rispetto a cui si calcola il valore assoluto. I valori di riferimento dipendono dal mezzo in cui si propaga il suono. Così si possono riscrivere le grandezze *Intensity Level (IL)* e *Sound Pressure Level (SPL)*, a cui si aggiunge anche il livello di potenza sonora

rappresentato da *Sound Power Level* (*PWL*)

$$IL = 10 \log \frac{I}{I_{\text{ref}}} \quad (2.12)$$

$$SPL = 20 \log \frac{p_{\text{rms}}}{p_{\text{ref}}} \quad (2.13)$$

$$PWL = 10 \log \frac{P_w}{P_w \text{ ref}} \quad (2.14)$$

Nel caso dell'aria la pressione di riferimento è pari a  $20 \mu\text{Pascal}$  che equivale al valore di soglia che l'orecchio umano è in grado di sentire; invece nel caso dell'acqua il valore è di  $1 \mu\text{Pascal}$ . Entrambi servono ad esprimere i valori assoluti ma bisogna fare attenzione ad esplicitare il mezzo rispetto a cui sono calcolati altrimenti si ottengono risultati sensibilmente diversi; lo stesso valore assoluto di pressione se riferito all'acqua invece che all'aria risulta più alto di  $26\text{dB} = 20 \log 20$ . Inoltre bisogna anche fare attenzione al periodo a cui risalgono i dati raccolti perchè per molto tempo la pressione di riferimento era il *microbar* =  $10^5 \mu\text{Pa}$  e in questo caso si l'errore sarebbe pari a  $100\text{dB} = 20 \log 10^5$ . Dopodichè dai valori di riferimento di pressione è possibile calcolare le intensità di riferimento sfruttando la seguente formula che poi verrà ricavata in seguito, ottenendo  $I_{\text{ref}} = 0.67 \cdot 10^{-18} \text{W/m}^2$ .

$$I_{\text{ref}} = \frac{p_{\text{ref}}^2}{\rho_0 c_0} \quad (2.15)$$

A questo punto si ricorda che la pressione è espressa in Pascal ( $\text{N/m}^2$ ), la potenza in Watt ( $\text{Nm/s}$ ) e l'intensità in  $\text{W/m}^2$  e prendendo i valori di riferimento si possono collegare i valori misurati con i relativi assoluti in decibel.

$$IL = 10 \log \frac{I}{0.67 \cdot 10^{-18} \text{W/m}^2} = 10 \log I + 140.4\text{dB} \quad (2.16)$$

$$SPL = 20 \log \frac{p_{\text{rms}}}{1 \cdot 10^{-6} \text{Pa}} = 20 \log p_{\text{rms}} + 120\text{dB} \quad (2.17)$$

$$PWL = 10 \log \frac{P_w}{0.67 \cdot 10^{-18} \text{W}} = 10 \log P_w + 140.4\text{dB} \quad (2.18)$$

**Aritmetica dei decibel** L'uso della scala logaritmica introduce un sistema di riferimento diverso al caso lineare. Ad esempio una differenza di 3 dB tra l'energia di due segnali corrisponde al fatto che l'energia del primo segnale sia pari al doppio del secondo e il valore del rapporto tra le pressioni è pari alla radice quadrata di due. Questa riduzione dei valori utilizzati nelle unità di misura ha un'influenza sull'accuratezza delle

misure perchè la differenza di 1dB corrisponde ad una variazione percentuale del 10% . Inoltre sfruttando le proprietà dei logaritmi si ricorda come il prodotto di più variabili si traduce nella loro somma in decibel, mentre l'elevazione a potenza dell'argomento si può esprimere come una moltiplicazione per l'esponente stesso.

Invece il caso della somma ( o sottrazione ) delle grandezze lineari diventa più complesso passando nel campo dei decibel. Per sommare tra di loro dei valori in decibel bisogna trasformarli prima in valori lineari, svolgere le operazioni e dopo ritrasformare il risultato nell'unità di misura desiderata. Inoltre il risultato dell'operazione dipende anche dalla frequenza di emissione dei segnali.

Due sorgenti si dicono coerenti se emettono un segnale alla stessa frequenza; vuol dire che il periodo con cui le sorgenti vibrano( quante volte in un secondo comprimono e rilassano il mezzo) è lo stesso mentre se le frequenze di emissione sono diverse le sorgenti si dicono incoerenti. Nel caso di somma e differenza le leggi cambiano in base al tipo di segnali coinvolti.

Nel primo caso si considerano due segnali coerenti; la pressione generata da un corpo che vibra oscilla anch'essa nel tempo e quindi nel caso base ci si può riferire ad essa come un'armonica semplice. Perciò le pressioni generate dalle due sorgenti in un punto fissato dello spazio possono essere riscritte come segue :

$$p'_1 = p_1 \sqrt{2} \cos(\omega t - \phi_1) \quad (2.19)$$

$$p'_2 = p_2 \sqrt{2} \cos(\omega t - \phi_2) \quad (2.20)$$

La radice quadrata di due viene inserita per poi semplificare i conti in seguito mentre  $p_1$  e  $p_2$  rappresentano la pressione quadratica media. I singoli livelli di pressione in decibel assumono il seguente valore.

$$SPL_1 = 20 \log \frac{p_1}{p_0} \quad (2.21)$$

$$SPL_2 = 20 \log \frac{p_2}{p_0} \quad (2.22)$$

Sfruttando le proprietà dei logaritmi si può ricondurre il livello di pressione totale alla somma del quadrato delle due grandezze in cui bisogna andare ad esplicitare il valore

dell'argomento.

$$SPL_T = 10 \log \frac{p_T^2}{p_0^2} \quad (2.23)$$

$$p_T^2 = \overline{(p'_1 + p'_2)^2} \quad (2.24)$$

Per esplicitare si riscrivono i singoli addendi come in e poi si sfruttano le proprietà trigonometriche che coinvolgono la moltiplicazione di coseni.

$$\overline{(p'_1 + p'_2)^2} = p_1^2 + p_2^2 + 4p_1p_2 \overline{\cos(\omega t - \phi_1) \cos(\omega t - \phi_2)} \quad (2.25)$$

$$p_T^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \quad (2.26)$$

L'espressione 2.26 mostra che il risultato dipende dall'angolo di fase tra le due sorgenti. Nel caso in cui le sorgenti abbiano la stessa intensità e siano in fase tra di loro  $\phi_1 = \phi_2$  allora la pressione risultante è 6 dB maggiore rispetto alla singola sorgente ed è il valore massimo che può raggiungere la somma delle pressioni. Invece il valore minimo si ottiene quando le sorgenti, sempre di pari intensità, sono fuori fase ( $\phi_1 = -\phi_2$ ). In generale si ottiene un intervallo di valori che oscilla tra  $6dB \cdot p_1$  e 0. Nel caso in cui  $p_1 \neq p_2$  il valore massimo sarà sempre inferiore a 6dB della pressione maggiore.

Però nella realtà è più comune trovare due sorgenti che emettono segnali a frequenze diverse e perciò non sono più applicabili i metodi illustrati in precedenza; in quel caso la media nel tempo del prodotto dei coseni diventa nulla. Quindi la somma di due sorgenti che emettono a frequenze diverse, nel caso in cui  $SPL_1 > SPL_2$ , si riduce a :

$$SPL_T = 10 \log \frac{p_1^2}{p_0^2} \left( 1 + \frac{p_2^2}{p_1^2} \right) = SPL_1 + 10 \log \left( 1 + \frac{1}{10^{(SPL_1 - SPL_2)/10}} \right) \quad (2.27)$$

Si può notare che il risultato finale della somma cambia se la differenza di intensità tra le due sorgenti è inferiore a 12 dB, altrimenti il valore finale è pari a quello della sorgente più grande.

## 2.3 Trasformata di Fourier

Il rumore viene prodotto attraverso delle piccole perturbazioni di pressione del mezzo in cui si propaga, queste perturbazioni nascono dalle vibrazioni dei corpi e hanno una

natura oscillatoria. Per questa ragione può risultare utile analizzare il fenomeno non solo nel dominio nel tempo ma anche in quello delle frequenze.

Il cambio di variabile si ottiene grazie alla trasformata di Fourier. Questo strumento matematico si basa sulla teoria che ogni funzione periodica può essere riscritta come una sommatoria infinita di seni e coseni con ampiezze e frequenze differenti, chiamata serie di Fourier.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)) \quad (2.28)$$

L'obbiettivo della trasformata è associare ad ogni frequenza i rispettivi coefficienti  $a_k$  e  $b_k$  in modo da ricostruire il segnale in modo opportuno.

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^{\infty} x(t) \cos(\omega_k t) dt \quad (2.29)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^{\infty} x(t) \sin(\omega_k t) dt \quad (2.30)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.31)$$

Questo concetto di ripetibilità del segnale viene allargato dalla trasformata di Fourier che permette di riscrivere anche le funzioni non periodiche nel dominio del tempo; allargando così il suo campo di impiego.

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.32)$$

Inoltre sfruttando la formula di Eulero le armoniche possono essere espresse come la parte reale della grandezza complessa; nel caso della pressione si ottiene :

$$p' = P_0 \cos(\omega t - \phi) = \text{Re}[\hat{p} e^{i\omega t}] \quad (2.33)$$

In questo caso il termine  $\hat{p}$  rappresenta il coefficiente di Fourier e  $\omega$  la frequenza dell' $n$ -esima armonica della frequenza fondamentale. La rappresentazione complessa risulta utile perchè l'ampiezza e la fase sono comprese in unico termine che permette una scrittura compatta delle relazioni analitiche. Per passare in modo semplice dalle equazioni nel dominio del tempo a quello delle frequenze si possono seguire le seguenti regole :

- Le variabili delle grandezze vengono riscritte come la rispettiva parte reale  $\text{Re}[\hat{A} e^{i\omega t}]$ .
- Le derivate rispetto al tempo e allo spazio commutano rispetto all'operatore

$Re[\dots]$  e quindi l'operazione  $d/dt$  diventa una moltiplicazione per il termine  $i\omega$ .

- La somma delle parti reali di più numeri complessi è uguale alla parte reale della somma dei numeri complessi.
- Il prodotto di un numero reale con la parte reale di un numero complesso è la parte reale del prodotto.

Poi nella realtà non si può svolgere un'analisi continua ma si suddivide il segnale in bande di ampiezza finita e si valuta la media del segnale in quell'intervallo, andando a risolvere la trasformata di Fourier.

$$\frac{\hat{X}(\omega)}{2\pi} \delta\omega = \hat{X}(\omega) \delta f \quad (2.34)$$

Gli estremi delle frequenze registrabili dipendono dal tempo di acquisizione ( la frequenza più bassa) e dalla precisione della strumentazione ( frequenza più alta). Una volta impostata la larghezza delle bande si può procedere a calcolare il livello della pressione, che in questo caso prende il nome di *Pressure Band Level* ( *PBL*). Tuttavia questo valore non corrisponde a quello dello spettro (*Pressure Spectrum Level* ( *PSL*)) perchè bisogna tenere in conto dell'ampiezza,  $\Delta f$ , con cui è stato calcolato. Il problema si risolve applicando una correzione al *Pressure Band Level*.

$$PSL = PBL - 10 \log \Delta f \quad (2.35)$$

$$PSL = 10 \log \frac{\hat{X}(\omega)^2}{\hat{X}_{\text{ref}}^2} \quad (2.36)$$

## Capitolo 3

# Onde

Le onde sono un importante ramo della fisica perchè rappresentano un piccolo disturbo di campo che viaggia attraverso lo spazio-tempo. Il moto delle onde trasferisce energia da un punto all'altro senza effettuare alcuno spostamento di massa. L'importanza dello studio di questo fenomeno risiede nella sua universalità, infatti questo meccanismo della propagazione dei disturbi trova la sua applicazione in molti campi disparati; ad esempio sia luce che il suono si propagano come onde, ma trovano anche applicazione nei campi della geologia( propagazione dei terremoti) e nella meccanica ( vibrazioni e distribuzione degli sforzi) , finendo per descrivere anche i fenomeni della fisica moderna ( l'equazione di Schrödinger).

Le onde possono essere divise in base alla direzione delle oscillazioni e alla necessità o meno di avere un mezzo in cui propagarsi. Infatti hanno una direzione ed una velocità di propagazione e il disturbo che apportano al campo può essere nella direzione perpendicolare a questa velocità, è il caso delle onde elettromagnetiche, oppure parallelo, è il caso del suono; poi esistono alcuni casi particolari in cui le oscillazioni del campo avvengono in entrambe le direzioni, ma sono più rari, le onde sismiche ne sono un esempio. Poi in base al meccanismo di propagazione le onde necessitano o meno di un mezzo in cui muoversi. Ad esempio le onde sonore trasmettono il segnale della variazione di pressione per mezzo di piccoli urti tra le particelle e perciò hanno bisogno di un mezzo in cui far viaggiare l'informazione, mentre questo non avviene nel caso delle onde elettromagnetiche. Infine occorre ricordare che sono presenti anche dei casi in cui la velocità di propagazione del disturbo dipende dalla lunghezza d'onda del segnale ma le onde acustiche non rientrano in questo insieme più complesso, anche per altrimenti i

suoni non arriverebbero all'orecchio tutti assieme ma in base alla frequenza a cui sono emessi.

Per rendere chiari i concetti base è utile considerare il caso unidimensionale in cui un disturbo si muove nel tempo a velocità costante. Si consideri un disturbo che viene generato al tempo  $t = 0$ , nella posizione  $x = 0$  e viaggia con velocità  $c$ , quindi si ottiene che negli istanti di tempo successivi lo stesso disturbo si troverà in un punto diverso del campo che è determinato dalla seguente relazione :

$$x_1 = ct_1 \quad (3.1)$$

Quindi la funzione che modifica il segnale del campo è arbitraria ma non lo è il suo argomento; perciò un'onda può essere rappresentata nel seguente modo :

$$f(x - ct) = f_{\text{onda}} \quad (3.2)$$

E il comportamento dell'onda si può riassumere introducendo le variazioni di spazio e tempo.

$$f(x - ct) = f(x + \Delta x - c(t + \Delta t)) \quad (3.3)$$

$$\Delta x = c\Delta t \quad (3.4)$$

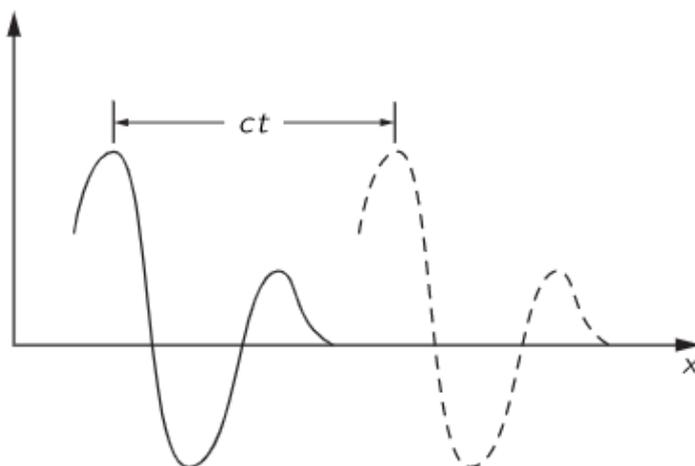


Figura 3.1: Rappresentazione di un segnale d'onda

Nel caso 3.2 si è considerata una sorgente al centro e una propagazione verso l'asse positivo delle  $x$  ma il concetto rimane lo stesso per una propagazione verso l'asse negativo, occorre solamente cambiare il segno della velocità di propagazione.

$$g(x + ct) = f_{\text{onda}} \quad (3.5)$$

Inoltre bisogna considerare la possibilità della presenza di più onde che si propagano in modo indipendente; in questo caso il campo acustico risultante è dato dalla somma dei singoli contributi. Prese due onde  $f_1(x - ct)$  e  $f_2(x - ct)$  la loro somma deve risultare nuovamente in un'onda; questo fenomeno prende il nome di *Principio di sovrapposizione*.

Poi la forma dell'equazione delle onde si può ricavare dai vari fenomeni che descrivono; uno dei quali è lo spostamento delle particelle d'aria dovuto alla variazione della pressione; però prima bisogna fare delle assunzioni.

- Le perturbazioni di pressione sono piccole rispetto al valore della pressione indisturbata.
- Il movimento del gas causa un cambiamento della densità.
- La variazione della densità corrisponde ad una variazione di pressione.
- Un disequilibrio della pressione genera il moto del gas.

Dopodichè sfruttando la seconda legge del moto di Newton ( $F = m \cdot a$ ) e l'equazione di stato dei gas si ricava l'equazione delle onde, in cui  $\chi$ , rappresenta lo spostamento del gas.

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = k \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \quad (3.6)$$

Il termine  $k$  poi si può riscrivere come  $1/c_s^2$  e dalla dimostrazione che è stata omessa si può ricavare il valore della costante  $k$  come la derivata della pressione rispetto alla densità. Così facendo si ottiene un'espressione della velocità di propagazione del suono.

$$c_s = \sqrt{k} = \sqrt{\left(\frac{dP}{d\rho}\right)_0} \quad (3.7)$$

A questo punto che si ha la forma dell'equazione d'onda in 3.6 occorre verificare se quest'ultima risponde alle proprietà con cui era stata descritta in precedenza. Il suono

è un disturbo che si muove a velocità costante, la direzione della velocità può essere sia verso destra che verso sinistra dell'origine e infine due impulsi possono muoversi uno attraverso l'altro per il principio di sovrapposizione.

Nel caso unidimensionale un disturbo che si propaga a velocità costante ha la forma descritta in 3.2, quindi bisogna verificare che sia una soluzione possibile dell'equazione delle onde;  $\chi(x, t) = f(x - vt)$ . Per farlo si svolgono le doppie derivate nel tempo e nello spazio di  $\chi$ .

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = f''(x - vt) \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = v^2 f''(x - vt) \quad (3.9)$$

Andando a sostituire le derivate all'interno di 3.6 si trova che la funzione  $f(x - vt)$  è soluzione dell'equazione delle onde a patto che  $v = c_s$ . Poi essendo presente la velocità di propagazione al quadrato il segno della velocità è irrilevante e perciò l'equazione delle onde è soddisfatta anche dalla funzione  $\chi(x, t) = g(x + vt)$ . Ciò vuol dire che la soluzione comprende due onde che si propagano nelle due direzioni con velocità  $c = c_s$ .

Infine si valuta se è valido il principio di sovrapposizione. Si suppone che si sia trovata una soluzione all'equazione delle onde,  $\chi_1$ . Questo significa che la derivata seconda nello spazio di  $\chi_1$  è pari a  $1/c_s^2$  volte la derivata seconda nel tempo sempre di  $\chi_1$ . Ogni altra soluzione, ad esempio  $\chi_2$  deve avere la stessa proprietà. Se si sovrappongono le due soluzioni si ottiene :

$$\chi(x, t) = \chi_1(x, t) + \chi_2(x, t) \quad (3.10)$$

Bisogna verificare che la somma delle soluzioni,  $\chi(x, t)$  sia anch'essa un'onda e si può dimostrare sfruttando le proprietà lineari dell'operatore derivata.

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x^2} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial t^2} \quad (3.12)$$

Ne segue che la somma di due funzioni d'onda risulta essere anch'essa una funzione d'onda e quindi rispetta il principio di sovrapposizione. Poi in particolare al moto ondoso della pressione, il caso del suono, possono essere attribuite altre proprietà più

particolari :

- Le onde posseggono una quantità di moto e sono in grado di trasportare energia da un punto all'altro del dominio.
- Quando le onde sono assorbite o riflesse da un oggetto, esse esercitano una pressione su di esso.
- La velocità con cui viaggiano le onde dipende dal mezzo ma non dall'intensità e dalla frequenza.
- Le onde riflesse, a differenza del caso della riflessione di particelle solide, passano attraverso le onde incidenti.
- La forma di un'onda può essere radicalmente cambiata quando essa è riflessa.

### 3.1 Onda piana

Si va a valutare una possibile soluzione dell'equazione delle onde in cui si ipotizza la forma. Si parte sempre dal caso unidimensionale per semplificare la risoluzione della stessa ma evidenziare i punti chiave.

Nel caso di onda piana unidimensionale si suppone che la perturbazione del campo sia costante nel piano perpendicolare al segnale e le derivate ordinarie e non più parziali.

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 f}{dt^2} = 0 \quad (3.13)$$

Per trovare la forma della funzione  $f(x - ct)$  più semplice che risolve 3.13 si ricorre alla teoria su cui si basa la trasformata di Fourier; ogni disturbo può essere riscritto come la sommatoria di un numero infinito di funzioni periodiche. La funzione più semplice che descrive un moto armonico è la sinusoidale. Nel caso di un'onda che si propaga lungo l'asse positivo delle ascisse assume la seguente forma :

$$f(x - ct) = A_1 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) + A_2 \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) \quad (3.14)$$

La frequenza angolare  $\omega = 2\pi f$  traduce la frequenza per una funzione sinusoidale, infatti rappresenta quante oscillazioni complete esegue in un secondo. Invece la frequenza angolare diviso la velocità di propagazione è una frequenza spaziale ed è proporzionale

al numero di cicli completi che sono presenti in un'unità di distanza. Questo termine prende il nome di numero d'onda e svolge nel dominio dello spazio un ruolo analogo a quello della frequenza angolare nel dominio del tempo.

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.15)$$

Poi sfruttando le formule trigonometriche per la somma di seni e coseni l'espressione 3.14 si può riscrivere con il solo coseno.

$$f(x - ct) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cos \left( \omega t - kx - \tan^{-1} \frac{A_2}{A_1} \right) \quad (3.16)$$

A questo punto sfruttando la formula di Eulero si può riscrivere il tutto come una grandezza complessa; questa forma risulta utile nello svolgere il passaggio dal dominio del tempo a quello delle frequenze.

$$f(x - ct) = \operatorname{Re} \left[ \hat{A}^{i(\omega t - kx)} \right] \quad (3.17)$$

La grandezza complessa  $\hat{A}$  esprime sia l'angolo di fase che l'ampiezza del vettore rotante e viene determinata dalle condizioni al contorno del caso specifico.

**Equazione di Helmholtz** Lo stesso problema può essere risolto nel dominio delle frequenze perchè è consistente con l'analisi spettrale del fenomeno e perchè sono presenti dei casi in cui la velocità della propagazione del segnale dipende dalla frequenza, non è il caso del suono, e quindi l'equazione delle onde nel dominio del tempo non è più valida.

Per effettuare questo cambio di variabile si utilizzano le regole mostrate nel capitolo legato alla trasformata di Fourier. Le derivate nello spazio rimangono invariate mentre quelle nel tempo vengono sostituite da una moltiplicazione per l'unità immaginaria della frequenza angolare.

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = (i\omega)^2 f = -k^2 c^2 f \quad (3.18)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = 0 \quad (3.19)$$

**Onda piana nello spazio** L'espressione analitica nello spazio prevede l'aggiunta delle altre due coordinate, in questo caso il campo si perturba lungo i tre piani dello spazio e la forma generale della funzione d'onda piana nelle coordinate cartesiane prende la seguente forma :

$$F(r - ct) = F(n_x x + n_y y + n_z z - ct) \quad (3.20)$$

Dove  $r$  rappresenta la distanza percorsa dall'onda nella direzione di propagazione e i termini  $n_m$  sono i versori delle singole direzioni, e rappresentano la proiezione delle tre coordinate rispetto al vettore della propagazione. Per considerazioni geometriche la somma quadratica dei tre versori deve essere pari ad uno.

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{z}{r}\right)^2 = 1 \quad (3.21)$$

Di conseguenza l'equazione si allarga a tre dimensioni e la derivata ordinaria prende la forma delle tre derivate parziali nelle tre dimensioni, può essere riscritto in forma compatta con l'operatore Laplaciano.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \quad (3.22)$$

$$\nabla^2 F - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \quad (3.23)$$

Inoltre lavorando in più dimensioni è presente una variazione del significato del numero d'onda. All'inizio era stato definito come una quantità scalare, ma a questo punto occorre definire una quantità vettoriale per rappresentare non solo l'ampiezza del numero d'onda ma anche la direzione di propagazione. In coordinate cartesiane si può esprimere come segue :

$$\vec{k} = \hat{i}k_x + \hat{j}k_y + \hat{k}k_z = k(\hat{i}n_x + \hat{j}n_y + \hat{k}n_z) \quad (3.24)$$

All'interno di 3.24 sono presenti i versori della direzione di propagazione e siccome la somma del quadrato dei tre dev'essere uno, ne segue che il numero d'onda è il quadrato della somma delle tre componenti.

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (3.25)$$

Ogni componente rappresenta la frequenza spaziale lungo ognuna delle coordinate e perciò dipende dalla direzione di propagazione; per esempio il caso unidimensionale si può anche vedere come  $k_y = k_z = 0$ . Poi il significato delle componenti del vettore  $\vec{k}$  risulta più evidente nel momento in cui si va a risolvere l'equazione delle onde sfruttando la separazione della variabili.

$$F(x, y, z, \omega, t) = A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad (3.26)$$

Si è omessa la scrittura della parte reale per snellire la scrittura dell'equazione e d'ora in poi con la rappresentazione di un numero complesso si sottintende la sua parte reale a meno che non sia specificato diversamente. Successivamente si può esprimere la funzione  $F$  come un prodotto di tre funzioni spaziali indipendenti, una per ogni coordinata spaziale, per una temporale.

$$F(x, y, z, \omega, t) = X(x, \omega) \cdot Y(y, \omega) \cdot Z(z, \omega) e^{i\omega t} \quad (3.27)$$

Sostituendo 3.27 all'interno dell'equazione delle onde si ottiene :

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0 \quad (3.28)$$

Quindi il problema si riduce a tre equazioni di Helmholtz indipendenti tra di loro ognuna lungo una coordinata spaziale; questo vuol dire che la soluzione è rappresentata da tre onde piane che si muovono lungo i tre assi con la stessa frequenza angolare ma diversa frequenza spaziale. L'introduzione del numero d'onda suggerisce anche che sia possibile svolgere un'analisi nel dominio delle frequenze spaziali. L'unica differenza è che l'analisi riguarda tutte e tre le direzioni e quindi si ottengono tre spettri del numero d'onda, rendendo la trasformata di Fourier più complessa.

Infine osservando l'equazione di Helmholtz nel complesso e andando ad adimensionalizzare le grandezze coinvolte si possono fare delle importanti osservazioni.

$$\nabla^2 F + k^2 F = 0 \quad (3.29)$$

Sia  $L$  una lunghezza rappresentativa della scala geometrica e  $\omega$  la frequenza angolare di riferimento, si possono definire le variabili adimensionali.

$$\bar{t} = \omega t \text{ e } \bar{\vec{r}} = \frac{\vec{r}}{L} \quad (3.30)$$

Dopodichè si possono esprimere in forma adimensionalizzata anche la variabile dimensionale rappresentata dalla funzione  $F$ , ad esempio nel caso fosse la pressione si potrebbe scrivere come la variazione rispetto alla media.

$$\bar{p}' = \frac{p'}{p_0} \quad (3.31)$$

In questo caso la variabile dipendente verrà espressa con la forma generica  $\bar{F}$ . Andando a sostituire le variabili adimensionali all'interno di 3.29 si nota la presenza di nuovo termine rispetto all'equazione di Helmholtz.

$$\left[ \nabla^2 + \left( \frac{\omega L}{c} \right)^2 \right] \bar{F} = 0 \quad (3.32)$$

$$He = \frac{\omega L}{c} \quad (3.33)$$

Il termine 3.33 è il numero di Helmholtz ed è una misura del rapporto tra la lunghezza caratteristica del dominio e la lunghezza d'onda, e si può riscrivere tramite la relazione che lega la frequenza angolare alla frequenza di emissione della sorgente.

$$He = \frac{\omega L}{c} = 2\pi \frac{fL}{c} = 2\pi \frac{L}{\lambda} = kL \quad (3.34)$$

La misura di questo rapporto indica se sia possibile o meno ricondurre l'equazione di Helmholtz al solo operatore Laplaciano. Se  $He \ll 1$  vuol dire che  $L \ll \lambda$ , la regione si definisce compatta e ciò avviene per due ragioni.

- All'interno del dominio le quantità variano significativamente su distanze  $L$  molto minori della lunghezza d'onda  $\lambda$
- Il dominio rappresenta un corpo con dimensione caratteristica piccola rispetto a  $\lambda$

Nel caso la regione sia compatta il contributo della derivata temporale è trascurabile; è come se la perturbazione venisse trasmessa istantaneamente in tutto il dominio, e

perciò il campo è governato dalla sola equazione di Laplace.

$$\nabla^2 F = 0 \quad (3.35)$$

## 3.2 Onda sferica

L'onda piana nella realtà risulta essere un caso raro e si utilizza soprattutto per capire meglio le caratteristiche del fenomeno. Un caso più realistico, ma comunque semplice a livello analitico, è l'onda di forma sferica. Si suppone che il segnale venga emesso da una sorgente e non si propaghi come un'onda piana ma bensì come il fronte di una sfera; un esempio sono le sorgenti di rumore puntiformi.

Per analizzare meglio questo caso occorre svolgere un cambio di variabili; si passa dalle coordinate cartesiane a quelle polari, ovvero la distanza dal centro,  $r$ , la latitudine,  $\theta$ , e la longitudine,  $\phi$ . Effettuando il cambio di coordinate il Laplaciano presente all'interno dell'equazione d'onda cambia la sua forma.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 f}{dt^2} = 0 \quad (3.36)$$

Nel caso più semplice si suppone che sia presente una simmetria sferica e quindi sono presenti variazioni della funzione solo lungo la distanza dal centro, quindi le altre due derivate sono nulle e l'equazione delle onde si semplifica.

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 f}{dt^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) = 0 \quad (3.37)$$

La 3.37 può essere riscritta utilizzando la seguente identità.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) \quad (3.38)$$

E si ottiene una forma analoga a quella trovata nel caso dell'onda piana ma al posto delle derivate rispetto alla funzione sono presenti derivate della funzione moltiplicata per la distanza dall'origine, quindi è presente un segnale che non rimane più costante

ma diminuisce all'aumentare della distanza.

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2}(rf) - \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) = 0 \quad (3.39)$$

Per quanto visto in precedenza la soluzione si può esprimere in forma analoga a quella ritrovata nel caso di un'onda piana a meno del termine che rappresenta l'attenuazione del segnale.

$$f(r, t) = \frac{1}{r} [F(r - ct) + G(r + ct)] \quad (3.40)$$

Nel caso in cui si tratti di un campo acustico si nota come quest'ultimo è generato da un sistema di onde che propagano in un dominio illimitato in due direzioni opposte. In un caso il disturbo si muove dal centro verso l'infinito  $F(r - ct)$  mentre l'altro fa il percorso inverso, dall'infinito verso il centro,  $G(r + ct)$ . Inoltre il termine  $1/r$  rappresenta l'attenuazione del segnale ed è necessario per la conservazione dell'energia acustica.

Infine bisogna modificare la soluzione 3.40 perchè nel caso di campo semplice si ha una sola sorgente nell'origine e il contributo che arriva dall'infinito deve essere eliminato in quanto non rispetta il principio di causalità; la perturbazione non può anticipare la sua causa. Infatti in caso contrario il segnale dovrebbe essere generato ad un tempo negativo. La perturbazione arriva da una distanza infinita ma viene percepito ad un tempo finito quindi il segnale per attraversare lo spazio necessario dovrebbe avere velocità infinita oppure essere generato ad un tempo infinitamente precedente; nessuna delle due opzioni ha un senso fisico, perciò questa componente va eliminata e la soluzione si riduce al solo termine uscente.

$$f(r, t) = \frac{1}{r} F(r - ct) \quad (3.41)$$

Matematicamente la condizione che l'informazione non può essere contenuta in onde che anticipano il segnale si esplicita imponendo che in un dominio illimitato solo le onde uscenti hanno un'esistenza reale. Questa espressione prende il nome di *condizione di Sommerfeld (o di radiazione)*.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} \right) = 0 \quad (3.42)$$

Poi allo stesso modo dell'onda piana si può ipotizzare la forma della funzione più semplice che risolve 3.37, ovvero una sinusoide.

$$f(r, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr) \quad (3.43)$$

Inoltre 3.43 può essere espressa sotto forma di grandezza complessa per facilitare il passaggio dall'equazione delle onde a quella di Helmholtz, come si può vedere di seguito.

$$f(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \quad (3.44)$$

Infine nel passare dal dominio del tempo a quello delle frequenze bisogna tradurre anche la *condizione di Sommerfeld*.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{df}{dr} - ikf \right) = 0 \quad (3.45)$$

## Capitolo 4

# Onde sonore in un mezzo

Dopo aver chiarito il comportamento fisico di un'onda qualsiasi si va a vedere il comportamento specifico di un'onda sonora. Si considera il disturbo acustico come una piccola perturbazione non stazionaria; è possibile ricavare la sua forma dalle equazioni di governo inserendo delle piccole fluttuazioni di pressione. Le relazioni utilizzate sono la conservazione della massa, la conservazione della quantità di moto e l'equazione di stato.

Per ricavare l'equazione della propagazione del disturbo però il fluido deve rispettare delle ipotesi precise.

- Il fluido è isoentropico, omogeneo e continuo.
- Il fluido non resiste agli sforzi di taglio.
- Gli sforzi viscosi sono trascurabili.
- Non è presente alcuno scambio di calore tramite convezione o radiazione.
- Le forze esterne, ad esempio chimiche o elettromagnetica, sono trascurabili.
- All'interno del dominio non sono presenti sorgenti acustiche.
- L'unico moto del mezzo è quello di traslazione a velocità costante.
- La relazione tra tensione e deformazione è lineare.
- La compressione relativa del mezzo è molto piccola ( $\Delta\rho \ll \rho_0$ )
- Il moto delle particelle associato alle onde acustiche è irrotazionale.

- Le derivate spaziali della pressione ambiente, densità e temperatura sono molto piccole.

Poi nel caso generale bisogna aggiungere anche i termini sorgente che possono essere ricavati togliendo alcune delle ipotesi precedenti .

L'ipotesi base su cui si fonda la natura delle onde acustiche afferma che il disturbo è causato dalle piccoli perturbazioni delle grandezze fisiche; questo vuol dire che le stesse grandezze fisiche possono essere espresse come la somma di una parte stazionaria più delle fluttuazioni acustiche. Prendendo ad esempio la pressione si ottiene :

$$p(x, y, z, t) = p_0(x, y, z) + p'(x, y, z, t) \quad (4.1)$$

Dove il valor stazionario si ottiene mediando la pressione sul tempo ed è il valore ambiente presente in assenza di rumore.

$$p_0(x, y, z) = \frac{1}{T} \int_0^T p(x, y, z, t) dt \quad (4.2)$$

Gli stessi concetti di media si applicano alla densità e alle componenti della velocità. In particolare sfruttando l'assunzione sulla velocità del fluido costante si può utilizzare un sistema di riferimento solidale alla velocità media per esprimere le equazioni di governo, in questo modo si ottiene  $\vec{v}_0$ . Adesso si passa a esplicitare le tre equazioni di governo nel caso di un disturbo acustico.

**Equazione di stato** L'equazione di stato lega la pressione, la densità e la temperatura in unica relazione. Fissata la temperatura la pressione può essere espressa come un'espansione della densità, dove i coefficienti del polinomio e le grandezze medie sono funzione della temperatura.

$$p = p_0 + a(\rho - \rho_0) + a(\rho - \rho_0)^2 + \dots \quad (4.3)$$

Siccome la compressione relativa del mezzo è molto piccola i polinomi di ordine superiore al primo sono trascurabili e le fluttuazioni di pressione sono legate a quelle di densità da una semplice relazione lineare.

$$p' = p - p_0 = a(\rho - \rho_0) = a\rho' \quad (4.4)$$

Infine siccome le variazioni delle grandezze lungo il dominio sono molto piccole si può considerare il coefficiente  $a$  costante o comunque varia lentamente in funzione della posizione.

**Conservazione della massa** In assenza di sorgenti la massa all'interno di un dominio rimane costante. Si può giungere a questa conclusione tramite due approcci differenti. Nel primo caso si segue una particella fluida lungo il suo moto e si impone che la sua massa sia costante; questa è la forma lagrangiana. Invece il secondo metodo fissa un volume nel spazio e valuta la variazione di massa in base ai flussi entranti e uscenti dalle superfici; questo approccio viene chiamato euleriano. Per ricavare la forma utile ad evidenziare i disturbi acustici si utilizzerà questo secondo metodo.

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{d\rho}{dt} dV = - \int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (4.5)$$

Sfruttando il teorema di Gauss della divergenza si può trasformare l'integrale di superficie in uno di volume.

$$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{A} dV \quad (4.6)$$

Quindi applicando il teorema di Gauss la 4.5 diventa :

$$\int_V \left( \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right) dV = 0 \quad (4.7)$$

A questo punto è possibile semplificare l'integrale di volume e si ottiene la forma differenziale della conservazione della quantità di moto per un fluido.

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial(\rho v_i)}{x_i} \quad (4.8)$$

La forma acustica si deriva applicando alcune delle ipotesi che erano state fatte all'inizio del capitolo, poi si esprimono le grandezze come somma della parte stazionaria più le fluttuazioni e si utilizza un sistema di coordinate solidale alla velocità di traslazione del flusso; così facendo per velocità rimane solo la parte relativa alle oscillazioni.

$$\frac{d\rho'}{dt} + \vec{v}' \cdot \nabla(\rho_0 + \rho') + (\rho_0 + \rho')(\nabla \cdot \vec{v}') = 0 \quad (4.9)$$

Il gradiente della densità è trascurabile perchè una delle ipotesi afferma che le derivate spaziali delle grandezze fisiche sono quasi trascurabili; inoltre si era anche ipotizzato che le variazioni percentuali della densità fossero molto minori al valore stazionario. Queste due ipotesi semplificano la 4.9.

$$\frac{d\rho'}{dt} + \vec{v}' \cdot \rho' + \rho_0(\nabla \cdot \vec{v}') = 0 \quad (4.10)$$

Il primo e il terzo termine hanno una dipendenza lineare dalle fluttuazioni mentre il secondo ha una dipendenza quadratica. Nel caso acustico le fluttuazioni sono piccole per ipotesi e quindi il termine quadratico è di un ordine inferiore rispetto ai lineari e perciò si può trascurare. In questo modo si ottiene la forma della conservazione della massa per un disturbo acustico in una regione senza sorgenti.

$$\frac{d\rho'}{dt} + \rho_0(\nabla \cdot \vec{v}') = \frac{d\rho'}{dt} + \rho_0 \frac{\partial v'_i}{x_i} = 0 \quad (4.11)$$

**Conservazione della quantità di moto** Rappresenta la seconda legge di Newton e quindi lega la variazione della quantità con le forze esterne agenti al flusso. Nel caso della meccanica dei fluidi si considerano come forze la gravità, il gradiente di pressione, gli sforzi viscosi e in alcuni casi anche forze chimiche e elettromagnetiche. Però per le ipotesi fatte in precedenza nel caso acustico sono rilevanti la forza di gravità e il gradiente di pressione.

Già in questa considerazione si può notare la differenza tra acustica e idroacustica, infatti se il mezzo di propagazione fosse l'aria la densità sarebbe troppo piccola e il termine associato alla forza gravitazionale potrebbe essere trascurato, ma essendo l'acqua mille volte più densa non si può fare.

Come nel caso della conservazione della massa si può giungere alla formulazione finale prendendo in considerazione la forze agenti su di una particella fluida oppure andando a guardare i flussi agenti su un volume fissato. Anche in questo caso si predilige l'approccio euleriano, sono presenti flussi di quantità di moto e pressione mentre le forze agiscono sull'unità di volume.

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}_g + \vec{F}_p + \vec{F}_{\text{flussi}} \quad (4.12)$$

Per prima cosa si vanno ad esprimere la forma della forza di pressione e di quella di gravità.

$$\vec{F}_g = m\vec{g} = \int_V \rho\vec{g}dV = - \int_V \rho g \nabla z dV \quad (4.13)$$

$$\vec{F}_p = - \int_S p d\vec{S} \quad (4.14)$$

Quindi questi due elementi si vanno ad aggiungere ai flussi di quantità di moto e l'equazione completa diventa :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = - \int_S \rho \vec{v} \vec{v} \cdot d\vec{S} - \int_S p d\vec{S} - \int_V \rho g \nabla z dV \quad (4.15)$$

A questo punto occorre trasformare gli integrali di superficie in integrale di volume e per i flussi si utilizza il teorema di Gauss della divergenza mentre per la pressione si sfrutta il teorema, sempre di Gauss, del gradiente.

$$\int_S A d\vec{S} = \int_V \nabla A dV \quad (4.16)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) dV - \int_V \nabla p dV - \int_V \rho g \nabla z dV \quad (4.17)$$

A questo punto è possibile ottenere la forma differenziale della conservazione della quantità di moto andando a semplificare gli integrali di volume siccome sono comuni a tutti i termini; dopodichè si sviluppano gli operatori della derivata e della divergenza. Ordinandoli in modo opportuno si nota che a destra dell'uguale è presente l'equazione della conservazione della massa, che equivale a zero, e quindi la continuità della quantità di moto si riduce solo alla parte sinistra.

$$\vec{v} \left( \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right) = -\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \left( \rho g \nabla z + \nabla p + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) \quad (4.18)$$

$$\left( \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right) = 0 \quad (4.19)$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = - \left( \rho g \nabla z + \nabla p + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) \quad (4.20)$$

L'equazione 4.20 rappresenta la conservazione della quantità di moto per un fluido generico e in questa categoria deve anche rientrare il caso acustico. Questo caso particolare si ottiene andando a sostituire le grandezze fisiche con la somma della parte stazionaria

più le fluttuazioni in un sistema di riferimento tale che  $\vec{v}_0 = 0$ .

$$(\rho' + \rho_0) \frac{d\vec{v}'}{dt} = - \left( (\rho' + \rho_0) g \nabla z + \nabla(p' + p_0) + (\rho' + \rho_0) (\vec{v}' \cdot \nabla) \vec{v}' \right) \quad (4.21)$$

Successivamente si trascurano i termini che hanno ordini di grandezza superiori al primo e rimangono solo i termini lineari. Inoltre in questo caso non si trascura il gradiente della pressione stazionaria perchè non viene considerata una grandezza del secondo ordine, mentre scompare la parte legata ai flussi di quantità di moto.

$$\rho_0 \frac{d\vec{v}'}{dt} = - \left( \rho_0 g \nabla z + \nabla p_0 + \nabla p' \right) \quad (4.22)$$

La stessa equazione 4.22 deve valere anche in assenza di perturbazioni e quindi il gradiente di pressione equilibra il termine gravitazionale.

$$\nabla p_0 = -\rho_0 g \nabla z \quad (4.23)$$

Riducendo l'equazione acustica della conservazione della quantità di moto per un fluido ideale libero da sorgenti a un equilibrio tra la variazione della velocità e tra il gradiente di pressione.

$$\rho_0 \frac{d\vec{v}'}{dt} = -\nabla p' \quad (4.24)$$

Questa equazione è valida sia nei liquidi che nei gas ma in realtà è il risultato di due procedimenti diversi. Infatti nel caso dei gas è comune trascurare le forze di gravità e poi in seguito considerare i gradienti della pressione stazionaria come una grandezza del secondo ordine; quindi questi due termini sono entrambi trascurabili e non è detto che si equivalgano. Invece nel caso dei liquidi non è possibile trascurare le forze di gravità e il gradiente di pressione ma si trova che hanno lo stesso valore.

**Onde acustiche** A questo punto combinando tra loro nel modo opportuno le equazioni di governo è possibile derivare l'equazione delle onde. Per chiarezza si riassumono

i risultati trovati in precedenza.

$$p' = a\rho' \text{ Equazione di stato} \quad (4.25)$$

$$\frac{d\rho'}{dt} = -\rho_0(\nabla \cdot \vec{v}') \text{ Conservazione della massa} \quad (4.26)$$

$$\rho_0 \frac{d\vec{v}'}{dt} = -\nabla p' \text{ Conservazione della q.d.m} \quad (4.27)$$

L'equazione delle onde comporta la presenza delle doppie derivate nel tempo e nello spazio, perciò si va a derivare la conservazione della massa un'altra volta rispetto al tempo.

$$\frac{d^2\rho'}{dt^2} + \frac{d}{dt}(\rho_0(\nabla \cdot \vec{v}')) = \frac{d^2\rho'}{dt^2} + \rho_0\left(\nabla \cdot \frac{d\vec{v}'}{dt}\right) = 0 \quad (4.28)$$

Il secondo termine può essere riscritto con la conservazione della quantità di moto, ricordando che le variazioni di intensità sono infinitesime e perciò il gradiente della densità risulta essere nullo. Andando a sviluppare la conservazione della quantità di moto si applica l'operatore divergenza e si ottiene :

$$\nabla \cdot \rho_0 \frac{d\vec{v}'}{dt} = \rho_0\left(\nabla \cdot \frac{d\vec{v}'}{dt}\right) = -\nabla^2 p' \quad (4.29)$$

Andando a sostituire quello appena trovato all'interno dell'equazione 4.28 si ottiene un'espressione simile alle onde ma sono presenti sia la pressione che la densità mentre la variabile deve essere solo una.

$$\frac{d^2\rho'}{dt^2} - \nabla^2 p' = 0 \quad (4.30)$$

L'equazione di stato serve ad esprimere l'equazione delle onde in funzione di una sola variabile. In questo caso si sceglie di esprimere tutto in funzione della pressione ma si può usare la densità indifferentemente.

$$\nabla^2 p' - \frac{1}{a} \frac{d^2\rho'}{dt^2} = 0 \quad (4.31)$$

Confrontando 4.31 con l'equazione delle onde si ricava che il termine "a" corrisponde al quadrato della velocità di propagazione del segnale nel mezzo. La forma di "a" si ricava dall'equazione di stato, ovvero corrisponde alla variazione di pressione rispetto

alla variazione di densità; si ottiene la stessa forma che era stata ricavata in precedenza.

$$c = \sqrt{a} = \sqrt{\frac{p'}{\rho'}} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (4.32)$$

Inoltre il termine "a" risulta essere una misura di compressibilità del fluido e nei casi incompressibili tende ad infinito in quanto  $\Delta\rho \approx 0$  e si può notare come in questi casi ( $a \lim_{\rightarrow\infty}$ ) si possa approssimare l'equazione delle onde con quella di Laplace. La compressibilità del mezzo è uno delle differenze principali tra acustica e idroacustica, infatti quest'ultima determina il ritardo con cui un segnale viene trasmesso e nel caso dell'acqua questo fattore è circa quattro volte inferiore all'aria.

## 4.1 Potenziale acustico

Una volta derivata la pressione, si può passare alla densità e alla velocità in base alle relazioni che intercorrono tra di loro. Per legare la velocità e la pressione si utilizza la conservazione della quantità di moto e si ricorda che si era ipotizzato che il moto delle particelle fosse irrotazionale. Questa caratteristica può essere evidenziata andando ad applicare l'operatore rotore alla conservazione della quantità di moto e sfruttando la linearità degli operatori, invertendoli.

$$\nabla \times \rho_0 \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d}{dt} (\nabla \times \rho_0 \vec{v}') = -\nabla \times \nabla p' = 0 \quad (4.33)$$

Per considerazioni geometriche il rotore di una divergenza è nullo, quindi in assenza di forze esterne la velocità delle particelle è una grandezza irrotazionale e questo vuol dire che può essere espressa come il gradiente di una grandezza scalare. In questo modo si definisce il potenziale acustico.

$$\vec{v}' = \nabla \phi \quad (4.34)$$

Si può ottenere la forma di quest'ultimo andando a sostituirlo all'interno delle equazioni di governo.

$$\frac{d\rho'}{dt} = -\rho_0(\nabla^2\phi) \quad (4.35)$$

$$\rho_0\nabla\left(\frac{d\phi}{dt}\right) = -\nabla p' \quad (4.36)$$

$$\rho' = \frac{\rho_0}{c^2} \frac{d\phi}{dt} \quad (4.37)$$

Si nota che andando a sostituire il valore della densità all'interno della conservazione della massa e andando a semplificare la densità media si trova che anche il potenziale acustico è una funzione d'onda.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho_0}{c^2} \frac{d\phi}{dt}\right) - \rho_0(\nabla^2\phi) = 0 \quad (4.38)$$

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2} \frac{d^2\phi}{dt^2} = 0 \quad (4.39)$$

L'utilità del potenziale acustico è la possibilità di ricondurre tutte le variabili di campo in modo immediato ad una sola grandezza scalare che poi può essere espressa come una grandezza complessa per quanto scritto in precedenza.

$$\phi = \text{Re} \left[ \hat{\phi} e^{i\omega t} \right] \quad (4.40)$$

Da cui si può ricavare facilmente la forma della pressione e della densità nel caso generale, derivando rispetto al tempo e moltiplicando per gli opportuni termini.

$$\hat{p}' = \rho_0 \frac{d\hat{\phi}}{dt} = i\omega\rho_0\hat{\phi} = ik\rho_0c\hat{\phi} \quad (4.41)$$

$$\hat{\rho}' = \frac{\rho_0}{c^2} \frac{d\hat{\phi}}{dt} = i\omega\frac{\rho_0}{c^2}\hat{\phi} = ik\frac{\rho_0}{c^2}\hat{\phi} \quad (4.42)$$

Invece per quanto riguarda la velocità non è possibile trovare una formula generale perchè si ottiene dalle derivate spaziali del potenziale e quindi dipende dalla forma d'onda. Tra tutte le soluzioni quelle più comuni e utili sono l'onda piana e quella sferica, la cui trattazione teorica è già stata affrontata in precedenza e adesso sarà applicata al caso particolare dei disturbi acustici.

## 4.2 Onde piane

Prima di iniziare si scrive in forma esplicita la forma del potenziale acustico nel caso di onda piana armonica, in cui si considera l'ampiezza  $\hat{A}$  costante con il progredire del disturbo.

$$\hat{\phi} = \hat{A}e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \hat{A}e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} \quad (4.43)$$

Il gradiente di 4.50 è la velocità delle particelle associate alla fluttuazioni di pressione. In questo caso il gradiente viene svolto in coordinate cartesiane e si ottiene :

$$\vec{v}' = -\nabla \hat{\phi} = -\left( i \frac{d\hat{\phi}}{dx} + j \frac{d\hat{\phi}}{dy} + k \frac{d\hat{\phi}}{dz} \right) = i \left( \hat{k}_x \hat{\phi} + \hat{j} \hat{k}_y \hat{\phi} + \hat{k} \hat{k}_z \hat{\phi} \right) = i \vec{k} \hat{\phi} \quad (4.44)$$

Quindi la velocità ha la stessa direzione di propagazione dell'onda vettore e un valore istantaneo pari alla parte reale del potenziale moltiplicato per l'unità immaginaria del numero d'onda,  $i \vec{k} \hat{\phi}$ . Poi siccome la direzione di propagazione della velocità è la stessa dell'onda si può anche fare a meno della notazione vettoriale quando si confrontano. In questo modo è evidente come la velocità sia sempre in fase con la pressione e la densità; questa è caratteristica invece non è sempre presente nell'onda sferica. Nel caso dell'onda piana si ha un trasferimento ottimale di energia acustica, diversamente quando la velocità e la pressione si trovano ad un angolo di  $\pi/2$  parte dell'energia acustica viene persa in moti idrodinamici. Questo concetto viene espresso in modo più chiaro dall'impedenza acustica specifica.

**Impedenza acustica** Per spiegare il ruolo dell'impedenza acustica si prende in prestito la teoria dei circuiti. Ai capi di un circuito è presente una differenza di potenziale che produce una corrente all'interno di esso. La capacità del circuito di convertire il salto di potenziale in corrente elettrica è dato dall'impedenza, resistenza più reattanza.

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = R + iX \quad (4.45)$$

Quest'ultima è una grandezza complessa che dipende dal tipo di circuito e nel caso sia solo reale vuol dire che tutta l'energia elettrica è stata convertita in corrente diversamente è presente una parte oscillante che non è utilizzabile.

Allo stesso modo si può definire l'impedenza acustica specifica, la pressione corrispon-

de al salto di tensione e la velocità alla corrente. La parte reale è un'espressione della quantità di energia che viene convertita in suono mentre la parte immaginaria è un indicatore dell'energia che viene utilizzata per muovere il fluido e quindi non contribuisce a generare rumore. Inoltre questa grandezza dipende sia dalla forma d'onda che dal mezzo in cui avviene la propagazione.

$$\hat{Z}_{ac} = \frac{\hat{p}}{\hat{v}} = \frac{i\omega\rho_0\hat{\phi}}{ik\hat{\phi}} = \frac{\omega\rho_0}{k} = \rho_0c_0 \quad (4.46)$$

Nel caso di onda piana si ha un valore costante lungo tutto il campo siccome i due valori dipendono solo dal potenziale acustico, quest'ultimo si semplifica per entrambi. Inoltre il valore dell'impedenza risulta reale in quanto la pressione e la velocità sono sempre in fase. Infine in questo caso specifico si ottiene che l'impedenza specifica è uguale all'impedenza caratteristica che dipende solo dal mezzo in cui avviene la propagazione del suono. Si misura in *MKS Rayls* e nell'acqua ha un valore di  $1.5 \cdot 10^6$  mentre nell'aria si limita a 415.

**Intensità acustica** Le onde sono in grado di spostare energia da un punto all'altro dello spazio senza che ci sia un flusso effettivo di massa. In questo caso l'energia dell'onda è associata alla compressione e al moto delle particelle ed ha quindi sia una componente potenziale che una cinetica. Però per lo studio del fenomeno è di particolare interesse il trasferimento di potenza acustica attraverso una superficie, per questo motivo si misura l'intensità acustica.

L'intensità è la media nel tempo del flusso di potenza per un'unità di superficie normale alla direzione di propagazione dell'onda.

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T p'(t)v'(t)dt = \overline{p'(t)v'(t)} \quad (4.47)$$

Per quanto detto in precedenza si integra sul periodo il prodotto delle oscillazioni di pressione e velocità istantanee. Nel caso di un'onda piana si è trovato che la pressione e la velocità sono in fase tra di loro quindi si ottiene una grandezza solamente reale. Inoltre il valore dell'intensità può essere espresso in funzione della pressione quadratica media oppure della velocità, in base a quale termine si preferisce sostituire sfruttando la relazione dell'impedenza. La seconda derivazione serve per verificare la veridicità della

prima misura perchè le pressioni si sommano in qualsiasi caso e può capitare che si ottenga un'intensità maggiore di zero anche se non c'è alcun trasferimento di energia. Ad esempio nel caso di un'onda statica le velocità si cancellano in media e quindi si ha un'intensità nulla, non c'è trasferimento di potenza, ma siccome le pressioni sono cumulative non si ottiene lo stesso risultato dall'espressione dell'intensità in funzione della pressione quadratica.

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T p'(t) \frac{p'(t)}{\rho_0 c_0} dt = \frac{\overline{p'^2}}{\rho_0 c_0} \quad (4.48)$$

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T \rho_0 c_0 v'(t) v'(t) dt = \rho_0 c_0 \overline{v'^2} \quad (4.49)$$

### 4.3 Onda sferica

In molti casi le sorgenti acustiche possono essere trattate come delle piccole sfere pulsanti che irradiano lungo tutte le direzioni. In questo caso il Laplaciano va riscritto in coordinate sferiche e le uniche variazioni sono lungo la coordinata "r" che rappresenta la distanza dalla sorgente.

Dalla trattazione teorica delle onde di forma sferica si ottiene la forma del potenziale nel caso sia un'armonica semplice.

$$\hat{\phi} = \frac{\hat{A}}{r} e^{i(\omega t - kr)} \quad (4.50)$$

L'ampiezza complessa  $\hat{A}$  rimane costante quindi si vede come l'ampiezza del potenziale decresca all'aumentare della distanza dalla sorgente. La pressione e la densità si ottengono derivando 4.50 nel tempo, come già visto in precedenza, e di conseguenza anche la loro ampiezza decresce all'aumentare del raggio allo stesso modo di come accade al potenziale.

$$P(r) = \frac{1}{r} P(1) \quad (4.51)$$

Invece per quanto riguarda la forma della velocità bisogna andare a svolgere il gradiente del potenziale acustico. Come prima si esegue in coordinate sferiche e l'unica variazione si ha lungo "r", perciò si ottiene :

$$\vec{\hat{v}} = -\nabla \hat{\phi} = -\hat{r} \frac{d\hat{\phi}}{dr} = \hat{r} \left( \frac{\hat{\phi}}{r} + ik\hat{\phi} \right) \quad (4.52)$$

Nell'espressione precedente  $\hat{r}$  rappresenta il versore del raggio e non una grandezza complessa. Poi si può dividere 4.52 in una parte in fase con il potenziale e una fuori fase; per semplicità si è tolta la notazione vettoriale siccome la direzione è nota.

$$\hat{v}' = \frac{\hat{\phi}}{r}(1 + ikr) = ik\hat{\phi}\left(1 - \frac{i}{kr}\right) \quad (4.53)$$

Nel campo vicino ( $kr \ll 1$ ) la velocità della particella è in fase con il potenziale e il valore della velocità diminuisce inversamente al quadrato della distanza. Invece nella condizione di campo lontano la velocità è fuori fase rispetto al potenziale ma in fase con la pressione e la densità e la sua ampiezza decade alla stessa velocità delle altre variabili di campo.

**Impedenza acustica specifica** In questo caso non si ha più un valore di impedenza specifica costante ma cambia in base alla distanza relativa perchè varia il comportamento della velocità mentre quello della pressione rimane uguale nel dominio.

$$\hat{Z}_{ac} = \frac{\hat{p}'}{\hat{v}'} = \frac{i\omega\rho_0\hat{\phi}}{ik\hat{\phi}\left(1 - \frac{i}{kr}\right)} = \rho_0c_0 \frac{(kr)^2 + ikr}{1 + (kr)^2} \quad (4.54)$$

Anche in questa grandezza sono presenti due comportamenti diversi; nel caso di campo vicino ( $kr \ll 1$ ) l'impedenza è solo immaginaria e questo vuol dire che non si riesce a trasmettere l'energia acustica. Invece nel caso lontano la pressione e la velocità possono essere considerate in fase, la soluzione di onda sferica coincide con quella di onda piana e c'è una piena trasmissione di energia acustica. A questa conclusione si può giungere anche per considerazione geometriche, infatti più è ampio il raggio di curvatura più una superficie sferica può essere approssimata con un piano.

$$\hat{Z}_{ac} = i\rho_0c_0kr \quad \text{Campo vicino} \quad (4.55)$$

$$\hat{Z}_{ac} = \rho_0c_0 \quad \text{Campo lontano} \quad (4.56)$$

Il termometro di questo comportamento è il fattore  $1/kr$  che poi rappresenta l'angolo di fase dell'impedenza, infatti quando tende a zero l'impedenza è solo reale mentre se

tende all'infinito allora l'angolo di fase tende a  $\pi/2$  ed è presente solo la reattanza.

$$\hat{Z}_{ac} = \rho_0 c_0 \frac{kr}{\sqrt{1+(kr)^2}} \frac{kr+i}{\sqrt{1+(kr)^2}} = \rho_0 c_0 \cos \theta e^{i\theta} \quad (4.57)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{1}{kr} \quad (4.58)$$

**Intensità acustica** Si ottiene dal prodotto della velocità per la pressione ma in questo caso le due componenti non sono sempre in fase tra di loro, come si può notare dalla forma dell'impedenza.

$$\hat{v} = \frac{\hat{p}}{\rho_0 c_0} \left(1 - \frac{i}{kr}\right) \quad (4.59)$$

L'intensità media si ottiene prendendo in considerazione solamente le componenti che sono in fase tra di loro quindi all'interno dell'espressione dell'intensità si utilizza solo la componente di campo lontano trovata in 4.59 e che è indipendente dalla distanza dalla sorgente.

Svolgendo i calcoli si trova l'espressione che lega l'intensità alla pressione quadratica media e si trova che è la stessa espressione sia nel caso di un'onda piana che in quello di un'onda sferica.

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T p'(t) \frac{p'(t)}{\rho_0 c_0} dt = \frac{\overline{p'^2}}{\rho_0 c_0} \quad (4.60)$$

Però le espressioni cambiano tra i due casi se si prova ad esprimere l'intensità in funzione della velocità delle particelle, infatti nel caso dell'onda sferica compare un termine che dipende dall'angolo di fase tra la pressione e la velocità.

$$\hat{p} = \hat{v} \rho_0 c_0 \cos^2 \theta \left(1 + \frac{i}{kr}\right) \quad (4.61)$$

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T \rho_0 c_0 v'(t) \cos^2 \theta v'(t) dt = \rho_0 c_0 \overline{v'^2} \cos^2 \theta \quad (4.62)$$

Vista la generale validità dell'espressione 4.60 si preferisce utilizzare degli indicatori di pressione per misurare l'intensità di un segnale; in particolare in acqua vista l'elevata impedenza specifica del mezzo quasi tutti gli strumenti di rilevamento funzionano con la pressione. Tuttavia questo metodo non è sempre valido, infatti se sono presenti più sorgenti e più onde può avvenire che il trasporto di energia netto sia nullo anche se la pressione quadratica media è diversa da zero; mentre la velocità da sempre informazioni veritiere del fenomeno e nel caso non avvenga trasporto il suo valore è nullo.

**Potenza acustica** La potenza acustica si ottiene integrando l'intensità attraverso una superficie di riferimento, che in questo caso è una sfera. In assenza di sorgenti questa grandezza rimane costante ed infatti nel caso dell'onda sferica si ha un equilibrio tra aumento della superficie e attenuazione del segnale di modo che la potenza irradiata rimanga costante.

$$W_{ac} = \int_S I dS = \int_S \frac{\overline{p'^2}}{\rho_0 c_0} dS \quad (4.63)$$

Poi nel caso particolare di simmetria sferica l'intensità e la pressione hanno un valore costante lungo tutta la superficie per cui si possono portare al di fuori dell'integrale che così diventa una semplice moltiplicazione dell'intensità media per la superficie della sfera.

$$W_{ac} = \frac{\overline{p'^2}}{\rho_0 c_0} 4\pi r^2 = 4\pi \frac{\overline{p(1)^2}}{\rho_0 c_0} \quad (4.64)$$

Dall'espressione 4.64 si capisce l'importanza del mezzo di propagazione nel rapporto tra rumore percepito e potenza acustica. Infatti a parità di pressione acustica percepita da un ricevitore la potenza acustica di una sorgente in aria deve essere molto più alta rispetto allo stesso caso in acqua. Il prodotto della densità per la velocità di propagazione del segnale è 3600 volte maggiore in acqua rispetto all'aria e questo vuol dire che la stessa potenza acustica produce una pressione quadratica media 60 volte più grande e quindi crea un disturbo molto maggiore.

**Attenuazione del segnale** Nel caso di un'onda sferica, a differenza dell'onda piana il segnale si attenua all'aumentare della distanza e per questo si ha una perdita di carico che è insita nella geometria del fenomeno. Questa perdita di carico si misura attraverso la *Transmission Loss*, prendendo come riferimento il valore ad un metro dalla sorgente.

$$TL = 20 \log \frac{p(1)}{p(r)} = 20 \log r \quad (4.65)$$

In un mezzo ideale la pressione diminuisce di 6dB ogni volta che la distanza raddoppia. Ma nel caso reale bisogna tenere in considerazione altri, come la viscosità e la conduzione di calore che hanno un effetto dissipativo. In questo caso varia anche il valore della grandezza complessa  $\hat{A}$  che decade con la distanza.

Questo comportamento viene simulato trattando la velocità di perturbazione come una grandezza complessa in cui la parte dissipativa è rappresentata dalla componente

immaginaria che in valore assoluto è molto minore rispetto alla sua parte reale.

$$\hat{c} = c(1 + i\eta) \quad \eta \ll 1 \quad (4.66)$$

In questo modo si aggiunge un fattore di smorzamento alle variabili di campo ma non viene modificata la forma della velocità di propagazione del segnale perchè la parte immaginaria è molto minore di quella reale e l'angolo di fase può essere approssimato a zero. Inserendo il nuovo valore della velocità si ottiene un'espressione diversa del potenziale.

$$\hat{\phi} = \frac{\hat{A}}{r} e^{i(\omega t - \hat{k}r)} = \frac{\hat{A}}{r} e^{-k\eta r} e^{i(\omega t - kr)} \quad (4.67)$$

Questo vuol dire che il segnale si attenua maggiormente rispetto al caso in cui si propaga in un mezzo ideale e l'effetto è evidenziato dall'aggiunta di un nuovo termine nell'espressione che calcola la *Transmission Loss*.

$$TL = 20 \log r + 20 \log e^{k\eta r} \quad (4.68)$$

## Capitolo 5

# Sorgenti

Fin'ora è stato descritto il processo di propagazione del suono ma per avere un quadro completo del fenomeno occorre descrivere anche com'è generato. La generazione del rumore è collegata alle vibrazioni di corpi che alterano la pressione del mezzo circostante, ma sono presenti anche altri metodi di generazione, come l'azione di forze variabili nel tempo, il moto turbolento del fluido e anche le oscillazioni della temperatura. Ogni rumore può essere classificato in base al meccanismo con cui viene generato e viene suddiviso in tre classi fondamentali :

- Monopolo, il suono è generato dalla fluttuazione di massa o di volume. Il segnale è omnidirezionale ma l'unione di più sorgenti può dare luogo a delle figure direzionali. Un esempio pratico sono le bolle d'aria oscillanti generate dalla cavitazione.
- Dipolo, il suono è generato dall'azione di forze fluttuanti e dal moto vibratorio di corpi rigidi. La direzione del segnale è proporzionale al coseno dell'angolo che si crea tra la direzione delle oscillazioni e il punto dello spazio.
- Quadrupolo, il rumore è associato agli sforzi di tagli causati dal moto turbolento. Anche in questo caso la direzione del segnale non è omnidirezionale ma dipende dal prodotto tra seno e coseno.

Inoltre tra le tre sorgenti è presente un'ulteriore differenza. Il monopolo e il dipolo sono presenti solo al confine del dominio, ad esempio il monopolo varia la posizione del confine del dominio e questa variazione di volume genera una variazione della pressione. Invece

il quadrupolo non ha bisogno dei bordi ma è in grado di generare rumore in qualsiasi punto.

**Efficienza di radiazione** Un'altra importante differenza tra le tre sorgenti consiste nell'abilità di trasformare l'energia generata dal moto in energia acustica. Le sorgenti creano sia un campo acustico che un campo idrodinamico, ma la pressione associata a questo moto è fuori fase rispetto alla componente acustica. Per esplicitare in modo più preciso questi concetti si fa riferimento all'impedenza di radiazione che ha un significato analogo all'impedenza acustica, solo che in questo caso non si misura la capacità di un'onda di trasmettere il segnale ma la capacità di una sorgente di generarlo in modo efficace. Per questo motivo anche l'impedenza di radiazione è una grandezza complessa, la parte reale è proporzionale alla potenza acustica mentre quella immaginaria è proporzionale alla potenza idrodinamica.

$$\hat{Z}_{\text{rad}} = R + iX \quad (5.1)$$

Al moto della sorgente che genera rumore si può associare una velocità media e la resistenza si può definire come il rapporto tra l'energia acustica e la velocità media. Allo stesso modo l'impedenza è data dal rapporto tra l'energia idrodinamica e la velocità media; quindi queste due grandezze servono ad esplicitare come si divide l'energia che possiede la sorgente.

$$R = \frac{W_{\text{ac}}}{U^2} \quad (5.2)$$

$$X = \frac{W_{\text{din}}}{U^2} \quad (5.3)$$

Però la resistenza e l'impedenza dipendono anche dal mezzo e dalla superficie della sorgente. Per trovare le caratteristiche specifiche della sorgente che dipendono solo dalla geometria e dal sistema di generazione del rumore bisogna adimensionalizzare le grandezze; perciò si dividono la resistenza e la reattanza per l'impedenza del mezzo e per la superficie. Così facendo si ottiene la resistenza e la reattanza specifica di

radiazione.

$$\sigma_r = \frac{R}{\rho_0 c_0 S_0} = \frac{W_{ac}}{\rho_0 c_0 S_0 \overline{U^2}} \quad (5.4)$$

$$\sigma_x = \frac{X}{\rho_0 c_0 S_0} = \frac{W_{din}}{\rho_0 c_0 S_0 \overline{U^2}} \quad (5.5)$$

Sfruttando le grandezze appena trovate si può andare ad esprimere l'efficienza di radiazione, ovvero il rapporto tra la potenza acustica e la potenza totale della sorgente, che in questo caso è la somma della acustica più l'idrodinamica.

$$\eta_{rad} = \frac{W_{ac}}{W_{ac} + W_{din}} = \frac{R}{|\hat{Z}|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{\sigma_r}{\sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_x^2}} \quad (5.6)$$

I fattori più importanti che condizionano l'efficienza di radiazione sono l'ordine del polo della sorgente e il rapporto delle dimensioni tra il radiatore e la lunghezza d'onda del segnale. In prima approssimazione per radiatori piccoli rispetto alla lunghezza d'onda si ottiene :

$$\eta_{rad} \approx \left(\frac{a}{\lambda}\right)^{2m+1} \quad (5.7)$$

Dove "a" è la dimensione caratteristica e "m" l'ordine della sorgente, che vale zero per il monopolo, uno per il dipolo e due per il quadrupolo. Siccome il rapporto  $a/\lambda$  è minore di uno l'efficienza di una sorgente è inversamente proporzionale all'ordine del polo.

Molte sorgenti presentano una simmetria sferica e inoltre è possibile calcolare la radiazione emessa da un corpo di forma qualsiasi sovrapponendo in modo opportuno i campi generati da più sorgenti sferiche. Per questo motivo nella simulazione che verrà svolta si utilizzeranno le sorgenti base di monopolo e dipolo sferici. Inoltre queste sorgenti sono piccole rispetto alla lunghezza d'onda ( $ka \ll 1$ ) e permette di fare delle semplificazioni nel ricavare la resistenza e la reattanza di radiazione che altrimenti comprenderebbero le funzioni di Legendre e di Bessel.

$$\sigma_r = \frac{(ka)^{2m+2}}{(2m+1)(m+1)^2(2m-1)!^2} \quad (5.8)$$

$$\sigma_x = \frac{ka}{(2m+1)(m+1)} \quad (5.9)$$

Dalle espressioni precedenti si nota che la reattanza ha un valore molto maggiore della resistenza e quindi si può approssimare l'espressione dell'efficienza di radiazione come segue :

$$\eta_{\text{rad}} = \frac{\sigma_r}{\sigma_x} = \frac{(ka)^{2m+1}}{(m+1)(2m-1)!^2} \quad (5.10)$$

In particolare nel caso idroacustico molte fonti di rumore sono legate al movimento di fluido vicino ad un veicolo oppure all'interno di un condotto. Dopo aver identificato il valore della velocità di riferimento si può riscrivere l'espressione della efficienza in funzione di quest'ultima e del numero di Mach.

$$ka = \frac{\omega a}{c_0} = \left(\frac{\omega a}{U_0}\right) \left(\frac{U_0}{c_0}\right) = \left(\frac{\omega a}{U_0}\right) M \quad (5.11)$$

In questo modo si può andare a sostituire 5.11 per esplicitare l'efficienza di radiazione per le tre sorgenti diverse.

$$\eta_{\text{rad}} = ka = \left(\frac{\omega a}{U_0}\right) M \quad \text{Monopolo} \quad (5.12)$$

$$\eta_{\text{rad}} = \frac{1}{2}(ka)^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega a}{U_0}\right)^3 M^3 \quad \text{Dipolo} \quad (5.13)$$

$$\eta_{\text{rad}} = \frac{1}{27}(ka)^5 = \frac{1}{27}\left(\frac{\omega a}{U_0}\right)^5 M^5 \quad \text{Quadrupolo} \quad (5.14)$$

Il quadrupolo è proporzionale al numero di Mach elevato alla quinta e all'interno dell'acqua i numeri di Mach risultano essere molto più bassi; perciò le differenze tra sorgenti sono ancora più ampie rispetto al caso dell'aria; in particolare per il quadrupolo.

## 5.1 Equazione generale del suono

In precedenza era stata ricavata l'equazione del suono valida solo nel caso della propagazione del segnale però mancava la parte relativa alla generazione. All'interno delle equazioni di governo erano stati omissi dei termini che sono la causa della nascita del rumore.

L'equazione di stato dei gas rimane invariata mentre vanno modificate la conservazione della massa e della quantità di moto. In particolare alla prima bisogna aggiungere un termine sorgente che è in grado di inserire oppure sottrarre massa all'interno del

domino.

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{v}) = q \quad (5.15)$$

Mentre all'interno della conservazione della quantità di moto si aggiungono i termini relativi alle forze di volume esterne e agli sforzi viscosi.

$$\frac{d\rho\vec{v}}{dt} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}\vec{v}) = -\nabla p - \nabla\Pi - \rho g\nabla z + \vec{f} \quad (5.16)$$

Sostituendo le nuove espressioni della conservazione della massa e della quantità di moto e svolgendo gli stessi passaggi fatti in precedenza si giunge all'equazione che descrive il comportamento del suono all'interno di un fluido.

$$\nabla^2 p' - \frac{1}{c_0} \frac{d^2 p'}{dt^2} = -\frac{dq}{dt} + \nabla \cdot \vec{f} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (5.17)$$

$$\tau_{ij} = \rho v_i v_j + p_{ij} \delta_{ij} + \Pi_{ij} - c_0^2 \delta_{ij} \quad (5.18)$$

In questo modo sono ben evidenti le tre fonti di rumore; la variazione nel tempo della massa è un monopolo, la divergenza di una forza instabile applicata al confine rappresenta il dipolo e infine il termine che rappresenta il moto del fluido ha la forma di un quadrupolo, come ricavato da Lighthill. Questi tre metodi rappresentano i vari modi in cui è possibile convertire l'energia cinetica in energia acustica.

- Si può imporre la fluttuazione della massa all'interno di una regione precisa dello spazio.
- Sempre all'interno di una regione fissata si fa variare la quantità di moto, attraverso una forza esterna variabile nello spazio.
- Si impone la variazione del flusso di quantità di moto attraverso una superficie fissata come avviene per effetto degli sforzi di taglio.

Infine Lighthill notò anche come l'efficienza dei termini sorgente decresca con la presenza delle derivate spaziali. Questa caratteristica si può intravedere già dalla forma di un'equazione d'onda,  $f(x-ct)$ . La derivata temporale è "c" volte maggiore rispetto ad una derivata spaziale, nel caso dell'acqua vuol dire circa 3 ordini di grandezza. Quindi il rumore generato dal moto turbolento è quello meno rilevante a meno che le velocità

del fluido si avvicinano alla velocità del suono, ma questo non avviene praticamente mai in acqua.

## 5.2 Trascurabilità del quadrupolo in acqua

L'efficienza delle sorgenti è proporzionale alla potenza del numero di Mach, per questa ragione in acqua le sorgenti sono meno efficienti rispetto all'aria. Però mentre il monopolo e il dipolo si ottengono dei valori ancora accettabili, per il quadrupolo l'efficienza cala a picco. Per avere un'idea più precisa si ricava l'efficienza acustica nel caso di un getto freddo. La dimensione caratteristica della sorgente si può assumere uguale alla metà della scala integrale del vortice più grande.

$$\eta_{\text{rad}} = \frac{1}{27}(ka)^5 = \frac{1}{27}\left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{\omega l}{U_0}\right)^5 M^5 \quad (5.19)$$

Inoltre la velocità del flusso usata per calcolare il numero di Mach può essere approssimata con il prodotto della frequenza angolare per la scala caratteristica. Poi di tutta l'energia presente all'interno della scia solo un sesto si tramuta in energia vibrazionale.

$$\eta_{\text{rad}} = \frac{1}{27}\left(\frac{1}{2}\right)^5 M^5 = 1.1 \cdot 10^{-3} M^5 \quad (5.20)$$

$$\eta_{\text{ac}} = 2 \cdot 10^{-4} M^5 \quad (5.21)$$

Però il contributo più importante è quello dovuto al numero di Mach, infatti in acqua le velocità di riferimento sono molto più basse mentre quella del suono è più alta. Questa combinazione ha un doppio effetto sul numero di Mach che diminuisce per l'effetto di due fattori. Ad esempio una nave che viaggia a 110 km/h nell'acqua ha un numero di Mach pari a 0.02 e sfruttando 5.21 si traduce in un'efficienza acustica di appena  $10^{-12}$  ed è quindi trascurabile. Ad esempio il rumore generato dalla chiglia di una nave è dovuto alla presenza di bolle d'aria e non al moto turbolento che induce in acqua; Crighton e Williams hanno svolto delle ricerche a riguardo ed hanno ottenuto che la radiazione di monopolo delle bolle supera quella generata dalla scia per un valore di 50 dB, concentrazione di aria in acqua 1%.

Per questo motivo la simulazione si occuperà solamente di sorgenti di tipo monopolo e dipolo mentre si trascurerà il caso del quadrupolo.

### 5.3 Monopolo

Il monopolo è la sorgente base che genera un segnale omnidirezionale e simula il rumore generato dalla variazione del volume nel tempo. Il monopolo viene considerata come una sfera di dimensioni piccole rispetto alla lunghezza d'onda del segnale, e per simulare geometrie più complesse si utilizzano più monopoli disposti nell'ordine necessario.

Questo tipo di sorgente può essere rappresentato da una sfera pulsante, la variazione del volume viene associata alla velocità delle pareti della sfera. Dopodichè si utilizza l'equazione di propagazione delle onde e si utilizzano i valori delle grandezze di campo sul raggio della sfera come condizioni al contorno. Il caso di monopolo si ottiene quando il raggio della sfera tende a zero.

Per semplicità si suppone che la variazione della massa nel tempo segua un'armonica semplice.

$$q(t) = \rho_0 v(t) = Q_0 \cos \omega t = RP \left[ Q_0 e^{i\omega t} \right] \quad (5.22)$$

La variazione di velocità sulla superficie è collegata alla quantità di massa immessa all'interno del dominio perchè equivale al flusso di massa attraverso la superficie della sfera.

$$\hat{u} = u_0 e^{i\omega t} = \frac{Q_0}{4\pi a^2 \rho_0} e^{i\omega t} \quad (5.23)$$

Nel frattempo si deriva l'espressione generale della velocità nel campo dall'equazione del potenziale per un'onda con simmetria sferica.

$$\hat{\phi} = \frac{A}{r} e^{-ikr} \quad (5.24)$$

$$\hat{u}(r) = -\frac{A}{r^2} (1 + ikr) e^{-ikr} \quad (5.25)$$

Per trovare il valore della costante "A" si va a imporre che in "r = a" il valore della velocità sia quello della superficie della sfera. Così facendo si possono trovare i valori di tutte le variabili di campo, da cui poi si possono estrarre le caratteristiche radianti della sfera pulsante.

In particolare si ottengono i rispettivi valori di pressione e velocità che poi serviranno

per calcolare l'impedenza, l'intensità, l'efficienza e la massa spostata.

$$\hat{u}(r) = \frac{u_0}{1 + ika} \left(\frac{a}{r}\right)^2 (1 + ikr)e^{-ik(r-a)} \quad (5.26)$$

$$\hat{p}(r) = i\rho_0 c_0 u_0 \frac{ka}{1 + ika} \frac{a}{r} e^{-ik(r-a)} \quad (5.27)$$

Il caso limite del monopolo si ottiene nel caso limite in cui "a" tende a zero e quindi si modificano le equazioni appena scritte perdendo il contributo dei termini in cui è presente il raggio della sfera; per chiarezza  $u_0$  viene espresso in funzione della portata sfruttando l'equazione 5.23.

$$\hat{u}(r) = \frac{Q_0}{4\pi r^2 \rho_0} (1 + ikr)e^{-ikr} \quad (5.28)$$

$$\hat{p}(r) = i \frac{\omega Q_0}{4\pi r} e^{-ikr} \quad (5.29)$$

L'intensità si ottiene dal quadrato della pressione sfruttando le relazioni che sono state trovate nel capitolo precedente.

$$I(r) = \frac{\overline{p^2}}{\rho_0 c_0} = \frac{\omega^2 Q_0^2}{32\pi^2 r^2 \rho_0 c_0} \quad (5.30)$$

Dall'intensità si può ricavare facilmente la potenza irradiata moltiplicando per una superficie di riferimento.

$$W_{ac} = \frac{\omega^2 Q_0^2}{8\pi \rho_0 c_0} \quad (5.31)$$

L'impedenza si ottiene dal rapporto tra pressione e velocità. In questo caso è presente sia la resistenza che la reattanza e l'importanza delle due componenti varia con la distanza dalla sorgente. Nella regione di campo vicino ( $kr \ll 1$ ) la parte immaginaria è predominante rispetto alla parte reale e quindi le oscillazioni di pressione e velocità sono fuori fase; viceversa nella regione di campo lontano ( $kr \gg 1$ ) è più importante la parte reale quindi la velocità e la pressione sono in fase e l'energia acustica si propaga in modo quasi ideale. L'impedenza corrisponde a quella che si era trovata nel caso di un'onda sferica generica.

$$Z_{ac} = \rho_0 c_0 \frac{ikr}{1 + ikr} = \rho_0 c_0 \left( \frac{1}{1 + i/(kr)^2} + i \frac{1/kr}{1 + i/(kr)^2} \right) \quad (5.32)$$

Questa espressione se calcolata sul raggio del monopolo dà l'impedenza di radiazione della sorgente che poi servirà a calcolare l'efficienza di radiazione. Quindi nell'espressione 5.32 si sostituisce "r" con "a" e si fanno le opportune approssimazioni facendo tendere la dimensione caratteristica della sorgente a zero. Quindi si ottiene la seguente impedenza da cui poi si possono ricavare la resistenza acustica specifica e la reattanza acustica specifica.

$$Z_{\text{rad}} = \rho_0 c_0 i k a \quad (5.33)$$

$$\sigma_r = \frac{R}{\rho_0 c_0 S_0} = (k a)^2 \quad (5.34)$$

$$\sigma_x = \frac{X}{\rho_0 c_0 S_0} = k a \quad (5.35)$$

Si nota che l'impedenza si può approssimare come solamente immaginaria nel caso di monopolo, quindi ci si aspetta che non ci sia un elevato trasmissione di energia acustica. Il fattore che indica la capacità di una sorgente di trasformare l'energia della sorgente in energia acustica è dall'efficienza di radiazione.

$$\eta_{\text{rad}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{\sigma_r}{\sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_x^2}} \approx \frac{\sigma_r}{\sigma_x} = k a \quad (5.36)$$

Anche in questo caso è stata utilizzata l'approssimazione del raggio della sorgente tendente a zero e quindi al denominatore è rimasta solo la reattanza specifica; in questo modo l'espressione si semplifica e si trova che l'efficienza ha un andamento lineare rispetto alla dimensione caratteristica del monopolo.

Infine si può ancora calcolare un'altra grandezza caratteristica di una sorgente acustica, la massa trascinata. Infatti, come già scritto in precedenza, alla generazione del suono è anche associato uno spostamento del fluido. La massa trascinata rappresenta la quantità di massa del fluido attorno alla sfera che viene mossa da quest'ultimo senza generare rumore, ed è quindi anch'essa un indicatore della efficienza della sorgente. Si ottiene dividendo la reattanza per la frequenza angolare.

$$m_e = \frac{X}{\omega} = \frac{\rho_0 a S_0}{1 + (k a)^2} = \frac{3}{1 + (k a)^2} \left( \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_0 \right) = \frac{3 \rho_0 V_0}{1 + (k a)^2} \quad (5.37)$$

Dal grafico si vede come l'andamento della massa trascinata sia inversamente proporzionale all'efficienza. Per piccoli valori del raggio della sorgente la massa trascinata ha

un valore costante pari a tre volte la massa della sorgente stessa mentre poi all'infinito cala a zero; invece l'efficienza ha valori simili allo zero all'inizio e poi cresce fino a raggiungere un asintoto in uno.

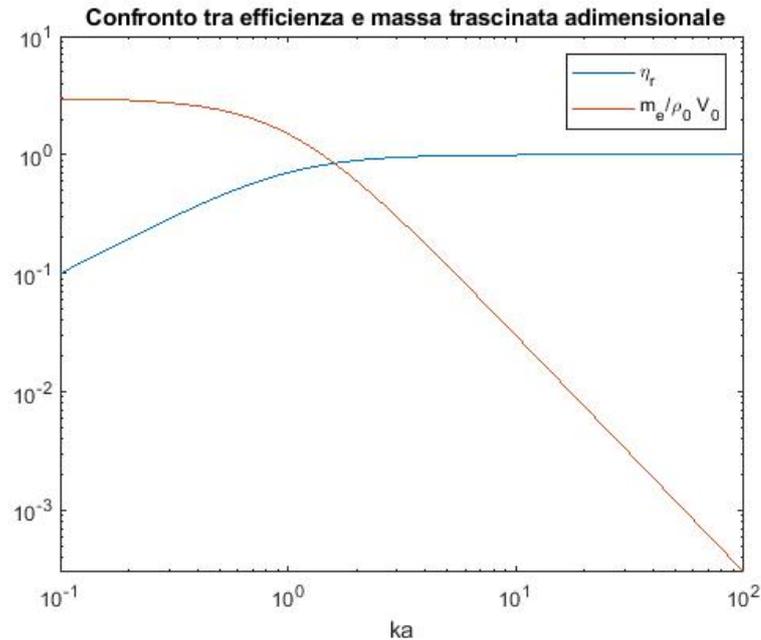


Figura 5.1: Grafico

Nel caso del monopolo  $ka \ll 1$  quindi il denominatore si può approssimare ad uno e la massa trascinata è pari a tre volte quella del monopolo stesso, rimanendo in linea con i risultati attesi.

## 5.4 Dipolo

Nel caso in cui non sia presente alcuna variazione della massa allora la sorgente acustica dominante è dovuta alla fluttuazione delle forze. Quest'ultime possono causare la vibrazione delle strutture che poi a loro volta trasmettono le oscillazioni di pressione all'interno del mezzo. Alcune sorgenti che producono rumore tramite questo meccanismo sono le macchine idrauliche, turbine, pompe, eliche e compressori. La sorgente fondamentale che simula il comportamento appena descritto è il dipolo.

Fisicamente si può immaginare come l'oscillazione di una sfera rigida mentre matematicamente è descritto da due monopoli in opposizione di fase ma vicini tra di loro, nella simulazione si userà questo secondo metodo per riprodurre questo fenomeno. In un caso l'orientazione del dipolo si impone attraverso la direzione di oscillazione del dipolo

e nell'altro attraverso la posizione reciproca dei due monopoli.

Per valutare le caratteristiche della sorgente si descrive il dipolo come una sfera oscillante e dopodichè si fa tendere il raggio della sfera a zero, in analogia a come è stato trattato il monopolo. In questo caso la velocità della sfera ha anche una dipendenza dalla latitudine mentre prima aveva solo una dipendenza radiale. Ad esempio si impone che ogni punto della superficie della sfera è animato da una velocità diretta lungo l'asse  $z$ :  $u_z = \hat{u}e^{i\omega t}$ . Questo si traduce in una dipendenza della velocità dall'angolo  $\theta$  che rappresenta l'angolo tra il raggio vettore e la direzione del moto della sfera.

$$\hat{u} = u_0 \cos \theta e^{i\omega t} \quad (5.38)$$

Inoltre cambia anche la forma del potenziale perchè si aggiunge la derivata rispetto a  $\theta$  che prima era nulla, di conseguenza cambia anche la forma della soluzione.

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(r\hat{\phi}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\hat{\phi}}{d\theta} \right) + k^2 \hat{\phi} = 0 \quad (5.39)$$

$$\hat{\phi} = -\frac{A}{r^2} \cos \theta (1 + ikr) e^{-ikr} \quad (5.40)$$

Come fatto nel caso del monopolo si deriva la forma della velocità generica da 5.45 e si impone che la velocità ricavata dal potenziale uguale a quella imposta sulla superficie della sfera; in questo modo si ricava il valore della costante "A" e si può avere la forma delle grandezze di campo.

$$\hat{p}(r, \theta) = i\omega \rho_0 u_0 a^3 \frac{\cos \theta}{2 + 2ika - (ka)^2} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) e^{-ik(r-a)} \quad (5.41)$$

$$\hat{u}(r, \theta) = u_0 a^3 \frac{\cos \theta}{2 + 2ika - (ka)^2} \left( \frac{2}{r^3} - \frac{k^2}{r} + i \frac{2k}{r^2} \right) e^{-ik(r-a)} \quad (5.42)$$

Nel caso di dipolo si considera  $ka \ll 1$  e inserendo il valore della superficie di riferimento le espressioni si modificano come segue :

$$\hat{p}(r, \theta) = i\omega \rho_0 u_0 \frac{S_0 \cos \theta}{4\pi} \frac{a}{2} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) e^{-ikr} \quad (5.43)$$

$$\hat{u}(r, \theta) = u_0 \frac{S_0 \cos \theta}{4\pi} \frac{a}{2} \left( \frac{2}{r^3} - \frac{k^2}{r} + i \frac{2k}{r^2} \right) e^{-ikr} \quad (5.44)$$

Dalla velocità e dalla pressione si possono ricavare le altre grandezze fondamentali come fatto per il caso del monopolo. Si parte dall'impedenza che è il rapporto tra le grandezze

appena ricavate. In questo caso non ha più la stessa forma dell'onda sferica ma si è modificata la forma dell'impedenza nel campo vicino.

$$\hat{Z} = \rho_0 c_0 \left[ \frac{(kr)^4}{4 + (kr)^4} + i \frac{2kr + (kr)^3}{4 + (kr)^4} \right] \quad (5.45)$$

Nel campo vicino rimane dominante la reattanza però in questo caso ha un valore pari alla metà del monopolo, mentre all'infinito si può approssimare anch'essa come un'onda piana. Inoltre si nota come nonostante il segnale abbia una natura direzionale l'impedenza specifica acustica non porti con sé questa caratteristica.

Inoltre per andare a valutare le proprietà irradiani del dipolo si sostituisce all'interno di 5.45 "r = a" e si tratta il caso limite in cui a tende a zero. Poi dai valori dell'impedenza specifica di radiazione si può ottenere l'efficienza di radiazione.

$$\hat{Z}_{\text{rad}} = \frac{i}{2} \rho_0 c_0 k a \quad (5.46)$$

$$\sigma_r = \frac{R}{\rho_0 c_0 S_0} = \frac{(ka)^4}{4} \quad (5.47)$$

$$\sigma_x = \frac{X}{\rho_0 c_0 S_0} = \frac{ka}{2} \quad (5.48)$$

Anche in questo caso l'efficienza di radiazione può essere approssimata come una grandezza solamente immaginaria. La differenza tra monopolo e dipolo risiede nella costante moltiplicativa di 1/2 che compare in questo caso. Inoltre si vede come la differenza tra reattanza e resistenza sia più marcata rispetto al monopolo, mentre prima erano separati da un solo esponente ora sono ben tre. Questa differenza è evidenziata in modo particolare dall'efficienza di radiazione.

$$\eta_{\text{rad}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{\sigma_r}{\sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_x^2}} \approx \frac{\sigma_r}{\sigma_x} = \frac{(ka)^3}{2} \quad (5.49)$$

Nel dipolo l'efficienza è proporzionale al cubo del prodotto tra numero d'onda e la dimensione caratteristica della sorgente, che nel caso di un dipolo è molto minore dell'unità; quindi si può affermare che l'efficienza cala drasticamente da un caso all'altro. Altre differenze tra le due sorgenti si trovano nell'intensità e nella potenza emessa dalla sorgente. Per l'intensità si sfrutta la relazione che la lega al quadrato della parte reale della potenza.

$$I(r, \theta) = \frac{\overline{p^2}}{\rho_0 c_0} = \frac{(ka)^4 \rho_0 S_0 u_0^2 c_0}{32\pi^2 r^2} \cos^2 \theta \quad (5.50)$$

Oltre ad avere un'intensità minore rispetto al monopolo è anche evidente la direzionalità dell'intensità del segnale che è proporzionale alla quadrato del coseno dell'angolo compreso tra la direzione del moto e il raggio vettore. Quindi lungo la direzione del moto della sfera l'intensità è massima mentre nella direzione perpendicolare è nulla, come si può notare meglio nell'immagine 5.2.

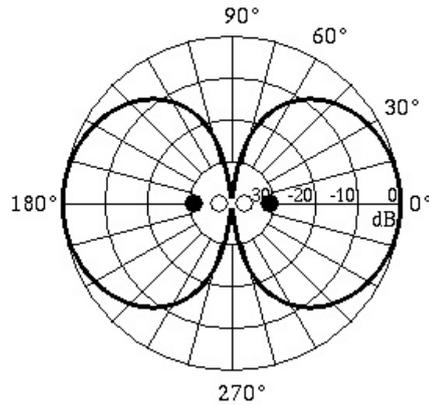


Figura 5.2: Intensità di un dipolo

Infine integrando l'intensità sulla superficie sferica si ottiene la potenza irradiata dal dipolo e in questo caso bisogna svolgere l'integrale in modo completo perchè il valore della funzione integranda non è costante su tutta la superficie, ma dipende da  $\theta$ .

$$W_{ac} = \int_S I(r, \theta) dr d\theta d\phi \quad (5.51)$$

$$W_{ac} = \frac{(ka)^4}{24} \rho_0 S_0 u_0^2 c_0 \quad (5.52)$$

**Monopoli in opposizione di fase** Si giunge agli stessi risultati posizionando due monopoli in opposizione di fase, ad una distanza minore della lunghezza d'onda. In questo caso si ha la massima intensità lungo la retta che congiunge le due sorgenti. Infatti lungo la perpendicolare in punti sono alla stessa distanza dalle due sorgenti e quindi gli effetti si annullano; invece lungo la verticale si ha l'effetto predominante del monopolo più vicino e quindi si osserva del rumore.

Ogni monopolo ha un'intensità pari a :

$$\hat{Q} = Q_0 e^{i\omega t} \quad (5.53)$$

E sono separati da una distanza "d" il campo generato si ottiene sommando i due contributi singoli.

$$\hat{p} = \frac{d\hat{p}_0}{dx} dx = \frac{d\hat{p}}{dr} \frac{dr}{dx} dx = \frac{i\omega Q_0 e^{i\omega t}}{4\pi} \frac{d}{dr} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \left( \frac{dr}{dx} \right) dx \quad (5.54)$$

$$\hat{p} = -\frac{\omega Q_0}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \left[ kd \left( 1 - \frac{i}{kr} \right) \cos\theta \right] \quad (5.55)$$

La derivata spaziale  $dr/dx$  è stata approssimata con il coseno e il termine "dx" come la distanza tra i due monopoli. Poi trascurando la zona di campo vicino rimane solo la componente reale che si può riscrivere come segue :

$$\hat{p} = -\frac{\omega^2 \omega Q_0 d}{4\pi r c_0} \cos\theta e^{i(\omega t - kr)} \quad (5.56)$$

Il prodotto dell'intensità del singolo monopolo per la distanza che li separa rappresenta l'intensità del dipolo ( $D_0$ ) e riformulando questa grandezza si può vedere come coincida con un termine presente nel caso della sfera oscillante. Quindi sostituendo l'intensità del dipolo con il prodotto di alcune grandezze di riferimento si possono ottenere gli stessi valori del caso precedente.

$$D_0 = Q_0 d = \rho_0 S_0 u_0 \frac{a}{2} \quad (5.57)$$

Come esempio si possono prendere l'intensità e la potenza acustica che hanno un'espressione diversa rispetto alla sfera oscillante, ma solo nella forma e non nel contenuto. Infatti se si va a sostituire nelle seguenti equazioni 5.57 si ritrovano esattamente le grandezze trovate in precedenza.

$$I(r, \theta) = \frac{\overline{p^2}}{\rho_0 c_0} = \frac{\omega^4 D_0^2}{32\pi^2 r^2 c_0^3 \rho_0} \cos^2\theta \quad (5.58)$$

$$W_{ac} = \frac{\omega^4 D_0^2}{24\pi \rho_0 c_0^3} \quad (5.59)$$

## Capitolo 6

# Simulazione

In questo caso si è scelto di studiare un caso base per comprendere meglio il meccanismo e confrontare la simulazioni agli elementi finiti con i risultati predetti dalla teoria. Dopodichè una volta verificata l'affidabilità del modello si può passare a simulare dei casi più complessi dove il problema è troppo complicato per avere una soluzione analitica e si ricorre a soluzioni discrete.

Si è scelto di andare a studiare il comportamento di un monopolo e di un dipolo che emettono a basse frequenze in acque poco profonde e a temperatura costante. Come fonti sono state utilizzate il monopolo e il dipolo perchè sono le sorgenti base di energia acustica; dalla loro composizione poi si possono ottenere casi più complessi. Si sono presi in considerazione i suoni a bassa frequenza per due ragioni ; i suoni a bassa frequenza sono quelli che raggiungono distanze maggiori perchè subiscono di meno le perdite di carico dovute all'agitazione delle molecole del mezzo. La seconda ragione è di natura computazionale, infatti gli elementi in cui viene diviso il dominio devono essere più piccoli della lunghezza d'onda in modo da raccogliere il comportamento ondulatorio della pressione; quindi ad alte frequenze si avrebbero troppi nodi da risolvere e tempi di risoluzione estremamente alti.

La scelta di utilizzare un ambiente con acque poco profonde serve ad evidenziare gli effetti di entrambe le interfacce, aria-acqua e il fondale marino. Infine, anche vista la poco profondità, si è scelto di adottare un profilo di temperatura dell'acqua costante; diversamente al variare della temperatura cambia la velocità del suono e quindi il numero d'onda, andando a creare delle altre interfacce che deviano il percorso del suono.

**Caratteristiche del problema** Si è scelto di andare a studiare questo problema perchè la crescente industrializzazione del mare mette a rischio l'ecosistema che vi abita all'interno. La pericolosità dei rumori generati sott'acqua risiede nella capacità del segnale di viaggiare per grandi distanze senza subire perdite di intensità rilevanti e quindi rimanere rilevabile. Queste caratteristiche del problema sono imputabili a 2 fattori diversi. Il primo riguarda gli effetti causati dall'interfaccia aria-acqua e acqua-fondale; infatti entrambi riflettono quasi totalmente il suono. Una sorgente sferica in un dominio illimitato perde intensità in modo proporzionale al quadrato del raggio; invece in questo caso il dominio è confinato dalle due interfacce e l'intensità cala più lentamente.

Le due interfacce risultano essere quasi totalmente riflettenti; il fondale marino può essere approssimato come una parete rigida, quindi al confine non sono presenti variazioni di pressione e il rumore generato rimane all'interno. Il problema è dovuto al fatto che anche l'interfaccia acqua-aria ha un effetto riflettente per quanto riguarda le onde acustiche e questo vuol dire che l'energia rimane confinata tra due pareti. Infatti nel momento in cui varia il mezzo, cambia anche l'incidenza con cui l'onda viene trasmessa; e nel caso di passaggio da un mezzo più denso ad uno meno si ha un valore oltre il quale tutta la pressione incidente rimbalza e rimane nel mezzo più pesante.

Un altro fattore che rende i suoni in acqua particolarmente dannosi è imputabile alle caratteristiche del mezzo in cui avviene la propagazione. Infatti un rumore è avvertito attraverso la variazione di pressione causata dal disturbo e quest'ultima è legata alla pressione dall'espressione già ricavata in precedenza :

$$I = \frac{\overline{p'^2}}{\rho_0 c_0} \quad (6.1)$$

Quindi rispetto all'aria, a parità di intensità emessa, i suoni sono percepibili a distanza maggiore per il fatto che l'acqua ha una velocità del suono e una densità maggiore. L'insieme di questi due fattori, le proprietà del mezzo e le interfacce, è ciò che rende non trascurabile l'impatto acustico che hanno delle sorgenti anche con un'energia relativamente bassa.

**Elementi finiti** In ogni simulazione si va a risolvere un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine non omogenea. Una volta definita l'equazione che descrive il

fenomeno bisogna imporre le condizioni al contorno per chiudere il problema e trovare una soluzione unica.

$$\nabla^2 f - k^2 f = q \quad (6.2)$$

In teoria è possibile trovare una funzione continua che descriva in ogni punto il comportamento delle variabili di campo, e nei casi più semplici è anche possibile ricavarla in modo immediato. Però in generale risulta essere un metodo complesso e non automatizzabile perciò si ricorre al metodo agli elementi finiti.

Il dominio viene trattato come un'unione di sottodomini più piccoli collegati tra di loro, in questo caso hanno la forma di triangoli ma possono anche essere dei quadrati. L'insieme dei sottodomini crea la griglia ed ogni vertice si chiama nodo. L'obiettivo è approssimare il problema generale su ogni triangolo usando delle equazioni più semplici così da trovare il valore della grandezza ricercata su ogni nodo; in questo modo si è passa da una risoluzione continua ad una discreta. Questo tipo di soluzione non è esatta ma se la griglia è abbastanza piccola approssima molto bene la soluzione analitica e ha il vantaggio di essere un processo sempre uguale che quindi può essere automatizzato. Il primo passaggio consiste nel passare dalla formulazione differenziale a quella integrale, moltiplicando per una funzione test "v" e integrando sul dominio  $\Omega$ .

$$\nabla^2 u - k^2 u = f \quad (6.3)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u - k^2 u - f)v d\Omega = 0 \quad (6.4)$$

A cui poi vanno aggiunte le condizioni al contorno che possono essere di due tipi :

- Dirichlet, si impone il valore della soluzione sul bordo del dominio,  $\partial\Omega$  e si sceglie la funzione test in modo che abbia valore nullo dove si è imposta la condizione di Dirichlet.
- Neumann, si impone il valore della derivata normale al bordo e il valore della funzione test rimane indefinito

Nella simulazione della propagazione di onde acustiche si impongono sempre condizioni di Neumann la cui forma generale si riscrive come :

$$\frac{du}{dn} = qu + g \text{ su } \partial\Omega_N \quad (6.5)$$

A questo punto sviluppando l'integrale 6.4 e riscrivendo le condizioni di Neumann e Dirichlet si ottiene la forma generale della risoluzione del problema in forma debole su tutto il dominio.

$$\int_{\Omega} (\nabla v \nabla u + k^2 uv) d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} q uv d\partial\Omega_N = \int_{\partial\Omega_N} g v d\partial\Omega_N + \int_{\Omega} f v d\Omega \quad \forall v \quad (6.6)$$

L'ultimo passaggio consiste nel discretizzare il dominio e nell'applicare la forma debole ad ogni triangolo. La griglia deve essere costruita in modo che  $\Omega = \cup \Omega^e$ . Inoltre le funzioni "u" e "v" sono sostituite da "u<sub>h</sub>" e "v<sub>h</sub>" che rappresentano lo spazio finito delle funzioni con cui si può riscrivere la soluzione in modo approssimato. Solitamente viene scelta una base polinomiale di primo ordine tale che la funzione abbia valore unitario nel nodo che rappresenta e nulla in tutti gli altri; così facendo la soluzione "u<sub>h</sub>" è data dalla somma di ogni elemento moltiplicato per una costante scalare.

$$u_h = \sum_1^N U_i \phi_i \quad (6.7)$$

Mentre v<sub>h</sub> equivale alla funzione polinomiale del nodo che si sta considerando  $\phi_i$ ; in questo modo si riscrive 6.6 e svolgendo tutti i singoli integrali si ottiene un sistema di N equazioni in N incognite, i vari coefficienti U<sub>i</sub> della base, che può essere riassunto all'interno di una matrice.

$$\int_{\Omega^e} (\nabla v_h \nabla u_h + k^2 u_h v_h) d\Omega^e + \int_{\partial\Omega_N^e} q u_h v_h d\partial\Omega_N^e = \int_{\partial\Omega_N^e} g v_h d\partial\Omega_N^e + \int_{\Omega^e} f v_h d\Omega^e \quad \forall v_h \quad (6.8)$$

$$KU = F \quad (6.9)$$

Il metodo agli elementi finiti trova le soluzioni ai nodi minimizzando l'errore della funzione associata. Questo processo è automatizzato e trova la combinazione lineare delle funzioni di base che è più vicino alla soluzione continua "u".

## 6.1 Interfaccia aria-acqua

In questo paragrafo si andrà analizzare il comportamento di una delle due interfacce che delimitano la zona in cui si propaga il suono. Entrambe hanno un effetto riflettente

ma se in un caso questa situazione è stata imposta, condizioni di Neumann sul fondale, nell'altro è una conseguenza delle diverse caratteristiche dei due mezzi.

All'interno della simulazione sono state utilizzate delle onde sferiche ma per spiegare il comportamento di un'onda all'interfaccia si utilizzerà come esempio un'onda piana. Questa sostituzione non altera la soluzione del problema perchè, com'è stato dimostrato da Brekhovskikh, un'onda sferica può essere vista come la sovrapposizione di infinite onde piane.

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \frac{i}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}}{k_z} dk_x dk_y \quad (6.10)$$

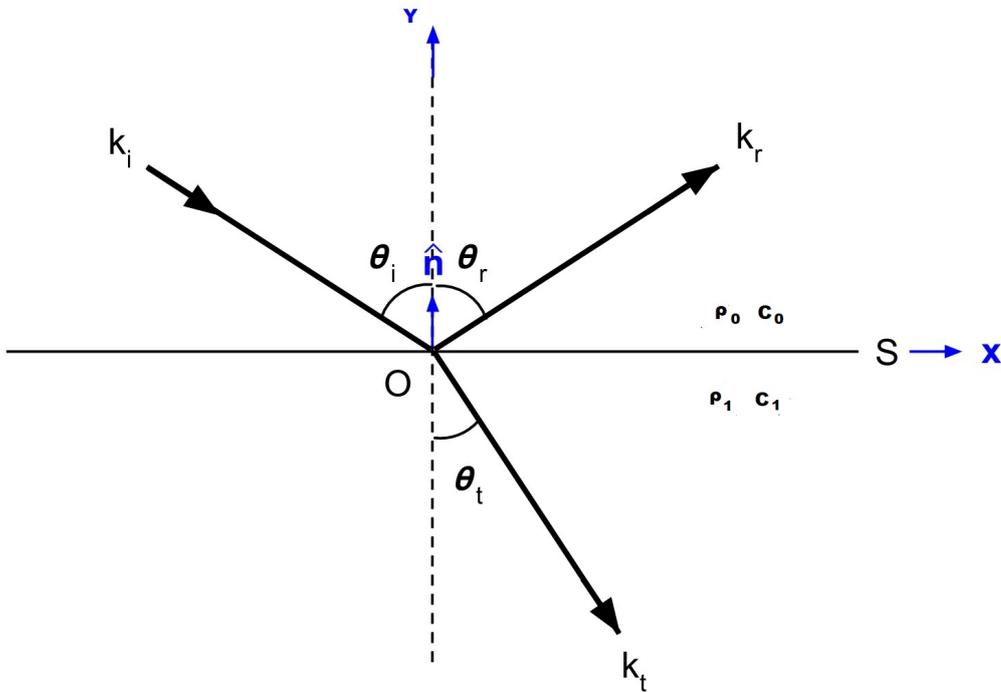


Figura 6.1: Schema di un'onda piana incidente

Un'onda piana armonica che incide su di un'interfaccia tra due mezzi con impedenze diverse,  $\rho_1 c_1$  e  $\rho_0 c_0$ , viene in parte trasmessa e in parte riflessa. La suddivisione delle varie grandezze di campo dipende dall'angolo di incidenza, e dai due mezzi. Per ottenere i valori di tale suddivisione si sfrutta il fatto che all'interfaccia, in ogni istante e in ogni punto, debba esserci la continuità della componente normale della velocità all'interfaccia e la continuità della pressione. Poi può essere più comodo riportare il

tutto nella forma del potenziale.

$$\sum \nabla \phi'_0 \cdot \vec{n}_0 = \sum \nabla \phi'_1 \cdot \vec{n}_1 \quad (6.11)$$

$$\sum \rho_0 \phi'_0 = \sum \rho_1 \phi'_1 \quad (6.12)$$

Quindi si presentano tre fronti d'onda, incidente e riflessa nel primo mezzo, trasmessa nel secondo. Ad ogni fronte d'onda si associa un versore che indica la direzione di propagazione e un'espressione che descrive il fronte d'onda.

$$\phi'_I = I_\phi e^{i(\omega t - k_0 \vec{n}_i \cdot \vec{x})} = I_\phi e^{i(\omega t - k_0 \cos \theta_i x - k_0 \sin \theta_i y)} \quad (6.13)$$

$$\phi'_R = R_\phi e^{i(\omega t - k_0 \vec{n}_r \cdot \vec{x})} = R_\phi e^{i(\omega t + k_0 \cos \theta_r x - k_0 \sin \theta_r y)} \quad (6.14)$$

$$\phi'_T = T_\phi e^{i(\omega t - k_1 \vec{n}_t \cdot \vec{x})} = T_\phi e^{i(\omega t - k_1 \cos \theta_t x - k_1 \sin \theta_t y)} \quad (6.15)$$

Si pone l'interfaccia in  $x=0$  e parallela all'asse  $y$  per semplificare i calcoli; dopodichè si applicano le due equazioni di continuità andando a sviluppare le derivate lungo  $x$  del potenziale per ottenere la velocità del fronte d'onda.

$$I_\phi k_0 \cos \theta_i e^{-ik_0 y \sin \theta_i} - R_\phi k_0 \cos \theta_r e^{-ik_0 y \sin \theta_r} = T_\phi k_1 \cos \theta_t e^{-ik_1 y \sin \theta_t} \quad (6.16)$$

$$\rho_0 \left( I_\phi e^{-ik_0 y \sin \theta_i} + R_\phi e^{-ik_0 y \sin \theta_r} \right) = \rho_1 T_\phi e^{-ik_1 y \sin \theta_t} \quad (6.17)$$

Le espressioni appena scritte devono essere valide per ogni punto dell'interfaccia e quindi per ogni valore della coordinata  $y$  il prodotto degli esponenti dei vari fronti d'onda deve essere uguale. Quest'ultimo dipende dalla direzione del fronte d'onda e dal numero d'onda del mezzo.

$$k_0 y \sin \theta_i = k_0 y \sin \theta_r = k_1 y \sin \theta_t \quad (6.18)$$

Da 6.43 si ottiene che l'angolo di riflessione è uguale all'angolo di incidenza e il legame tra angolo di incidenza e trasmissione, quest'ultima prende il nome di legge di Snell-Descartes.

$$\sin \theta_r = \sin \theta_i \quad (6.19)$$

$$\frac{\sin \theta_i}{c_0} = \frac{\sin \theta_t}{c_1} \quad (6.20)$$

A questo punto il sistema di equazioni ottenuto dalla continuità della velocità e della pressione si riduce a due equazioni in tre incognite; perciò è possibile esprimere due incognite in funzione della terza; si esprime l'intensità del potenziale dell'onda trasmessa e dell'onda riflessa in funzione di quella incidente.

$$(I_\phi - R_\phi)k_0 \cos\theta_i = T_\phi k_1 \cos\theta_t \quad (6.21)$$

$$\rho_0(I_\phi + R_\phi) = \rho_1 T_\phi \quad (6.22)$$

L'ampiezza del potenziale è la stessa della pressione perciò il rapporto tra i valori di pressione si può ottenere direttamente dalla risoluzione del sistema mostrato in precedenza. Inoltre per chiarezza si raccoglie in un termine,  $\beta$ , il rapporto tra le due impedenze relative, tengono in considerazione anche dell'inclinazione con cui l'onda porta il segnale :

$$\beta = \frac{\rho_0 c_0 \cos\theta_t}{\rho_1 c_1 \cos\theta_i} = \frac{\rho_0 \tan\theta_t}{\rho_1 \tan\theta_i} \quad (6.23)$$

Attraverso l'uso di  $\beta$  è possibile si esprime il rapporto tra la pressione incidente e quella riflessa o trasmessa in forma adimensionale.

$$\alpha_r = \frac{R_\phi}{I_\phi} = \frac{P_r}{P_i} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \quad (6.24)$$

$$\alpha_t = \frac{T_\phi}{I_\phi} = \frac{P_t}{P_i} = \frac{2}{1 + \beta} \quad (6.25)$$

Però siccome cambia l'impedenza specifica dei due mezzi non basta conoscere la pressione per trovare anche il valore della potenza trasmessa. Quest'ultima si ottiene dalla potenza riflessa che invece si calcola attraverso il quadrato della pressione siccome il mezzo in cui propaga è lo stesso. In seguito la potenza trasmessa si ottiene sottraendo la parte riflessa dall'incidente.

$$\frac{W_r}{W_i} = \alpha_r^2 = \frac{(1 - \beta)^2}{(1 + \beta)^2} \quad (6.26)$$

$$\frac{W_t}{W_i} = 1 - \frac{W_r}{W_i} = 1 - \alpha_r^2 = \frac{4\beta}{(1 + \beta)^2} \quad (6.27)$$

Poi le stesse perdite di pressione ed energia possono essere espresse in forma logaritmica.

$$TL = 20 \log \frac{P_i}{P_t} = 20 \log \frac{1 + \beta}{2} \quad (6.28)$$

$$PTL = 10 \log \frac{W_i}{W_t} = 10 \log \frac{(1 + \beta)^2}{4\beta} = TL - 10 \log \beta \quad (6.29)$$

**Trasmissione dall'acqua all'aria** Adesso si può andare a vedere l'effetto che ha l'interfaccia acqua-aria andando a sostituire i valori dei due mezzi all'interno delle espressioni ricavate in precedenza. Si considera un caso in cui l'incidenza è quasi parallela alla superficie e si può assumere un valore minimo di  $\beta$  pari a 3600; rappresenta la condizione in cui la riflessione è minima.

$$\beta \approx \frac{3600}{\cos \theta_i} \geq 3600 \quad (6.30)$$

Da qui si può ricavare il rapporto tra le grandezze trasmesse e quelle incidenti.

$$\frac{W_t}{W_i} = \frac{4\beta}{(1 + \beta)^2} \approx \frac{4}{\beta} \leq 1.1 \cdot 10^{-3} \quad (6.31)$$

$$\alpha_t = \frac{2}{1 + \beta} \leq \frac{2}{3601} = 5.5 \cdot 10^{-4} \quad (6.32)$$

Poi la perdita di potenza si traduce in 29.5 dB mentre quella di pressione raggiunge almeno 65 dB. Questo significa che la maggior parte dei rumori generati in acqua sono praticamente inudibili in aria; a meno che l'energia acustica sia estremamente elevata, come nel caso di un'esplosione.

D'altro canto se la trasmissione è scarsa vuol dire che la riflessione sarà molto buona, infatti l'oceano è un'ottima superficie riflettente per il rumore generato sott'acqua; come si evince dal coefficiente di riflessione e da quello di potenza che si possono trovare dalle formule scritte in precedenza.

$$\frac{W_r}{W_i} = \frac{(1 - \beta)^2}{(1 + \beta)^2} \leq 0.998 \quad (6.33)$$

$$\alpha_t = -\frac{\beta - 1}{1 + \beta} \approx -\left(1 - \frac{2}{\beta}\right) = -0.9995 \quad (6.34)$$

Dal coefficiente di riflessione si vede che l'ampiezza del segnale rimane invariata e l'angolo di fase subisce una rotazione di  $\pi$ .

I risultati appena trovati valgono nel caso di una superficie piana, ma in realtà la su-

perficie dell'oceano presenta delle imperfezioni dovute principalmente al moto ondoso. Queste imperfezioni danno luogo al fenomeno dello "scattering"; il segnale non viene più riflesso in modo chiaro ma viene diffuso in tutte le direzioni, causando una perdita di ampiezza nella riflessione. L'importanza di questo effetto cresce all'aumentare della frequenza del suono, dell'altezza dell'onda e dell'angolo di incidenza. In base a questi tre fattori è stato possibile tracciare un limite entro il quale la superficie può essere considerata acusticamente liscia.

$$\frac{h \cos \theta_i}{\lambda} < \frac{1}{4} \quad (6.35)$$

Nel caso delle simulazioni si lavorerà a basse frequenze, il valore massimo è di 30 Hz, e ciò vuol dire che la superficie può essere considerata liscia fino a quando le onde sono più basse di 46 metri; perciò l'approssimazione può essere considerata valida in un ampio spettro di casi.

## 6.2 Somma di monopoli

Nel caso di una superficie piana riflettente il segnale generato da una sorgente può essere assimilato a quello causato da due sorgenti in opposizione di fase. Nel caso la sorgente sia un monopolo la radiazione totale è data da due sorgenti con l'intensità della sorgente immagine più un altro monopolo che emette con un segnale dovuto alla differenza tra l'immagine sorgente e quella reale.

Prima di iniziare la descrizione del fenomeno occorre introdurre alcune definizioni geometriche utili alla risoluzione del problema. Ognuna delle due sorgenti si trova ad una certa distanza dall'osservatore e queste possono essere ricondotte alla distanza dalla superficie e all'angolo di incidenza.

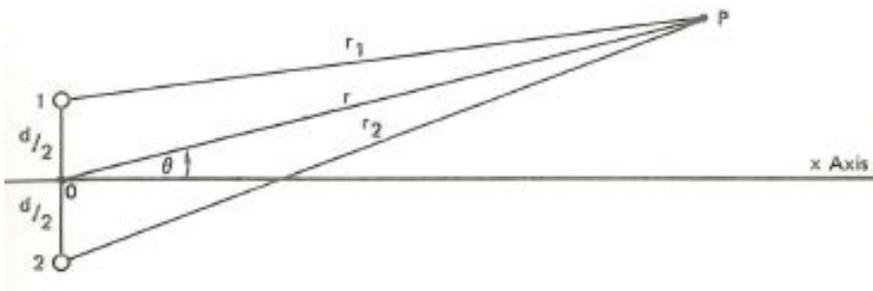


Figura 6.2: Rappresentazione geometrica di due monopoli

$$r_1^2 = r^2 \cos^2 \theta + \left( r \sin \theta - \frac{d}{2} \right)^2 = r^2 + \left( \frac{d}{2} \right)^2 - rd \sin \theta \quad (6.36)$$

$$r_2^2 = r^2 \cos^2 \theta + \left( r \sin \theta + \frac{d}{2} \right)^2 = r^2 + \left( \frac{d}{2} \right)^2 + rd \sin \theta \quad (6.37)$$

Inoltre è utile definire altre due grandezze, la distanza quadratica media e il parametro adimensionale  $\beta$  che esprime il rapporto tra la distanza delle sorgenti dalla superficie e tra le sorgenti e il ricevitore.

$$\bar{r} = \sqrt{r^2} = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}} = \sqrt{r^2 + \left( \frac{d}{2} \right)^2} \quad (6.38)$$

$$\beta = \frac{rd}{r_1^2 + r_2^2} \sin \theta = \frac{rd}{2r^2} \sin \theta \quad (6.39)$$

Tramite queste due grandezze è possibile riscrivere la distanza che separa ogni sorgente dall'osservatore.

$$r_1 = \bar{r} \sqrt{1 - \frac{rd}{r^2} \sin \theta} = \bar{r} \sqrt{1 - 2\beta} \quad (6.40)$$

$$r_2 = \bar{r} \sqrt{1 + \frac{rd}{r^2} \sin \theta} = \bar{r} \sqrt{1 + 2\beta} \quad (6.41)$$

La pressione risultante è data dalla somma di quella generata dalle singole sorgenti.

$$\hat{p}' = \frac{i\omega Q_0}{4\pi r_1} e^{i(\omega t - kr_1)} + \frac{i\omega Q_0}{4\pi r_2} e^{i(\omega t - kr_2 + \Psi)} \quad (6.42)$$

$$\hat{p}' = \frac{i\omega Q_0}{4\pi \bar{r}} e^{i(\omega t - k\bar{r} - \Psi/2)} \left[ \frac{e^{ik\bar{r}(1-\sqrt{1-2\beta})}}{\sqrt{1-2\beta}} e^{i\Psi/2} + \frac{e^{ik\bar{r}(1+\sqrt{1+2\beta})}}{\sqrt{1+2\beta}} e^{-i\Psi/2} \right] \quad (6.43)$$

L'espressione 6.43 serve ad esprimere la pressione risultante in funzione del fattore adimensionale  $\beta$  e della distanza quadratica media; però quest'ultima si può semplificare perchè  $\beta$  è minore di 0.2 in tutto il dominio, esclusa la zona vicino alla sorgente. Infatti le radici all'interno di 6.43 possono essere riscritte come espansioni in serie di cui si va a considerare solamente la parte lineare. Così facendo l'espressione si semplifica e diventa :

$$\hat{p}' = \frac{i\omega Q_0}{4\pi \bar{r}} e^{i(\omega t - k\bar{r} - \Psi/2)} \left[ \frac{e^{i(\beta k\bar{r} + \Psi/2)}}{1 - \beta} + \frac{e^{-i(\beta k\bar{r} + \Psi/2)}}{1 + \beta} \right] \quad (6.44)$$

Poi nel caso della superficie riflettente la sorgente immagine è in opposizione di fase rispetto a quella reale, quindi  $\Psi = \pi$  e 6.45 si modifica nel seguente modo :

$$\hat{p}' = \frac{i\omega Q_0}{4\pi\bar{r}} e^{i(\omega t - k\bar{r})} \left[ \frac{e^{i(\beta k\bar{r})}}{1 - \beta} - \frac{e^{-i(\beta k\bar{r})}}{1 + \beta} \right] \quad (6.45)$$

Sfruttando le relazioni trigonometriche che legano la funzione seno all'esponenziale e manipolando l'equazione si ottiene una forma analoga ma che evidenzia il comportamento sinusoidale della pressione.

$$\hat{p}' = -\frac{\omega Q_0}{2\pi\bar{r}} e^{i(\omega t - k\bar{r})} \left[ \sin(\beta k\bar{r}) - i\beta \cos(\beta k\bar{r}) \right] \quad (6.46)$$

Nella pratica non è importante il valore della pressione istantaneo ma l'intensità che si può ricondurre al quadrato del valore quadratico medio della pressione. Di seguito si riporta l'ampiezza della pressione quadratica media.

$$P = \frac{\omega Q_0}{2\pi\bar{r}} \sqrt{\sin^2(\beta k\bar{r}) + \beta^2 \cos^2(\beta k\bar{r})} \quad (6.47)$$

Anche in questo caso l'ampiezza della pressione ha un comportamento oscillante. Il primo termine rappresenta due volte il campo indotto nel caso in cui ci fosse un solo monopolo, mentre il secondo riporta le oscillazioni dovute alle interazioni tra i due. I massimi sono presenti quando il coseno è nullo e il seno è pari ad uno,  $\beta k\bar{r}$  è un multiplo di  $\pi/2$ ; in queste condizioni si ha un segnale che è pari al doppio rispetto al singolo monopolo. Invece i minimi si hanno quando  $\beta k\bar{r}$  è un multiplo di  $\pi$  e perciò il segnale è pari a  $2\beta$  quello del singolo monopolo, ricordando che  $\beta$  è molto minore dell'unità.

### 6.3 Sorgenti vicino alla superficie

A questo punto è possibile trasferire le conoscenze sul comportamento di due monopoli in opposizione di fase al caso in cui una sorgente emette un segnale vicino ad una superficie riflettente e il problema può essere studiato come se al posto della superficie ci fosse una sorgente immagine in opposizione di fase al di sopra dell'interfaccia. Una volta ottenuta la figura di interferenza dell'intensità della pressione si andrà a confrontarla con quella ottenuta dalla simulazione per verificare la bontà del metodo agli elementi finiti per risolvere il problema della propagazione del suono in acqua.

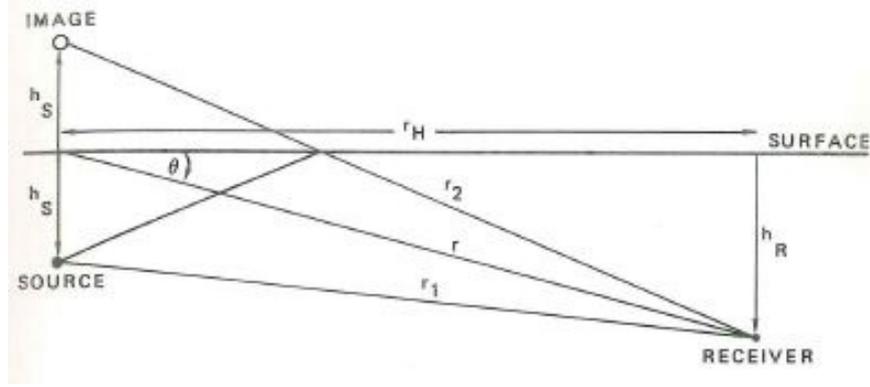


Figura 6.3: Schema di una sorgente vicino alla superficie

Innanzitutto bisogna ridefinire per il caso della sorgente immagine le grandezze di riferimento del coefficiente  $\beta$  e della distanza quadratica media. Come si può vedere nella 6.3 la profondità della sorgente viene espressa con  $h_S$ , la profondità del ricevitore con  $h_R$  e la distanza orizzontale tra i due con la lettera  $r_H$  e di conseguenza  $\beta$  e  $\bar{r}$  diventano :

$$\bar{r} = \sqrt{h_S^2 + h_R^2 + r_H^2} \quad (6.48)$$

$$\beta = \frac{h_S h_R}{r^2} \quad (6.49)$$

E di conseguenza si può riscrivere la distanza tra la sorgente reale e il ricevitore.

$$r_1 = \sqrt{r_H^2 + (h_R - h_S)^2} = \bar{r} \sqrt{1 - 2\beta} \quad (6.50)$$

Dal punto in cui la distanza orizzontale è il doppio della profondità del segnale e della sorgente  $\beta < 0.2$  e l'ampiezza della pressione quadratica media può essere espressa approssimando 6.47,  $\beta^2$  non è trascurabile solamente quando il coseno è uno.

$$P = \frac{\omega Q_0}{4\pi r_1} 2\sqrt{1 - 2\beta} \sqrt{\sin^2(\beta k \bar{r}) + \beta^2} \quad (6.51)$$

Anche in questo caso si è evidenziata la divisione tra il primo termine che rappresenta il segnale generato da un monopolo in assenza di pareti e il secondo termine che rappresenta le oscillazioni dovute alle interazioni con l'ambiente circostante.

Inoltre dall'espressione 6.52 si vede che il valore della pressione varia in funzione dall'argomento del seno  $\beta k \bar{r}$  che a sua volta dipende da tre fattori adimensionali, due dei

quali dipendono dalla geometria e il terzo dalla frequenza.

- $\frac{h_S}{h_R}$ , rappresenta il rapporto tra la profondità del ricevitore e quello della sorgente. Di solito questo parametro si varia cambiando la profondità del solo ricevitore perchè altrimenti si rischia di avere una sorgente troppo lontana per interagire con la superficie. Fissando gli altri due parametri si crea ha un andamento sinusoidale della ampiezza.
- $\frac{h_R}{r_H}$ , rappresenta il rapporto tra la distanza orizzontale del ricevitore e la sua profondità. Questo parametro si può variare con entrambe le grandezze e infatti si ottiene la stessa figura di interferenza variando la profondità oppure la distanza orizzontale dalla sorgente.
- $kh_S$ , quest'ultimo coefficiente dipende dalla frequenza di emissione della sorgente e varia la forma della figura di interferenza. Sono sempre presente dei massimi e dei minimi come espresso in 6.47 ma all'aumentare della frequenza si avranno più picchi nella stessa distanza.

Lo scopo della simulazione è studiare la propagazione del suono in acque poco profonde e quindi l'interesse è sull'evoluzione della pressione al variare della distanza dalla sorgente. Quindi si andrà a tracciare il grafico al variare del secondo parametro adimensionale  $h_R/r_H$  con due frequenze differenti, rispettivamente 10 Hz e 30 Hz.

Nella zona di campo vicino l'argomento del seno  $\beta k\bar{r}$  varia ciclicamente e quindi anche la pressione quadratica media oscilla tra un massimo di quasi due e un minimo che dipende dal termine  $\beta$ . In forma adimensionale si può riscrivere come segue :

$$2\beta\sqrt{1-2\beta} < \frac{P}{P_1} < 2\sqrt{1-2\beta} \quad (6.52)$$

Nel secondo limite di 6.52 si è trascurato il termine  $\beta^2$  perchè è molto minore dell'unità, quest'approssimazione diventa sempre più valida all'aumentare della distanza.

Poi però la regione di oscillazione non prosegue all'infinito ma è limitato da valori dell'angolo di incidenza  $\theta$  minori da un limite che dipende dalla lunghezza d'onda del segnale.

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{4h_S} < \frac{h_R}{r_H} \quad (6.53)$$

Quindi per ricevitori meno profondi o per distanze maggiori la potenza non ha più un comportamento oscillatorio ma decresce in modo continuo e più velocemente rispetto al caso di campo libero. Infatti senza la presenza di alcuna superficie riflettente la sorgente perde intensità 6dB ogni volta che la distanza raddoppia, mentre nel caso preso in considerazione l'attenuazione è pari a 12 dB ogni volta che il raggio raddoppia. Questo comportamento è particolarmente importante per le frequenze comprese tra 300 Hz e 3000 Hz. Infatti per frequenze più alte la superficie oceanica perde molto del suo potere riflettente a causa dell'effetto di scattering dovuto alla rugosità delle onde che sporca la coerenza della sorgente immagine; mentre nel caso di frequenze più basse intervengono gli effetti di interferenza del fondale che modificano la forma dei massimi e dei minimi.

Infine nel caso in cui la superficie non sia perfettamente riflettente l'espressione 6.52 si può riscrivere in funzione del coefficiente di riflessione.

$$1 - |\alpha_r| < \frac{P}{P_1} < 1 + |\alpha_r| \quad (6.54)$$

Già con un coefficiente di 0.9 l'anomalia sarebbe limitata a 20dB e alcuni massimi e minimi sarebbero più attenuati rispetto al caso in cui l'interfaccia si trova tra acqua e aria.

A questo punto vengono riportati i grafici teorici relativi all'andamento della pressione quadratica media nel caso in cui la sorgente sia posta a 200 metri di profondità, come poi verrà fatto nella simulazione numerica. La distanza varia da 300 metri a 1200 metri mentre la profondità della sorgente viene fatta variare per mostrare sia il caso in cui il valore della pressione oscilla sia quello in cui ha un comportamento solamente decrescente. Oltre ai valori della pressione sono state aggiunte anche le curve che rappresentano il valore massimo e quello minimo della funzione come riferimento. Inoltre per ogni caso si prendono in considerazione le due frequenze, 10 Hz e 30Hz, per andare a vedere come la figura di interferenza si modifica in base al segnale emesso.

Poi le grandezze sui grafici sono riportate in modo adimensionale, sull'asse y si esprime il rapporto tra il segnale ottenuto dalla somma delle due sorgenti coerenti e quello che si avrebbe nel caso in cui fosse presente il solo monopolo indisturbato in decibel; invece sull'asse x si ha il rapporto tra la distanza e la profondità della sorgente in forma logaritmica.

Infine per calcolare il numero d'onda è necessaria la velocità del suono nel mezzo e in questo caso è stata posta pari a 1481 m/s che corrisponde alla velocità del suono nell'acqua distillata ad una temperatura di 20 gradi Celsius.

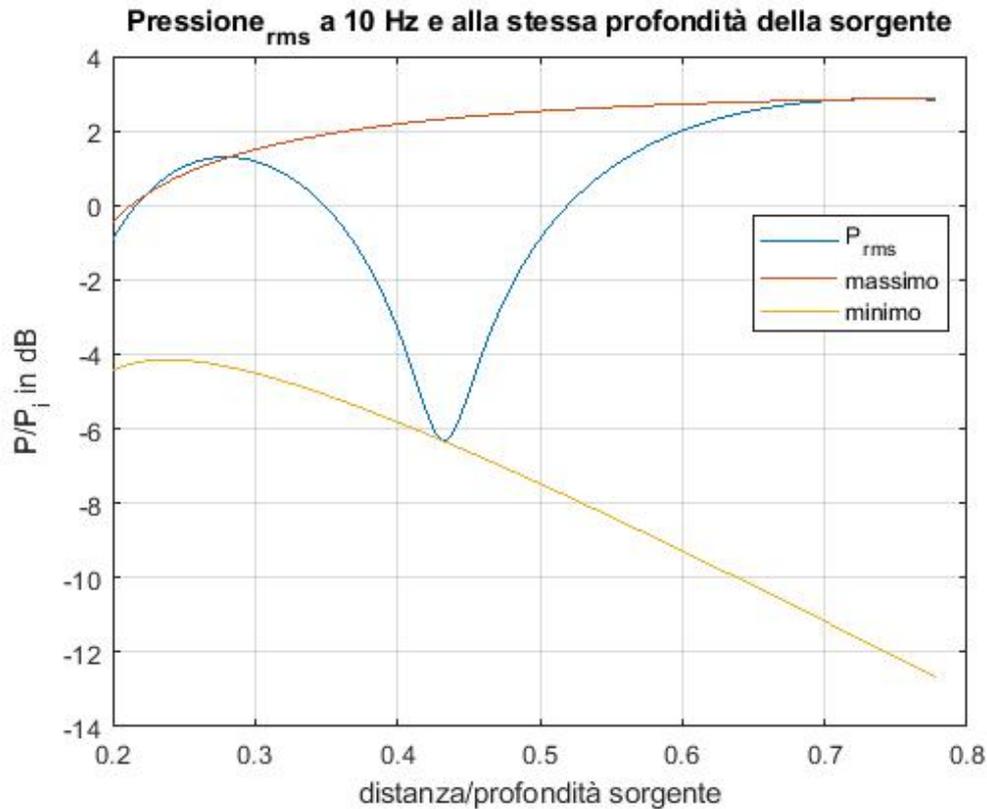


Figura 6.4: Frequenza del segnale 10 Hz e profondità del ricevitore 200 metri

Dal grafico riportato in figura 6.4 si vede come all'interno del dominio sia presente un solo minimo e due massimi, di cui il secondo al confine dell'interfaccia. Inoltre si vede come all'aumentare della distanza la funzione che esprime il valore massimo punti a  $10 \log 2$  mentre il valore minimo tende a zero; questo comportamento è dovuto al fatto che il termine  $\beta$  tenda a zero all'aumentare della distanza dalla sorgente. Questo effetto è evidenziato anche dal valore del primo massimo che è leggermente superiore alla funzione teorica, infatti il ricevitore è ancora relativamente vicino alla sorgente e perciò il termine  $\beta$ , nonostante sia minore di uno non è ancora totalmente trascurabile; invece nel secondo massimo la pressione quadratica media e la funzione coincidono perchè ormai  $\beta$  è marginale nel computo totale. La funzione che invece raccoglie i minimi non è approssimata e quindi non incontra questo tipo di problema ma comunque subisce una variazione nell'andamento. Fintanto che  $\beta$  non è trascurabile la funzione

ha un andamento parabolico ma all'aumentare della distanza diventa una retta perchè si possono trascurare gli ordini di grandezza superiori al primo.

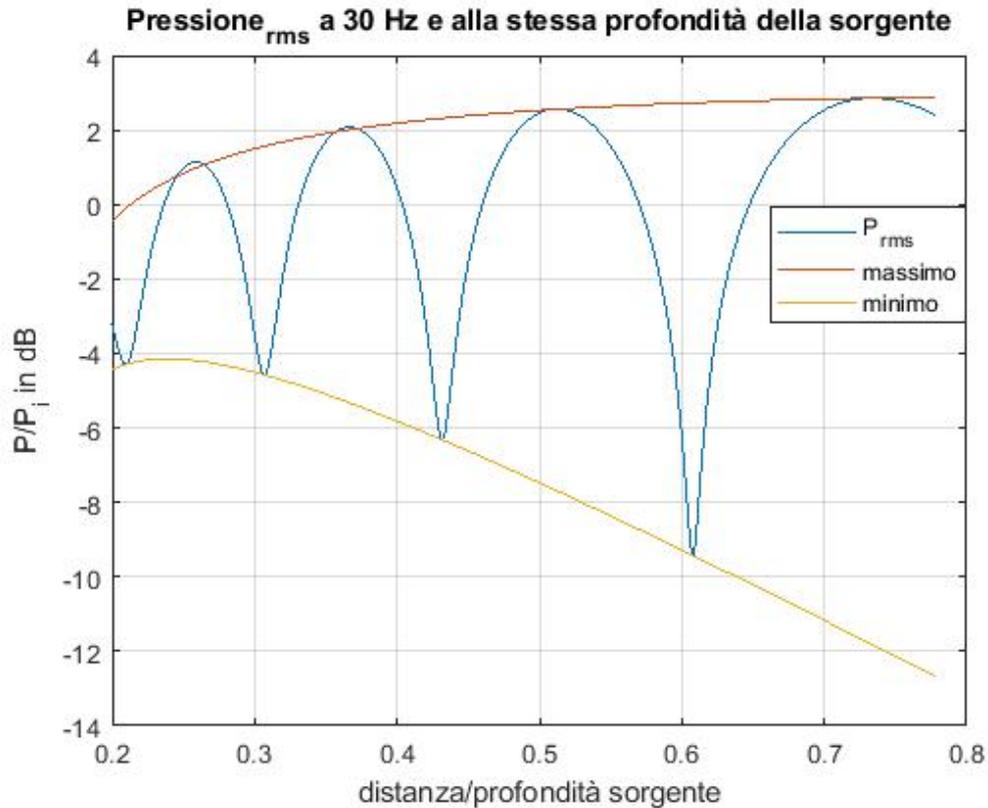


Figura 6.5: Frequenza del segnale 30 Hz e profondità del ricevitore 200 metri

All'aumentare della frequenza crescono il numero dei massimi e dei minimi e cambiano sia la loro forma che la loro posizione. Infatti si nota come nel passaggio da 10 Hz a 30Hz i picchi passano da due a quattro e le valli da uno a quattro; poi nel primo caso i picchi sono più ampi e quindi si raggiunge il massimo in modo più graduale mentre nel caso dei 30Hz le oscillazioni sono più decise. Comunque in entrambi i casi si nota come all'aumentare della distanza le oscillazioni diventino progressivamente più ampie. Infine anche in figura 6.5 si può vedere nei primi due picchi la differenza tra la pressione quadratica media e la funzione approssimata che raccoglie i massimi, così com'era accaduto nel primo picco del segnale emesso a 10Hz.

Adesso si va a variare la profondità per andare ad analizzare la zona in cui non sono più presenti le oscillazioni dovute all'interferenza di due sorgenti coerenti ma si ha un andamento decrescente della pressione quadratica media. Questa zona, come si vede da 6.53, dipende dalla lunghezza d'onda e dalla profondità a cui si trova la sorgente,

quindi per trovarsi in una situazione analoga bisogna variare la profondità del ricevitore nei due casi. La lunghezza d'onda di un segnale che emette a 10 Hz è pari 148 metri, mentre nel caso di 30 Hz si ferma a 49; da 6.53 si evince che se si vogliono riportare due grafici che rappresentano la zona di campo senza oscillazione, la profondità del ricevitore nel caso di 30 Hz dev'essere tre volte inferiore rispetto al caso di 10 Hz. Per rispettare le condizioni imposte dall'equazione 6.53 si sceglie di porre il ricevitore a 45 e a 15 metri di profondità.

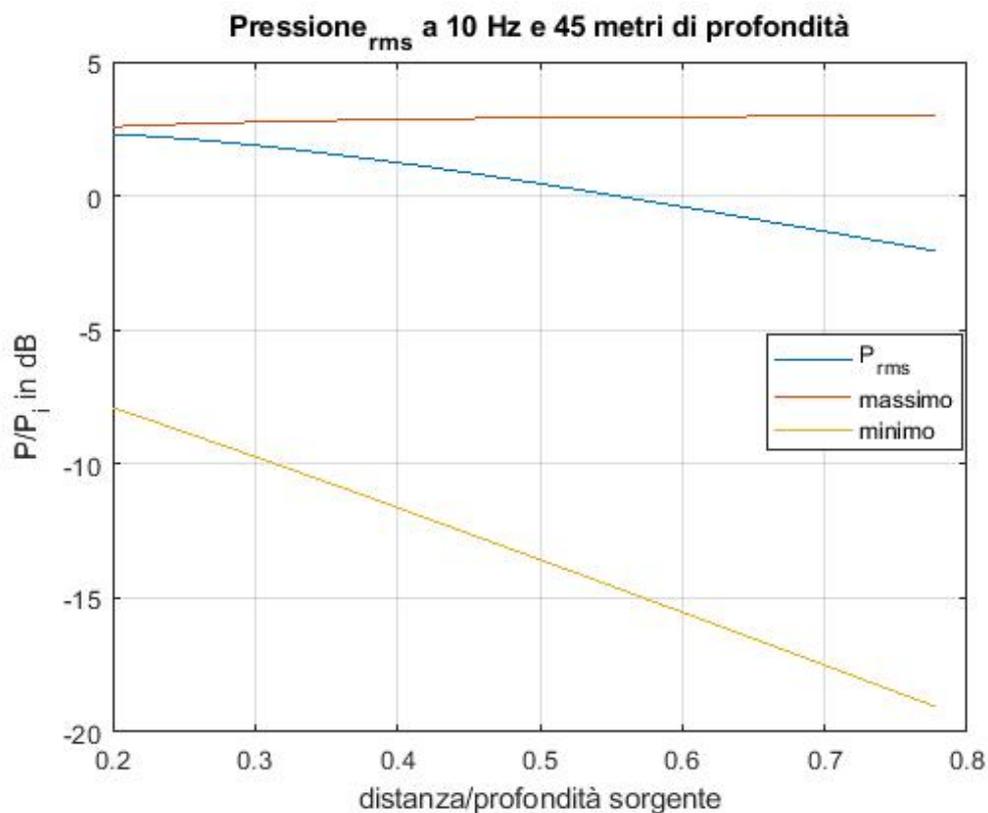


Figura 6.6: Frequenza del segnale 10 Hz e profondità del ricevitore 45 metri

Come si può notare dall'andamento delle curve che rappresentano i massimi e i minimi ci si trova in una condizione in cui  $\beta$  tende a zero; infatti la funzione dei massimi ormai è un asintoto sul valore  $10 \log 2$  mentre quella dei minimi ormai è una retta. Nella figura 6.6 si vede come l'andamento della pressione quadratica media sia decrescente e possa anche essere approssimato con l'andamento di una retta che decresce dal valore iniziale di 2.5 dB al valore finale di -2 dB in un  $\Delta x$  pari a 0.6. La figura 6.7 conserva le caratteristiche che erano state descritte in precedenza per il segnale a 10 Hz. Quindi si può notare come anche se nella zona di campo vicino il comportamento della pressione

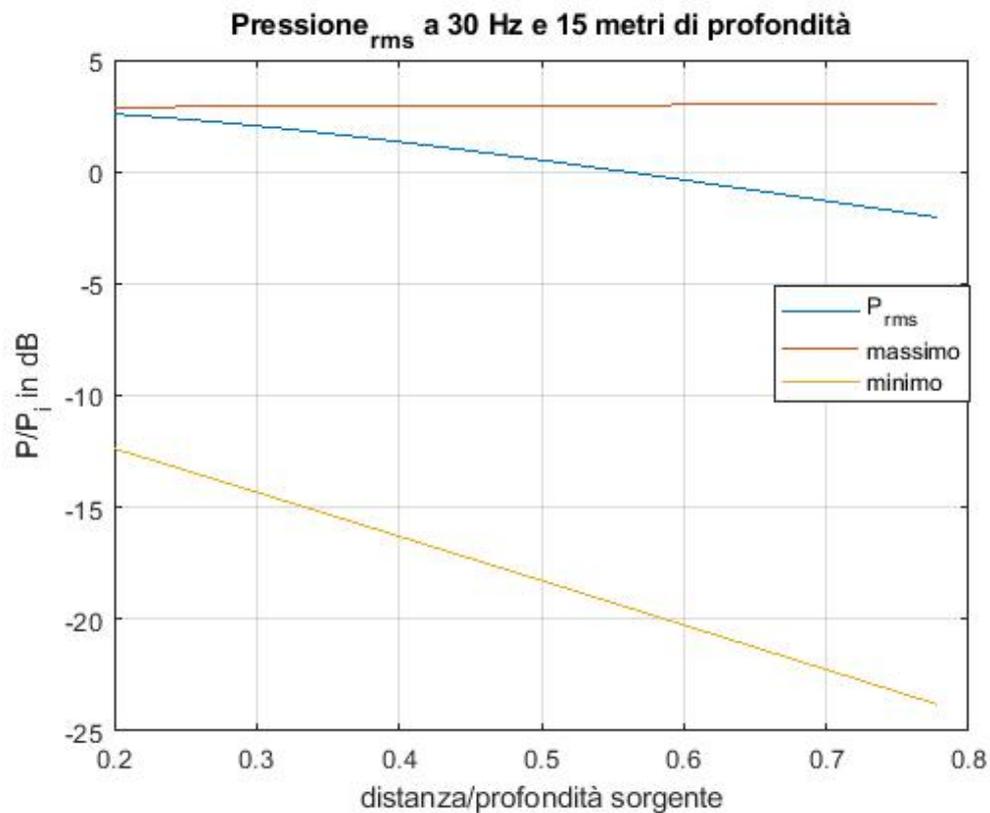


Figura 6.7: Frequenza del segnale 30 Hz e profondità del ricevitore 15 metri

dipenda dalla frequenza, oltre il limite imposto dall'equazione 6.53 il comportamento della pressione è indipendente dalla frequenza di emissione della sorgente e abbia un andamento decrescente costante.

## 6.4 Simulazione dell'interfaccia acqua-aria

Dopo aver illustrato la teoria che tratta la superficie oceanica come la sovrapposizione ideale di due sorgenti coerenti e fuori fase si mostrano i risultati che sono stati ottenuti andando a simulare la suddetta interfaccia attraverso il metodo agli elementi finiti.

Per prima cosa occorre definire il dominio di calcolo, in teoria si deve rappresentare un interfaccia ideale in cui non sono presenti "effetti di bordo" ma questo non è possibile, quindi si è cercato un compromesso tra l'averne un dominio abbastanza esteso e dei tempi di calcolo ragionevoli.

Gli "effetti di bordo" sono causati dal fatto che le condizioni al contorno non sono in grado di replicare in modo perfetto le condizioni di campo libero; ovvero che la radiazione sia solo diretta dall'interno all'esterno del dominio. Questo comportamento

si impone attraverso la condizione di Sommerfeld.

$$\left( \left( \frac{df}{d\vec{n}} \right)_{\partial\Omega} - ikf \right) = 0 \quad (6.55)$$

Quest'ultima però impone una condizione solo alla normale della superficie quindi se il raggio incidente non arriva perpendicolare a quest'ultima ci sarà una componente dell'onda che rimane all'interno del dominio. Per questa ragione è necessario costruire il dominio in modo che la radiazione residua non alteri in modo sensibile la simulazione. Per ovviare a questo problema si è deciso di posizionare il limite superiore del dominio a una distanza  $\sqrt{3}$  volte la dimensione orizzontale del dominio. Si è scelto questo valore perchè è un buon compromesso che limita gli "effetti di bordo" e non necessita di un costo computazionale troppo elevato. Un'altezza  $\sqrt{3}$  volte la larghezza del rettangolo fa sì che la radiazione incidente l'estremo superiore abbia nel peggiore dei casi un angolo di incidenza di 30 gradi, quando l'onda attraversa tutta la diagonale, e questo significa che passa almeno l'86% del segnale.

Il dominio di calcolo per risolvere il problema dell'interfaccia è costituito da due rettangoli, entrambi aventi le stesse dimensioni 1200 metri di lunghezza per 2078 metri di altezza, e il confine è la superficie oceanica. Una volta definita la geometria del problema bisogna scegliere la griglia con cui suddividere il dominio di calcolo, l'obiettivo è di riuscire a raccogliere il fenomeno con il minor numero di nodi possibili. La dimensione massima degli elementi che compongono la griglia di calcolo è determinata dalla lunghezza d'onda del segnale, bisogna avere abbastanza punti per riuscire a rappresentare correttamente la natura ondulatoria del fenomeno. Dalla bibliografia si è trovato che un buon compromesso risulta essere un elemento che ha una dimensione caratteristica almeno 5 volte inferiore rispetto alla lunghezza d'onda del segnale studiato. Inoltre siccome nel programma utilizzato è necessario avere una griglia uniforme si definisce la dimensione massima rispetto alla lunghezza d'onda del segnale in aria, diversamente si otterrebbe una griglia troppo grande per l'aria e l'interfaccia acqua-aria sarebbe imprecisa.

La dipendenza della densità della griglia dalla frequenza è uno dei motivi che rende ostico lo studio dei segnali ad alta frequenza con una griglia fissa, infatti nel caso la frequenza sia 10Hz si ottiene una dimensione massima di 6.8 metri, ma già a 50Hz la dimensione massima scende a 1.3 metri. L'area da coprire è proporzionale al quadrato

del lato degli elementi della griglia e quindi i nodi aumentano con un andamento quadratico.

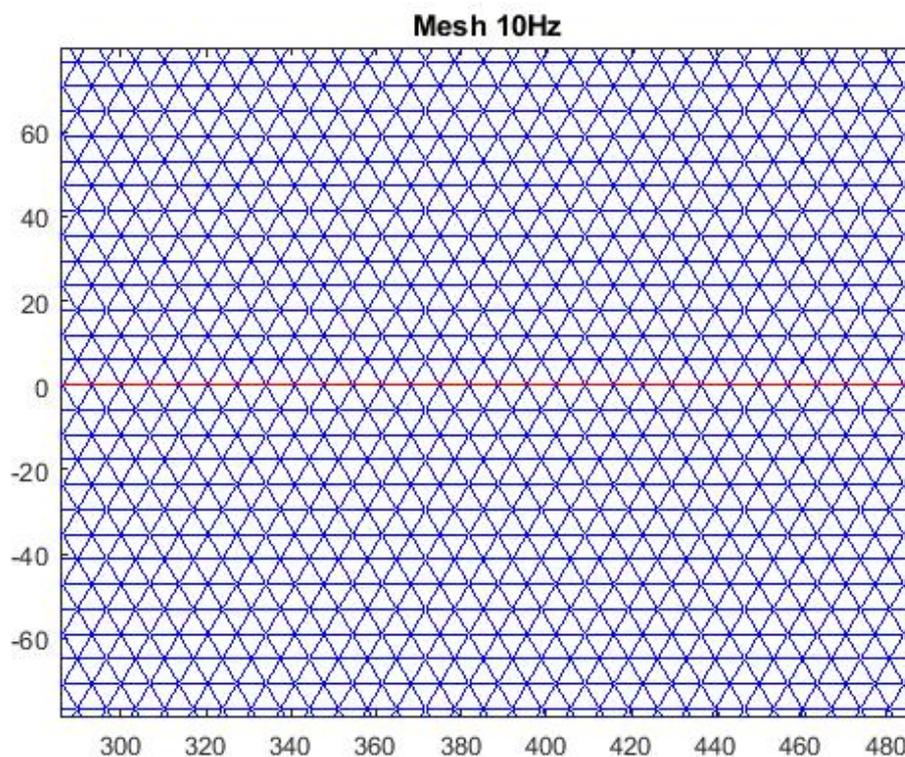


Figura 6.8: Griglia per un segnale a 10 Hz

Nella figura 6.8 si vede come si presenta una porzione della griglia di calcolo nel caso in cui la sorgente emetta un segnale con una frequenza pari a 10Hz. *MatLab PDE tool*, il programma che è stata utilizzato per risolvere il problema alle derivate parziali, imposta una griglia regolare di triangoli equilateri con la dimensione del lato che è stata imposta in base alla lunghezza d'onda. L'interfaccia è evidenziata dalla linea rossa che ricalca anche i lati dei triangoli in modo che non ci siano problemi a calcolare gli effetti riflettenti della superficie oceanica. In seguito viene mostrata come si presenta una griglia nel caso di un segnale che emette ad una frequenza di 30Hz per mostrare a livello visivo la netta differenza di densità che causa un lieve aumento di frequenza.

Le caratteristiche della griglia sono le stesse ma l'estrema densità della griglia rende difficile anche solo l'individuazione dei triangoli che la formano, infatti nell'area che prima occupava un triangolo ora ne sono contenuti nove.

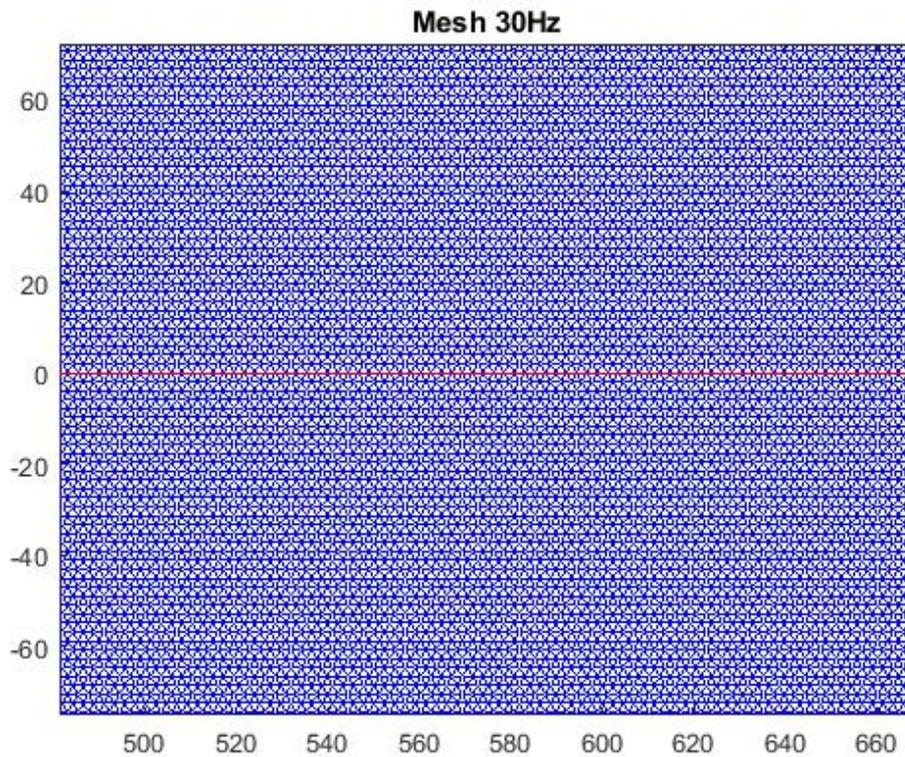


Figura 6.9: Griglia per un segnale a 30 Hz

Una volta definita la geometria del problema, sia quella generale che la griglia di calcolo, bisogna definire le condizioni al contorno e anche le equazioni che governano il fenomeno. Si vuole simulare una condizione di campo libero quindi su ogni bordo si va a imporre la condizione di Sommerfeld che si traduce in una condizione di Neumann perchè si impone una condizione sulla derivata della pressione. Quest'ultima però dipende dal numero d'onda e quindi la quantità varia dall'acqua all'aria; guardando la figura 6.10 la condizione espressa da 6.61 va imposta su tutti i lati tranne il 3. Infatti quest'ultimo rappresenta l'interfaccia tra acqua e aria e quindi non necessita di alcuna condizione al contorno.

Le due facce sono governate da due leggi diverse; la faccia 1 rappresenta l'acqua e all'interno è presente sia la generazione del suono che la propagazione, mentre all'interno della faccia 2, l'aria, vige solo la legge di propagazione perchè non sono presenti alcune sorgenti. Poi in ogni equazione bisogna utilizzare il numero d'onda relativo al mezzo. Infine si è dovuto rappresentare in modo opportuno la radiazione emessa da un monopolo. Nel capitolo precedente sono state elencate le caratteristiche del monopolo, le più

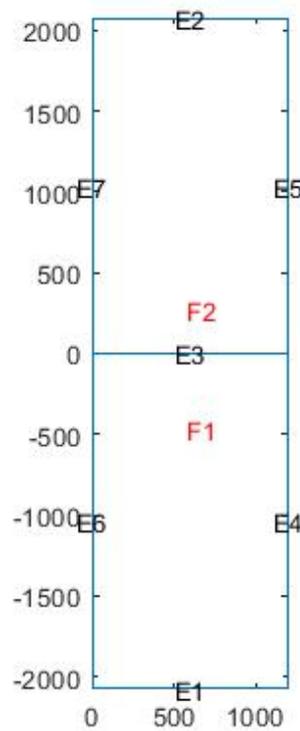


Figura 6.10: Dominio di calcolo

importanti sono la singolarità della soluzione e l'omnidirezionalità del segnale emesso. Per questa ragione il monopolo può essere rappresentato con il delta di Dirac, ovvero una funzione che ha un valore finito in un punto dello spazio e zero in tutti gli altri. Però questa rappresentazione non è funzionale alla risoluzione discreta del problema e si approssima con una funzione esponenziale.

$$q(x, y) = Ae^{-b\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]} \quad (6.56)$$

Il coefficiente "A" rappresenta l'ampiezza del segnale mentre il termine "b" la velocità con cui la funzione raggiunge l'asintoto  $q = 0$ . Quindi a questo punto è possibile scrivere le due equazioni alle derivate parziali che vengono risolte in modo discreto per trovare l'andamento della pressione sott'acqua in presenza di una sorgente vicino alla superficie.

$$\nabla^2 p(x, y) - k_{\text{aria}}^2 p(x, y) = 0 \quad (6.57)$$

$$\nabla^2 p(x, y) - k_{\text{acqua}}^2 p(x, y) = Ae^{-b\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]} \quad (6.58)$$

Di seguito si mostrano i risultati ottenuti dalla simulazione e già da una prima analisi qualitativa, riportando la parte reale della pressione, si notano delle bande che rappresentano l'interferenza negativa come se ci fossero due sorgenti in opposizione di fase.

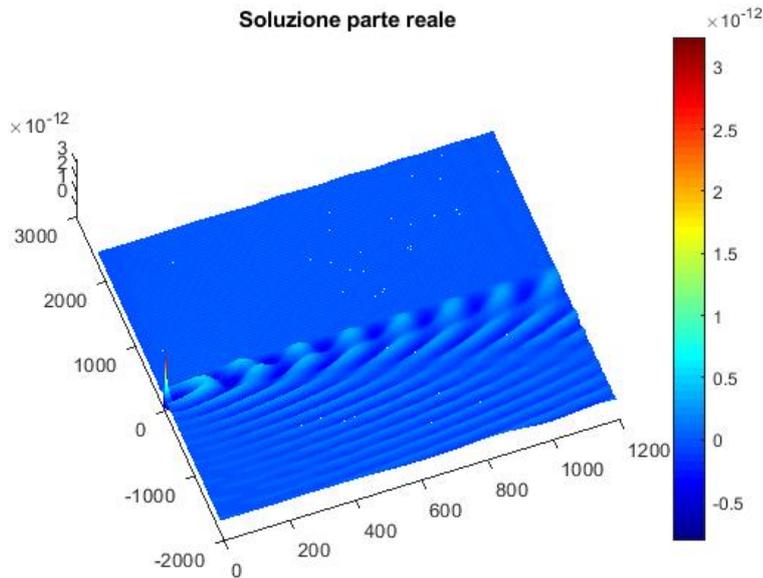


Figura 6.11: Soluzione reale della pressione 10 Hz

Nella figura 6.11 la frequenza di emissione è 10Hz e si hanno due bande di interferenza negativa, una situazione che è concorde al caso teorico trattato in precedenza. Infatti prima non era stato possibile analizzare la zona vicino alla sorgente perchè si trovava al di fuori della zona in cui erano valide le approssimazioni fatte. Invece in questo caso si riesce ad analizzare tutto il campo di pressione e si raccoglie anche il minimo che in precedenza non era stato possibile raccogliere.

Nel caso in cui la frequenza aumenti ci si aspetta di avere una figura con più frange di interferenza e almeno qualitativamente questo viene confermato dall'immagine 6.12 che riporta i valori reali della pressione.

Si è preferito riportare la soluzione della pressione reale istantanea rispetto all'intensità perchè si ottengono dei valori troppo piccoli e nel grafico si confondono senza riuscire a dare un'indicazione precisa. Inoltre si può notare come da 10Hz a 30Hz cambi anche la dimensione delle bande di interferenza, più ampie nel primo caso. La differente ampiezza poi si ritrova anche nelle curve di interferenza, infatti quelle di 10Hz sono più morbide e hanno un andamento più graduale per raggiungere il massimo o il minimo. Questa variazione invece diventa più netta all'aumentare della frequenza.

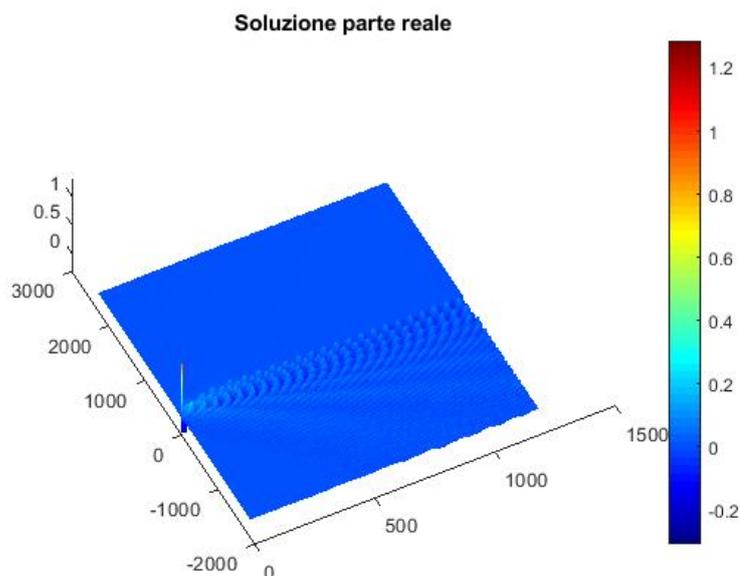


Figura 6.12: Soluzione reale della pressione 30 Hz

Infine si possono anche notare gli effetti di bordo nelle immagini riportate in precedenza, le soluzioni vicino ai bordi diventano più sfocate e uniformi. Questo avviene perchè la condizione di Sommerfeld non è totalmente rispettata, quindi una parte della radiazione torna indietro ed è come se ci fossero delle sorgenti che irradiano dall'esterno verso l'interno del dominio.

Dopo una prima analisi qualitativa si ricavano le stesse curve che erano state trovate nel caso teorico, concentrandosi sulla zona dove è possibile avere un confronto con la teoria. Poi sia la sorgente che il ricevitore sono posizionati a 200 metri di profondità. Inoltre la pressione di riferimento è stata ricavata attraverso un'altra simulazione in cui non era presente l'interfaccia.

Si ottiene una figura di interferenza molto simile al caso teorico però sono comunque presenti delle differenze. In particolare riguardo la posizione dei massimi e dei minimi, infatti il primo massimo si trova al di fuori della zona di validità della teoria dell'immagine riflessa e in questo caso il minimo avviene più vicino alla sorgente rispetto a quanto predetto dalla teoria. Però le due immagini diventano sempre più simili al diminuire del termine  $\beta$  e quindi all'aumentare della distanza dalla sorgente.

Alla fine si può notare come la pressione abbia un andamento leggermente oscillatorio, questo è dovuto al fatto che vicino al bordo si hanno degli effetti di interferenza perchè

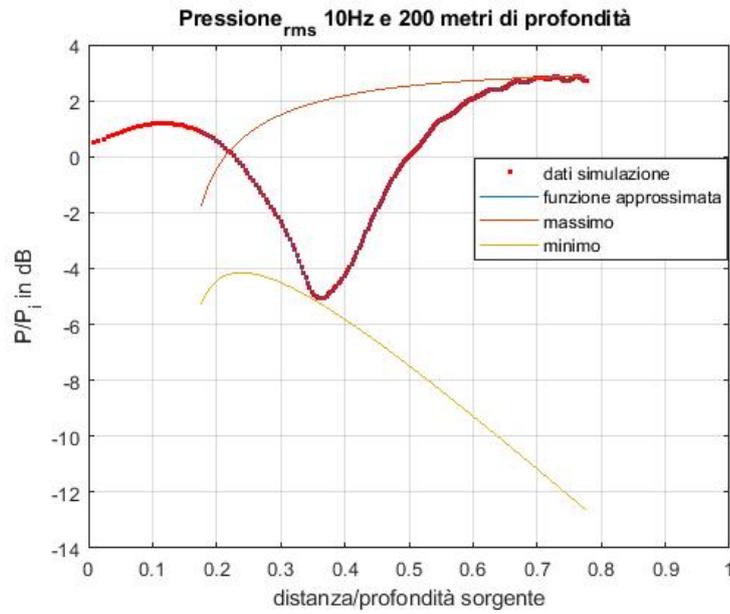


Figura 6.13: Simulazione di un monopolo che emette a 10Hz

non si riesce ad applicare perfettamente la condizione di Sommerfeld. Poi ulteriori imprecisioni possono essere attribuite ai valori della pressione ideale che anch'essi sono ottenuti tramite una simulazione e portano con sé degli errori.

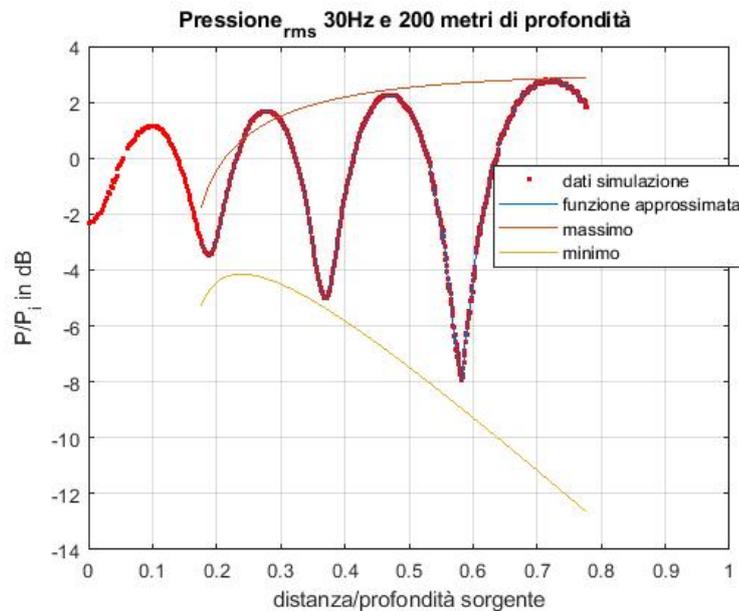


Figura 6.14: Simulazione di un monopolo che emette a 30Hz

Nella figura 6.14 invece si riporta il caso in cui la sorgente emette ad una frequenza di 30Hz. I commenti fatto per il caso precedente sono validi anche per questo. Infatti

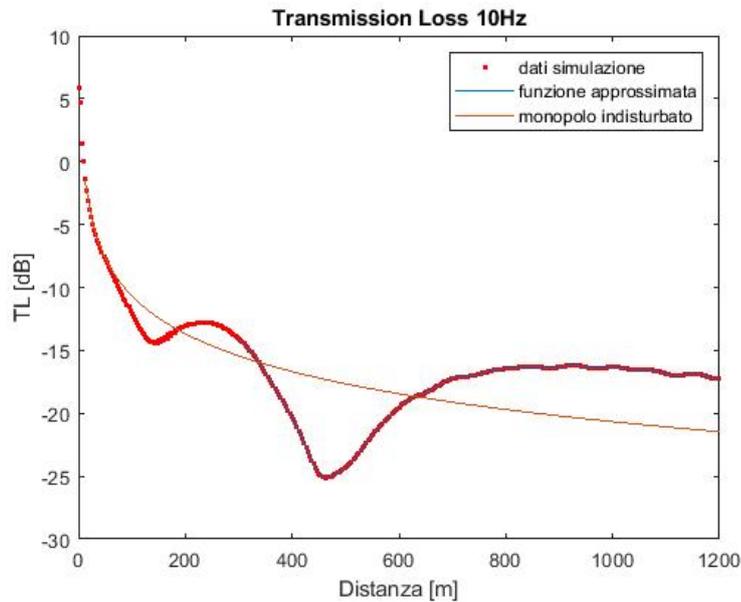
anche quà si ha una differente distribuzione dei massimi e dei minimi ma questa si va a regolarizzare con la distanza dalla sorgente, dove però il segnale inizia ad oscillare attorno al valore teorico a causa della presenza di sorgenti fittizie. Infine si può notare che come nella teoria i primi picchi superano la curva che rappresenta il massimo valore raggiungibile perchè si trascura il termine  $\beta$  ma in realtà ha ancora una lieve influenza. Infine gli stessi risultati si possono riportare con la *Transmission Loss* che valuta la perdita di carico del segnale rispetto ad una pressione di riferimento, che in questo caso è il valore della pressione ideale ad un metro di distanza.

In figura 6.22 è stata inserita anche la traccia della pressione nel caso indisturbato. In questo modo si vede come per effetto dell'interferenza la pressione oscilli attorno a questo valore ma continui a diminuire progressivamente con lo stesso andamento, ovvero proporzionale all'inverso della distanza.

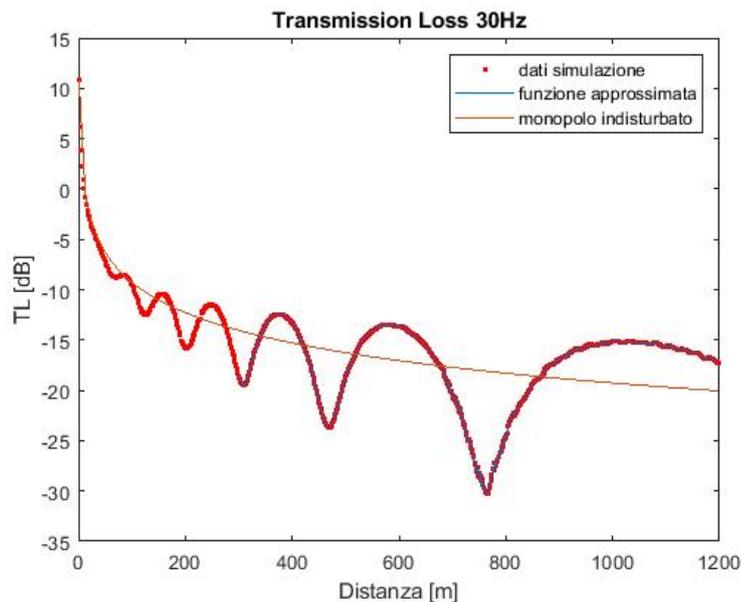
Inoltre si può anche notare come nei primi metri gli effetti della superficie riflettente siano trascurabili e infatti i dati della simulazione seguono il comportamento del monopolo indisturbato, salvo poi separarsi da quest'ultimo a meno di 100 metri di distanza. Infine in ultima analisi si riportano i grafici in cui si varia la profondità del ricevitore per andare ad osservare l'andamento decrescente della pressione in quella zona del campo. Come fatto per il caso teorico bisogna variare la profondità in base alla frequenza del segnale e quindi il ricevitore viene posto a 45 e 15 metri dalla superficie rispettivamente per 10Hz e 30Hz.

Anche in questo caso i risultati sono in linea con la teoria a parte l'estremità destra dove la funzione diventa oscillante. Lo stesso risultato si ottiene con il monopolo che emette a 30Hz.

Quindi dai risultati ottenuti si può affermare che la teoria è in linea con le simulazioni numeriche effettuate ed è quindi possibile svolgere il caso in cui è presente anche il fondale marino e dove la teoria non riesce a ricondurre il problema ad una semplice sovrapposizione tra sorgenti. Però prima si mostrano i risultati trovati nel caso in cui si è simulata la sola presenza del fondale marino per poi introdurre il caso in cui sono presenti entrambi gli effetti.



(a)



(b)

Figura 6.15: TL della soluzione numerica a confronto. (a) Rappresenta il caso a 10Hz mentre (b) quello a 30Hz.

## 6.5 Simulazione fondale marino

Per simulare il fondale marino si è utilizzato un dominio più semplice, infatti in questo caso l'interfaccia è imposta attraverso le condizioni al contorno e quindi basta avere un solo "rettangolo" in cui bisogna risolvere il problema della propagazione del segnale. Si vuole sempre simulare la condizione di campo libero perciò anche in questo caso

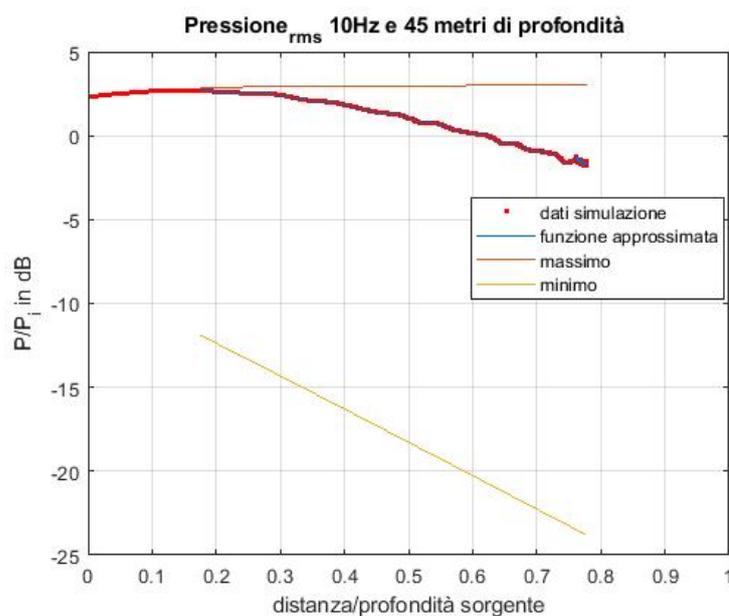


Figura 6.16: Simulazione di un monopolo che emette a 10Hz in campo lontano

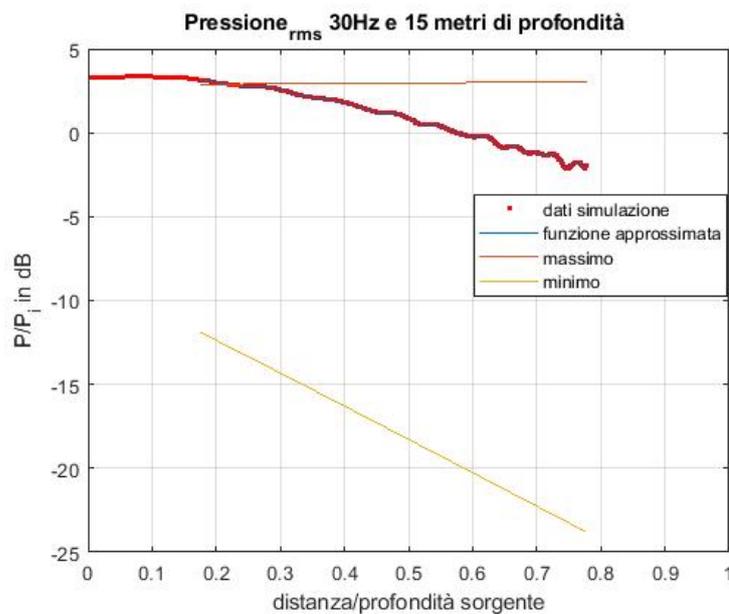


Figura 6.17: Simulazione di un monopolo che emette a 10Hz in campo lontano

l'altezza del rettangolo è  $\sqrt{3}$  volte la sua lunghezza. Le sorgenti sono sempre poste a 200 metri dall'interfaccia.

Per semplicità sul fondale si impone la condizione di riflessione totale attraverso la condizione di Neumann omogenea; quindi non dev'esserci variazione di pressione lungo la normale al bordo.

$$\frac{dp(x, y)}{d\vec{n}} \Big|_{\text{fondale}} = 0 \quad (6.59)$$

Su gli altri tre bordi invece si impone la condizione di Sommerfeld per simulare il campo libero. Infine in questo caso l'unico mezzo coinvolto è l'acqua e quindi la dimensione massima dell'elemento è riferita solamente a questo mezzo; a parità di frequenza la lunghezza d'onda di un segnale in acqua è maggiore di quella in aria perciò in questo caso si riesce a coprire la stessa area utilizzando meno elementi. Si ha un guadagno computazionale e si ottiene comunque una soluzione con una precisione soddisfacente. Come soluzione ci si aspetta un risultato simile all'interfaccia acqua-aria, infatti il coefficiente di riflessione è leggermente superiore e quindi si dovrebbe avere la stessa figura di interferenza ma con dei valori lievemente diversi. La similitudine delle due interfacce si nota già a livello qualitativo dalle immagini che riportano la soluzione della parte reale.

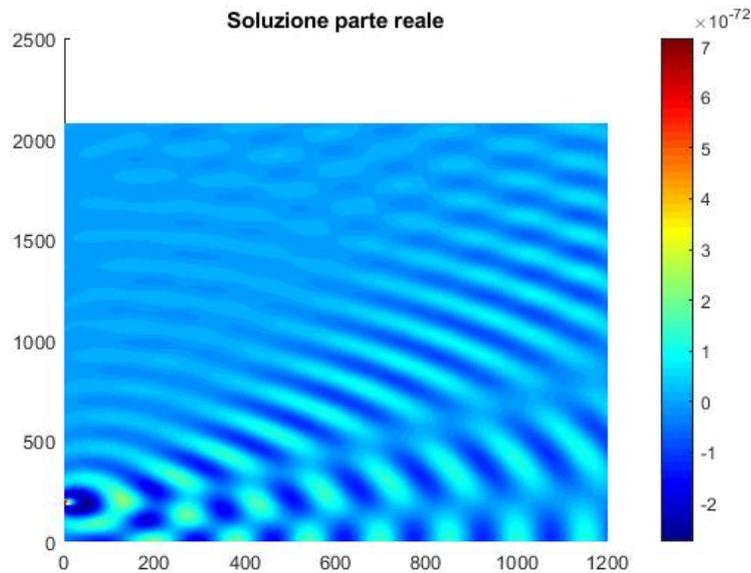


Figura 6.18: Simulazione di un fondale con sorgente che emette a 10Hz

Come nel caso precedente si possono individuare delle bande di interferenza che variano in numero, ampiezza e posizione in base alla frequenza del monopolo. Nel caso di 10Hz si individuano solamente due bande mentre diventano ben otto se la frequenza è 30Hz. Inoltre da queste immagini si può vedere come perpendicolarmente al monopolo sia presente un'altra zona di interferenza che è causata dall'effetto combinato della radiazione di bordo e dall'interferenza diretta del fondale, per questo motivo la regione è più estesa e meno netta dalle altre.

Però bisogna ricordare che in questo caso la pressione di riferimento è presa rispetto ad

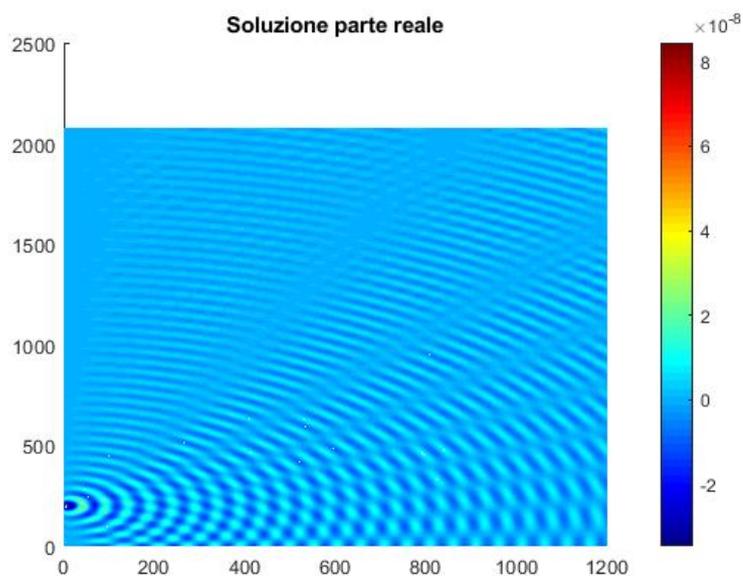


Figura 6.19: Simulazione di un fondale con sorgente che emette a 30Hz

un dominio più piccolo quindi ci sono più effetti di bordo e si rischia di avere dei valori leggermente diversi rispetto all'interfaccia aria-acqua anche per questo motivo. Infine ci si aspettano anche delle variazioni nella posizione dei massimi e dei minimi perché nell'altro caso si ha una lieve perdita del segnale e una lieve dipendenza dall'angolo, quello che rimane in entrambi i casi è l'andamento oscillatorio.

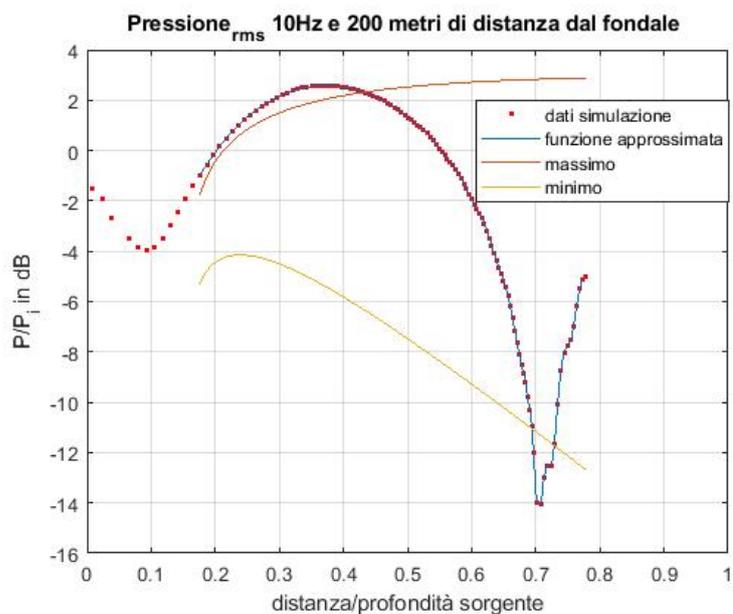


Figura 6.20: Simulazione della pressione quadratica media, frequenza 10Hz

Rispetto alla superficie del mare si ha una diversa disposizione dei massimi e dei minimi perchè l'imposizione della condizione di Neumann omogenea ha delle lievi differenze rispetto all'interfaccia. Anche se i fattori di riflessione sono quasi identici in un caso si ha comunque del segnale che attraversa l'interfaccia e queste diverse interazioni unite alle dimensioni del dominio differenti causano uno spostamento dei massimi e dei minimi che si avvicinano alla sorgente.

Poi anche in questo caso verso la fine il segnale è disturbato perchè rimangono comunque gli effetti di bordo e il valore del minimo è soggetto a un ulteriore errore che lo fa diminuire ulteriormente. Invece si nota che a causa dei fattori illustrati in precedenza in alcuni punti i valori della funzione della pressione quadratica media superano quelli attesi dalla teoria.

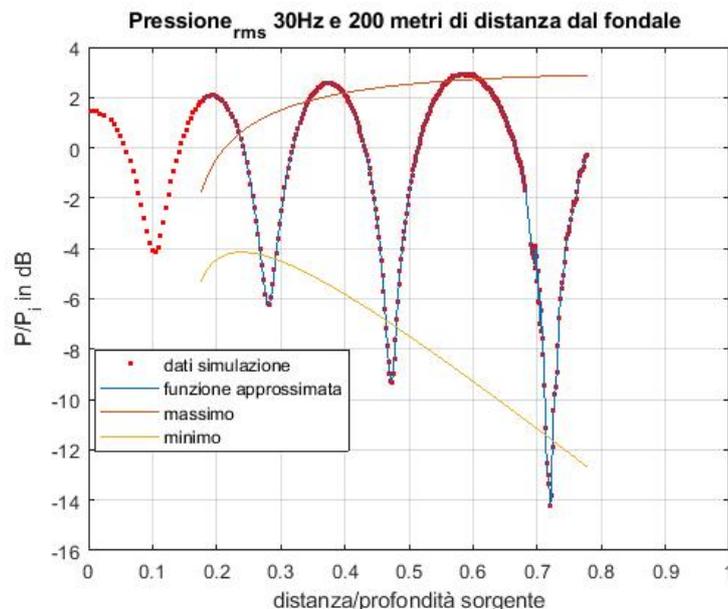
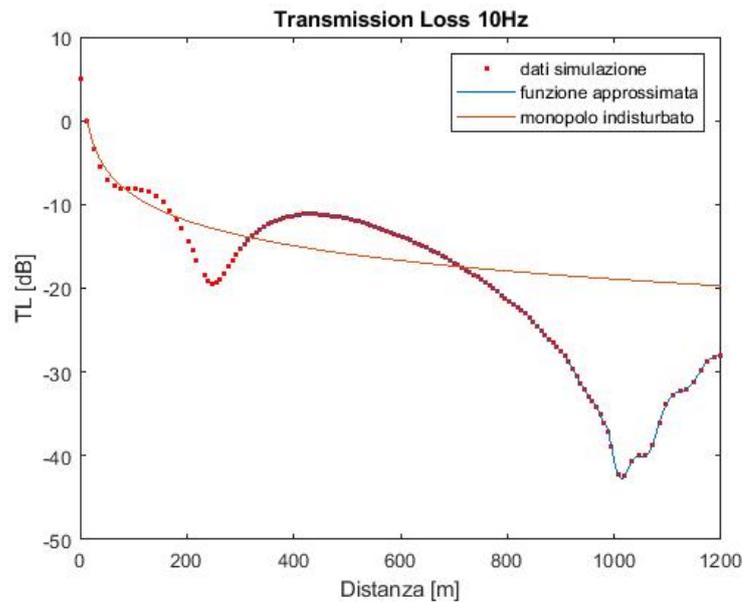


Figura 6.21: Simulazione della pressione quadratica media, frequenza 30Hz

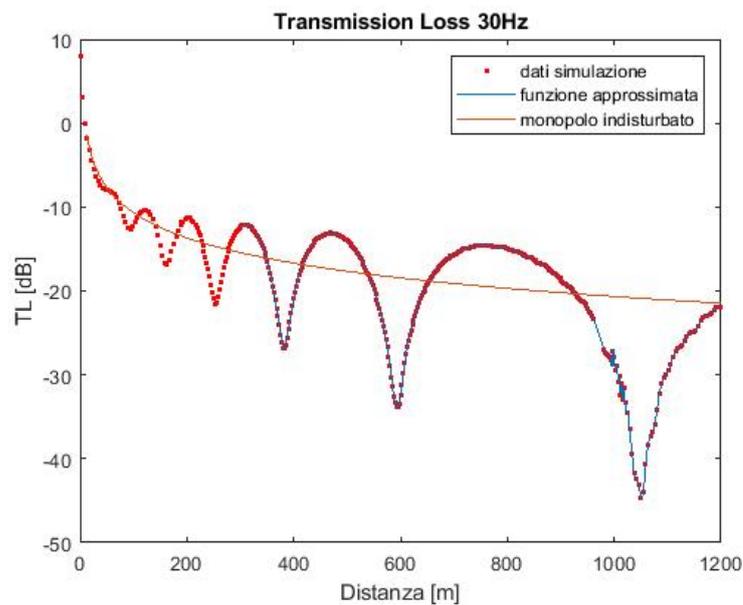
Come si può vedere dal grafico in 6.21 anche in questo la figura di interferenza ha l'andamento dei massimi e dei minimi invertito rispetto all'interfaccia aria-acqua e anche in questo caso i minimi si trovano al di sotto del valore previsto dalla teoria mentre i massimi leggermente al di sopra, ma gli andamenti rimangono gli stessi. Quindi si può affermare che in questo caso gli effetti della superficie riflettente sono lievemente più marcati rispetto all'interfaccia aria-acqua.

Infine si vanno a mostrare i grafici riguardanti la perdita di carico del segnale per evidenziare come essendo in campo libero per entrambe le frequenze la pressione quadratica

media decade sempre con l'inverso della distanza, si può seguire i valori che oscillano attorno a quello teorico. L'intensità cala con il quadrato del raggio e di conseguenza la pressione quadratica media decresce con l'inverso della distanza dalla sorgente nel caso teorico del monopolo indisturbato.



(a)



(b)

Figura 6.22: TL della soluzione numerica a confronto. (a) Rappresenta il caso a 10Hz mentre (b) quello a 30Hz.

## 6.6 Simulazione completa

A questo punto si uniscono gli elementi studiati in precedenza per approssimare la situazione che si ottiene quando è presente un monopolo che emette a bassa frequenza in acqua poco profonda. L'effetto delle due superficie è quello di più sorgenti immagine, e non solo una per una per interfaccia come avveniva in precedenza; il segnale mentre si propaga rimbalza tra le due interfacce. Per questa ragione un segnale può arrivare dalla sorgente al ricevitore seguendo percorsi diversi, il segnale diretto arriva assieme ad una serie di echi la cui ampiezza diminuisce all'aumentare delle riflessioni che subisce. Il numero di percorsi differenti con cui l'onda si propaga non si può definire a priori, come nei casi precedenti, e dipende dal tipo di interfacce, dal mezzo e dalla frequenza del segnale.

La presenza di più percorsi può essere analizzata da due punti di vista in base al tipo di segnale, ad alta frequenza e per brevi segnali è utile osservare questo fenomeno nel dominio del tempo perchè si evidenziano i ritardi con cui arrivano i vari echi del segnale. Invece per segnali a bassa frequenza e prolungati nel tempo, come le sorgenti utilizzate, si preferisce valutare come i vari percorsi si combinino per creare delle figure di interferenza, variando l'ampiezza del segnale in punti precisi del campo.

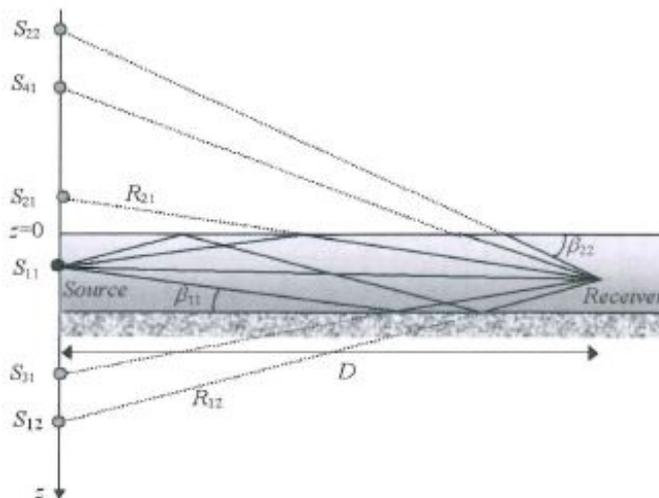


Figura 6.23: Esempio sorgenti immagine

Nel caso più semplice, ovvero due interfacce piane e velocità del suono costante, il segnale trasmesso dalla sorgente arriva attraverso una serie di percorsi rettilinei, e ogni percorso corrisponde ad una sorgente immagine ricavata dalla geometria del dominio,

come si può vedere nella figura 6.23. Il contributo di ogni sorgente è quello portato da un'onda sferica, che quindi decresce con il raggio, e sia la perdite che la variazione dell'angolo di fase sono calcolate in base ai coefficienti di riflessione che però variano con la distanza dalla sorgente.

In questo caso si è scelto di posizionare il fondale a 400 metri di profondità per avere abbastanza spazio da variare la posizione della sorgente senza allargare troppo il dominio e perdere la doppia interfaccia. Invece l'aria doveva sempre rappresentare un campo illimitato; per questo motivo il rettangolo che rappresenta l'aria ha le stesse dimensioni di quelli utilizzati in precedenza. Dopodichè si sono impostate le condizioni al contorno, Sommerfeld per tutti i bordi tranne il fondale, dove si utilizza una condizione di riflessione completa. Nel caso di 10Hz i risultati qualitativi sono i seguenti.

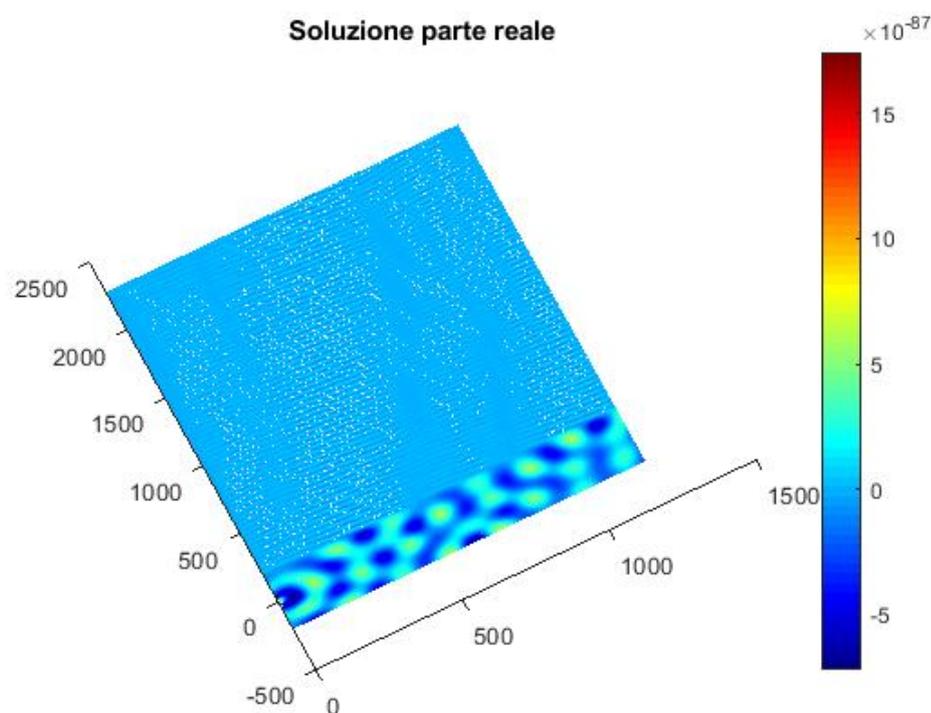


Figura 6.24: Simulazione del caso completo, frequenza 10Hz

Rispetto al caso in cui è presente una sola superficie riflettente risulta evidente la mancanza di una banda di interferenza netta che attraversa l'acqua. Invece sono presenti una serie di picchi e valli, sparsi e irregolari che si alternano all'interno del dominio. Ciò significa che non si avrà più figura di interferenza precisa come successo per la superficie marina e il fondale ma la pressione quadratica media avrà un comportamento

più irregolare anche se comunque si può ancora notare un'alternanza quasi stabile alla stessa profondità della sorgente.

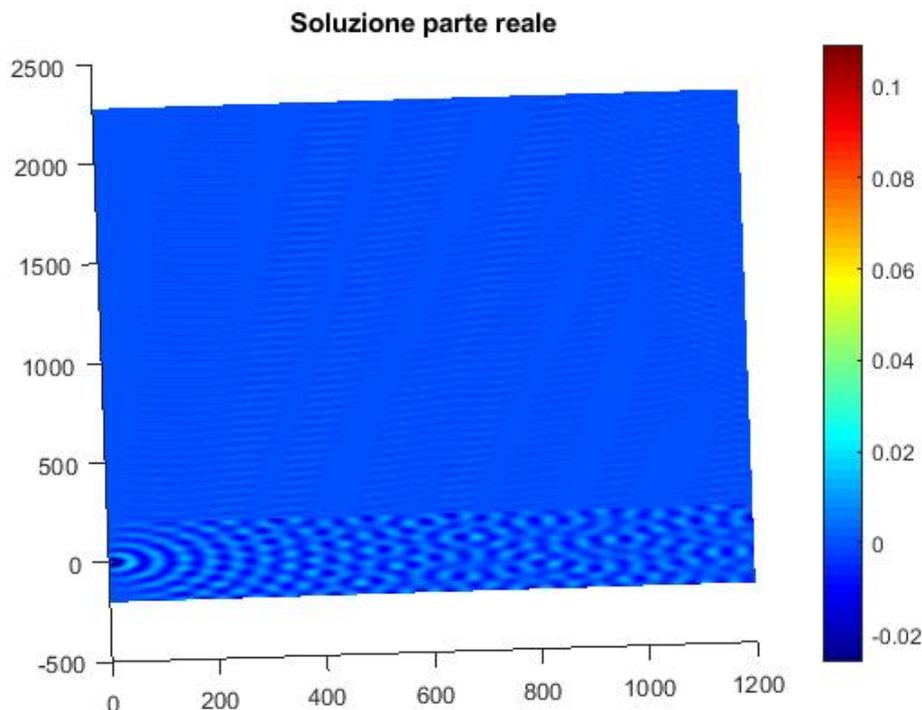


Figura 6.25: Simulazione del caso completo, frequenza 10Hz

Nella figura 6.25 si è riportato il risultato per la frequenza di 30Hz. La figura risulta più regolare rispetto al caso precedente riportando comunque lo stesso andamento. Anzichè esserci delle bande ci sono dei picchi e delle valli che però hanno un'estensione ridotta rispetto a prima e perciò ci si aspetta che la variazione sia più rapida.

Inoltre si può anche intravedere un altro comportamento tipico di un segnale limitato da due interfacce, all'inizio si sviluppa regolarmente come un'onda sferica ma dal momento in cui l'altezza è pari alla distanza dalla sorgente prende una forma lineare perchè non si riesce più a sviluppare e rimane concentrata tra le due pareti.

A questo punto si può passare a visualizzare curve che mostrano il comportamento della pressione quadratica media al variare della distanza dalla sorgente. Rispetto a quando era presente una sola superficie riflettente si avrà un comportamento più irregolare perchè è come se fossero presenti più sorgenti che si sovrappongono tra di loro, questo effetto si accentua con la frequenza fino ad avere un andamento casuale che quindi uniforma il segnale. Inoltre in questo caso è stato rappresentato tutto il dominio

perchè le curve teoriche utilizzate in precedenza non hanno alcuna applicazione.

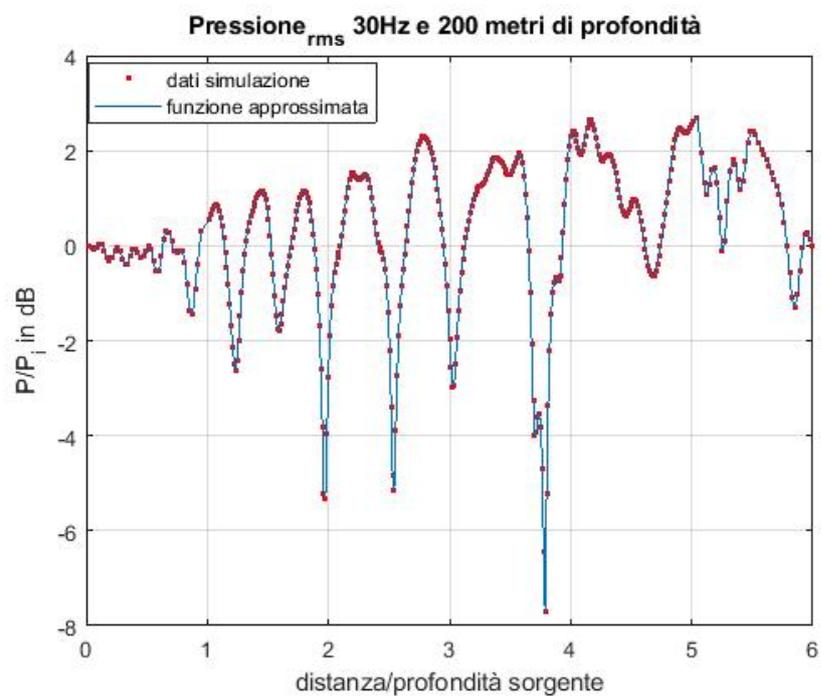
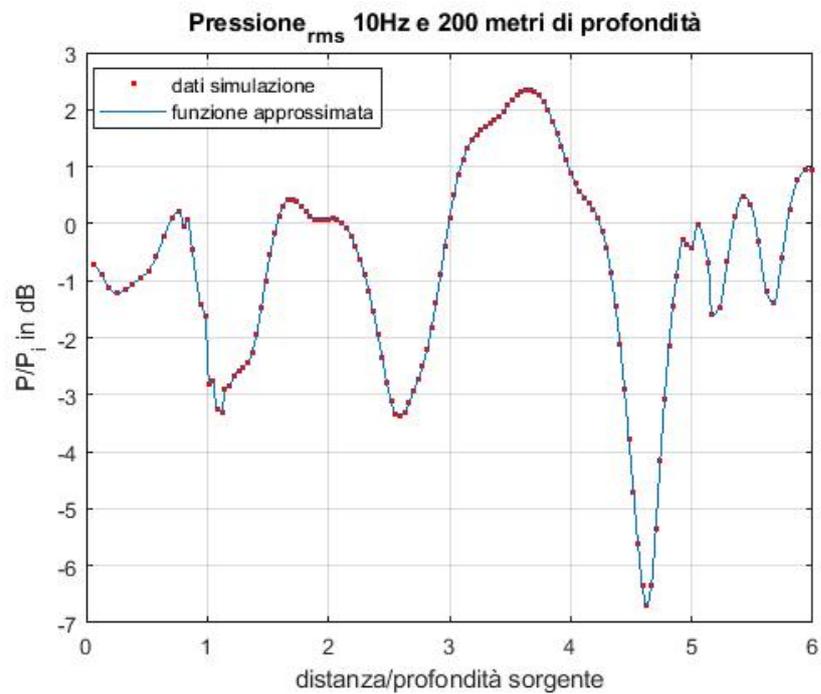


Figura 6.26:  $P_{rms}$  della soluzione numerica a confronto. (a) Rappresenta il caso a 10Hz mentre (b) quello a 30Hz.

Nella figura 6.26a si possono ancora intravedere due massimi principali che però subi-

scono delle deformazioni per effetto della doppia interfaccia; e si può vedere come verso la fine il segnale diventi estremamente irregolare come conseguenza della finitezza del dominio di calcolo.

Invece la figura 6.26b è molto più irregolare e caotica. Inoltre è utile notare come l'andamento dei minimi e dei massimi non segua più una legge precisa in base alla distanza dalla sorgente ma sia pressochè costante tranne qualche eccezione. Questo avviene perchè all'aumentare delle sorgenti si crea un'interferenza caotica e continua che cancella la natura ondulatoria del fenomeno. Infatti per le strumentazioni che lavorano con segnali ad alta frequenza la presenza del fondale nelle vicinanze non crea problemi di funzionamento degli stessi.

Infine la variazione della fronte d'onda del segnale, da sferica a cilindrica, si può andare a vedere nell'andamento della *Transmission Loss*. In questo caso si preferisce utilizzare solo la sorgente a 30Hz perchè si riesce ad valutare meglio l'andamento medio del segnale.

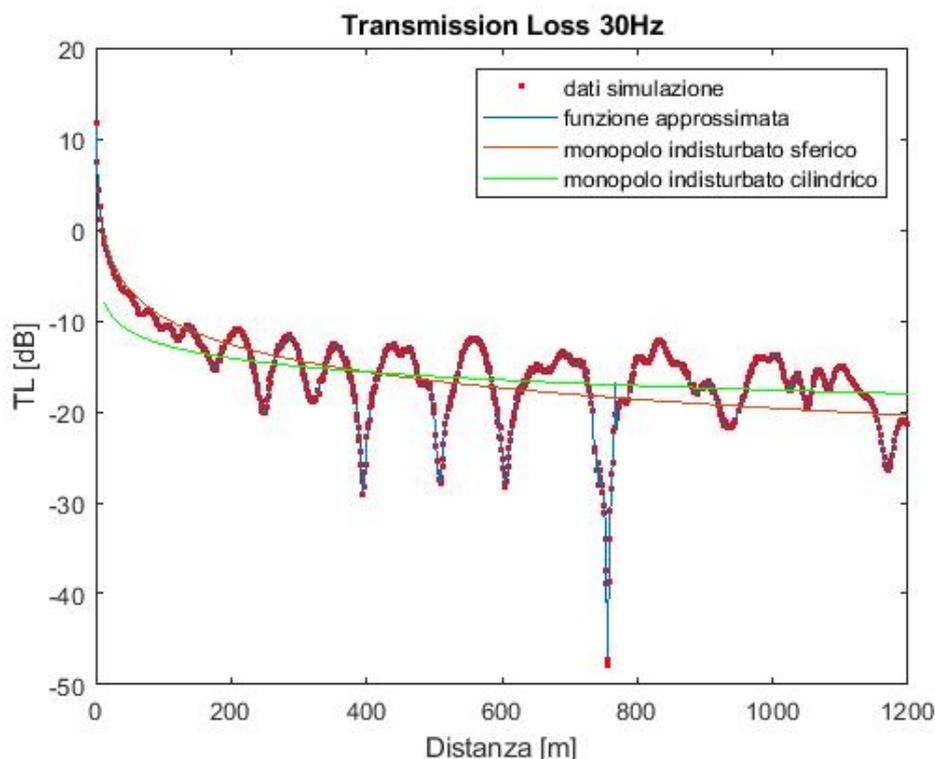


Figura 6.27: TL, frequenza 30Hz

Fino a 400 metri le oscillazioni avvengono al valore medio di un segnale che cade con l'inverso del raggio ma oltre si vede che questo andamento è eccessivamente smorza-

to rispetto ai dati ottenuti. Quest'ultimi invece seguono una funzione proporzionale all'inverso del quadrato della distanza. Infatti il segnale rimane confinato tra queste due superficie parallele nello spazio e quindi si propaga come un'onda cilindrica e non più sferica. Quest'effetto ha importanti ripercussioni sull'intensità del segnale che di conseguenza decade con la sola distanza (in campo libero decade con la distanza al quadrato) ed è una delle ragioni per cui i suoni in acqua rimangono udibili per distanze molto maggiori rispetto ad un corrispettivo in aria.

**Variazione profondità della sorgente** Infine sono state svolte due ulteriori simulazioni per vedere come cambia il segnale al variare della profondità della sorgente. In un caso è stata avvicinata al fondale mentre nell'altro alla superficie marina. Il monopolo viene posto a 100 metri di distanza da ognuna delle due superfici. Nelle figure viene riportato il risultato qualitativo per avere degli esempi dello spostamento del monopolo.

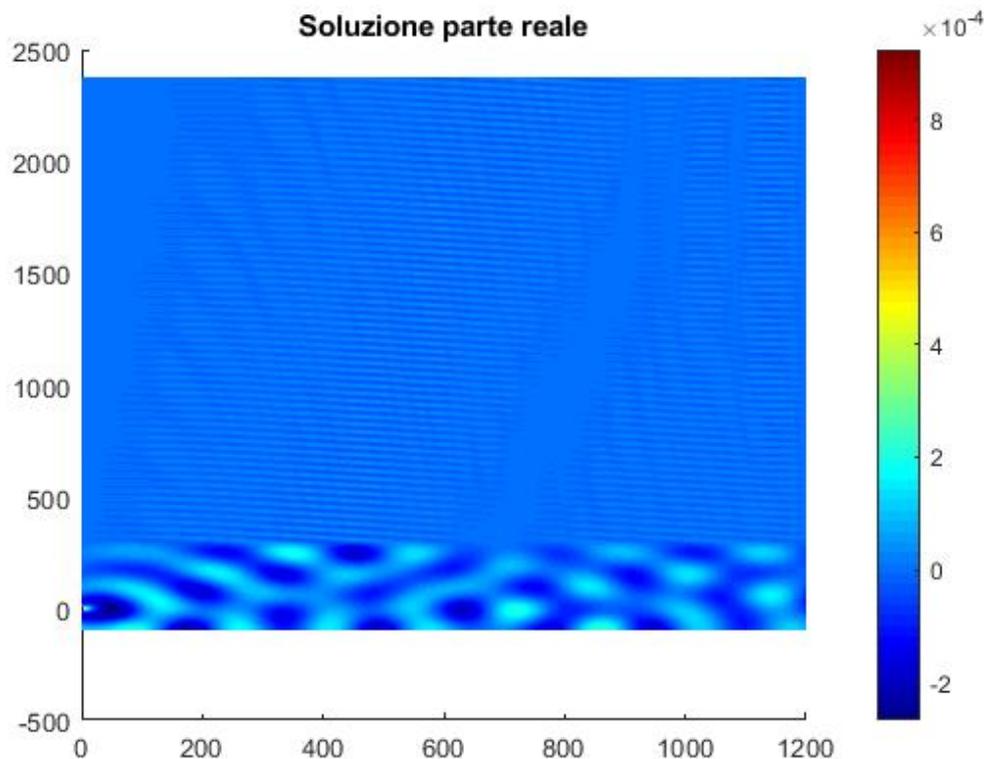


Figura 6.28: Parte Reale, 10 Hz e 300 metri di profondità

Spostando la sorgente si riesce a vedere meglio lo sviluppo delle onde sferiche anche

quando la frequenza del segnale è 10Hz e si nota che l'interferenza diventa meno puntiforme e crea quasi delle bande che si incrociano a spina di pesce. Si ha lo stesso comportamento nel caso in cui la sorgente è a 100 metri di profondità però le semi bande hanno un orientamento invertito e sono più attenuate nella parte iniziale per poi avere un comportamento analogo in campo lontano. Il diverso orientamento dipende dal fatto che si sviluppano due lati diversi dell'onda sferica.

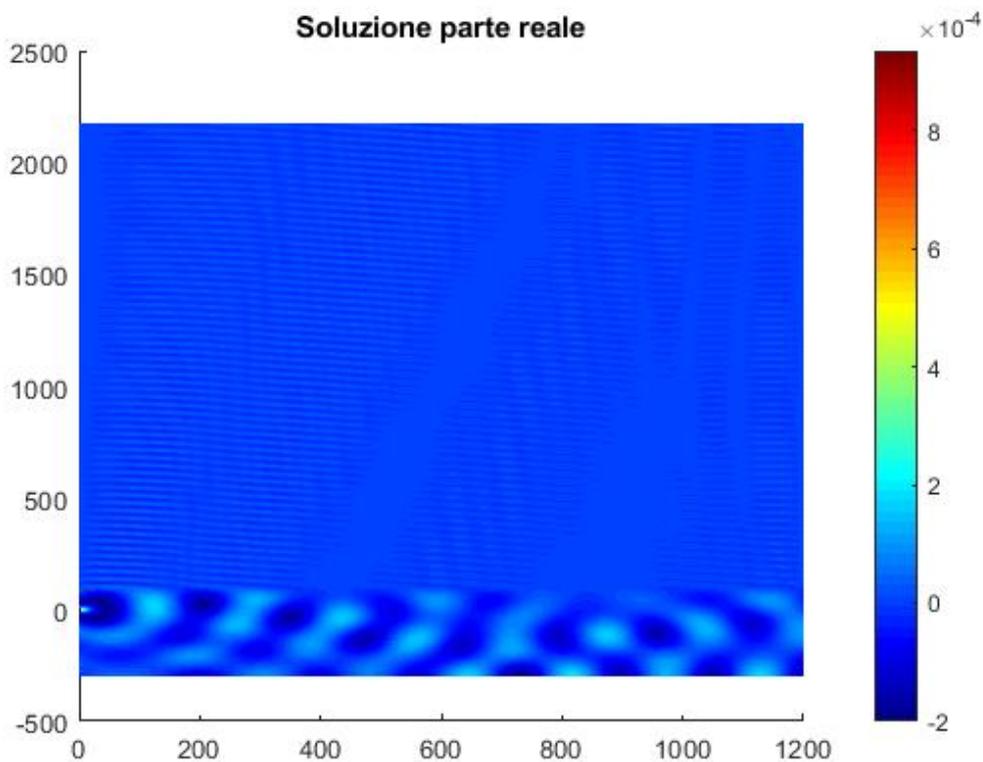


Figura 6.29: Parte Reale, 10 Hz e 100 metri di profondità

Queste differenze sono più marcate a basse frequenze perchè risentono maggiormente della composizione dell'interfaccia. All'aumentare della frequenza il fenomeno diventa più caotico e l'interferenza di sorgenti immagine anche più lontane si sente a distanze minori rispetto al corrispettivo monopolo che emette a 10Hz. Per questa ragione si riporta solo l'immagine della parte reale relativa alla sorgente posta a 100 metri di profondità.

Infatti la figura 6.30 mostra un comportamento analogo al quello mostrato in 6.25 dove l'andamento dei massimi e dei minimi non può essere descritto con delle bande rettilinee ma ha un comportamento più puntuale.

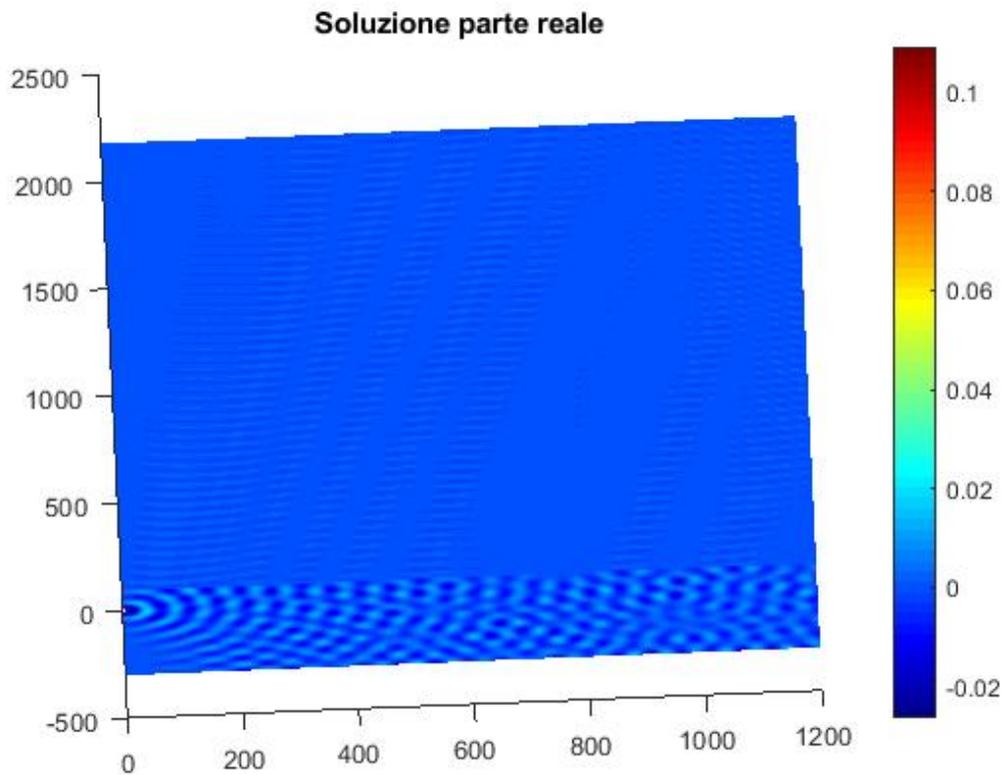


Figura 6.30: Parte Reale, 30 Hz e 100 metri di profondità

La differenza tra una sorgente a 10Hz e 30Hz si può vedere meglio nelle curve che raccolgono il valore della pressione quadratica media al variare della distanza; bisogna ricordare che la pressione ideale è stata presa come riferimento al campo libero e quindi verso la fine del dominio si avranno dei valori più alti perchè nella simulazione l'intensità acustica decresce meno velocemente.

Le differenze più grandi da un caso all'altro si possono notare con la sorgente che emette a 10Hz perchè viene influenzata maggiormente dalla superficie più adiacente. Quando si trova più vicino alla superficie del mare, figura 6.32a, si ha inizialmente un lieve massimo molto ampio che viene disturbato da piccole oscillazioni causate dal fondale, ha un'influenza minore perchè è più distante. Diversamente nel caso in cui la sorgente è a 300 metri di profondità, figura 6.32b, si ritrova una figura con due picchi ben distinti e meno disturbati; la crescita nel finale è dovuta alla pressione di riferimento.

All'aumentare della frequenza il fenomeno diventa più caotico, gli effetti delle sorgenti immagine iniziano prima e con più frequenza, per questa ragione le curve risultano simili tra di loro. Comunque si può vedere una differenza tra i due casi perchè nel caso

del monopolo vicino alla superficie del mare l'effetto di riflessione è un più lieve e i valori della pressione quadratica media sono inferiori.

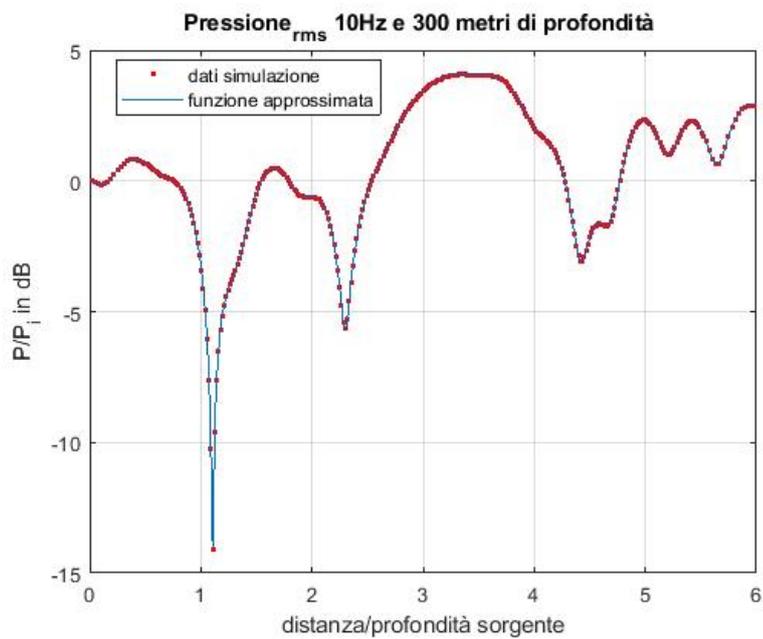
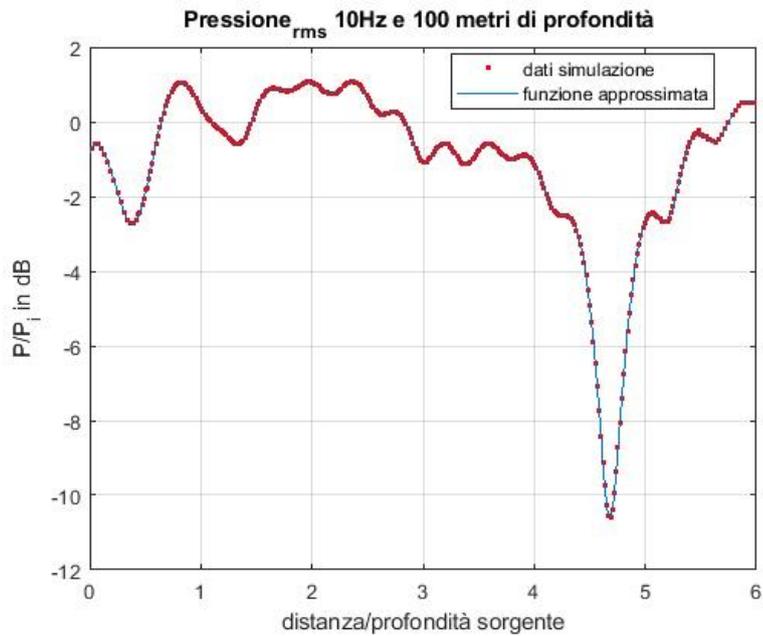
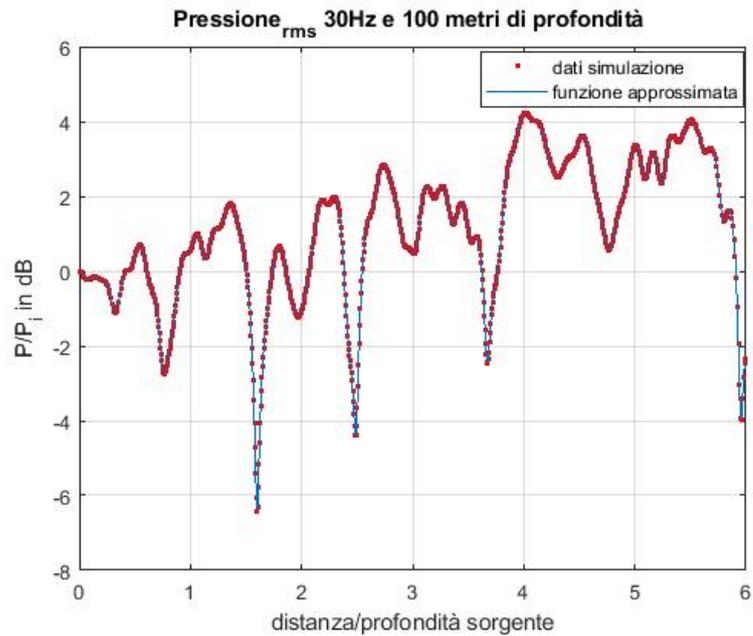
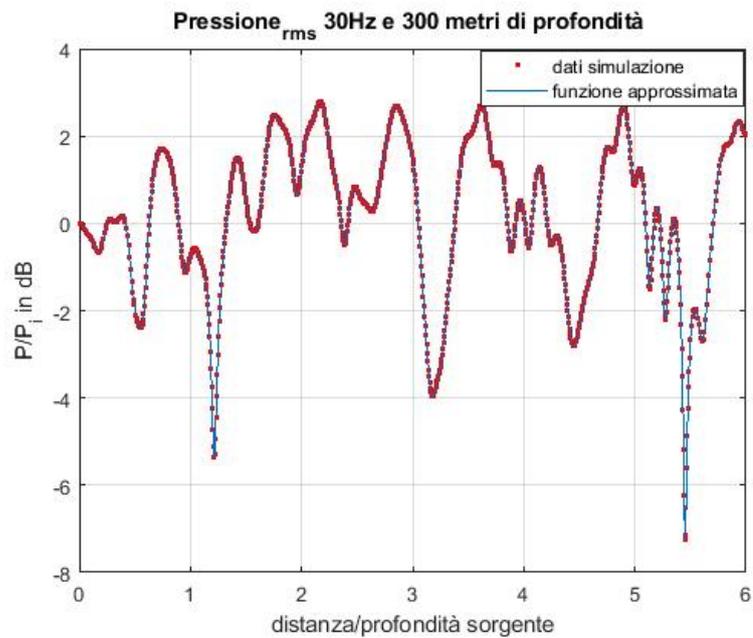


Figura 6.31:  $P_{\text{rms}}$  della soluzione numerica a confronto, 10Hz. (a) Rappresenta il caso a 100 metri di profondità (b) quello a 300 metri di profondità .



(a)



(b)

Figura 6.32:  $P_{rms}$  della soluzione numerica a confronto, 30Hz. (a) Rappresenta il caso a 100 metri di profondità (b) quello a 300 metri di profondità .

## 6.7 Dipolo

Si svolgono le stesse simulazioni per il caso di un dipolo orientato lungo l'asse x per vedere se al variare della sorgente cambia la forma della pressione quadratica media. Come fatto in precedenza si segue lo stesso schema di prima, quindi si valutano i vari

casi singolarmente e dopodichè si uniscono le varie interfacce per simulare il caso in cui sono presente tutte le caratteristiche di un ambiente marino. Si è scelto di trascurare il caso in cui il dipolo è orientato lungo  $y$  perchè il dominio si troverebbe per la maggior parte nella zona in cui la pressione è nulla.

**Interfaccia acqua-aria** Anche in questo caso si vuole avere un dominio il più esteso possibile per evitare gli effetti di bordo quindi l'altezza dei rettangoli è sempre  $\sqrt{3}$  volte la loro lunghezza. Poi le condizioni al contorno sono sempre quella di campo libero e la condizione è posta a 200 metri di distanza dalla superficie oceanica.

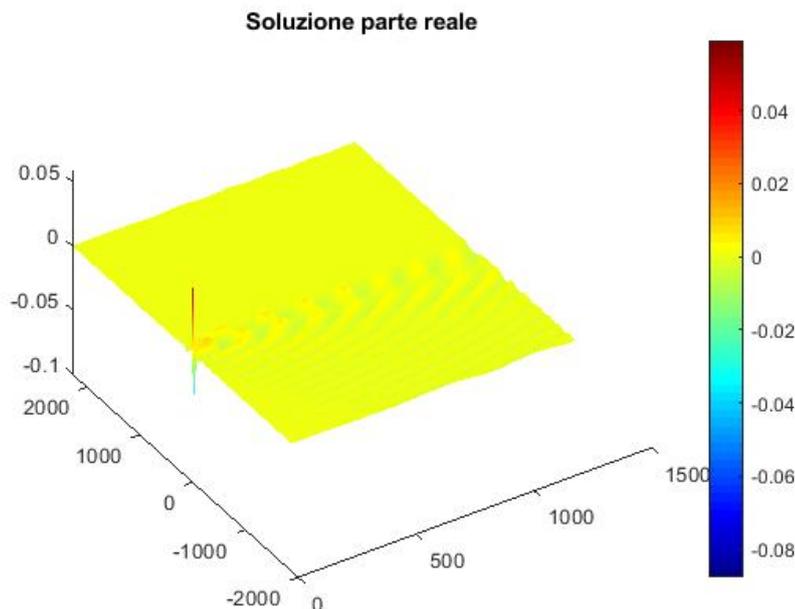


Figura 6.33: Parte Reale a 10 Hz per la sola superficie

Rispetto al monopolo si nota come all'origine della sorgente siano presente due picchi opposti. Però la figura di interferenza è molto simile a quella del monopolo, si hanno sempre due bande che sono il risultato di una sovrapposizione negativa delle due sorgenti. Le differenze principali si trovano all'aumentare dell'angolo  $\theta$  perchè il segnale del dipolo decresce mentre quello del monopolo rimane costante però quest'effetto risulta meno visibile del previsto per due ragioni. La prima è riconducibile agli effetti di bordo che creano delle radiazioni residue sul lato dove è posto il dipolo, la seconda sono le bande di interferenza che annullano il segnale indistintamente. Per questa ragione le differenze diventano ancora più difficili da individuare all'aumentare della frequenza, però la zona perpendicolare in cui la pressione è nulla risulta essere più estesa rispetto

al caso del monopolo.

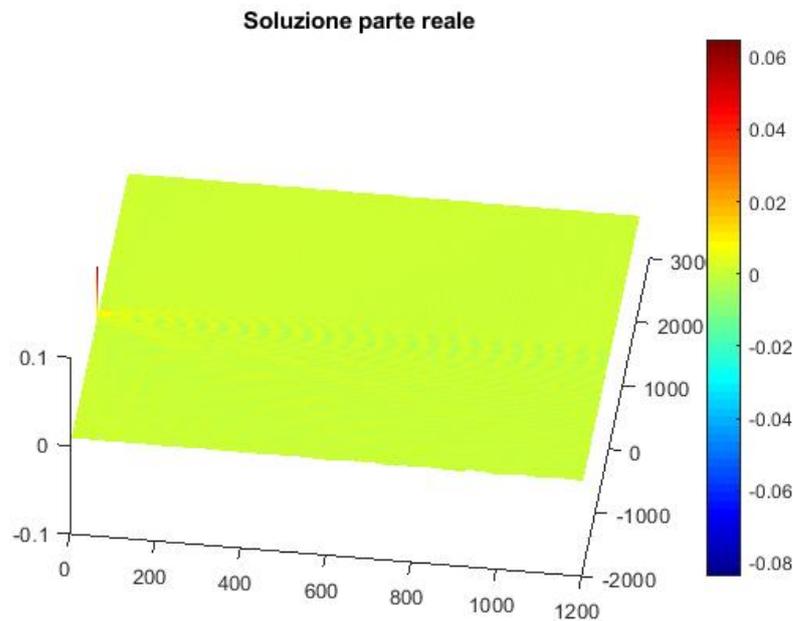


Figura 6.34: Parte Reale a 30 Hz per la sola superficie

A questo punto si può passare a riportare le curve della pressione quadratica media e della perdita del segnale lungo l'asse della sorgente, al variare della distanza orizzontale. Si ottengono delle curve molto simili al monopolo ma spostate più piccole perchè l'interferenza ha un effetto più lieve sull'andamento della pressione, soprattutto all'inizio del grafico. Quando i due segnali si sovrappongono è come se la sorgente immagine avesse un'ampiezza che varia con l'angolo  $\theta$ , però bisogna anche ricordare che vicino alla sorgente l'interferenza è meno importante perchè c'è molta differenza relativa tra il segnale che arriva al ricevitore direttamente oppure attraverso la superficie. Poi via via che aumenta la distanza dalla sorgente l'angolo con cui i raggi incidono l'interfaccia si avvicina sempre di più a zero e c'è anche meno variazione di percorso, quindi la differenza tra dipolo e monopolo si attenua. Per esempio i raggi che si incontrano a 1200 metri sono il riflesso di quelli che intersecano la superficie a 600 metri di distanza, dove l'angolo di incidenza è 14,6 gradi che corrisponde ad un valore del coseno di 0.96. Si può affermare che la zona più interessata da questo fenomeno è il campo intermedio che si può andare a vedere in un'altra zona di grafico che era stata trascurata in precedenza. Infatti nel grafico si è scelto di utilizzare i valori dell'asse x che vanno da 0 ad 1 per concentrarsi meglio sulla zona in cui è si verificata la validità della teoria della sorgente

immagine. Ma in questo caso è più interessante andare a concentrarsi sulla zona vicina alla sorgente.

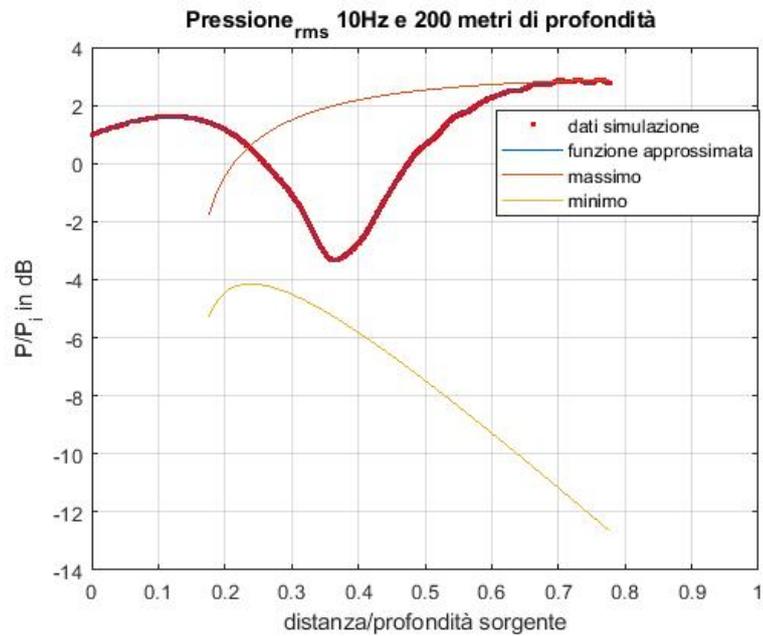


Figura 6.35: Pressione quadratica media al variare della distanza nel caso del dipolo

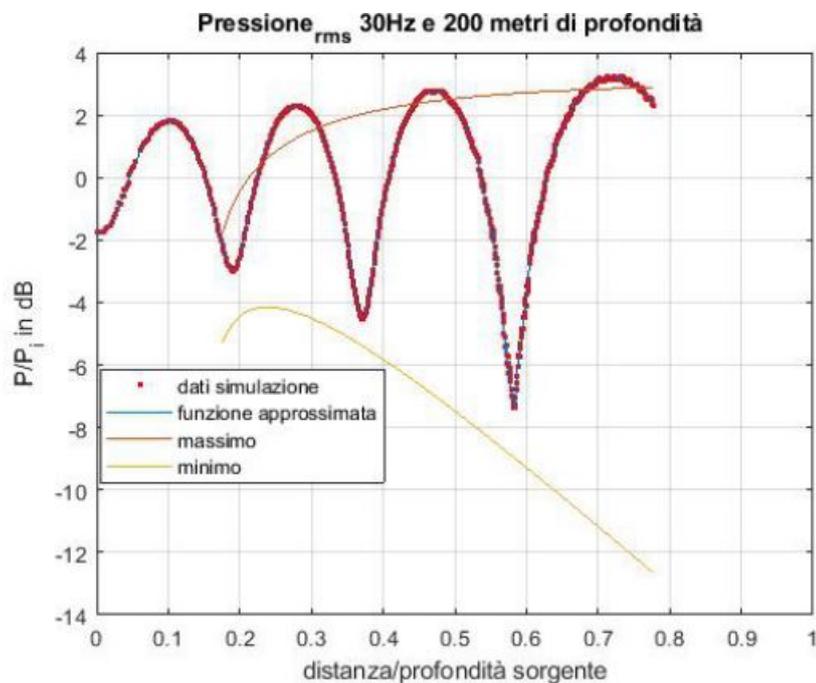


Figura 6.36: Pressione quadratica media al variare della distanza nel caso del dipolo

Si riporta anche il caso in cui la frequenza di emissione è 30Hz e le osservazioni fatte per i 10Hz sono valide anche in questo caso. Inoltre la figura di interferenza aumenta il

numero di picchi e valli allo stesso modo del monopolo. Dopodichè si passa a riportare anche il grafico che mostra l'andamento dell'intensità al di fuori della zona di interferenza e anche in questo caso ha un andamento analogo al monopolo.

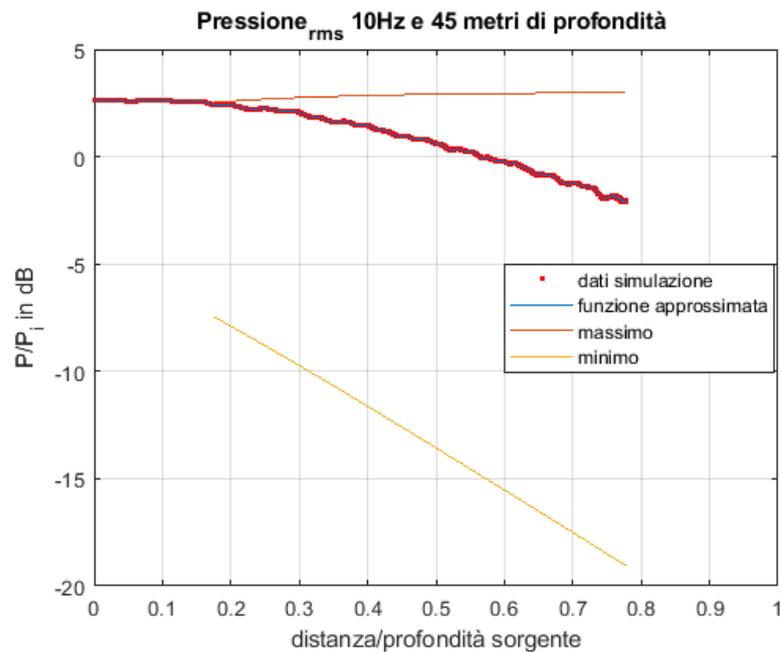
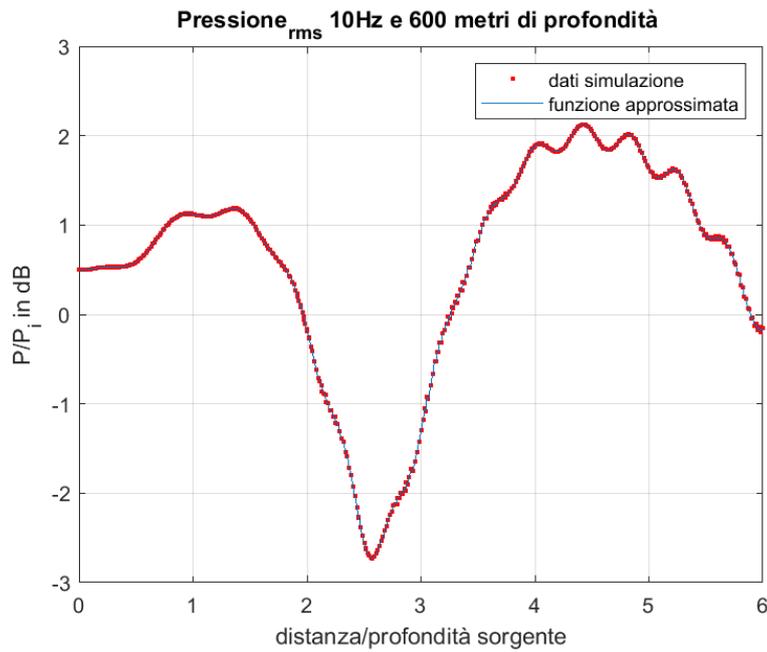
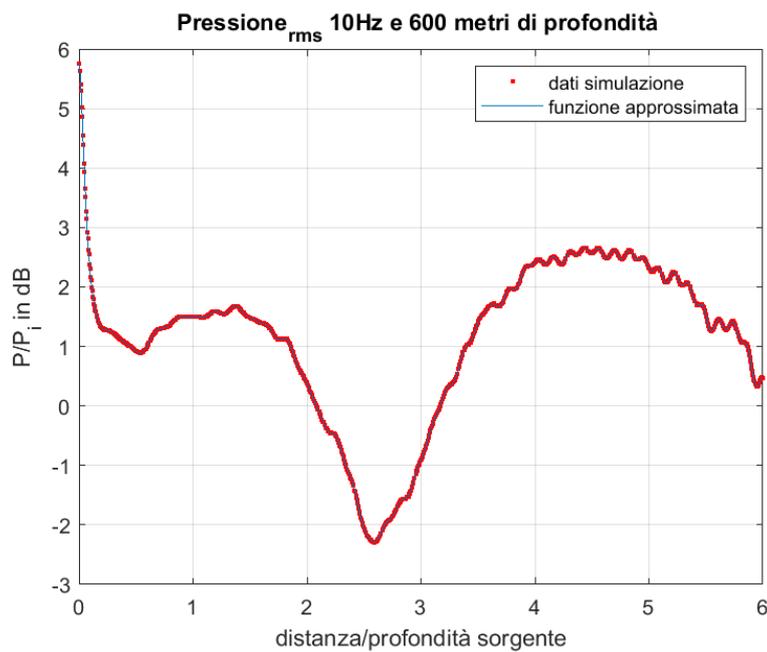


Figura 6.37: Pressione quadratica media con  $\lim_{\beta \rightarrow 0}$

Per osservare la differenza tra monopolo e dipolo si riportano i grafici che raccolgono le curve di pressione lungo tutta la lunghezza del dominio a 600 metri di profondità perchè  $\theta$  ha un valore più elevato e si ha più variazione tra valore atteso e quello ottenuto. Nel caso del monopolo anche se è presente un lieve effetto dovuta alla riflessione della superficie del mare per i primi metri si ha una continuità tra il valore indisturbato e quello registrato.

Mentre nel caso del dipolo in  $x=0$  nel caso teorico si ha una pressione nulla perchè  $\cos\theta = 0$ , quindi i valori nel campo vicino hanno dei valori più alti rispetto al monopolo anche se si ha la stessa figura di interferenza. Poi all'aumentare della distanza l'angolo  $\theta$  diventa sempre più piccolo e quindi diminuisce la dipendenza dall'angolo tra il ricevitore e la sorgente. In questo caso c'è ancora una differenza sensibile anche all'estremità della sorgente perchè il coseno non è ancora trascurabile, vale 0.89, e quindi il fenomeno dell'interferenza ha un effetto relativo maggiore rispetto al monopolo. Lì il valore atteso è maggiore e quindi si fa influenzare di meno dalla sovrapposizione del segnale; comunque più ci si allontana dalla sorgente più le due figure diventano simili.

Figura 6.38:  $P/P_i$ Figura 6.39:  $P/P_i$ 

**Fondale** Di seguito si riportano le figure di interferenza ottenute in cui le sorgenti siano poste a 200 metri di distanza dal fondale che confermano i risultati precedenti,

infatti anche in questo caso si ottengono delle curve analoghe al monopolo ma con dei valori leggermente diversi.

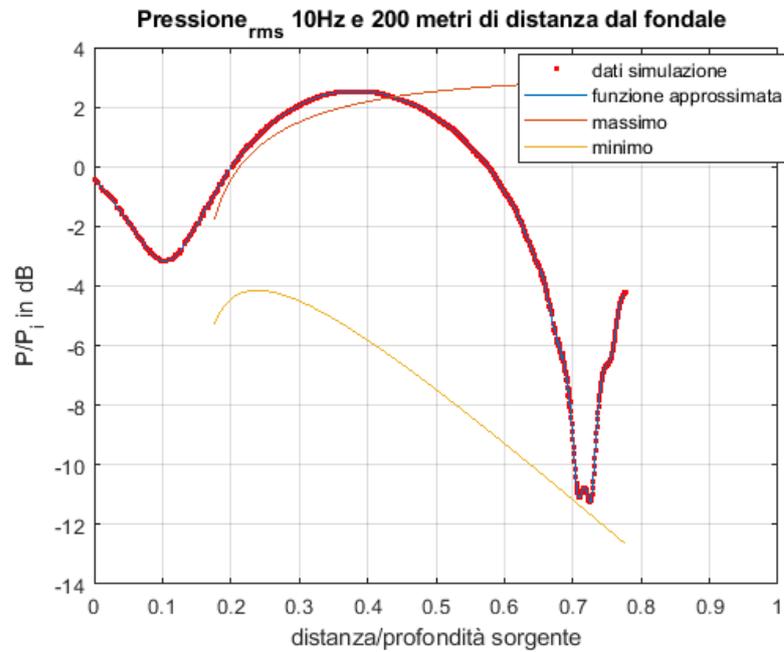


Figura 6.40: Dipolo a 200 metri dal fondale, 10 Hz

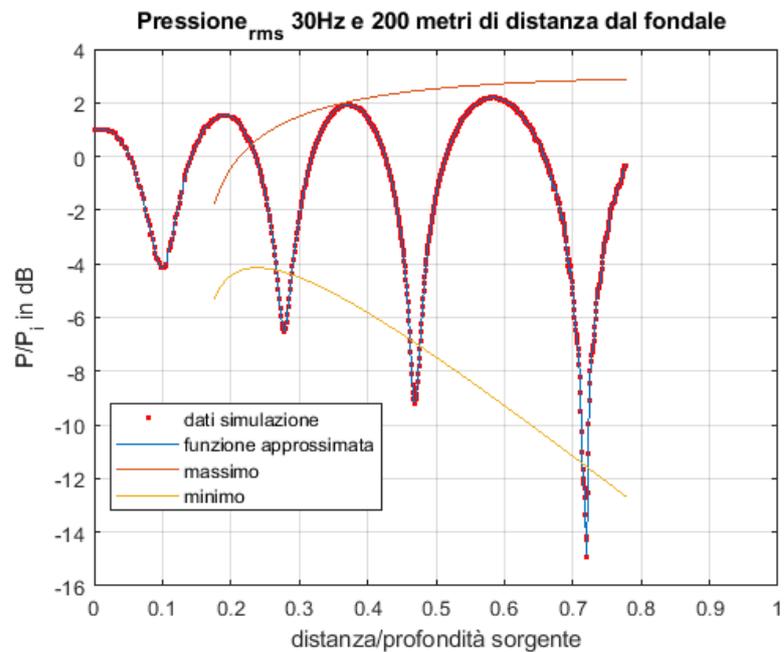


Figura 6.41: Dipolo a 200 metri dal fondale, 30 Hz

**Caso completo** Unendo le due interfacce si ottiene anche in questo caso una figura più caotica e con un'intensità che diminuisce più lentamente rispetto al caso di campo libero. Poi per semplicità non sono state riportate tutte le figure ottenute ma solo una parte in quanto le caratteristiche del fenomeno sono già state individuate e si può sfruttare l'analogia con il monopolo.

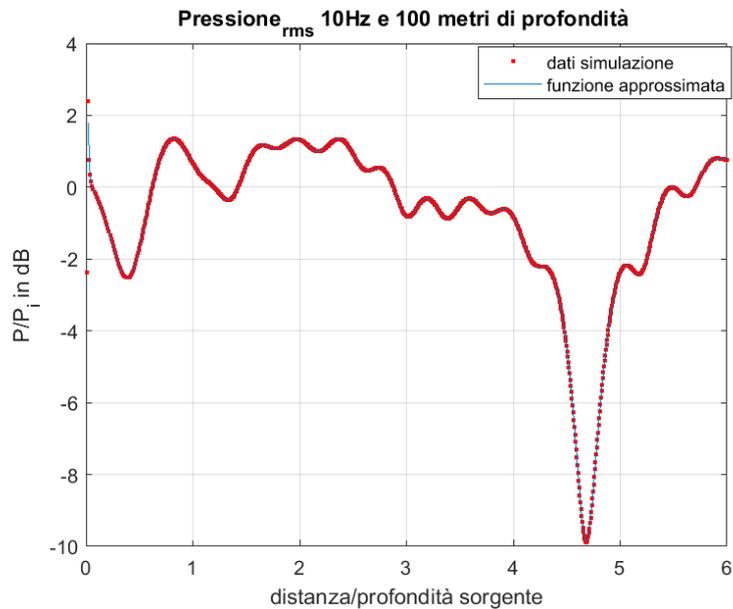


Figura 6.42: Dipolo a 100 metri dal fondale, 10 Hz

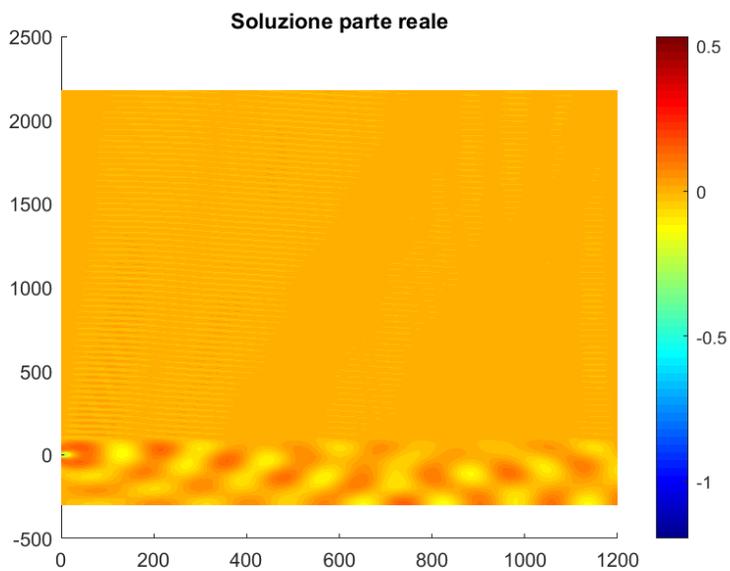


Figura 6.43: Componente reale della pressione, 10 Hz

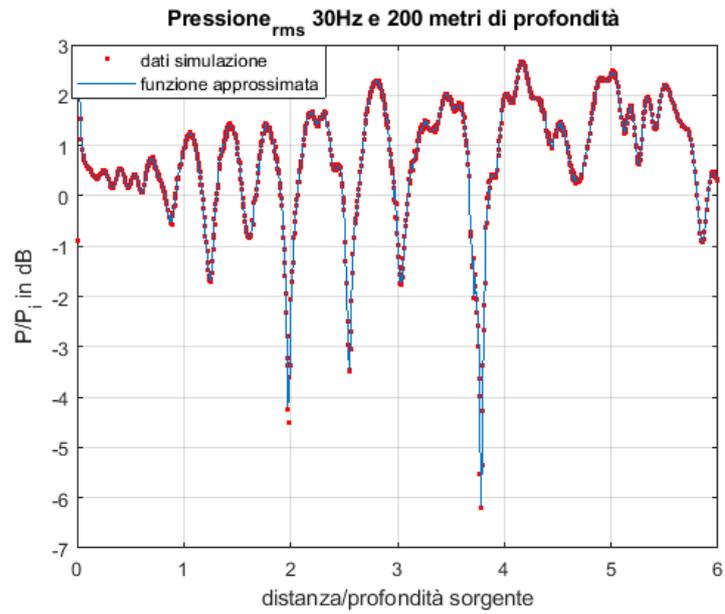


Figura 6.44: Dipolo a 200 metri dal fondale, 30 Hz

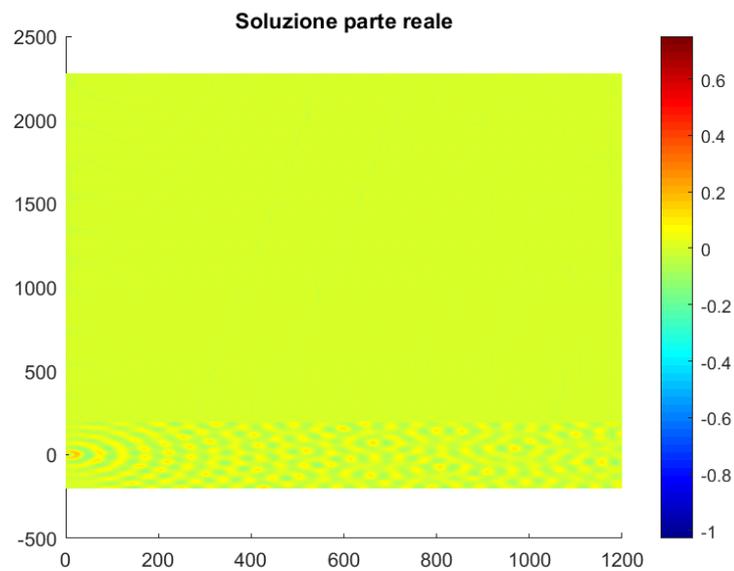


Figura 6.45: Componente reale della pressione, 30 Hz

Infine si riportano i valori del *Transmission Loss* per evidenziare come anche in questo caso oltre i 400 metri l'intensità decade con la forma di un'onda sferica.

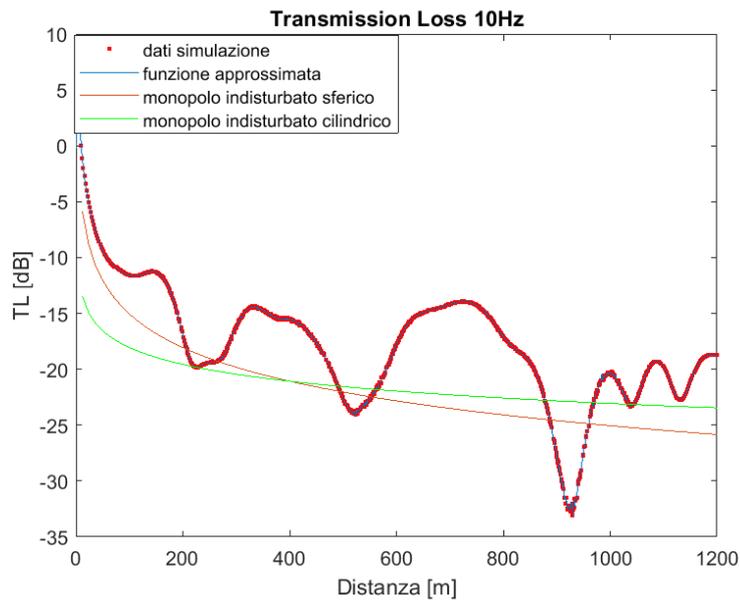


Figura 6.46: Perdita di carico a 200 metri di profondità, 10 Hz

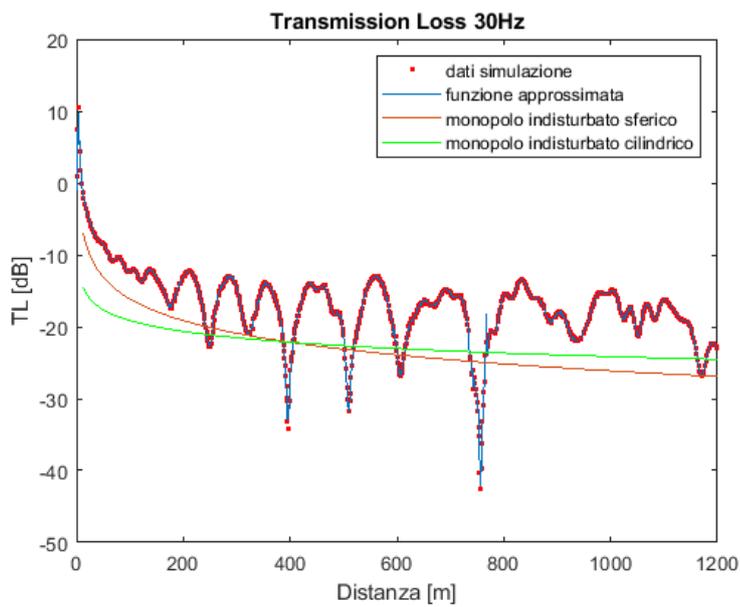


Figura 6.47: Perdita di carico a 200 metri di profondità, 30 Hz

## 6.8 Approssimazione

Prima di passare alle conclusioni bisogna ricordare che queste simulazioni sono state svolte su di un piano in due dimensioni mentre nella realtà i suoni si propagano lungo tutto lo spazio. Per semplificare il problema si sfrutta la simmetria cilindrica del problema e si riscrive l'equazione di Helmholtz ponendo l'asse di simmetria in  $x = 0$ .

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dp}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 p}{d\theta^2} + \frac{d^2 p}{dy^2} + k_0^2 p = 0 \quad (6.60)$$

L'energia acustica presente in un piano verticale rimarrà nello stesso piano perchè si ha una propagazione uniforme, questo implica che il secondo termine dell'equazione si annulla e rimane un'equazione bidimensionale.

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dp}{dr} \right) + \frac{d^2 p}{dy^2} + k_0^2 p = 0 \quad (6.61)$$

Dopodichè visto che la propagazione in un ambiente cilindrico la pressione può essere vista come una funzione che decade con l'inverso della radice quadrata del raggio. E questo nuovo termine porta a modificare 6.61.

$$p = \frac{f}{\sqrt{r}} \quad (6.62)$$

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{f}{4r^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} + k_0^2 f = 0 \quad (6.63)$$

Quindi oltre una certa distanza dall'asse il secondo termine si può trascurare e quindi l'equazione che descrive il campo si riduce ad una semplice equazione di Helmholtz bidimensionale. Nelle simulazioni sono stati utilizzate delle sorgenti con valori molto piccoli, dell'ordine di  $10^{-5}$ , quindi questa condizione è incentivata e il tutto si riduce a:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} + k_0^2 f = 0 \quad (6.64)$$

## Capitolo 7

# Conclusioni

Dai risultati delle simulazioni sul monopolo e il dipolo si possono trarre delle nozioni più generali sulla propagazione del suono sott'acqua. Le informazioni più importanti riguardano la forma dell'intensità e la velocità con cui decade. Infatti si è evidenziato come sia la superficie del mare che il fondale siano delle interfacce altamente riflettenti, indipendentemente dalla lunghezza d'onda, e quindi la forma dell'intensità sia alterata. Normalmente il segnale dovrebbe decadere seguendo una legge iperbolica. Poi nel caso del monopolo il segnale è omnidirezionale mentre nel dipolo dipende dall'orientamento relativo tra l'asse del dipolo e l'osservatore ma la forma della funzione è analoga.

Questo non è più vero se il dominio è limitato dall'aria e dal fondale marino perchè sono dei disturbi che generano delle figure di interferenza. Ovvero è come se fossero presenti più sorgenti fuori fase che si sovrappongono, quindi in base al punto in cui si trova l'osservatore si potrà avere un'interferenza costruttiva oppure distruttiva, in questo caso a zone rumorose si alternano zone silenziose. Il numero dei picchi dipende dalla frequenza con cui emettono le sorgenti ed è proporzionale alla frequenza mentre l'intensità dei picchi e delle valli è indipendente dalla lunghezza d'onda del segnale.

La presenza di due pareti riflettenti in uno spazio ristretto fa sì che le sorgenti apparenti aumentino con la distanza perchè il segnale rimbalza alternativamente su entrambe le superfici amplificando l'effetto delle sorgenti immagine. All'aumentare del numero di sorgenti che si sovrappongono la figura di interferenza diventa più caotica, non si hanno più massimi e minimi regolari ma il segnale diventa più frastagliato perchè i vari segnali si incrociano. Poi all'aumentare della frequenza la sovrapposizione dei massimi e dei minimi si accentua perchè le oscillazioni avvengono in uno spazio più ristretto e quindi

sono presenti più picchi a parità di distanza dalla sorgente.

Ad alte frequenze le oscillazioni sono così frequenti e caotiche che hanno l'effetto di uniformare il segnale. È lo stesso effetto che si riscontra in una sorgente luminosa. Ad esempio la luce del Sole è generata da una serie di sorgenti fuori fase che generano ognuna il proprio disturbo ma poi il segnale che arriva sulla terra è avvertito come un fronte continuo, senza massimi e minimi, perchè l'elevata frequenza e numero di sorgenti uniformano la luce percepita.

L'altra variazione che si evince rispetto al caso di campo libero è la legge con cui decade l'intensità in uno spazio limitato. L'onda che è generata da una sorgente puntiforme ha una forma sferica e in campo libero mantiene questa forma sino all'infinito. Siccome si è supposto che il monopolio, o il dipolo, siano l'unica sorgente presente all'interno del dominio l'energia trasportata dall'onda si deve conservare e di conseguenza l'intensità deve avere un andamento inverso quella della superficie progressiva. Però nel caso di un segnale sott'acqua l'onda ha una forma sferica sino a quando la distanza dalla sorgente diventa uguale alla profondità, da lì in poi la variazione di pressione si propaga come un'onda cilindrica; la direzione lungo  $y$  è bloccata dalla due superfici riflettenti. Quindi la perdita di intensità diminuisce e passa dall'essere proporzionale a  $1/r^2$  a  $1/r$ , e la pressione quadratica da  $1/r$  a  $1/\sqrt{r}$ . Questo significa che un segnale generato con la stessa energia acustica è in grado di viaggiare distanze molto maggiori rispetto al caso di campo libero. Inoltre questo fenomeno è più chiaro all'aumentare della frequenza perchè si evidenzia un segnale più continuo e con meno oscillazioni.

Infine l'ultimo risultato riguarda la differenza di propagazione di un segnale generato da un dipolo e da un monopolio. Si è scelto di utilizzare queste due sorgenti perchè nelle loro combinazioni più complesse rappresentano l'insieme dei suoni che si possono incontrare nell'ambiente marino. In campo libero le due sorgenti differiscono nella direzionalità del segnale e nell'energia acustica irradiata a parità di energia cinetica. Però in un ambiente confinato le pressioni hanno un comportamento molto simile, soprattutto lungo l'asse del dipolo dove  $\cos\theta = 1$ ; ma siccome lo spazio si sviluppa lungo la stessa direzione  $\cos\theta$  assume comunque valori vicino all'unità. La similitudine dei due comportamenti è dovuta ha un effetto combinato dell'interferenza e della funzione coseno. Infatti subito vicino alla sorgente gli effetti della riflessione sono trascurabili perchè c'è una differenza troppo grande di cammino tra i raggi che arrivano direttamente al ricevitore e quelli che prima rimbalzano sulla sorgente, e quest'ultimi sono quelli che hanno un angolo

$\theta$  con i valori più vicini a  $\pi/2$ . Nel caso del dipolo questi raggi sono già trascurabili perchè il coseno dell'angolo di incidenza è vicino a zero. Viceversa il campo lontano è influenzato da raggi che hanno angoli di incidenza sempre più vicini a zero e quindi la differenza tra il segnale generato dal dipolo e dal monopolo risulta trascurabile. Quindi le differenze seppur lievi si hanno nel campo intermedio dove gli effetti delle superfici sono più lievi e quindi si hanno dei valori più vicini al caso di campo libero.

## 7.1 Ulteriori sviluppi

Nelle simulazioni sono stati rappresentati i casi più semplici e esplicativi ma è possibile ottenere un modello più preciso in base all'ambiente e al suono che si vuole studiare. Una prima modifica riguarda la sorgente sonora, infatti è possibile creare delle sorgenti più complesse che emettono un suono più preciso posizionando i vari monopoli in modo opportuno. Ad esempio se si vuole avere un'onda piana si possono allineare un adeguato numero di monopoli in fase in modo da creare un fronte compatto all'interno del dominio voluto.

Invece altre modifiche possono essere apportate al dominio di calcolo. In questo caso si è considerata la velocità del suono costante al variare della profondità ma nel caso reale la velocità dipende dalla temperatura ed è quindi variabile. Questa variazione fa sì che cambi anche la lunghezza d'onda ed si creino dei fenomeni di rifrazione e riflessione come se il segnale attraversasse un mezzo diverso; in alcuni casi si creano delle zone d'ombra perchè il rumore curva prima.

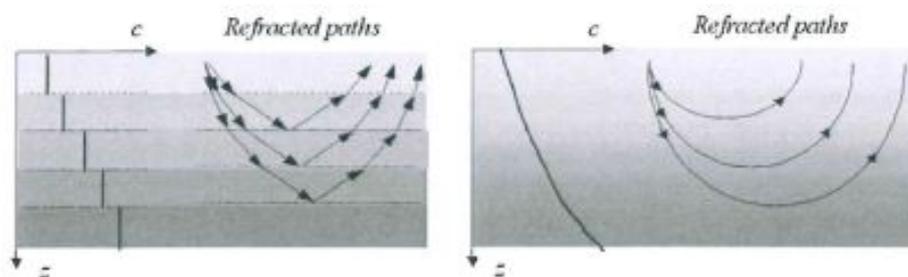


Figura 7.1

Per simulare questa condizione si può suddividere il dominio di calcolo che rappresenta il mare in più rettangoli sovrapposti, ognuno caratterizzato dalla sua lunghezza d'onda che viene imposta attraverso le condizioni di Sommerfeld sui lati.

Un'altra caratteristica del dominio che si può modificare è il fondale. In questo caso è stato approssimato come una superficie riflettente ma le sue capacità di assorbimento e riflessione dipendono molto dal materiale da cui è costituito e anche dall'angolo di incidenza con cui arriva il segnale. Infatti il fondale è formato da delle piccole imperfezioni che creano un effetto di backscattering che modifica sia la forma che l'intensità del segnale riflesso, in base all'angolo con cui arriva l'onda si ha una diversa interazione con le imperfezioni. In figura 7.2 si mostra un esempio della coefficiente di riflessione al variare dell'angolo di incidenza e della conformazione della superficie. Quindi la de-

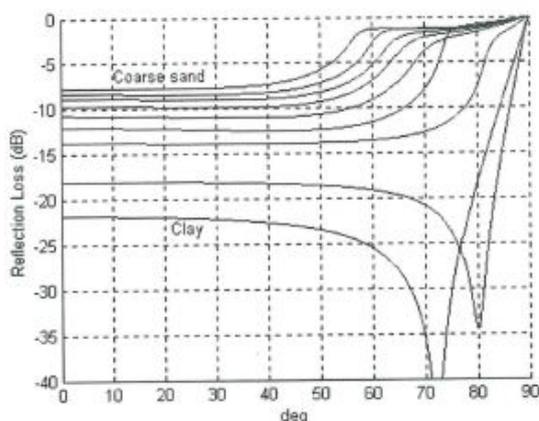


Figura 7.2: Coefficiente di riflessione al variare dell'angolo e del composto

rivata della pressione normale alla superficie varia in base all'angolo di incidenza con la sorgente. Invece l'importanza del backscattering dipende anche dalla frequenza, e per bassi valori si può trascurare siccome la lunghezza d'onda è molto maggiore delle imperfezioni.

Infine ai rumori generati dalle sorgenti acustiche bisogna aggiungere quelli ambientali. Quest'ultimi non sono controllabili ma sono stati identificati e classificati in base alla frequenza di emissione. In totale il rumore è stato diviso in cinque fasce; da frazioni di Hertz fino a decine di migliaia

La prima fascia comprende i valori al di sotto del singolo Hertz, ed è quella che presenta i valori di pressione più alta. Infatti la causa di questo rumore è l'attività sismica. La seconda banda si estende sino a 20Hz e presenta una pendenza negativa di 30dB per ogni decade, la causa più probabile è la turbolenza oceanica. Nella terza banda il rumore è abbastanza stabile al variare della frequenza e l'origine di questi disturbi acustici è il traffico navale in lontananza. La quarta banda contiene lo spettro di

Knudsen ed è particolarmente importante vicino alla superficie in quanto il rumore è generato dall'interazione della superficie oceanica con vento e pioggia; questi segnali vengono analizzati per studiare il meteo. Infine l'ultima banda rappresenta i rumori termici, ovvero le oscillazioni di pressione generate dall'agitazione molecolare del mare ed è l'unica zona in cui si ha un aumento della pressione all'aumentare della frequenza.

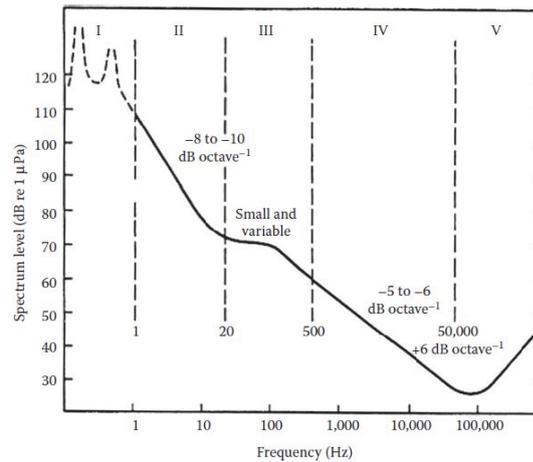


Figura 7.3: Coefficiente di riflessione al variare dell'angolo e del composto

Quindi per svolgere uno studio dell'impatto ambientale di una sorgente acustica, come ad esempio una turbina, bisogna individuare i meccanismi fondamentali che sono la causa della variazione di pressione, e dopo aver svolto i calcoli in condizioni di campo silenzioso bisogna sommare anche i rumori ambientali registrati nella porzione di mare interessata.

# Bibliografia

Charles I. Goldstein. *The numerical solution of Underwater Acoustic Propagation Problems Using Finite Difference and Finite Element Methods*. NLR Report 8820 1984.

J.A. DeSanto. *Ocean Acoustics*. Springer-Verlag, 1979.

Oshoke W. Ikpeha, Felipe Soberon, Stephen Daniels. *Modelling the propagation of Underwater Acoustic Signals of a Marine Energy Device Using Finite Element Method* . International Conference on Renewable Energies and Power Quality, 2014.

X. Lurton. *An introduction to underwater acoustics : principles and applications*. Springer, 2002.

A. Ivakin. *Modelling of sound scattering by the sea floor*. Le Journalde Physique IV, vol.4 ,1994.

A. Bayliss, C.I. Goldstein, E. Turkel. *The Numerical Solution of the Helmholtz equation for wave propagation problems in underwater acoustics*. Com. & Maths.with Appls., vol 11 , 1985.

L. Bjørnø *Applied Underwater Acoustics* . Elsevier, 2017.

Nicola Jones. *The quest for quieter seas* . Nature, vol 568, 2019.

L Weilgart. *The impact of Ocean Noise Pollution on Fish and Invertebrates* . Oceancare, 2018.

Donald Ross. *Mechanics of Underwater Noise*. Pergamon Press, 1976.

- Michael A. Gottlieb, Rudolf Pfeiffer. *The Feynman Lectures on Physics*. California Institute of Technology, 2010.
- W.K. Blake. *Mechanics of Flow-induced Sound and Vibration, volume I*. Academic Press, 1986.
- D.C. Champeney. *A Handbook of Fourier Theorems*. Cambridge University Press, 1987.
- A.P. Dowling and J.E. Ffowcs Williams. *Sound and Sources of Sound*. Ellis Horwood Publishers, 1983.
- M.J. Lighthil. *The propagation of sound through moving fluids*. Journal of Sound and Vibration, 1972.
- A.R. Paterson. *A First Course in Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1983.
- C. C. Mei. *Wave Propagation*. MIT notes, 2004.
- R. A. Mangiarotty, B.A. Turner. *Wave Radiation Doppler effect correction for motion of a source, observer and the surrounding medium*. Journal of Sound and Vibration, 1967.
- R. H. MacNeal. *Electric Circuit Analogies for Elastic Structures*. Wiley, 1962.
- H. Boehme, N. P. Chotiros. *Acoustic backscattering at low grazing angles from the ocean bottom*. Journal of the Acoustical Society of America, vol 84, 1988.
- V.O. Knudsen, R. S. Alford, J.W. Emling. *Underwater Ambient Noise*. Journal of Marine Research, vol 7, 1948.
- S.T. McDaniel. *Sea Surface reverberation : A Review*. Journal of Acoustical Society of America, vol 109, 1993.
- G.M. Wenz. *Review of Underwater Acoustics Research: Noise*. Journal of Acoustical Society of America, vol 51, 1972.
- Cook, D. Robert, David S. Malkus, Michael E. Plesha. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, 1989.

Gilbert Strang and George Fix. *An Analysis of the Finite Element Method*. Wellesley-Cambridge Press, 2008.

Paul C. Etter *Underwater Acoustic Modeling and Simulation*. CRC Press, 2018.

M.A. Ainslie and C.L. Morfey. "Transmission loss" and "propagation loss" in *undersea acoustics*. Journal of Acoustical Society of America, vol 118, 2005.

R. Hickling. *Noise control and SI units*.. Journal of Acoustical Society of America, vol 106, 1999.