

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale

in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

Elementi finiti basati sulla RZT per l'analisi di strutture

multistrato curve: sviluppo e verifica



Relatori

Prof. Marco Gherlone

Dott. Melissa Arras

Dott. Manuele Corradi

Candidato

Vincenzo Zarra

matr. s243969

Anno Accademico 2018/2019

Sommario

Introduzione.....	9
1. Refined Zig-Zag Theory, problema e stato dell'arte.	11
1.1. Modellazione e simulazione di strutture laminate e multistrato, con l'uso di elementi finiti.	11
1.2. Teorie successive: Zigzag e Refined Zigzag theory.....	12
1.3. Spostamenti, deformazioni e tensioni.	14
1.4. Equazioni di governo.....	18
1.5. Shear locking e funzioni di forma	19
2. Sviluppo di elementi finiti Quad4 e Tria3 basati sulla teoria RZT per strutture curve. ...	25
2.1. Introduzione del sistema di riferimento locale e della matrice di rotazione.	25
2.2. Introduzione dei gradi di libertà di <i>drilling</i>	28
2.2.1. Elemento finito piastra basato su RZT.....	30
2.2.2. Deformazioni 3D dell'elemento trave RZT	31
2.2.3. Elemento finito trave vincolato, basato su RZT, 3 nodi, 15 gdl.....	32
2.2.4. Elemento finito trave vincolato, basato su RZT, 2 nodi, 12 gdl.....	33
2.2.5. Elementi finiti piani shell a 3 nodi (24 gdl) e 4 nodi (32 gdl)	34
2.2.6. Matrici di rigidezza e massa, vettore dei carichi nodali.....	37
2.2.7. Stabilizzazione	39
3. Introduzione degli elementi finiti rigidi e di elementi 0D a massa concentrata di tipo CONM2 (coupled)	44

3.1.	Elementi finiti rigidi di tipo RBAR.....	44
3.2.	Elementi 0D massa concentrata di tipo CONM2	49
4.	Validazione numerica.	50
4.1.	Controllo della correttezza delle funzioni implementate in MATLAB.	50
4.1.1.	Rotazione degli elementi, introduzione del sistema di riferimento locale e matrice di rotazione. 51	
4.1.2.	Introduzione dei <i>drilling dofs</i> per l'analisi di superfici curve.....	53
4.1.3.	Introduzione degli elementi rigidi di tipo RBAR.	57
4.1.4.	Introduzione massa concentrata.....	60
4.2.	Validazione numerica degli elementi finiti basati su RZT.....	63
4.2.1.	Risposta statica.....	65
4.2.2.	Vibrazioni libere.	67
4.2.3.	Comportamento degli elementi basati su RZT con mesh irregolare.....	68
4.3.	Valutazione dell'implementazione delle funzioni aggiunte con RZT.....	70
5.	Validazione sperimentale: analisi numerica e sperimentale di una coppa dell'olio prodotta da General Motors.....	74
5.1.	Descrizione del principio fisico alla base delle analisi modali sperimentali [65]. ...	74
5.2.	Introduzione all'analisi modale sperimentale.....	75
5.2.1.	Tipi di trasduttori della forzante esterna.	76
5.2.2.	Trasduttori della risposta, gli accelerometri.....	77
5.2.3.	Metodo per il calcolo delle forme modali.....	77
5.3.	Prova sperimentale sulla coppa dell'olio prodotta per GM.....	80

5.3.1. Prove sperimentali con Hammer Test: generalità su metodo, allestimento ed esecuzione con la strumentazione a disposizione.	80
5.3.3. Prova sulla seconda coppa.	95
5.4. Confronto tra i risultati numerici e i risultati sperimentali.	96
6. Conclusioni.	100
7. Bibliografia.	101

Indice delle figure

Figura 1 - Notazione e campi di spostamento secondo il modello zig-zag per laminato a tre strati. (a) Notazione. (b) Funzione zig-zag lungo l'asse x_1 . (c) Funzione zig-zag lungo l'asse x_2 .	13
Figura 2 - Spostamenti e cinematica zig-zag per una piastra sottoposta a carico generico.	16
Figura 3 - Topologia e gradi di libertà dell'elemento finito non vincolato (con 6 nodi) [53].	21
Figura 4 - Definizione di $\theta_n, \psi_n, Q_n, s, a_{ij}$ ai lati per elemento finito triangolare [53].	22
Figura 5 - Sono stati introdotti i sistemi di riferimento locali per ogni elemento.	26
Figura 6 - La rotazione dell'elemento deve tener conto della direzione e verso di ciascun grado di libertà.	27
Figura 7 - Elementi non complanari con 7 dofs per nodo.	29
Figura 8 - elemento finito di tipo trave basato su RZT: topologia e variabili cinematiche.	31
Figura 9 - Elemento finito trave RZT non vincolato: topologia e gradi di libertà nodali.	33
Figura 10 - Elemento finito trave RZT vincolato: topologia e gradi di libertà nodali.	34
Figura 11 - Elementi finiti RZT: topologia e variabili cinematiche.	35
Figura 12 – Elementi finiti Tria e Quad vincolati: topologia e gradi di libertà nodali.	37
Figura 13 - Elementi finiti RBAR. la distanza tra due punti rimane invariata durante la deformazione e a deformazione avvenuta.	45
Figura 14 - Struttura esempio. In azzurro le travi, in rosso gli elementi rigidi, i nodi 1 e 7 sono incastrati, in 4 c'è una massa concentrata.	47
Figura 15 - Le due piastre usate per verificare la correttezza della rotazione.	52
Figura 16 - Modello test suggerito per superfici a doppia curvatura.	54

Figura 17 - Valutazione convergenza al risultato di riferimento per elementi Quad e Tria.	55
Figura 18 - Geometria per l'analisi dinamica con materiale sandwich.	56
Figura 19 - Quarto di semisfera con un solo RBAR.	58
Figura 20 - Caso valutato per l'implementazione di 2 RBAR.	59
Figura 21 - Caso con un RBAR e una massa concentrata.	61
Figura 22 - Caso con 2 RBAR e una massa concentrata.	62
Figura 23 - Geometria della struttura usata per la valutazione dell'elemento RZT.	64
Figura 24- Modello Nastran 3D: (a) vista d'insieme, (b) vista del particolare in prossimità del foro.	64
Figura 25 - modelli shell, con suddivisione 8x8: (a) mesh con elementi Tria, (b) mesh con elementi Quad.	65
Figura 26 - Problema per valutare la risposta statica: (a) modello con elementi Quad shell (64x64) con carichi. (b) modello con mesh 3D, particolare dei carichi applicati.	66
Figura 27 - Mesh usate per valutare l'effetto di elementi distorti e con elementi di forma mista.	69
Figura 28 – Modello 2D usato per la verifica del comportamento degli elementi basati su RZT, con RBAR e massa concentrata. Mesh 64x64.	71
Figura 29 - Modello 3D usato per la validazione di RBAR e massa concentrata con elementi RZT.	71
Figura 30 - Particolare della prima forma modale calcolata con Nastran, dettaglio dei nodi vincolati dagli RBAR.	72
Figura 31 - Flow chart per analisi modale sperimentale [65]	76

Figura 32 - La risposta in frequenza di un impulso reale. Quella di un impulso ideale sarebbe una funzione costante nel dominio delle frequenze. [65]	77
Figura 33 - Esempio di una trave per il calcolo delle forme modali. [65]	78
Figura 34 - Le posizioni degli accelerometri sono ricavate dal modello dopo averli incollati sulla coppa.	81
Figura 35 - Posizione degli accelerometri. Gli accelerometri dal 15 al 18 sono sui lati della coppa.	82
Figura 36 – Schermata di LMS TestLab Impact Testing per l’input dei punti dove sono posizionati gli accelerometri.	82
Figura 37 - Schermata del software per l'acquisizione, pagina relativa agli accelerometri.	83
Figura 38 - Schermata del software di acquisizione, pagina relativa all'impact scope.	84
Figura 39 - Schermata del software di acquisizione, pagina relativa al trigger.	85
Figura 40 - Schermata del software di acquisizione, pagina relativa al bandwidth.	86
Figura 41 - Schermata del software di acquisizione, pagina relativa al windowing.	86
Figura 42 - Schermata del software di acquisizione, esempio di prima martellata. Si possono notare anche il range di frequenze che si possono reputare misure affidabili, e gli accelerometri coinvolti in questa serie di misure.	87
Figura 43 - Si sono effettuate due prove con set diversi, rappresentati con colori diversi per le due prove.	88
Figura 44 - Set-up della prova con il primo set di accelerometri.	89
Figura 45 - FRF della coppa, prova con tappo.	90
Figura 46 - FRF della coppa, prova senza tappo.	90

Figura 47 - Scelta dell'intervallo in cui valutare le frequenze e le forme modali.	91
Figura 48 - Pannello "stabilization" per la scelta delle frequenze e forme modali da calcolare.	91
Figura 49 - Geometria come appare nella configurazione indeformata.	92
Figura 50 - 1a forma modale per la coppa con tappo.	93
Figura 51 - 2a forma modale per la coppa con tappo.	93
Figura 52 - 3a forma modale della coppa con tappo.	94
Figura 53 - 1a forma modale della coppa senza tappo.	94
Figura 54 - 2a forma modale per la coppa senza tappo.	95
Figura 55 - FRF nei punti 1 e 4 della coppa con tappo.	95
Figura 56 - FRF nei punti 1 e 4 della coppa senza tappo.	96
Figura 57 - Superficie media della coppa.	97
Figura 58 - Vista generale della coppa con mesh.	97
Figura 59 - Particolare della mesh. Si noti che nei punti di raccordo la mesh diventa particolarmente fitta (circa 30 elementi lungo l'arco).	98

Introduzione.

In questo lavoro di tesi si è eseguita la valutazione delle performance e dell'affidabilità di elementi finiti basati sulla Refined Zig-Zag Theory, e la caratterizzazione numerica e sperimentale di una coppa dell'olio progettata da General Motors. Tale coppa dell'olio è costruita con un laminato sandwich con le facce in metallo e il core in materiale viscoelastico, atto a smorzare i picchi delle ampiezze di vibrazione nel fenomeno di risonanza.

Il problema numerico di strutture di tipo sandwich è dovuto alla grande differenza di rigidità e spessore tra gli strati, che arriva ad essere di alcuni ordini di grandezza. Si richiede quindi un modello numerico adatto per avere una buona stima delle proprietà dinamiche (nel nostro caso sono le frequenze proprie).

Un'analisi numerica con elementi finiti 3D sarebbe la soluzione che darebbe i risultati più affidabili, ma con un costo computazionale inaccettabile per via del differente spessore, infatti è noto che le performance migliori si hanno quando gli elementi finiti solidi hanno una forma quanto più regolare possibile, e prendendo per esempio elementi cubici si richiederebbe di usare elementi finiti con lati di lunghezza simile almeno alla metà dello spessore dello strato più sottile.

Un'analisi con elementi finiti basati su teorie Layer Wise avrebbe un costo computazionale simile all'approccio con elementi finiti 3D.

La soluzione più conveniente dal punto di vista computazionale resta quindi un approccio 2D con elementi finiti basati su teorie Equivalent Single Layer. Approcciare il problema con la teoria di Mindlin, normalmente usata nei software di analisi FEM commerciali in ambito aerospaziale non tiene conto dell'effetto che la diversa rigidità degli strati ha sulla deformazione, per cui si è valutato l'impiego della teoria cosiddetta Zig Zag, che permette di valutare tale effetto.

Il lavoro è iniziato modificando un programma già esistente, scritto in ambiente MATLAB, precedentemente capace di effettuare l'analisi solo per piastre piane; le modifiche sono consistite nel:

- Permettere di analizzare superfici con qualsiasi tipo di curvatura;
- Permettere l'analisi su mesh effettuate sui programmi commerciali;
- Implementazione di elementi finiti rigidi;
- Implementazione di elementi finiti 0D a massa concentrata.

Le successive implementazioni sono seguite ciascuna da un'analisi di affidabilità delle feature implementate, tramite analisi su modelli "benchmark".

Le analisi hanno riportato che il programma finale scritto in MATLAB effettua correttamente i calcoli, portando risultati simili a quelli che si ottengono in Nastran con elementi finiti 2D effettuando l'analisi con elementi basati sulla teoria di Mindlin, ed elementi finiti 3D HEXA8 per valutare la convergenza e l'affidabilità degli elementi finiti basati su RZT, riportando un errore massimo del 2% sulle prime 10 frequenze proprie tra tutti i casi analizzati.

La parte finale del lavoro di tesi è consistito nell'analisi numerica della coppa, importando la mesh eseguita su programmi commerciali, confrontando i risultati con quelli delle prove sperimentali sulla coppa.

I risultati numerici rappresentano ottimamente quelli sperimentali nonostante lo smorzamento, che non è stato implementato in questo lavoro di tesi, e si è verificata l'affidabilità del modello numerico e la superiorità delle performance rispetto agli elementi finiti usati dai programmi commerciali. La convergenza si è rivelata rapida per mesh regolari e irregolari, con elementi quadrangolari, triangolari e con mesh miste.

1. Refined Zig-Zag Theory, problema e stato dell'arte.

1.1. Modellazione e simulazione di strutture laminate e multistrato, con l'uso di elementi finiti.

Le strutture laminate in composito e strutture a guscio di tipo sandwich sono usate frequentemente nell'ambito aeronautico civile e militare, nei veicoli spaziali e in strutture navali e civili, in quanto presentano caratteristiche specifiche (rigidezza e resistenza) particolarmente alte, oltre a un'alta possibilità di ottimizzazione in seguito a un design adeguato. Il vantaggio della libertà di progettazione costituisce anche il loro punto debole: la presenza di una così ampia possibilità di modellazione, quindi la presenza di gradi di libertà, in fase di progetto, assenti per materiali isotropi, richiede un'analisi particolarmente dettagliata, quindi è fondamentale utilizzare un modello accurato. In particolare, a differenza delle strutture in materiale isotropo, esse sono caratterizzate da un'elevata deformabilità a taglio e anisotropia lungo lo spessore, che costituiscono i principali problemi per una modellazione accurata.

Per strutture a guscio, la scelta più ovvia per la loro analisi consiste nell'usare modelli 2D, per cui si possono avere diversi approcci [1]:

Teorie Equivalent Single Layer (ESL) per cui la distribuzione delle incognite è assunta a priori per l'intero spessore, indipendentemente dalla laminazione, richiedendo un numero minimo di gradi di libertà riducendo la precisione dei risultati che si possono ottenere;

Teorie Layer Wise (LW), in cui la distribuzione delle incognite è definita strato per strato, richiedendo un costo computazionale elevato (simile a quello richiesto dalle teorie 3D), a vantaggio di un'alta precisione.

Tra le teorie ESL, quelle di maggior diffusione sono la Classical Lamination Plate Theory (CLPT) [2], e la First-order Shear Deformation Theory [3,4], basate rispettivamente sul modello di

piastra di Kirchhoff e su quello di Mindlin. I loro punti di forza sono la facilità di implementazione e una buona accuratezza per la valutazione di risposte globali, come deformazioni, frequenze proprie e carichi di instabilità. Tuttavia, tali pregi decadono se la piastra non ha spessore particolarmente piccolo rispetto alle altre dimensioni della struttura, ed elevata anisotropia lungo lo spessore [5-8]. Una soluzione che si è rilevata efficace consiste nell'usare modelli di ordine superiore, quindi aumentando il costo computazionale.

Le teorie LW presentano un'elevata precisione, ma le variabili aumentano all'aumentare degli strati, dando problemi se si devono effettuare analisi non lineari [9-12].

1.2. Teorie successive: Zigzag e Refined Zigzag theory.

Teorie successive presentano compromessi più o meno efficaci tra le teorie appena descritte, e sono le teorie cosiddette Zigzag, appartenenti alla classe delle ESL, quindi le variabili del problema non dipendono dal numero di strati; di queste teorie esistono anche versioni LW. La loro peculiarità consiste nella descrizione dello spostamento con due contributi: uno che descrive lo spostamento del laminato per l'intero spessore, che può essere lineare [13-20] o polinomiale [21-26], e l'altro che descrive la distribuzione di spostamento dovuta alla presenza di strati di diversa rigidità. La valutazione del comportamento della struttura tramite l'aggiunta di una sola variabile, la funzione Zigzag, permette di ottenere risultati con accuratezza simile alle teorie LW e alle teorie di ordine più alto, con costo computazionale inferiore rispetto a queste ultime.

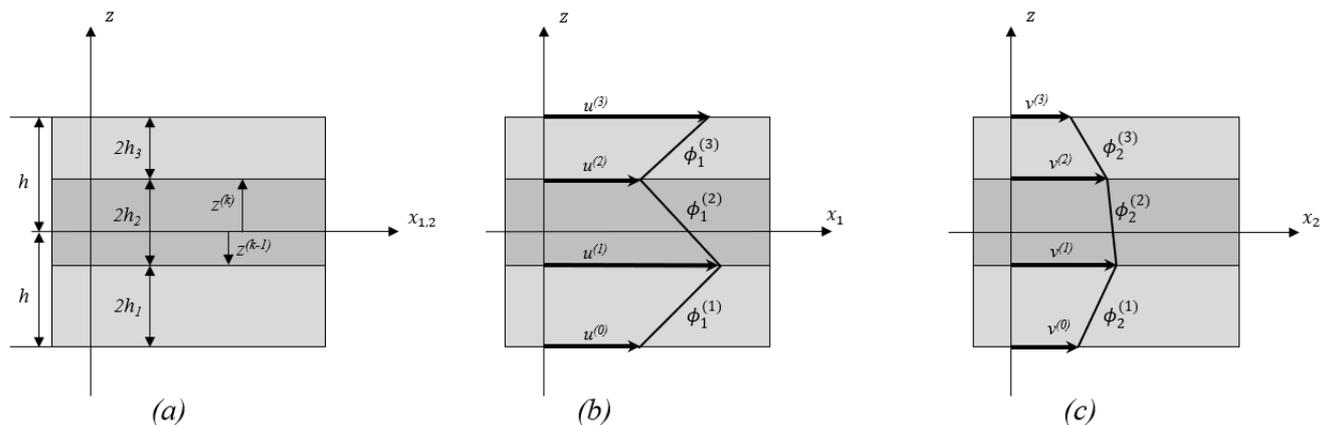


Figura 1 - Notazione e campi di spostamento secondo il modello zig-zag per laminato a tre strati. (a) Notazione. (b) Funzione zig-zag lungo l'asse x_1 . (c) Funzione zig-zag lungo l'asse x_2 .

Nella [20] si era appurato che si presentano almeno due problemi principali: le tensioni a taglio trasversale si annullano erroneamente lungo i bordi incastrati, e che sono richieste funzioni interpolanti per l'elemento di classe C^1 per la variabile di deflessione trasversale, particolarmente problematica per elementi piastra e guscio.

Per risolvere tali problemi è stata formulata la *Refined Zigzag Theory* (RZT) [27-34], che usano come base l'elemento FSDT insieme a nuove funzioni zigzag. Si permette che le tensioni a taglio trasversale siano discontinue lungo le interfacce delle lamine, permettendo una predizione veritiera del valore medio di questa quantità lungo la lamina, insieme alla corretta valutazione delle altre grandezze. Inoltre, questo approccio permette di formulare elementi di classe C^0 efficienti, capaci di fornire risultati affidabili per una gran varietà di sistemi di materiali, inclusi laminati spessi con grande eterogeneità di rigidità lungo lo spessore.

Un ulteriore problema è rappresentato dallo *shear locking*, fenomeno per cui, usando un'integrazione numerica esatta, il modello risulta essere più rigido del reale. Il metodo classico per risolvere questo problema è l'integrazione ridotta, che tuttavia, quando viene applicata a elementi finiti piastra [35], può causare modi di deformazione a energia nulla, oppure detti *modi spuri*, che non hanno senso fisico. Tra gli altri approcci usati per risolvere questo problema (ad esempio vincoli

penalizzanti, rilassamento penalizzante, parametrizzazione, modi di rotazione *a bolla*), quello che verrà usato per l'elemento finito Tria (e in maniera identica per l'elemento finito Quad) descritto in questo capitolo, che costituisce la base del lavoro di tesi quindi necessario all'introduzione, e per gli elementi finiti successivi, che presentano in più la possibilità di modellizzare superfici curve, è il metodo delle *interpolazioni anisoparametriche* [36-51]. Questo metodo, già applicato a travi e piastre, richiede che lo spostamento trasversale sia interpolato da funzioni polinomiali di un ordine superiore a quelle che interpolano le rotazioni di flessione. Dagli elementi anisoparametrici è poi possibile ottenere elementi isoparametrici imponendo opportune condizioni. Il risultato è un elemento finito isoparametrico vincolato, sulla cui energia è possibile effettuare una quadratura Gaussiana completa in modo da avere un elemento finito variazionalmente consistente, con matrici di massa e vettori dei carichi nodali con predizioni più efficaci degli elementi basati sull'integrazione ridotta [35,52].

La prima parte del lavoro di tesi consiste nello sviluppo di un elemento finito, evoluzione di quello descritto nel seguito di questo capitolo [53], capace di modellizzare strutture a guscio con curvatura varia, di cui se ne descrive la formulazione nel capitolo 2, e se ne valutano le performances nel capitolo 4, in un set di condizioni più complesso possibile.

1.3. Spostamenti, deformazioni e tensioni.

In un sistema di riferimento cartesiano, si considera una piastra multistrato, in cui si definisce un sistema di riferimento ortonormale locale, con assi x_1 , x_2 nel piano medio della piastra e z ortogonale ad essi. Lo spessore totale è $2h$ e la quota $z=0$ definisce il piano medio.

Nell'ipotesi di strati perfettamente aderenti, definendo il k -esimo strato con l'apice k , definiamo il campo degli spostamenti nel sistema di riferimento locale $s = [u_1^k \ u_2^k \ u_3^k]$, definito come segue [2]

$$\begin{aligned}
u_1^{(k)}(x_1, x_2, z) &= u(x_1, x_2) + z\theta_1(x_1, x_2) + \phi_1^{(k)}(z)\psi_1(x_1, x_2) \\
u_2^{(k)}(x_1, x_2, z) &= v(x_1, x_2) + z\theta_2(x_1, x_2) + \phi_2^{(k)}(z)\psi_2(x_1, x_2) \\
u_z(x_1, x_2, z) &= w(x_1, x_2)
\end{aligned} \tag{1}$$

Con le variabili cinematiche $\mathbf{u} = [u \ v \ w \ \theta_1 \ \theta_2 \ \psi_1 \ \psi_2]$, $u \ v \ w$ sono le componenti di spostamento lungo gli assi $x \ y \ z$ rispettivamente, $\theta_1 \ \theta_2$ sono le rotazioni della superficie normale al piano lungo la direzione positiva dell'asse x_2 e quella lungo la direzione negativa dell'asse x_1 rispettivamente, mentre $\psi_1 \ \psi_2$ sono le rotazioni zigzag lungo la direzione positiva dell'asse x_2 e quella lungo la direzione negativa dell'asse x_1 rispettivamente, e corrispondono alla misura dell'effetto zigzag, cioè la distorsione tipica che avviene nelle strutture multistrato.

L'effetto della suddetta distorsione, la forma della distorsione normale lungo gli strati, è funzione della laminazione e della rigidità al taglio di ciascuno strato, e viene modellata tramite le funzioni zigzag (ϕ_1^k, ϕ_2^k) .

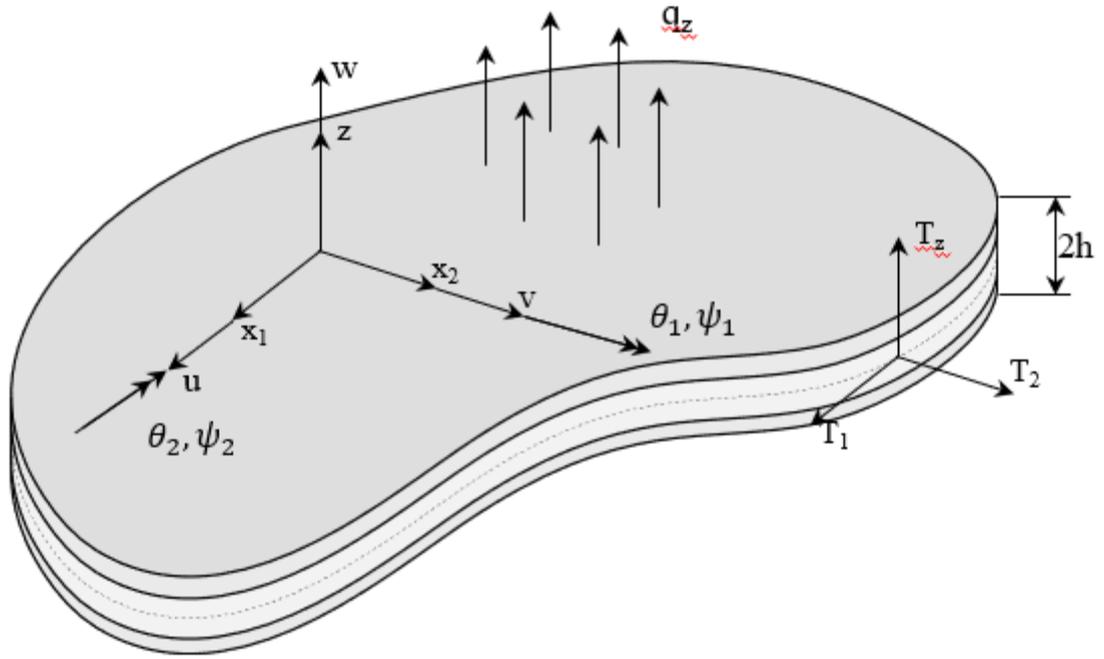


Figura 2 - Spostamenti e cinematica zig-zag per una piastra sottoposta a carico generico.

Le funzioni zig-zag sono definite a partire dagli spostamenti che assumono i punti alle interfacce e sulle superfici superiore e inferiore, u_i e v_i , con $i = 0, 1, \dots, N$ così che le condizioni di omogeneità degli spostamenti zig-zag sulle superfici superiore e inferiore siano identicamente soddisfatte:

$$\begin{aligned} u_{(0)} = \phi_1^{(1)}(-h) = 0, u_{(N)} = \phi_1^{(N)}(+h) = 0 \\ v_{(0)} = \phi_2^{(1)}(-h) = 0, v_{(N)} = \phi_2^{(N)}(+h) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Le funzioni all'interno dello strato invece sono:

$$\left\{ \begin{aligned} u_{(k)} &= u_{(k-1)} + 2h_{(k)}\beta_1^{(k)} \\ v_{(k)} &= v_{(k-1)} + 2h_{(k)}\beta_2^{(k)} \end{aligned} \right\}, (k=1, \dots, N-1) \quad (3)$$

Con

$$\beta_{\alpha}^{(k)} = \phi_{\alpha,z}^{(k)} = \frac{G_{\alpha}}{Q_{\alpha\alpha}^{(k)}} - 1; (\alpha = 1, 2); (k = 1, \dots, N-1) \quad (4)$$

Dove $(\cdot)_{,\alpha} = \partial \cdot / \partial x_{\alpha}$ definisce la derivata parziale lungo la direzione x_{α} , e G_{α} rappresenta la media pesata dei coefficienti di taglio rispetto alla direzione $\alpha = 1, 2$ dei rispettivi coefficienti $Q_{\alpha\alpha}^{(k)}$:

$$G_{\alpha} = \left(\frac{1}{2h} \sum_{k=1}^N \frac{2h^{(k)}}{Q_{\alpha\alpha}^{(k)}} \right)^{-1}; (\alpha = 1, 2) \quad (5)$$

Per cui le funzioni zig-zag sono definite come:

$$\begin{aligned} \phi_1^{(k)} &= \frac{1}{2}(1 - \zeta^k)u_{(k-1)} + \frac{1}{2}(1 + \zeta^k)u_{(k)} \\ \phi_2^{(k)} &= \frac{1}{2}(1 - \zeta^k)v_{(k-1)} + \frac{1}{2}(1 + \zeta^k)v_{(k)} \end{aligned} \quad (6)$$

Dove ζ è la coordinata adimensionata lungo lo spessore definita per ogni strato:

$$\zeta^k = [(z - z_{(k-1)}) / h_{(k)} - 1] \in [-1, 1]; (k = 1, \dots, N) \quad (7)$$

Nel caso di materiale omogeneo a un unico strato, le funzioni zig-zag sono identicamente omogenee, dunque il campo degli spostamenti diventa quello della teoria di Reissner-Mindlin.

Usando le relazioni lineari di deformazione-spostamento, le deformazioni nel piano e trasversali diventano:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(k)} &= u_{,1} + z\theta_{1,1} + \phi_1^{(k)}\psi_{1,1} \\ \varepsilon_{22}^{(k)} &= v_{,2} + z\theta_{2,2} + \phi_2^{(k)}\psi_{2,2} \\ \gamma_{12}^{(k)} &= u_{,2} + v_{,1} + z(\theta_{1,2} + \theta_{2,1}) + \phi_1^{(k)}\psi_{1,2} + \phi_2^{(k)}\psi_{2,1} \\ \gamma_{1z}^{(k)} &= \gamma_1 + \beta_1^{(k)}\psi_1 \\ \gamma_{2z}^{(k)} &= \gamma_2 + \beta_2^{(k)}\psi_2 \end{aligned} \quad (8)$$

Dove $\gamma_{\alpha} \equiv w_{,\alpha} + \theta_{\alpha}$ e $\beta_{\alpha}^{(k)} \equiv \phi_{\alpha,z}^{(k)}$ ($\alpha = 1, 2$). Le componenti di deformazione nel piano e trasversali sono definite dai vettori $\boldsymbol{\varepsilon} \equiv [\varepsilon_{11}^{(k)} \quad \varepsilon_{22}^{(k)} \quad \gamma_{12}^{(k)}]^T$ and $\boldsymbol{\gamma} \equiv [\gamma_{1z}^{(k)} \quad \gamma_{2z}^{(k)}]^T$, rispettivamente.

Le tensioni nel piano e trasversali corrispondenti, $\boldsymbol{\sigma} \equiv [\sigma_{11}^{(k)} \quad \sigma_{22}^{(k)} \quad \tau_{12}^{(k)}]^T$ e $\boldsymbol{\tau} \equiv [\tau_{1z}^{(k)} \quad \tau_{2z}^{(k)}]^T$, possono essere calcolate tramite le equazioni costitutive:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{Q}\boldsymbol{\gamma}\end{aligned}\tag{9}$$

Dove $\mathbf{C} \equiv [C_{ij}^{(k)}]$ ($i, j = 1, 2, 6$) e $\mathbf{Q} \equiv [Q_{\alpha\beta}^{(k)}]$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) sono le matrici dei coefficienti di rigidezza trasformati nel sistema di coordinate (x_1, x_2, z) , e relative alla condizione di stress 2D (plane-stress) che ignorano lo stress normale ($\varepsilon_{zz} = 0$).

1.4. Equazioni di governo

Le equazioni di governo per la teoria RZT sono ottenute dal principio di D'Alembert:

$$\int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} + \delta \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\tau}) dV = - \int_V \delta \mathbf{s}^T \boldsymbol{\rho} \quad \mathcal{W}_e \tag{10}$$

Dove V è il volume della piastra, \mathcal{W}_e è il lavoro dei carichi esterni e ρ è la densità. Sostituendo le equazioni (1), (8), (9) nell'equazione (10) e integrando lungo lo spessore si ottiene:

$$\int_S (\delta \mathbf{e}_m^T \mathbf{A} \mathbf{e}_m + \delta \mathbf{e}_m^T \mathbf{B} \mathbf{e}_b + \delta \mathbf{e}_b^T \mathbf{B}^T \mathbf{e}_m + \delta \mathbf{e}_b^T \mathbf{D} \mathbf{e}_b + \delta \mathbf{e}_s^T \mathbf{G} \mathbf{e}_s) dS = - \int_S \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\Gamma} \quad \mathcal{V}_e \tag{11}$$

dove:

- $\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_s$ sono le misure delle deformazioni zig-zag;
- $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{G}$ sono le corrispondenti matrici di rigidezza;
- $\boldsymbol{\Gamma}$ è la matrice dei coefficienti di inerzia, definita per i gradi di libertà:

$$\mathbf{\Gamma} \equiv \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & I_1 & 0 & I_0^{\phi_1} & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & I_1 & 0 & I_0^{\phi_2} \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 & I_1^{\phi_1} & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 & I_1^{\phi_2} \\ I_0^{\phi_1} & 0 & 0 & I_1^{\phi_1} & 0 & I_2^{\phi_1} & 0 \\ 0 & I_0^{\phi_2} & 0 & 0 & I_1^{\phi_2} & 0 & I_2^{\phi_2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Con:

$$\begin{aligned} I_0 &\equiv \int_{-h}^h \rho^{(k)} dz & I_1 &\equiv \int_{-h}^h \rho^{(k)} z dz & I_2 &\equiv \int_{-h}^h \rho^{(k)} z^2 dz \\ I_0^{\phi_1} &\equiv \int_{-h}^h \rho^{(k)} \phi_1^{(k)} dz & I_1^{\phi_1} &\equiv \int_{-h}^h \rho^{(k)} \phi_1^{(k)} z dz & I_2^{\phi_1} &\equiv \int_{-h}^h \rho^{(k)} (\phi_1^{(k)})^2 dz \\ I_0^{\phi_2} &\equiv \int_{-h}^h \rho^{(k)} \phi_2^{(k)} dz & I_1^{\phi_2} &\equiv \int_{-h}^h \rho^{(k)} \phi_2^{(k)} z dz & I_2^{\phi_2} &\equiv \int_{-h}^h \rho^{(k)} (\phi_2^{(k)})^2 dz \end{aligned} \quad (13)$$

L'equazione di Eulero-Lagrange del moto per teoria RZT e il set di condizioni al contorno può essere ricavato integrando per parti.

È ora possibile formulare un elemento finito variazionalmente consistente dato il principio variazionale, Eq. (11), impiegando funzioni di forma continue di tipo C^0 per l'interpolazione delle variabili cinematiche, poiché l'ordine di derivazione massimo rispetto alle variabili di spostamento è uno nelle componenti di deformazione descritte nell'Eq (8).

1.5. Shear locking e funzioni di forma

Lo shear locking è un fenomeno numerico per cui, per piastre molto sottili, la rigidità risulta essere superiore a quella reale. Tra i vari metodi per evitare questo fenomeno, quello scelto in questo caso è l'interpolazione anisoparametrica, in particolare la funzione di forma del grado di libertà di spostamento uniforme verticale w è di tipo polinomiale, di un grado più alto di quelle usate per i gradi di libertà di rotazione (tale approccio è usato anche per l'evoluzione di questo elemento finito, che contempla oltre ai 7 gradi di libertà già citati, anche quelli relativi al drilling, con la differenza che tutti gli spostamenti uniformi sono interpolati con polinomi parabolici).

Si descrive il procedimento usato per formulare l'elemento finito triangolare già esistente (per quello quadrangolare il procedimento è identico) e disponibile per le analisi di piastre piane in MATLAB [53].

Si descrivono le funzioni di forma per i vari gradi di libertà, che, come già anticipato, sono lineari per gli spostamenti uniformi nel piano e per le rotazioni, mentre è parabolica per il grado di libertà di spostamento verticale w :

$$\begin{aligned}
u(x_1, x_2) &= \sum_i u_i L_i(x_1, x_2) & v(x_1, x_2) &= \sum_i v_i L_i(x_1, x_2) & w(x_1, x_2) &= \sum_k w_k P_k(x_1, x_2) \\
\theta_1(x_1, x_2) &= \sum_i \theta_{1i} L_i(x_1, x_2) & \theta_2(x_1, x_2) &= \sum_i \theta_{2i} L_i(x_1, x_2) \\
\psi_1(x_1, x_2) &= \sum_i \psi_{1i} L_i(x_1, x_2) & \psi_2(x_1, x_2) &= \sum_i \psi_{2i} L_i(x_1, x_2)
\end{aligned} \tag{14}$$

Si formula un elemento finito anisoparametrico, con numero di nodi pari al doppio dei vertici (si aggiungono come nodi i punti medi di ogni lato, in modo da poter interpolare la funzione di forma parabolica usata per lo spostamento verticale). In questo modo la matrice delle funzioni di forma \mathbf{N} risulta essere:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} [L_i] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [L_i] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & [P_k] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [L_i] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [L_i] & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [L_i] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [L_i] \end{bmatrix} \tag{15}$$

E il vettore dei gradi di libertà nodali è:

$$\mathbf{u}^e = [\{u_i\}^T \quad \{v_i\}^T \quad \{w_k\}^T \quad \{\theta_{1i}\}^T \quad \{\theta_{2i}\}^T \quad \{\psi_{1i}\}^T \quad \{\psi_{2i}\}^T] \tag{16}$$

Con $i = 1 - 3$ e $k = 1, m_{12}, 2, m_{23}, 3, m_{31}$, i vettori $[L_i]$ e $[P_k]$ sono i vettori delle coordinate parametriche d'area e delle funzioni di forma rispettivamente, e $\mathbf{0}$ sono vettori nulli.

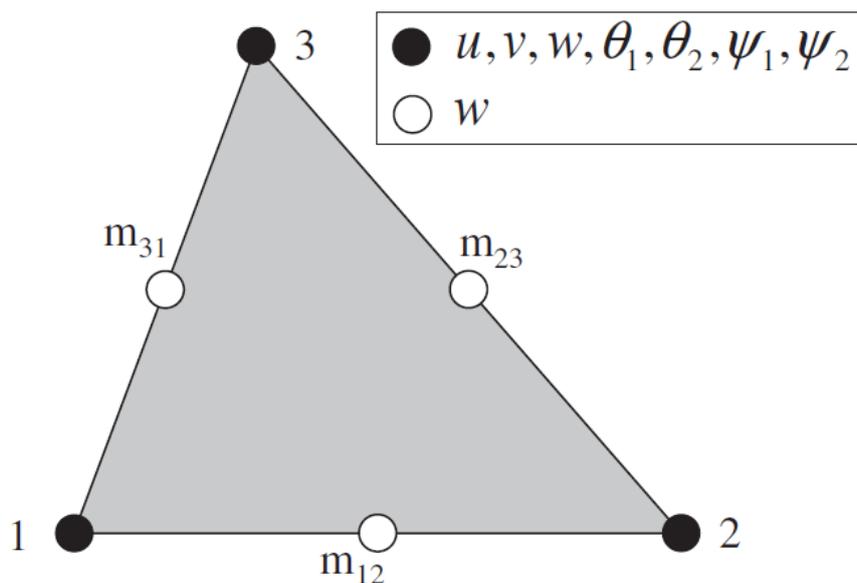


Figura 3 - Topologia e gradi di libertà dell'elemento finito non vincolato (con 6 nodi) [53].

Per ottenere un elemento finito triangolare a tre nodi occorre imporre un vincolo. Le scelte possibili sono descritte nelle seguenti:

$$\begin{aligned}
 & \gamma_{nz} = w_{,s} + \theta_n \\
 - & \frac{\partial \gamma_{nz}}{\partial s} = 0
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
 & \eta_{nz} = \gamma_{nz} - \psi_n \\
 - & \frac{\partial \eta_{nz}}{\partial s} = 0
 \end{aligned} \tag{18}$$

Tra le due, si è verificato che la seconda risulta più efficace.

Le rotazioni θ_n e le ampiezze delle funzioni zigzag ψ_n orientate lungo la normale nel piano a ciascun lato sono espresse in funzione delle corrispondenti variabili cinematiche e dell'angolo α_{ij} :

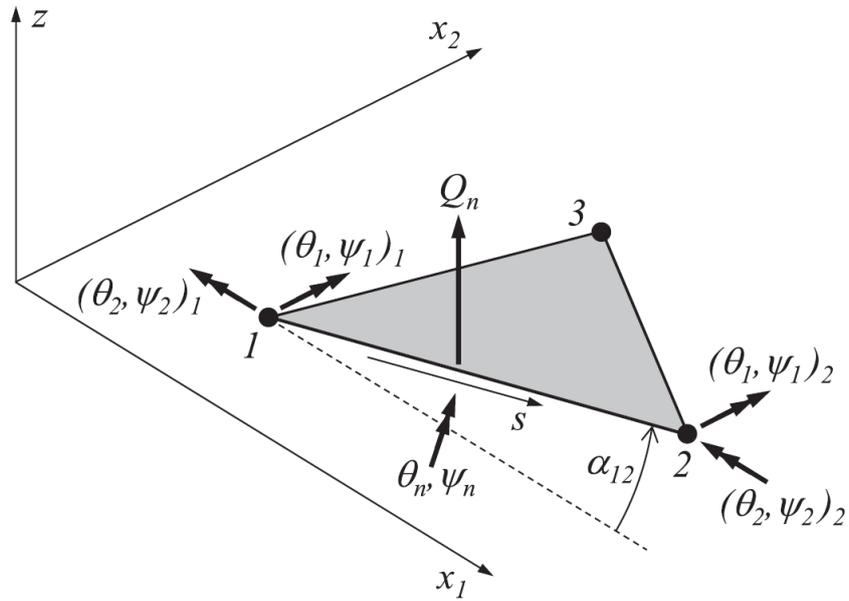


Figura 4 - Definizione di $\theta_n, \psi_n, Q_n, s, \alpha_{ij}$ ai lati per elemento finito triangolare [53].

$$\begin{aligned}\theta_n &= \theta_1 \cos(\alpha_{ij}) + \theta_2 \sin(\alpha_{ij}) \\ \psi_n &= \psi_1 \cos(\alpha_{ij}) + \psi_2 \sin(\alpha_{ij})\end{aligned}\quad (19)$$

Si noti che per questo elemento finito θ_n e ψ_n indicano quantità normali a ciascun lato nel piano dell'elemento, da non confondere con quelle che nel capitolo 3 indicheranno invece le componenti delle rotazioni (uniformi e zigzag rispettivamente) normali al piano dell'elemento, θ_z e ψ_z .

La freccia nella mezzeria di ogni lato risulta:

$$\begin{aligned}w_{m_{ij}} &= \frac{w_i + w_j}{2} + \frac{x_{2j} - x_{2i}}{8} [(\theta_{1j} + c\psi_{1j}) - (\theta_{1i} + c\psi_{1i})] + \\ &+ \frac{x_{1j} - x_{1i}}{8} [(\theta_{2j} + c\psi_{2j}) - (\theta_{2i} + c\psi_{2i})]\end{aligned}\quad (20)$$

L'interpolazione dello spostamento trasversale nella (14) è quindi rappresentabile come:

$$w(x_1, x_2) = \sum_i w_i L_i(x_1, x_2) + \alpha \sum_{i=1}^3 ((\theta_{1i} + c\psi_{1i}) L_{1i} + (\theta_{2i} + c\psi_{2i}) L_{2i}) \quad (21)$$

con

$$L_{1i} = \frac{L_i}{2} (b_k L_k - b_j L_k) L_{2i} = \frac{L_i}{2} (a_j L_k - a_k L_j) \quad (22)$$

$$a_i = x_{1k} - x_{1j} \quad b_i = x_{2j} - x_{2k}$$

Dove i pedici indicano permutazioni cicliche sui nodi. Nella (21), il termine α è un termine che vale 1 per le approssimazioni paraboliche e 0 per le approssimazioni lineari, mentre il termine c dipende dalla scelta della condizione da applicare per la condensazione, descritte nelle (17) e (18), in particolare quella che dà l'approssimazione migliore, ossia la (18) richiede $c = -1$ con η_{nz} costante su ogni lato; si ottiene dunque la matrice delle funzioni di forma \mathbf{N} nei gradi di libertà descritti dal vettore \mathbf{u}^e già riportato nella (15) :

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} [L_i] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [L_i] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & [L_i] & \alpha c [L_{1i}] & \alpha c [L_{2i}] & \alpha c [L_{1i}] & \alpha c [L_{2i}] \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [L_i] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [L_i] & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [L_i] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [L_i] \end{bmatrix} \quad (23)$$

Con i che varia sui nodi dell'elemento, ovviamente variabili a seconda del tipo di elemento, Quad o Tria.

Da qui si può definire la matrice di rigidezza, di massa e il vettore dei carichi nodali, secondo un procedimento che verrà descritto nel particolare nel paragrafo 3.2.6. per l'elemento finito che contempla anche i gradi di libertà di drilling.

2. Sviluppo di elementi finiti Quad4 e Tria3 basati sulla teoria RZT per strutture curve.

All'inizio di questo lavoro di tesi era già disponibile un programma in ambiente MATLAB per analisi ad elementi finiti che implementava elementi basati su teoria di Mindlin ed elementi basati su RZT per sole superfici piane rettangolari, e mesh regolare, con lati degli elementi paralleli ai lati della piastra per elementi Quad e con una diagonale per gli elementi Tria. Per valutare superfici curve, quindi con elementi disposti in qualsiasi modo nello spazio, descritto dal sistema di riferimento globale, un sistema di riferimento locale e le matrici di rotazione. L'analisi di superfici curve presenta anche il problema che per valutare le rotazioni tra due elementi che non giacciono sullo stesso piano occorre tener conto anche dei gradi di libertà di rotazione intorno alla normale rispetto al piano dell'elemento passante per ogni nodo, i cosiddetti drilling dofs. In questo capitolo viene descritto come si è affrontato ognuno di questi problemi.

2.1. Introduzione del sistema di riferimento locale e della matrice di rotazione.

È stato necessario introdurre inizialmente la possibilità di valutare elementi ruotati rispetto al sistema di riferimento globale, introducendo un sistema di riferimento locale per ogni elemento.

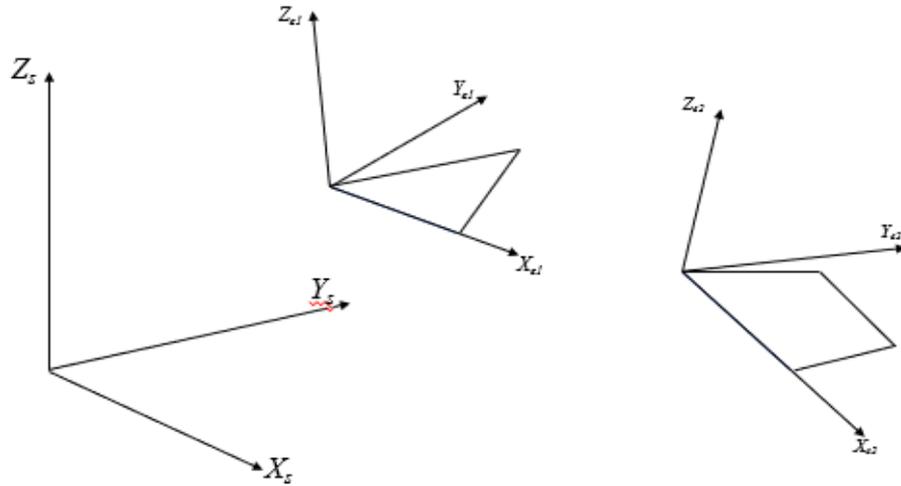


Figura 5 - Sono stati introdotti i sistemi di riferimento locali per ogni elemento.

A tal scopo è stato sufficiente implementare una funzione in MATLAB che costruisca il sistema di riferimento locale. Indicando con (x_{ei}, y_{ei}, z_{ei}) il vettore posizione del nodo i -esimo dell'elemento e -esimo della struttura discretizzata, si trovano i versori delle direzioni x_e, y_e, z_e con la seguente procedura:

- Il versore x_e è dato dalla direzione lungo un lato dell'elemento, quindi

$$x_e = \frac{(x_{e2}, y_{e2}, z_{e2}) - (x_{e1}, y_{e1}, z_{e1})}{\|(x_{e2}, y_{e2}, z_{e2}) - (x_{e1}, y_{e1}, z_{e1})\|} \quad (24)$$

- Il versore z_e è determinato come prodotto vettoriale di x_e con v_e , valutato come:

$$v_e = (x_{e3}, y_{e3}, z_{e3}) - (x_{e1}, y_{e1}, z_{e1}) \quad (25)$$

$$z_e = \frac{x_e \times v_e}{\|x_e \times v_e\|} \quad (26)$$

- Il versore y_e è dato da:

$$y_e = -x_e \times z_e \quad (27)$$

Dove il segno “-“ è necessario per mantenere la terna destrorsa.

È necessario ora introdurre le matrici di rotazione degli elementi. A tal scopo occorre valutare come ogni grado di libertà venga modificato nel passaggio dal sistema di riferimento locale a quello globale.

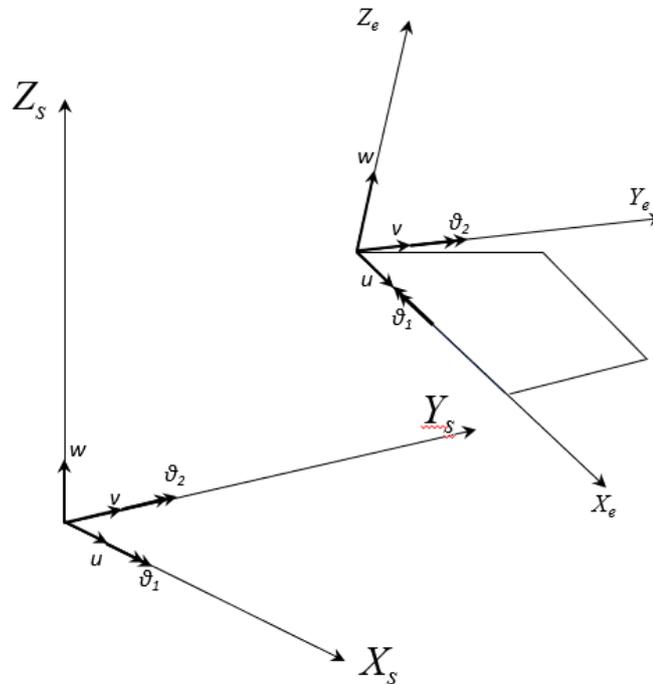


Figura 6 - La rotazione dell'elemento deve tener conto della direzione e verso di ciascun grado di libertà.

La matrice di rotazione si ottiene partendo dai coseni direttori, che corrispondono alle componenti dei versori del sistema di riferimento locale. Si noti che, per come è stato definito il campo di spostamenti, i gradi di libertà che corrispondono alle rotazioni intorno al secondo asse nel sistema locale hanno segno opposto a quello del secondo asse del sistema di riferimento struttura.

Le matrici di rotazione sono matrici diagonali a blocchi, per ogni nodo si valutano le rotazioni dei gradi di libertà di spostamento:

$$\Lambda' = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_e(1) & x_e(2) & x_e(3) \\ y_e(1) & y_e(2) & y_e(3) \\ z_e(1) & z_e(2) & z_e(3) \end{bmatrix} \quad (28)$$

Mentre per i gradi di libertà di rotazione si ha:

$$\Lambda'' = \begin{bmatrix} y_e \\ -x_e \\ z_e \end{bmatrix} \quad (29)$$

Per ogni nodo si ha:

$$\Lambda'_{Mindlin} = \begin{bmatrix} [\Lambda'] & [0] \\ [0] & [\Lambda''] \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\Lambda'_{RZT} = \begin{bmatrix} [\Lambda'] & [0] & [0] \\ [0] & [\Lambda''] & [0] \\ [0] & [0] & [\Lambda''] \end{bmatrix} \quad (31)$$

Quindi, a seconda della teoria si ottiene rispettivamente per elementi Tria ed elementi Quad:

$$\Lambda_{Tria} = \begin{bmatrix} [\Lambda'_T] & [0] & [0] \\ [0] & [\Lambda'_T] & [0] \\ [0] & [0] & [\Lambda'_T] \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\Lambda_{Quad} = \begin{bmatrix} [\Lambda'_T] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [\Lambda'_T] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\Lambda'_T] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\Lambda'_T] \end{bmatrix} \quad (33)$$

Dove nelle (32) e (33) occorre sostituire le (30) o (31) a seconda che la teoria utilizzata sia quella di Mindlin o la RZT.

Si noti che quest'operazione è stata effettuata tenendo conto già della presenza dei gradi di libertà di drilling, presentando nelle sottomatrici di rotazione anche la presenza dei coseni direttori relativi alla terza direzione nel sistema di riferimento locale.

2.2. Introduzione dei gradi di libertà di *drilling*.

Gli elementi nel programma in MATLAB, all'inizio del lavoro di tesi, presentavano solo 7 gradi di libertà, come descritto nel paragrafo precedente, $\mathbf{u} = [u \ v \ w \ \theta_1 \ \theta_2 \ \psi_1 \ \psi_2]$. Questo risulta essere

un problema per modellizzare superfici curve, come descritto nella figura (7), in quanto la presenza di una rotazione in un punto comune a due elementi non può essere valutata correttamente senza tener conto della rotazione intorno anche all'asse normale all'elemento.

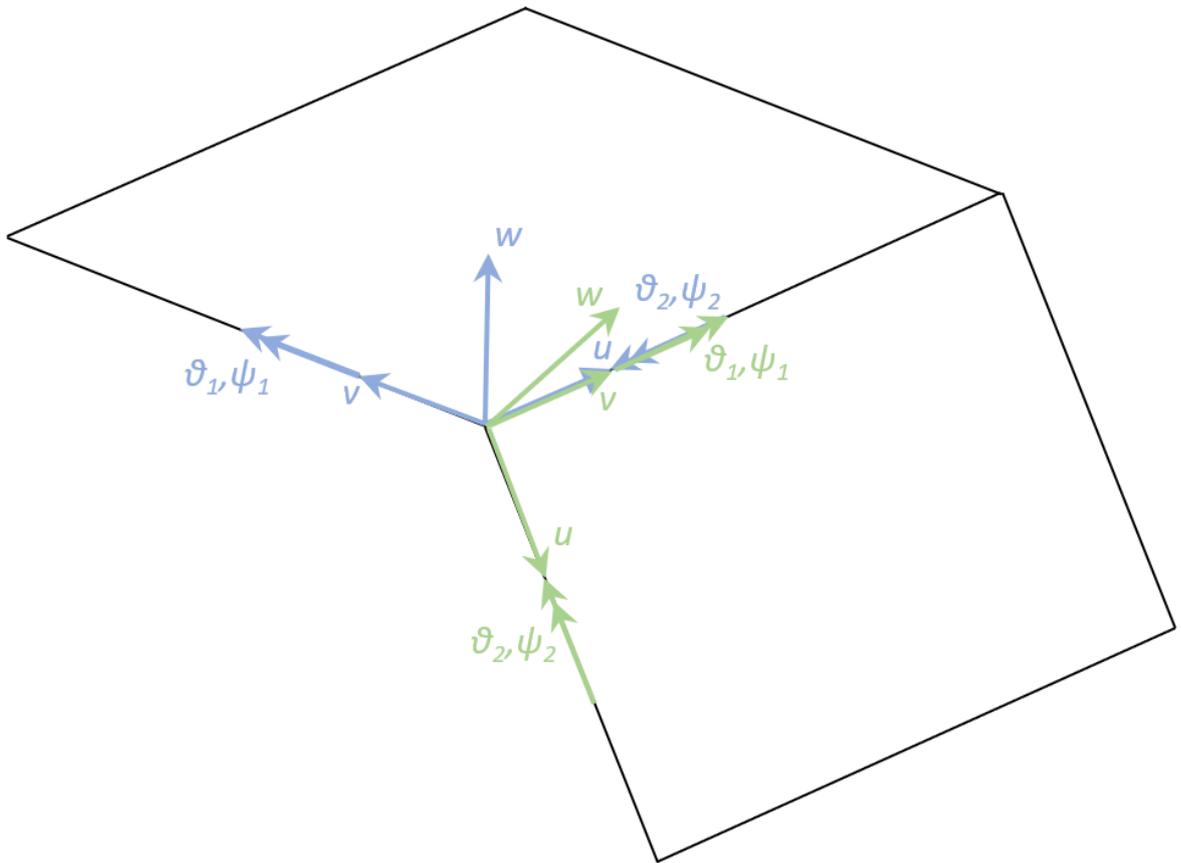


Figura 7 - Elementi non complanari con 7 dofs per nodo.

Bisogna dunque introdurre le rotazioni intorno all'asse normale all'elemento, i *drilling degrees of freedom* (dofs). Allo scopo di introdurre gli ulteriori gradi di libertà, così che per ogni nodo dell'elemento risultino $\mathbf{u} = [u \ v \ w \ \theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3]$, si possono seguire varie strade analizzate in lavori precedenti, sintetizzate nel seguente elenco:

- Aggiungere una rigidezza fittizia alla rotazione di drilling [52];
- Si modifica il campo delle deformazioni valutando modi non conformi [55,56];

- Si modifica il principio variazionale aggiungendo i termini legati alle rotazioni di drilling [57,58];
- Si introducono i gradi di libertà a livello delle funzioni di forma [59,60].

Si è scelto di seguire una strada che contempla il terzo e quarto metodo per la rotazione θ_3 (coarse drilling dof), e il primo metodo per la rotazione ψ_3 (fine drilling dof).

2.2.1. Elemento finito piastra basato su RZT

È stato implementato in ambiente MATLAB un elemento finito basato su RZT, che tuttavia, essendo diretto derivato della FSDT, presenta naturalmente anch'esso il problema dello shear locking, fenomeno che consiste in una rigidità aggiuntiva dovuta a problemi di natura numerica. Il problema è stato risolto usando integrazione gaussiana ridotta con funzioni di forma tali per cui quelle relative alle rotazioni fossero di un ordine inferiore a quelle relative agli spostamenti. Questo approccio è risultato efficace già per elementi finiti di tipo trave, esteso al caso 2D, prima Tria a tre nodi [50], e con la stessa logica si è ottenuto l'elemento Quad a quattro nodi; altro vantaggio nell'uso di questo approccio è la possibilità di introdurre i gradi di libertà cosiddetti di drilling, perché si possano ottenere campi di spostamenti completamente compatibili alle interfacce di due elementi adiacenti, migliorando anche le performance nei problemi membranali.

Per ridurre le incognite nodali, che si sono introdotte con l'uso di funzioni di forma quadratiche, si è usata una strategia di condensazione, che consiste nell'imposizione di condizioni agli estremi di ogni lato. Per fare ciò, è stato utile formulare un elemento RZT di tipo trave, derivato dall'elemento basato sulla teoria di Timoshenko, con campo di spostamento quadratico, per poi assemblare opportunamente gli elementi in modo da ottenere gli elementi Tria e Quad.

2.2.2. Deformazioni 3D dell'elemento trave RZT

Si consideri un sistema di riferimento ortonormale (r, s, n) costruito su una trave in composito, multistrato, con comportamento lineare elastico, di lunghezza L lungo l'asse r , che va dal nodo 1 al nodo 2, l'asse n diretto lungo la direzione di laminazione, l'asse r completa la terna (figura 8). Si può dunque esprimere il campo degli spostamenti basato su RZT rispetto al sistema di coordinate, in funzione delle 6 variabili cinematiche.

$$\begin{aligned} u_r^{(k)}(r, s, n) &\equiv u_r(r) + n\theta_s(r) - s\theta_n(r) + \phi^{(k)}(n)\psi_s(r) \\ u_s(r, s, n) &\equiv u_s(r) \\ u_n(r, s, n) &\equiv u_n(r) \end{aligned} \quad (34)$$

Le variabili da cui dipende il campo degli spostamenti sono:

- (u_r, u_s, u_n) , ossia gli spostamenti uniformi lungo le tre coordinate;
- (θ_s, ψ_s) , le rotazioni intorno alla direzione positiva dell'asse s , rispettivamente di flessione e zigzag;
- (θ_n) , la rotazione di flessione intorno alla direzione positiva dell'asse n ;

$\phi^{(k)}$ è la funzione zigzag, definita in seguito alla laminazione e alle proprietà del k -esimo strato.

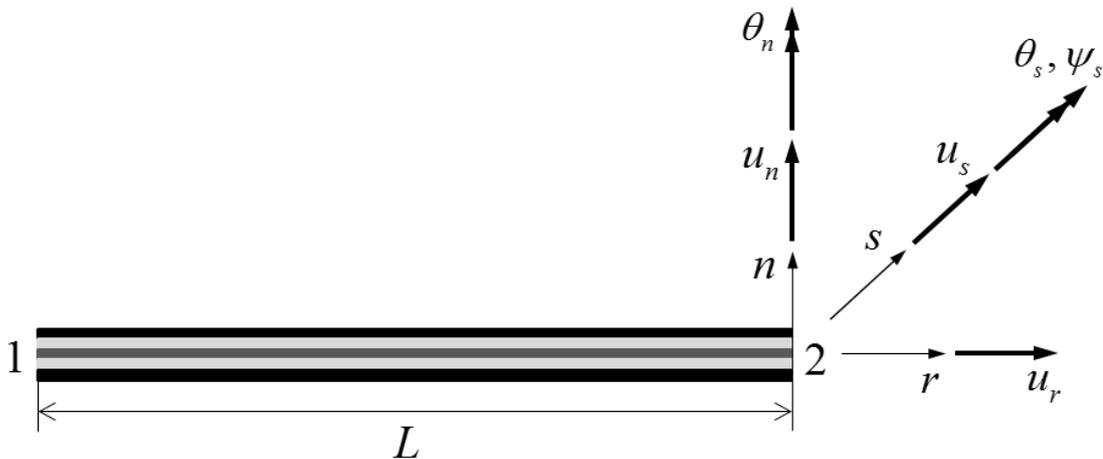


Figura 8 - elemento finito di tipo trave basato su RZT: topologia e variabili cinematiche.

Nonostante si potrebbe supporre l'esistenza della rotazione zigzag ψ_n , in analogia con θ_n , intorno alla direzione positiva dell'asse n , non avrebbe senso fisico dato che la trave è laminata solo lungo la direzione n .

Dalle definizioni di Green-Cauchy, si descrivono:

- La deformazione a taglio nel piano:

$$\gamma_{rs} \equiv \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial s} + \frac{\partial u_s^{(k)}}{\partial r} = -\theta_n + u_{s,r} \quad (35)$$

- La deformazione a taglio trasversale RZT [27,40]:

$$\eta_{rn} \equiv \theta_s + u_{n,r} - \psi_s \quad (36)$$

2.2.3. Elemento finito trave vincolato, basato su RZT, 3 nodi, 15 gdl

Definito il campo di spostamenti, secondo la strategia dell'interpolazione interdipendente, le variabili di spostamento devono essere approssimate con un polinomio di un ordine più alto di quello che approssima le variabili cinematiche di rotazione, per cui, usando polinomi quadratici per gli spostamenti uniformi (u_r, u_s, u_n), per le rotazioni di flessione e zigzag occorre usare funzioni di forma lineari.

$$u_r(r) = \sum_{\ell} u_{r\ell} P_{\ell}^{(r)} \quad \dots \quad \sum_{\ell} \dots P_{\ell}^{(r)} \quad \dots \quad \sum_{\ell} \dots P_{\ell}^{(r)} \quad (37)$$

$$\theta_s(r) = \sum_i \theta_{si} L_i(r) \quad \theta_n(r) = \sum_i \theta_{ni} L_i(r) \quad \psi_s(r) = \sum_i \psi_{si} L_i(r) \quad (38)$$

Con $i = 1,2$ ed $l = 1, m, 2$. I polinomi interpolanti invece sono dati dalle seguenti:

$$L_i = [L_1, L_2] = \left[\frac{1}{2}(1-\xi), \frac{1}{2}(1+\xi) \right]$$

$$P_i = [P_1, P_m, P_2] = \left[\frac{1}{2}(\xi-1)\xi, (1-\xi^2), \frac{1}{2}(1+\xi)\xi \right] \quad (39)$$

Si è introdotta la coordinata adimensionale longitudinale $\xi = \frac{2r}{L} \in [-1,1]$. L'elemento finito ha dunque un totale di 15 gdl, 3 per ogni spostamento e 2 per le rotazioni.

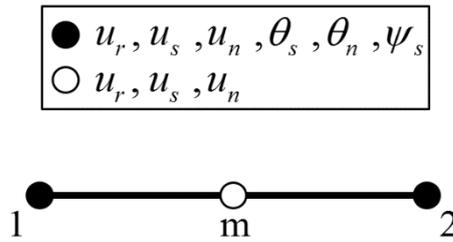


Figura 9 - Elemento finito trave RZT non vincolato: topologia e gradi di libertà nodali.

2.2.4. Elemento finito trave vincolato, basato su RZT, 2 nodi, 12 gdl

La condensazione delle condizioni nel nodo centrale si impongono diversamente dal caso precedente, per via della presenza del grado di libertà di drilling. Si richiedono quindi, oltre a una condizione nel piano $r - s$, anche una condizione per la deformazione a taglio trasversale (nel piano $r - n$)

- Lo spostamento assiale u_r è lineare rispetto alla direzione assiale [50,51,59,60]

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} = 0 \quad (40)$$

- Applicando la strategia dell'interpolazione interdipendente, cioè imponendo che le deformazioni a taglio *nel piano*, eq. (35), e la misura della deformazione *trasversale* a taglio, eq. (36), rispetto alla coordinata assiale r , si richiedono queste due ulteriori condizioni:

$$\frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial \eta_{rn}}{\partial r} = 0 \quad (41)$$

Sfruttando le definizioni (35,36) di deformazione a taglio trasversale e zigzag, tenendo conto delle condizioni (40,41), si possono riscrivere gli spostamenti uniformi nel nodo centrale come:

$$\begin{aligned}
 u_{rm} &= \frac{1}{2}(u_{r1} + u_{r2}) \\
 u_{sm} &= \frac{1}{2}(u_{s1} + u_{s2}) - \frac{L}{8}(\theta_{n2} - \theta_{n1}) \\
 u_{nm} &= \frac{1}{2}(u_{n1} + u_{n2}) + \frac{L}{8}(\theta_{s2} - \theta_{s1}) - \frac{L}{8}(\psi_{s2} - \psi_{s1})
 \end{aligned} \tag{42}$$

Quindi, sostituendo queste nelle (37), si ottengono dunque spostamenti uniformi dipendenti dagli stessi valutati nei soli estremi.

$$\begin{aligned}
 u_r(r) &= \sum_i u_{ri} L_i(r) \\
 u_s(r) &= \sum_i u_{si} L_i(r) - \frac{L}{8}(\theta_{n2} - \theta_{n1}) P_m(r) \\
 u_n(r) &= \sum_i u_{ni} L_i(r) + \frac{L}{8}(\theta_{s2} - \theta_{s1}) P_m(r) - \frac{L}{8}(\psi_{s2} - \psi_{s1}) P_m(r)
 \end{aligned} \tag{43}$$

Si è ottenuto quindi un elemento finito di tipo trave basato su RZT con 2 nodi, ciascuno avente 6 gradi di libertà, tre per gli spostamenti, due per le rotazioni di flessione, una per la rotazione zigzag.

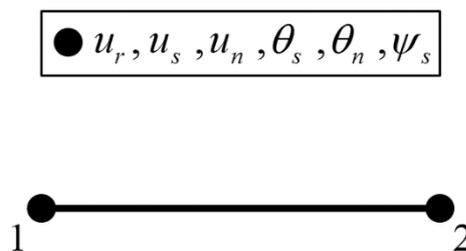


Figura 10 - Elemento finito trave RZT vincolato: topologia e gradi di libertà nodali.

2.2.5. Elementi finiti piani shell a 3 nodi (24 gdl) e 4 nodi (32 gdl)

Gli elementi finiti shell si ottengono dall'assemblaggio di elementi trave, considerando gli elementi shell come strutture reticolari (figura 11) formati dalle travi, i cui assi definiscono il piano di riferimento come il piano medio dell'elemento shell, con l'asse n avente direzione positiva

coincidente con l'asse z del sistema di riferimento del piano. In questo modo, la rotazione θ_n dell'elemento trave coincide con la rotazione θ_z dell'elemento shell.

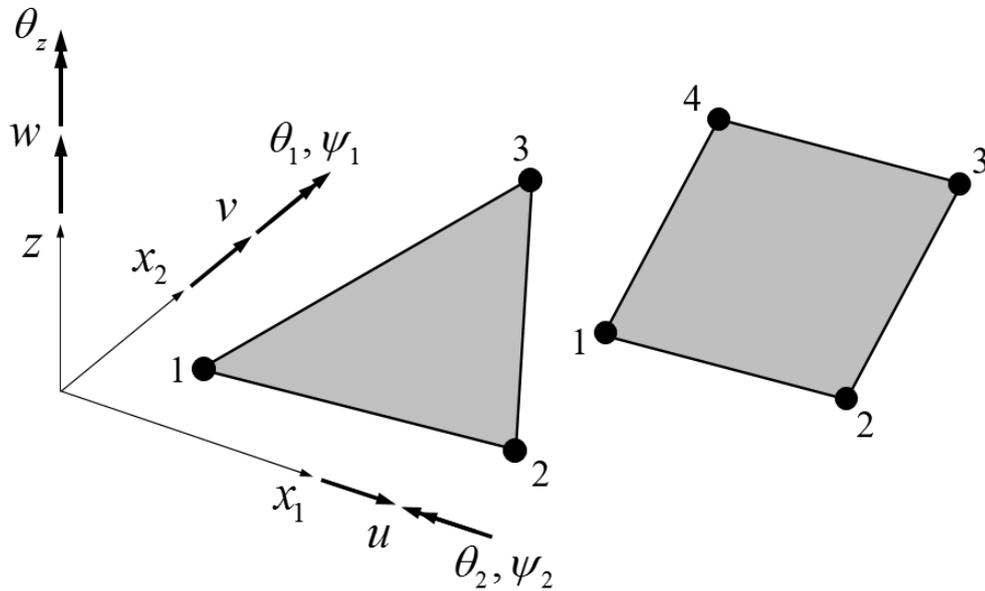


Figura 11 - Elementi finiti RZT: topologia e variabili cinematiche.

Anche per gli elementi shell le funzioni di forma sono quadratiche per gli spostamenti e lineari per le rotazioni:

$$u(x_1, x_2) = \sum_{\ell} u_{\ell} P_{\ell}(x_1, x_2) \quad (44)$$

$$\theta_1(x_1, x_2) = \sum_i \theta_{1i} L_i(x_1, x_2) \quad \theta_2(x_1, x_2) = \sum_i \theta_{2i} L_i(x_1, x_2) \quad \theta_z(x_1, x_2) = \sum_i \theta_{zi} L_i(x_1, x_2) \quad (45)$$

$$\psi_1(x_1, x_2) = \sum_i \psi_{1i} L_i(x_1, x_2) \quad \psi_2(x_1, x_2) = \sum_i \psi_{2i} L_i(x_1, x_2)$$

Con $i = 1, 2, \dots, n$ che varia per il numero di nodi agli angoli, mentre $l = 1, m_{12}, 2, \dots, n, m_{n1}$ varia invece sul numero di nodi agli angoli e in mezzeria.

Le L_i sono le funzioni di forma lineari, coordinate d'area per gli elementi Tria e funzioni bilineari per gli elementi Quad. Analogamente, le P_{ℓ} sono le funzioni di forma quadratiche. Per elementi Tria, considerando che le L_i sono le coordinate d'area:

$$\begin{aligned}
P_i &\equiv L_i(2L_i - 1) \quad (i = 1, 2, 3) \\
P_{ij} &\equiv 4L_iL_j \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, 3 \\ j = 2, 3, 1 \end{array} \right)
\end{aligned} \tag{46}$$

Mentre per gli elementi Quad si usano le funzioni serendipity quadratiche:

$$\begin{aligned}
P_i &\equiv \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(\xi_i\xi + \eta_i\eta - 1) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \\
P_{12} &\equiv \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \\
P_{23} &\equiv \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi) \\
P_{34} &\equiv \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \\
P_{41} &\equiv \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 - \xi)
\end{aligned} \tag{47}$$

Dove (ξ, η) sono le coordinate nel piano normalizzate, e (ξ_i, η_i) sono le coordinate del nodo i -esimo. Si applicano dunque le assunzioni (42), come si è effettuato per gli elementi descritti nel capitolo precedente. Queste assunzioni portano alle seguenti espressioni degli spostamenti:

$$\begin{aligned}
u(x_1, x_2) &= \sum_i u_i L_i(x_1, x_2) + \sum_i \theta_{2i} Q_{2i}(x_1, x_2) \\
v(x_1, x_2) &= \sum_i v_i L_i(x_1, x_2) - \sum_i \theta_{2i} Q_{1i}(x_1, x_2) \\
w(x_1, x_2) &= \sum_i w_i L_i(x_1, x_2) + \sum_i (\theta_{1i} - \psi_{1i}) Q_{1i}(x_1, x_2) + \sum_i (\theta_{2i} - \psi_{2i}) Q_{2i}(x_1, x_2)
\end{aligned} \tag{48}$$

Con Q_{1i}, Q_{2i} definite come segue, per l'elemento triangolare:

$$\left. \begin{aligned}
Q_{1i} &\equiv \frac{L_i}{2} [L_j(x_{1i} - x_{1j}) + L_k(x_{1i} - x_{1k})] \\
Q_{2i} &\equiv \frac{L_i}{2} [L_j(x_{2i} - x_{2j}) + L_k(x_{2i} - x_{2k})]
\end{aligned} \right\} \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, 3 \\ j = 2, 3, 1 \\ k = 3, 1, 2 \end{array} \right) \tag{49}$$

e per l'elemento quadrangolare:

$$\left. \begin{aligned} Q_{1i} &\equiv \frac{1}{8} [P_{ki}(x_{1i} - x_{1k}) + P_{ij}(x_{1i} - x_{1j})] \\ Q_{2i} &\equiv \frac{1}{8} [P_{ki}(x_{2i} - x_{2k}) + P_{ij}(x_{2i} - x_{2j})] \end{aligned} \right\} \begin{cases} i = 1, 2, 3, 4 \\ j = 2, 3, 4, 1 \\ k = 4, 1, 2, 3 \end{cases} \quad (50)$$

In forma compatta si ottiene:

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\mathbf{u}^e \quad (51)$$

con $\bar{\mathbf{u}} = [u, v, w, \theta_1, \theta_2, \theta_z, \psi_1, \psi_2]$, comprende i gradi di libertà descritti nel capitolo precedente, con l'aggiunta di θ_z , mentre \mathbf{u}^e, N sono definiti come segue:

$$\mathbf{N} \equiv \begin{bmatrix} [L_i] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [Q_{2i}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [L_i] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -[Q_{1i}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & [L_i] & [Q_{1i}] & [Q_{2i}] & \mathbf{0} & -[Q_{1i}] & -[Q_{2i}] \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [L_i] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [L_i] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [L_i] & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [L_i] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [L_i] \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$\mathbf{u}^e \equiv [[u_i] \quad [v_i] \quad [w_i] \quad [\theta_i] \quad [\theta_{2i}] \quad [\theta_{zi}] \quad [\psi_{1i}] \quad [\psi_{2i}]]^T \quad (53)$$

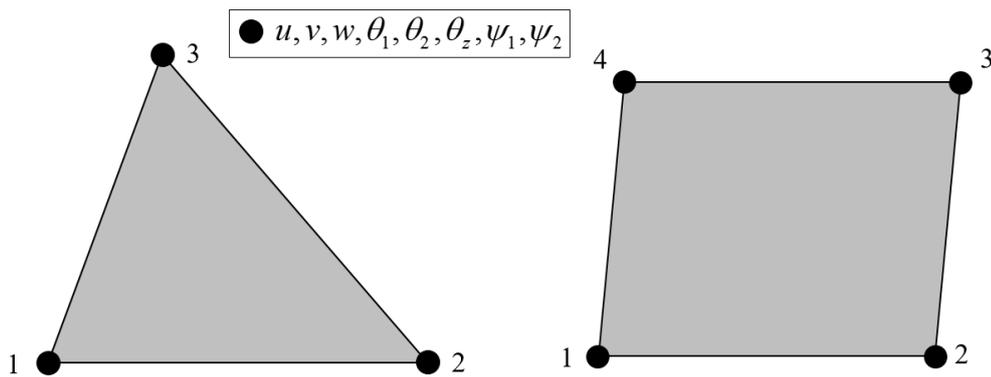


Figura 12 – Elementi finiti Tria e Quad vincolati: topologia e gradi di libertà nodali.

2.2.6. Matrici di rigidezza e massa, vettore dei carichi nodali

Sostituendo $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\mathbf{u}^e$ nelle definizioni delle deformazioni si ottiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_m &\equiv \mathbf{B}_m \mathbf{u}^e \\
\mathbf{e}_b &\equiv \mathbf{B}_b \mathbf{u}^e \\
\mathbf{e}_s &\equiv \mathbf{B}_s \mathbf{u}^e
\end{aligned}
\tag{54}$$

Con $\mathbf{B}_m, \mathbf{B}_b, \mathbf{B}_s$ le matrici delle funzioni di forma opportunamente derivate rispetto alle coordinate locali nel piano, (x_1, x_2) , per le deformazioni rispettivamente membranali, di flessione e di taglio trasversale.

Con l'approssimazione agli elementi finiti, il principio variazionale diventa:

$$\delta \mathbf{u}^{eT} (\mathbf{M}^{e**} \mathbf{t}^e - \mathbf{f}^e) = 0
\tag{55}$$

Che porta all'equazione del moto dell'elemento finito nel sistema di riferimento locale (x_1, x_2, z) .

$$\mathbf{M}^{e**} \mathbf{t}^e - \mathbf{f}^e = \mathbf{0}
\tag{56}$$

Dove sono state definite:

- La matrice di massa dell'elemento \mathbf{M}^e :

$$\mathbf{M}^e \equiv \int_S \tilde{\mathbf{I}} \tilde{\mathbf{N}}
\tag{57}$$

con $\tilde{\mathbf{N}}$ ottenuta dalla \mathbf{N} rimuovendo la riga e la colonna relative al grado di libertà di drilling;

- La matrice di rigidezza \mathbf{K}^e data dalla somma delle rigidezze membranali, flessionali, di accoppiamento e di taglio trasversali, definite rispettivamente come segue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_m^e &\equiv \int_S \mathbf{B}_m^T \mathbf{A} \mathbf{B}_m dS \\
\mathbf{K}_b^e &\equiv \int_S \mathbf{B}_b^T \mathbf{D} \mathbf{B}_b dS \\
\mathbf{K}_c^e &\equiv \int_S (\mathbf{B}_m^T \mathbf{B} \mathbf{B}_b + \mathbf{B}_b^T \mathbf{B}^T \mathbf{B}_m) dS \\
\mathbf{K}_s^e &\equiv \int_S \mathbf{B}_s^T \mathbf{G} \mathbf{B}_s dS
\end{aligned}
\tag{58}$$

Le matrici di rigidezza $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{G}$ sono descritte alla fine di questo capitolo.

- Il vettore dei carichi nodali dell'elemento f^e .

2.2.7. Stabilizzazione

Il grado di libertà di coarse drilling θ_z è stato introdotto a livello delle funzioni di forma già nell'elemento trave, da cui sono derivati gli elementi shell che includono questo effetto.

L'effetto del grado di libertà di zigzag drilling (fine drilling) ψ_z viene invece introdotto espandendo il vettore dei gradi di libertà nodali degli elementi RZT, che quindi risulta essere:

$$\mathbf{q}^e \equiv \left[[u_i] \quad [v_i] \quad [w_i] \quad [\theta_{1i}] \quad [\theta_{2i}] \quad [\theta_{zi}] \quad [\psi_{1i}] \quad [\psi_{2i}] \quad [\psi_{zi}] \right]^T \quad (59)$$

Dunque, si aggiunge una rigidità fittizia relativa al termine corrispondente. Per fare ciò si espandono analogamente le matrici di massa, rigidità e il vettore dei carichi nodali.

Alla ψ_z , dato che consiste in una rotazione, si assegna, analogamente con quanto fatto per il grado di libertà θ_z , una funzione di forma lineare per approssimare il valore all'interno dell'elemento:

$$\psi_z(x_1, x_2) = \sum_i \psi_{zi} L_i(x_1, x_2) = [L_i(x_1, x_2)] \{ \psi_{zi} \} \quad (60)$$

Per la rigidità fittizia si segue un approccio descritto in [52], ivi applicato al grado di libertà θ_z per elementi finiti shell basati su FSDT. Esso consiste nell'imporre una rigidità fittizia sotto forma di termini di penalizzazione. Questo approccio non cambia le funzioni di forma, ma il principio variazionale, che diventa dunque:

$$\Pi^* \equiv \Pi + \lambda_\psi \frac{C_\psi}{2} \int_S (\psi_z(x_1, x_2) - \bar{\psi}_z)^2 dS \quad (61)$$

con $\lambda_\psi = 10^{-5}$ parametro di penalizzazione, il cui valore è suggerito da [52], il termine C_ψ è un termine introdotto per consistenza dimensionale, che vale

$$C_\psi \equiv \sqrt{G_{22}^2 + G_{44}^2} \quad (62)$$

dove G_{22}, G_{44} sono definiti a fine capitolo insieme a G_{11}, G_{33} nella matrice \mathbf{G} , e $\bar{\psi}_z$ valore medio di ψ_z calcolato sull'elemento:

$$\bar{\psi}_z \equiv \frac{1}{S} \int_S \psi_z(x_1, x_2) dS \quad (63)$$

Usando l'approssimazione agli elementi finiti, ψ_z si può scrivere anche come:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_z &= \frac{1}{S} \int_S [L_i(x_1, x_2)] \{\psi_{zi}\} dS \\ &= \frac{1}{S} \int_S [L_i(x_1, x_2)] dS \{\psi_{zi}\} \\ &= [a_i] \{\psi_{zi}\} \end{aligned} \quad (64)$$

si può ora riscrivere il principio variazionale:

$$\Pi^* = \Pi + \frac{1}{2} \{\psi_{zi}\}^T \lambda_\psi C_\psi [K_\psi] \{\psi_{zi}\} \quad (65)$$

con

$$[K_\psi] \equiv \int_S \left([L_i(x_1, x_2)]^T [L_i(x_1, x_2)] - [a_i]^T [a_i] \right) dS \quad (66)$$

Il termine $\lambda_\psi C_\psi [K_\psi]$ viene espanso in $\lambda_\psi C_\psi \mathbf{K}_\psi^e$ e sommato alla amtrice di rigidezza dell'elemento:

$$\tilde{\mathbf{I}} \quad \mathbf{K}_\psi^e \quad (67)$$

Come dimostrato in [50,51], applicando lo schema di interpolazione interdipendente agli spostamenti nel piano, si possono ottenere le funzioni di forma di Allman, le quali, oltre a fornire delle funzioni di forma per i gradi di libertà di drilling, introducono modi di deformazione a energia nulla, anche detti modi spuri. Questi si verificano quando il valore di θ_z assumono lo stesso valore, l'energia di deformazione associata a questi gradi di libertà è nulla, e vanno eliminati affinché sia verificata la convergenza dell'elemento finito.

Il problema del sorgere dei modi spuri si può risolvere con un approccio descritto in [62], che, come descritto in [57], modifica il principio variazionale: si introduce una matrice di stabilizzazione, che rinforza i lati dell'elemento finito, aggiungendo le ipotesi di Kirchhoff per travi snelle. Dalla figura 8 si nota che la deformazione a taglio nel piano valutata nel punto medio è supposta nulla, ottenendo quindi:

$$(\gamma_{rs})_m \equiv (\gamma_{rs})_{r=L/2} = (-\theta_n + u_{s,r})_{r=L/2} = -\frac{1}{2}(\theta_{n1} + \theta_{n2}) + \frac{1}{L}(u_{s2} - u_{s1}) = 0 \quad (68)$$

Che nel caso degli elementi shell RZT ($\theta_{ni} \rightarrow \theta_z$), sovrapponendoli ai lati dell'elemento (tra due nodi consecutivi $i - j$, l'equazione diventa:

$$(\gamma_{rs})_{m_{ij}} = \frac{1}{\ell} (x_{1i}(v_j - v_i) - (x_{2j} - x_{2i})(u_j - u_i)) - \frac{1}{2}(\theta_{zi} + \theta_{zj}) = 0 \quad (69)$$

Con l_{ij} la distanza tra i due nodi consecutivi $i - j$, e x_{1i}, x_{2i} sono le coordinate locali nel piano del nodo i , con i, j che seguono la permutazione ciclica ($i = 1,2,3 j = 2,3,1$ per elementi Tria, $i = 1,2,3,4 j = 2,3,4,1$ per elementi Quad).

La (69) può essere riscritta in forma matriciale esprimendo $(\gamma_{rs})_{m_{ij}}$ in funzione dei gradi di libertà nodali:

$$(\gamma_{rs})_{m_{ij}} = (\mathbf{B}_\gamma^e)_{ij} \mathbf{q}^e = 0 \quad (70)$$

L'equazione (70) può essere rinforzata al livello dell'elemento considerando la somma dei contributi provenienti dai lati:

$$\sum (\gamma_{rs})_{m_{ij}}^2 = \mathbf{q}^{eT} \left(\sum (\mathbf{B}_\gamma^e)_{ij}^T (\mathbf{B}_\gamma^e)_{ij} \right) \mathbf{q}^e = \mathbf{q}^{eT} \mathbf{K}_\delta^e \mathbf{q}^e = 0 \quad (71)$$

In questo modo si è ottenuta una matrice, da sommare alla matrice di rigidezza dell'elemento con opportuni coefficienti di penalizzazione, per cui la matrice di rigidezza dell'elemento aggiornata è:

$$\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{K}_\psi^e + \lambda_\theta C_\theta \mathbf{K}_\theta^e \quad (72)$$

Dove $\lambda_\theta = 10^{-5}$ è un parametro di penalizzazione, e

$$C_\theta \equiv S \sqrt{G_{11}^2 + G_{33}^2} \quad (73)$$

È una costante (unità di misura Joule) introdotta per consistenza dimensionale.

Le matrici di rigidezza $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{G}$ sono [32]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\equiv \int_{-h}^h \mathbf{C}^{(k)} dz \\ \mathbf{B} &\equiv \int_{-h}^h \mathbf{C}^{(k)} \mathbf{B}_\phi^{(k)} dz \\ \mathbf{D} &\equiv \int_{-h}^h \mathbf{B}_\phi^{(k)T} \mathbf{C}^{(k)} \mathbf{B}_\phi^{(k)} dz \\ \mathbf{G} &\equiv \int_{-h}^h \mathbf{B}_\beta^{(k)T} \mathbf{Q}^{(k)} \mathbf{B}_\beta^{(k)} dz \end{aligned} \quad (74)$$

Con

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\phi^{(k)} &\equiv \begin{bmatrix} z & \phi_1^{(k)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & \phi_2^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z & \phi_1^{(k)} & \phi_2^{(k)} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_\beta^{(k)} &\equiv \begin{bmatrix} 1 & \beta_1^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_2^{(k)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (75)$$

In particolare, i termini che compaiono nella matrice \mathbf{G} sono:

$$\begin{aligned} G_{11} &= \int_{-h}^h Q_{11}^{(k)} dz \\ G_{22} &= \int_{-h}^h \beta_1^{(k)} Q_{11}^{(k)} \beta_1^{(k)} dz \\ G_{33} &= \int_{-h}^h Q_{22}^{(k)} dz \\ G_{44} &= \int_{-h}^h \beta_2^{(k)} Q_{22}^{(k)} \beta_2^{(k)} dz \end{aligned} \quad (76)$$

3. Introduzione degli elementi finiti rigidi e di elementi 0D a massa concentrata di tipo CONM2 (coupled)

Nelle FEA risulta frequentemente utile modellizzare appendici con masse che hanno effetto sulla struttura che si vuole analizzare. Tuttavia, spesso l'analisi strutturale sull'appendice al solo scopo di valutare gli effetti sulla struttura in esame non è importante e aumenta solo il costo computazionale. A tal scopo si usano elementi finiti rigidi per modellizzare il collegamento con la struttura ed elementi finiti 0D che sono completamente descritti con la massa e i momenti di inerzia.

Per modelli molto complessi, l'aggiunta di questi elementi particolari modifica le matrici di rigidezza (gli elementi rigidi aumentano la rigidezza totale del sistema) e di massa (effetto dovuto alle masse concentrate). L'effetto del cambiamento della rigidezza e della massa totale del sistema si esprimono in caratteristiche statiche e dinamiche differenti, indipendenti dall'elemento finito usato per modellare la struttura, quindi possono essere usati per valutare il comportamento del programma in presenza di casi di complessità più alta del semplice modello vincolato.

Sono stati modellizzati elementi finiti rigidi di tipo RBAR, che simulano un moto di corpo rigido tra due punti del modello, di facile implementazione e utili a modellizzare ad esempio masse fisse vincolate su una serie di nodi, come può essere un bullone o un rivetto.

Per la massa concentrata è uso comune usare elementi finiti 0D di tipo CONM2, in cui compaiono per la definizione delle proprietà solo massa e momento di inerzia.

3.1. Elementi finiti rigidi di tipo RBAR.

Gli elementi finiti RBAR sono aste infinitamente rigide, che permettono di mantenere invariata la distanza tra due punti nel moto, se si vuole studiare il comportamento dinamico, o ad applicazione del carico avvenuta, se si vuole effettuare un'analisi statica.

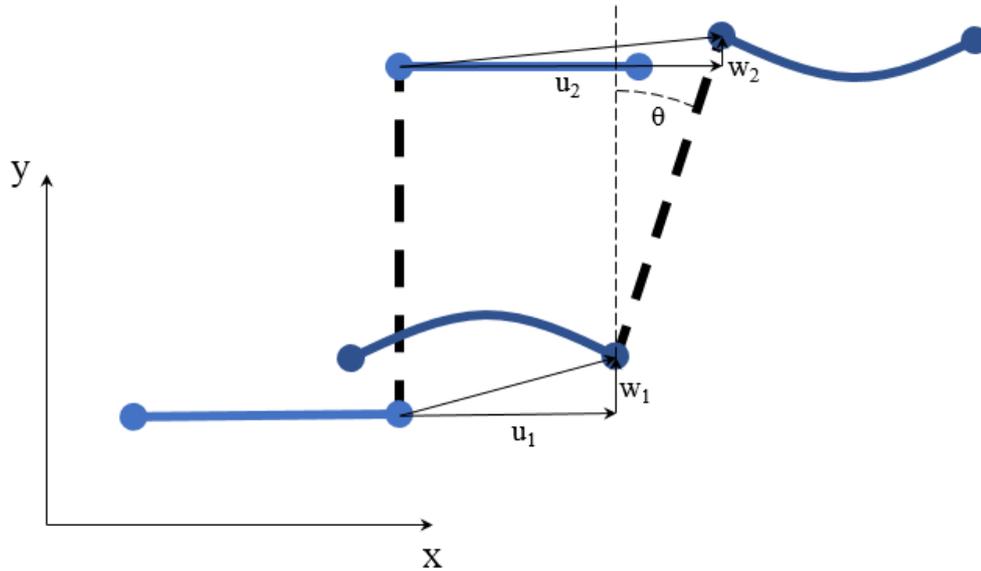


Figura 13 - Elementi finiti RBAR. la distanza tra due punti rimane invariata durante la deformazione e a deformazione avvenuta.

La formulazione degli RBAR è dunque completamente descritta dalla legge di moto di corpo rigido:

$$u_2 = u_1 + \theta \times (u_2 - u_1) \quad (75)$$

Il legame va espresso tra i punti che si vogliono collegare, e tra di essi i loro gradi di libertà. Formulando l'RBAR come un legame tra tutti i gradi di libertà (spostamenti e rotazioni sul nodo dipendente sono tutte determinate dal nodo indipendente), gli altri casi risultano essere casi particolari. Valutiamo ora come sono legati i gradi di libertà di due nodi di due elementi distinti sfruttando la (x):

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ \theta_{x1} & \theta_{y1} & \theta_{z1} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \quad (76)$$

scrivendo $u_2 - u_1 = \Delta u = \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{Bmatrix}$ si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta z & -\Delta y \\ & 1 & -\Delta z & 0 & \Delta x \\ & & 1 & \Delta y & -\Delta x & 0 \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (77)$$

In ambito FEM questo corrisponde a un legame tra i gradi di libertà di due nodi della mesh:

$$q_2 = \begin{Bmatrix} u_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{v} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \mathbf{V}q_1 \quad (78)$$

Con

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & \Delta z & -\Delta y \\ -\Delta z & 0 & \Delta x \\ \Delta y & -\Delta x & 0 \end{bmatrix} \quad (79)$$

La logica dell'implementazione su un modello qualsiasi è basata su un esempio semplice, necessario anche a spiegare la differenza tra nodi dipendenti e indipendenti e come questo particolare va tenuto in conto. Supponiamo di avere il seguente modello FEM, fatto di elementi finiti 1D, con alcuni nodi vincolati tra loro con RBAR.



Figura 14 - Struttura esempio. In azzurro le travi, in rosso gli elementi rigidi, i nodi 1 e 7 sono incastrati, in 4 c'è una massa concentrata.

Si possono descrivere quindi i legami cinematici di tutti i nodi rispetto ai nodi indipendenti, che sono in generale quelli non vincolati, mentre per gli RBAR è necessario fare una precisazione:

- Se l'RBAR vincola un nodo libero con uno vincolato, il legame cinematico impone che il nodo dipendente abbia i gradi di libertà vincolati uguali a quelli del nodo vincolato, che sarà il nodo indipendente.
- Se l'RBAR vincola due nodi liberi, occorre fare considerazioni sulla struttura reale che si vuole modellizzare, matematicamente è irrilevante.
- Se l'RBAR vincola un nodo della struttura a un elemento a massa concentrata, il nodo dipendente non può che essere la massa concentrata, che subisce spostamenti e rotazioni dettate dal nodo sulla struttura, che sarà il nodo indipendente.

Prendendo quindi come nodi indipendenti 3 e 6, si può scrivere:

$$q = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \mathbf{R}q_{ind} \quad (80)$$

La matrice R viene usata per la riduzione del sistema, secondo cui, sostituendo $q = \mathbf{R}q_{ind}$ nel PLV si ottiene:

$$\Phi = \frac{1}{2}q^T \mathbf{K}q = \frac{1}{2}q_{ind}^T \mathbf{R}^T \mathbf{K} \mathbf{R} q_{ind} = \frac{1}{2}q_{ind}^T \tilde{\mathbf{K}} \quad (81)$$

Da cui:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{R}^T \mathbf{K} \mathbf{R} \quad (82)$$

E se l'analisi richiesta è dinamica si modifica anche la matrice delle masse con la stessa logica:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R} \quad (83)$$

Per il caso statico il problema da risolvere sarà quindi:

$$q_{ind} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \quad (84)$$

Mentre per il caso dinamico occorrerà risolvere il problema agli autovalori riformulato come segue:

$$\left| \tilde{\mathbf{M}} \lambda^2 + \tilde{\mathbf{K}} \right| = 0 \quad (85)$$

Le matrici così modificate permettono di tenere conto già dei vincoli e della presenza dei legami cinematici imposti dagli RBAR.

3.2. Elementi 0D massa concentrata di tipo CONM2

La formulazione degli elementi CONM2 è disponibile in [63], è una matrice 6x6 che assegna ai gradi di libertà di spostamento le masse e ai gradi di libertà di rotazione i momenti di inerzia, nel modo descritto nella seguente:

$$\begin{bmatrix} m & & & & & \\ & m & & & & \\ & & m & & & \\ & & & I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ & & & & I_{yy} & I_{yz} \\ & & & & & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (86)$$

4. Validazione numerica.

Per verificare la correttezza dell'implementazione delle varie funzioni sono state effettuate prove con il modello piastra di Mindlin, salvo alcuni casi in cui viene indicato diversamente, verificando che i risultati coincidessero con i risultati ottenuti in Nastran.

Per verificare le proprietà dell'elemento finito basato su RZT sono state effettuate prove su modelli test, modellizzati con elementi finiti 3D HEXA8 ad alta affidabilità, con mesh fitte per evitare influenze dovute alla convergenza della soluzione, e valutando lo stesso modello test modellizzato come superficie, con un approccio simile a dei test descritti in letteratura, per l'analisi di superfici con curvature qualsiasi [64].

4.1. Controllo della correttezza delle funzioni implementate in MATLAB.

I test eseguiti in questa fase sono serviti per valutare la correttezza dell'implementazione di tutte le funzioni:

- Rotazione degli elementi, introduzione del sistema di riferimento locale e matrice di rotazione;
- Introduzione dei *drilling dofs* per l'analisi di superfici curve;
- Introduzione di elementi rigidi;
- Introduzione di elementi 0D di tipo CONM2.

La correttezza dei calcoli è stata valutata confrontando i risultati del programma scritto in MATLAB e quelli ottenibili in NASTRAN, usando lo stesso modello di piastra, la teoria di Mindlin, salvo nel controllo della rotazione degli elementi in cui si è voluto controllare la corrispondenza dei risultati ottenuti nella piastra piana con RZT con la piastra orientata in modo diverso nello spazio.

4.1.1. Rotazione degli elementi, introduzione del sistema di riferimento locale e matrice di rotazione.

Il programma esistente all'inizio di questo lavoro di tesi era capace di svolgere l'analisi di piastre piane rettangolari sul piano x-y. Per valutare la funzione implementata, secondo la logica descritta nel paragrafo 3.1 si è scritta una funzione in Matlab che, a partire da file .bdf (file di input per l'analisi con NASTRAN creati con Patran) importasse le matrici dei nodi e la matrice di connectivity. Il modello analizzato in questa fase è una piastra piana, ruotata nello spazio, con la stessa geometria, mesh, laminazione e condizioni di vincolo di quella nel piano. Per questa fase si sono valutate analisi statiche, la validazione è stata eseguita sia per gli elementi Tria che per gli elementi Quad.

Le due piastre presentano uguale laminazione, come descritto nella seguente tabella.

#strato	Materiale		
	Spessori [mm]	E [MPa]	ν
1	0.03	73000	0.3
2	0.03	73000	0.3
3	0.03	73000	0.3
4	0.7	210000	0.3
5	0.07	73000	0.3
6	0.07	73000	0.3
7	0.07	73000	0.3

Tabella 1 - Laminazione del modello piastra usato per il controllo della rotazione del sistema di riferimento dell'elemento.

Per entrambe le piastre il carico applicato è un carico distribuito di intensità unitaria sulla superficie superiore rivolta verso la piastra, normale alla superficie.

Le piastre hanno entrambe dimensioni 100 mm x 100 mm.

Entrambe sono vincolate con incastro su un lato, e carico distribuito in direzione normale di 0.1 kg/m². I risultati proposti sono quelli in uno dei due vertici liberi (indifferente data la simmetria geometrica e del carico).

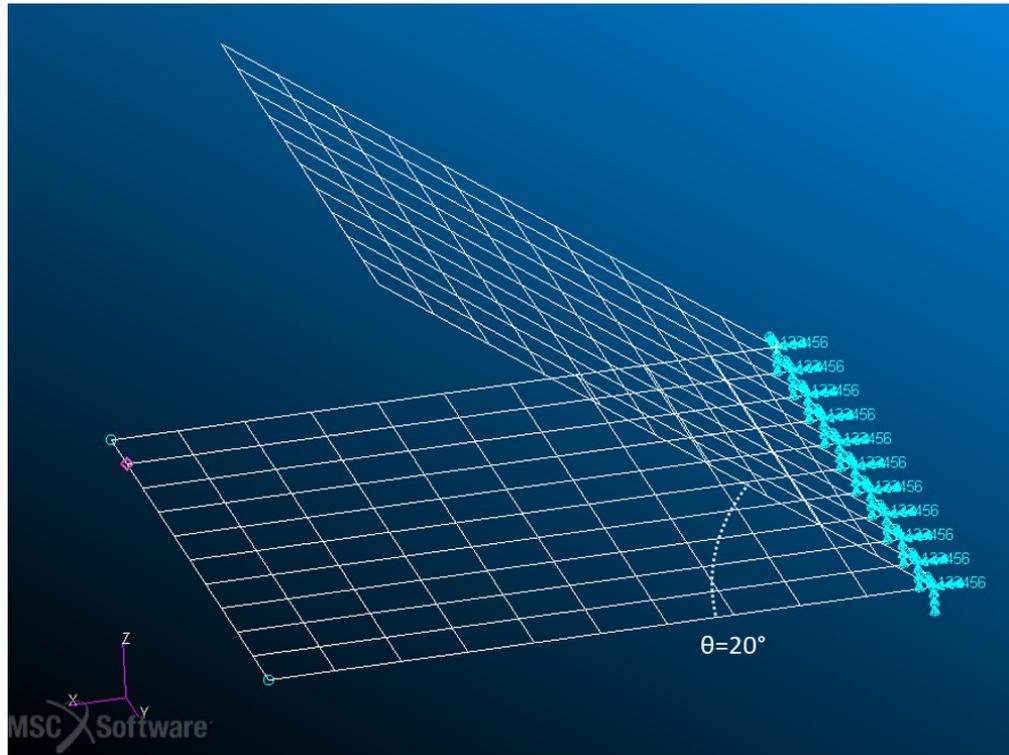


Figura 15 - Le due piastre usate per verificare la correttezza della rotazione.

Dall'analisi si ottengono i risultati descritti nella seguente tabella, che descrivono le variazioni dei singoli gradi di libertà in uno dei vertici liberi.

	2D.0		Nel piano		Ruotata nello spazio	
	Quad	Tria	Quad	Tria	Quad	Tria
u	4.470E-03	4.480E-03	4.470E-03	4.480E-03	4.470E-03	-4.480E-03
v	-1.565E-04	-1.555E-04	-1.565E-04	-1.555E-04	-1.565E-04	1.555E-04
w	-1.187E+01	-1.187E+01	-1.187E+01	-1.187E+01	-1.187E+01	-1.187E+01
θ_1	1.575E-01	1.578E-01	1.575E-01	1.578E-01	1.575E-01	-1.578E-01
θ_2	-5.514E-03	-5.478E-03	-5.514E-03	-5.478E-03	-5.514E-03	5.478E-03
θ_3			0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00

Tabella 2 - Spostamenti nel vertice libero per il programma iniziale (2D.0), il programma modificato con la presenza della rotazione per piastra nel piano x-y e con rotazione con piastra ruotata con teoria di Mindlin

È possibile verificare anche la correttezza dell'implementazione se, invece di usare la teoria di Mindlin, si usa la RZT. I risultati descritti nella seguente tabella sono analoghi a quelli presentati nella tabella precedente: valore che assume ogni singolo grado di libertà nell'estremo libero, della stessa piastra nelle stesse condizioni di vincolo e carico.

	2D.0		Nel piano		Ruotata nello spazio	
	Quad	Tria	Quad	Tria	Quad	Tria
u	4.402E-03	4.391E-03	4.402E-03	4.391E-03	4.402E-03	-4.391E-03
v	-1.524E-04	-1.342E-04	-1.524E-04	-1.342E-04	-1.524E-04	-1.342E-04
w	-1.134E+01	-1.137E+01	-1.134E+01	-1.137E+01	-1.134E+01	-1.137E+01
θ_1	1.551E-01	1.547E-01	1.551E-01	1.547E-01	1.551E-01	1.547E-01
θ_2	-5.376E-03	-4.725E-03	-5.376E-03	-4.725E-03	-5.376E-03	-4.725E-03
θ_3			0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
ψ_1	-4.670E-06	4.180E-06	-4.670E-06	4.180E-06	-4.670E-06	4.180E-06
ψ_2	4.400E-06	-2.700E-07	4.400E-06	-2.700E-07	4.400E-06	-2.700E-07
ψ_3			0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00

Tabella 3 - Spostamenti nel nodo 121 (estremità libera) per il programma iniziale, il programma modificato con la presenza della rotazione per piastra nel piano x-y e con rotazione con piastra ruotata con RZT

I risultati presentano una perfetta corrispondenza, come c'era da aspettarsi, quindi è possibile passare alla fase successiva.

4.1.2. Introduzione dei *drilling dofs* per l'analisi di superfici curve.

Per valutare questo aspetto, sono state effettuate sia analisi statiche che dinamiche, su un modello presentato come modello test in [64], il *pinched cap*.

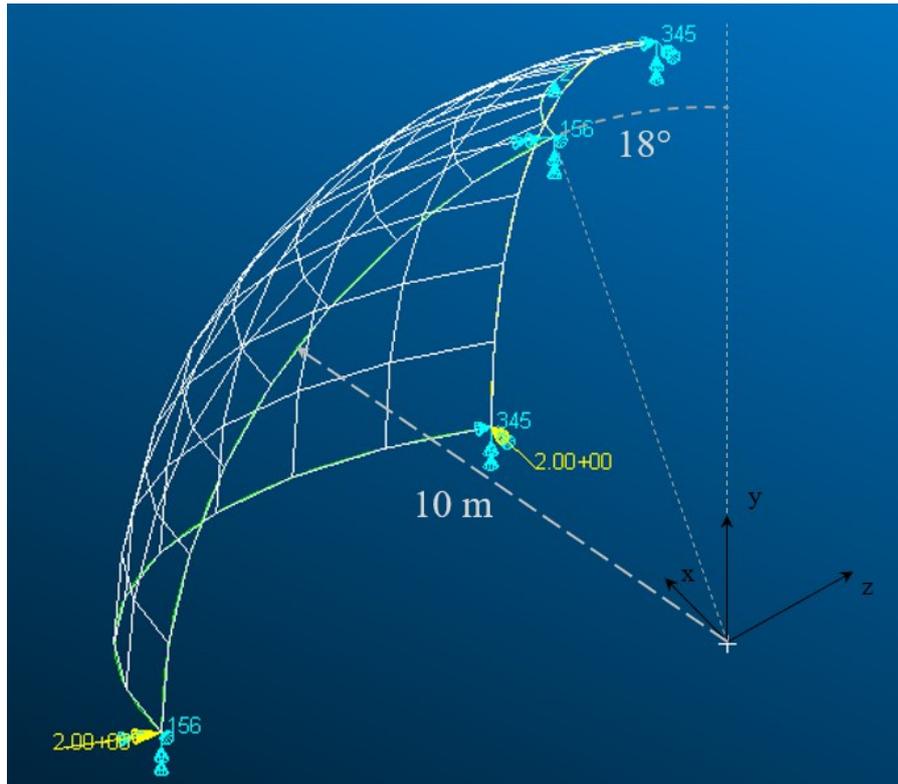


Figura 16 - Modello test suggerito per superfici a doppia curvatura.

Il modello test è in materiale omogeneo isotropo con le caratteristiche descritte nella tabella seguente.

E [N/mm ²]	ν
6.825E7	0.30

Tabella 4 - Caratteristiche del materiale per il modello test "pinched cap"

Il pinched cap ha raggio di 10 m, è vincolato con condizioni di simmetria sui due lati meridiani, presenta un foro di 18° sulla sommità, e alla base è caricato negli spigoli con forze di 2 N, in uno spigolo verso l'interno e nell'altro verso l'esterno, dove è fornito il valore di riferimento di 0.188 m.

Il seguente grafico mostra la convergenza dei risultati alla soluzione, all'infittirsi della mesh. Per valutare la convergenza si è analizzato, per mesh variabili aventi tra 4 e 64 elementi per lato, l'errore percentuale descritto come:

$$E\% = \frac{u - u_{ref}}{u_{ref}} \% \quad (87)$$

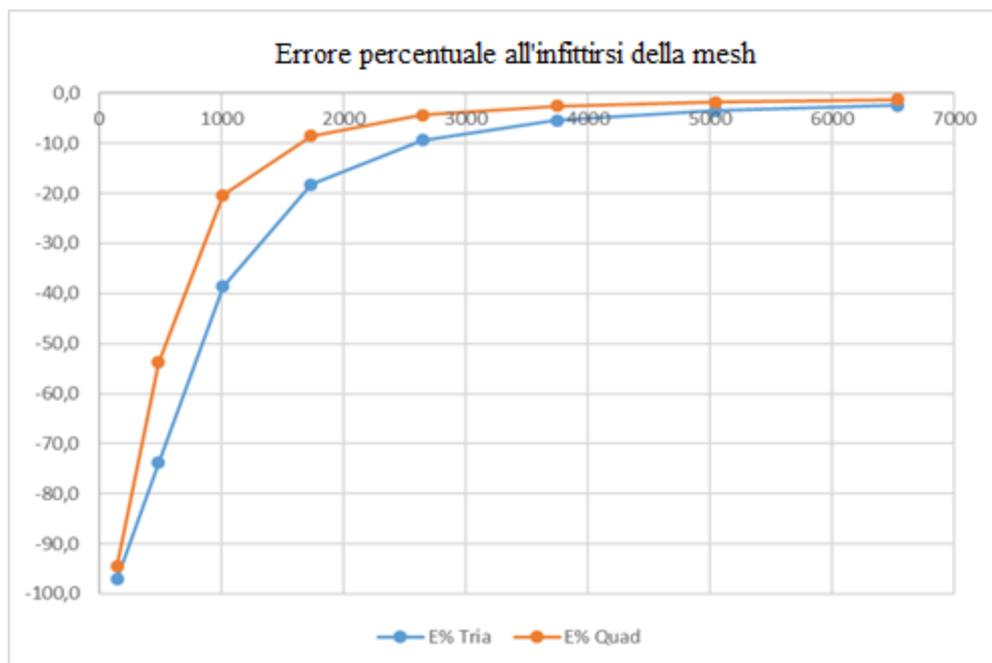


Figura 17 - Valutazione convergenza al risultato di riferimento per elementi Quad e Tria.

La convergenza al risultato di riferimento è verificata, e costituisce un'ulteriore prova della corretta implementazione del problema valutato nel paragrafo precedente, cioè la rotazione dell'elemento nello spazio.

È stata eseguita un'ulteriore analisi, di tipo dinamico, su un modello simile, utile per valutare stavolta il comportamento per strutture in multistrato.

Il modello è simile al precedente, un quarto di semisfera, con condizioni di vincolo e materiali diverse, geometria leggermente diversa e senza carichi applicati.

L'analisi è stata eseguita sia in Nastran che col programma scritto in MATLAB. Si riportano la geometria con le condizioni di vincolo.

La struttura è un laminato sandwich con le seguenti proprietà.

Spessore	Materiale
[0.2 / 0.2 / 0.2]	[A / C / A]

Tabella 5 - Sequenza di laminazione.

	E [N/m ²]	ν	ρ [kg/m ³]	Spessori [m]
A	7.30E+10	0.33	2800	0.2
C	7.30E+07	0.33	2.8	0.2

Tabella 6 - Proprietà dei materiali.

Le condizioni di vincolo consistono nell'incastro dei nodi alla base.

I risultati sono riportati in tabella, secondo:

$$E\% = \frac{f_{MATLAB} - f_{Nastran}}{f_{Nastran}} \% \quad (88)$$

Il modello utilizzato per questa verifica è Mindlin, in quanto si vuole valutare la correttezza dell'implementazione, per cui il modello deve essere lo stesso.

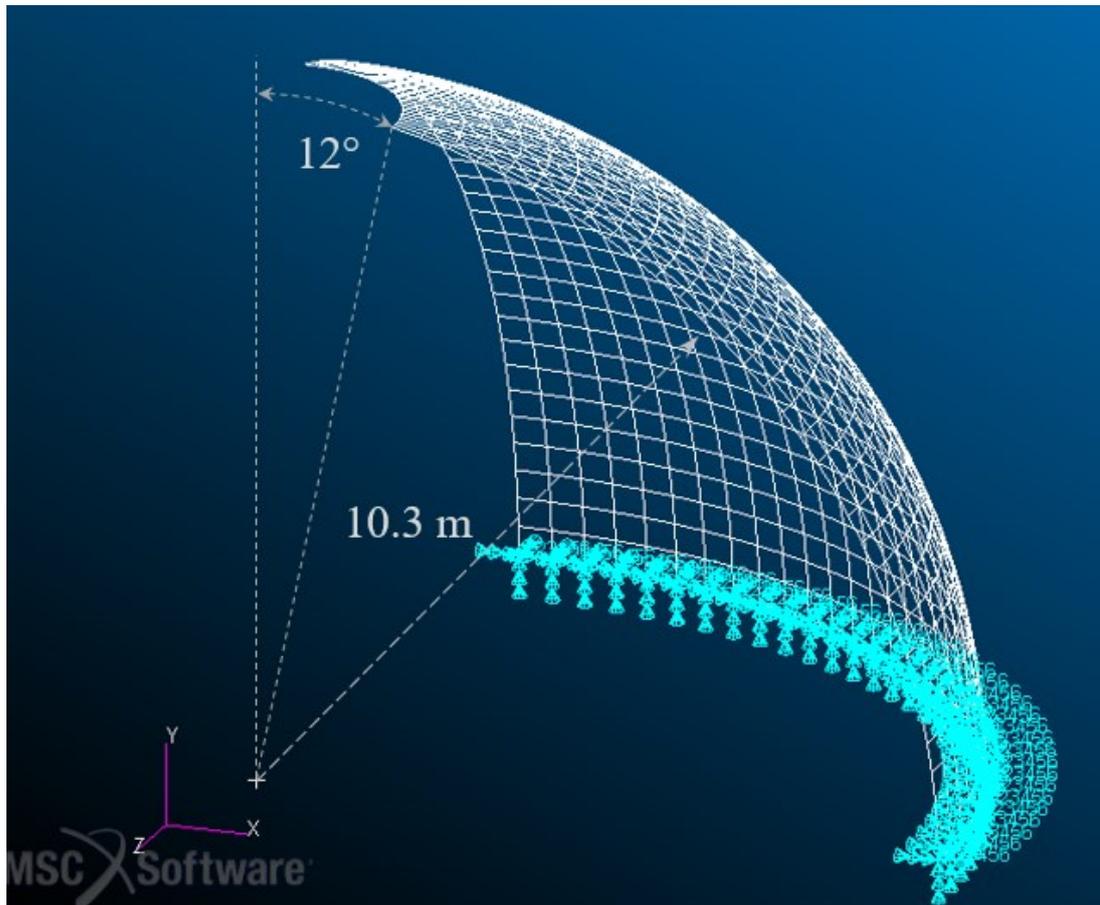


Figura 18 - Geometria per l'analisi dinamica con materiale sandwich.

I risultati hanno riportato una convergenza dei risultati all'infittirsi della mesh.

Risultati con Nastran ed errore percentuale ottenuto in Matlab								
	8x8		16x16		32x32		64x64	
	Nastran[Hz]	E%	Nastran[Hz]	E%	Nastran[Hz]	E%	Nastran[Hz]	E%
1	5.24	2.50%	5.24	0.74%	5.21	0.20%	5.20	0.04%
2	6.86	2.39%	6.74	0.67%	6.69	0.17%	6.67	0.01%
3	12.38	7.55%	13.07	2.00%	13.14	0.55%	13.14	0.13%
4	13.92	5.71%	14.23	1.45%	14.24	0.38%	14.23	0.07%
5	18.04	16.36%	20.10	3.10%	20.34	0.81%	20.37	0.21%
6	18.63	14.31%	20.31	4.38%	20.75	1.15%	20.82	0.29%
7	21.61	23.72%	25.19	5.61%	25.89	1.44%	26.01	0.37%
8	21.88	29.65%	25.94	7.18%	26.96	1.80%	27.13	0.45%
9	24.08	36.08%	30.00	9.08%	31.51	2.28%	31.78	0.57%
10	24.23	45.25%	30.94	10.27%	32.72	2.46%	33.03	0.62%

Tabella 7 - Risultati con Nastran ed errore percentuale ottenuto in Matlab, caso senza aggiunte, al variare della mesh.

Si trova che si hanno errori dell'ordine del 2% sulle prime 10 frequenze proprie già con una mesh 32x32. Le prossime valutazioni, con RBAR e massa concentrata, saranno eseguite sempre con questa mesh, valutando quanto l'errore sia simile a quello ottenuto in Nastran.

4.1.3. Introduzione degli elementi rigidi di tipo RBAR.

La correttezza dell'implementazione degli RBAR è stata verificata usando un modello simile a quello usato nella verifica precedente, un quarto di semisfera, con raggio interno di 10 m. la struttura è incastrata sul lato inferiore, ed è laminata come segue:

Spessore	Materiale
[0.2 / 0.2 / 0.2]	[A / C / A]

Tabella 8 - Sequenza di laminazione della struttura in esame.

	E [N/m ²]	v	ρ [kg/m ³]	Spessori [m]
A	7.30E+10	0.33	2800	0.2
C	7.30E+07	0.33	2.8	0.2

Tabella 9 - Proprietà dei materiali del sandwich.

Si sono effettuate due prove, con uno e con 2 RBAR. La mesh usata, considerando che l'errore sia accettabile e il tempo di esecuzione dell'analisi, è la 32x32, per cui i risultati ottenuti debbano

avere un errore simile a quello ottenuto nel caso precedente con la stessa mesh. Valutiamo ora il primo caso, con un RBAR che unisce i due punti alle estremità del lato in alto, entrambi liberi.

Per questa analisi il modello usato, dovendo valutare l'implementazione, usando come riferimento i risultati ottenuti in Nastran, il modello usato è quello di Mindlin.

L'errore è valutato come al caso precedente, secondo la (88).

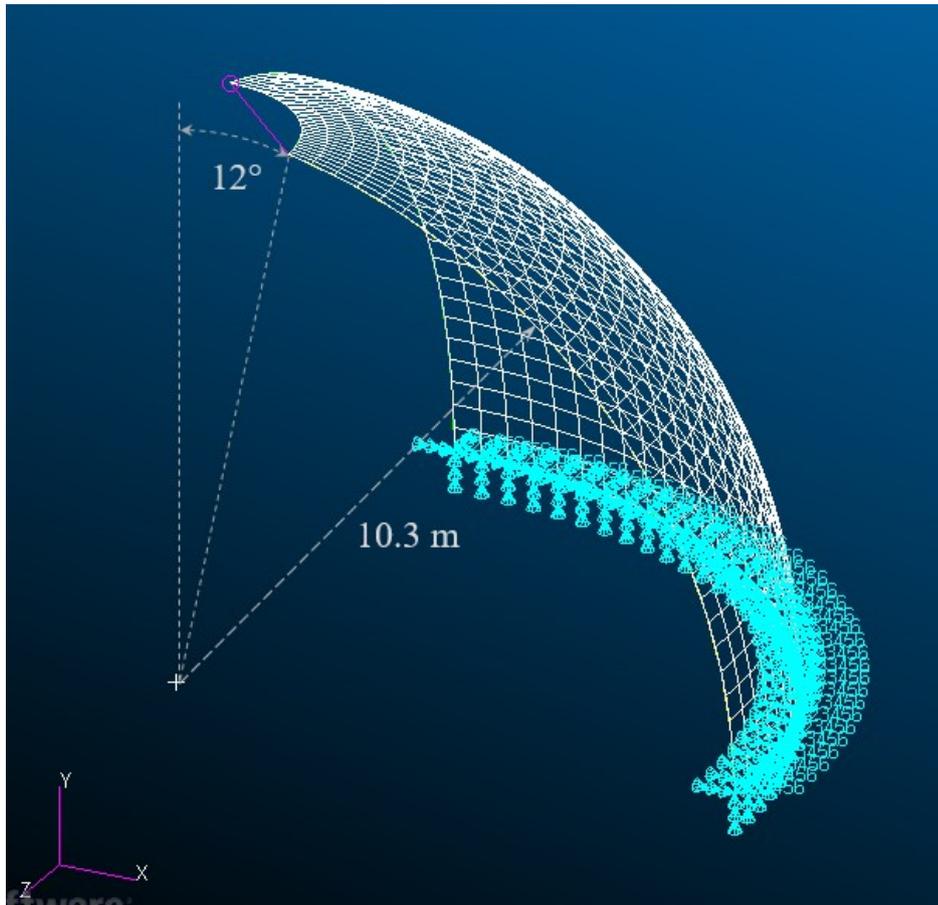


Figura 19 - Quarto di semisfera con un solo RBAR.

Le analisi portano ai seguenti risultati:

Con 1 RBAR			
	MATLAB	Nastran	E%
1	5.23	5.21	0.21%
2	6.72	6.78	-0.82%
3	13.25	13.18	0.54%
4	14.59	14.53	0.45%

5	21.06	20.82	1.14%
6	21.19	20.99	0.93%
7	27.18	26.77	1.50%
8	27.55	27.06	1.81%
9	33.13	32.38	2.31%
10	33.82	32.97	2.57%

Tabella 10 - Risultati per le prime 10 frequenze proprie, ottenute in Matlab e in Nastran, con errori percentuali, caso con 1 RBAR.

Si nota che gli errori sono molto simili a quelli che si ottengono nel caso precedente con la stessa mesh, raggiungendo errori dell'intorno di 2.5% sulla decima frequenza propria.

Si valuta ora un caso con 2 RBAR, con la stessa mesh. La struttura analizzata è la stessa del caso appena analizzato, i due RBAR collegano il punto medio del lato in alto e un punto all'interno della struttura con il centro dell'arco che forma il foro di 12° del lato in alto.

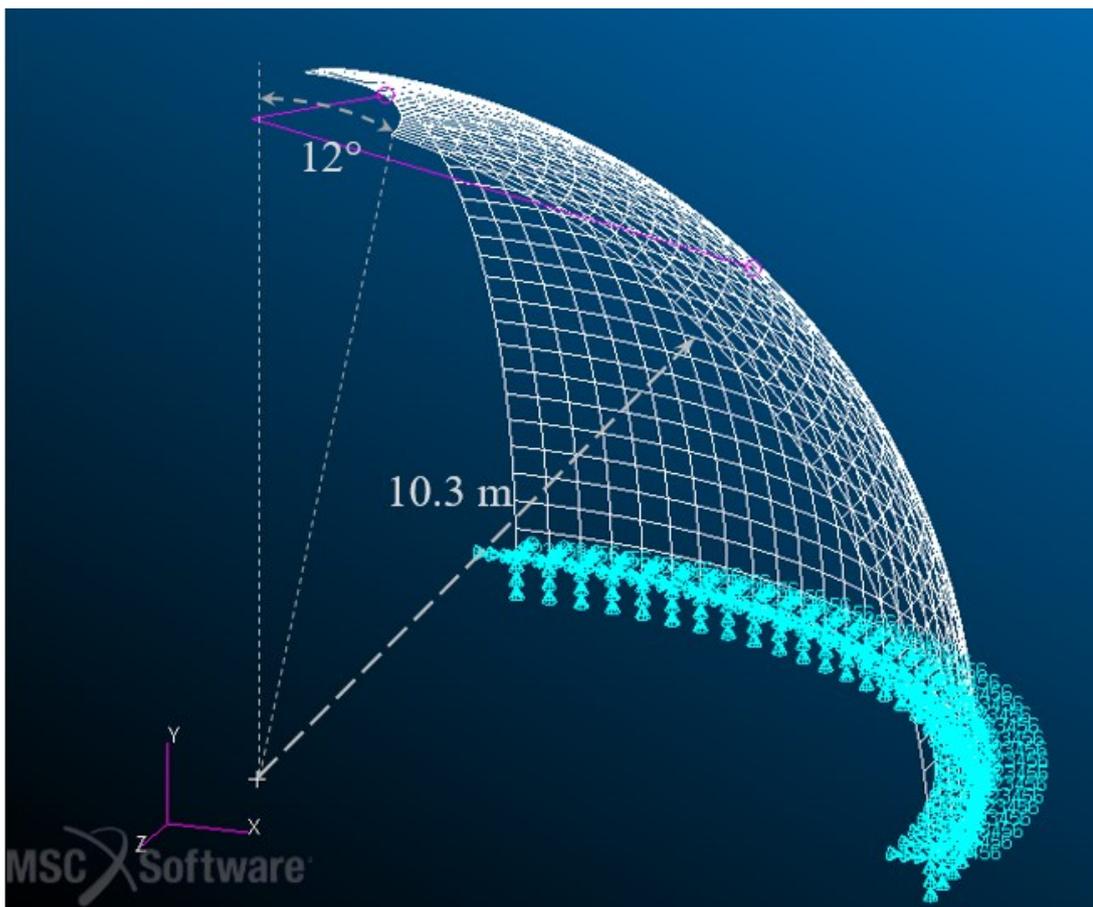


Figura 20 - Caso valutato per l'implementazione di 2 RBAR.

Si riportano ora i risultati per questo caso.

Con 2 RBAR			
	MATLAB	Nastran	E%
1	5.46	5.44	0.31%
2	6.78	6.76	0.33%
3	13.74	13.67	0.52%
4	14.43	14.38	0.39%
5	20.54	20.37	0.80%
6	21.43	21.19	1.11%
7	26.27	25.90	1.44%
8	27.78	27.29	1.80%
9	32.23	31.51	2.29%
10	33.99	33.14	2.56%

Tabella 11 - Risultati in Matlab e in Nastran delle prime 10 frequenze proprie con errori percentuali, caso con 2 RBAR.

Si nota che le analisi riportano risultati coerenti anche con l'errore che si otteneva per la mesh 32x32 nel caso senza elementi aggiuntivi.

4.1.4. Introduzione massa concentrata.

Si è valutato ora la correttezza dell'implementazione della massa concentrata, eseguita con la logica descritta nel paragrafo 4.2.

La massa usata è supposta sferica di raggio r , di alluminio, con le proprietà descritte nella seguente tabella.

r [m]	0.8
ρ [kg/m ³]	2800
M [kg]	6005.05
I [kg/m ⁴]	787.0939

Tabella 12 - Proprietà della massa concentrata sferica per la valutazione dell'implementazione di RBAR e massa concentrata.

Si valutano i due casi precedenti in cui si è aggiunta la massa concentrata avente le proprietà descritte nella tabella 12, per il primo caso è stata aggiunta al vertice in alto, per il secondo caso è stata aggiunta nel punto dove si incontrano i due RBAR.

Per questa analisi il modello usato, dovendo valutare l'implementazione, usando come riferimento i risultati ottenuti in Nastran, il modello usato è quello di Mindlin.

L'errore è valutato ancora secondo la (88).

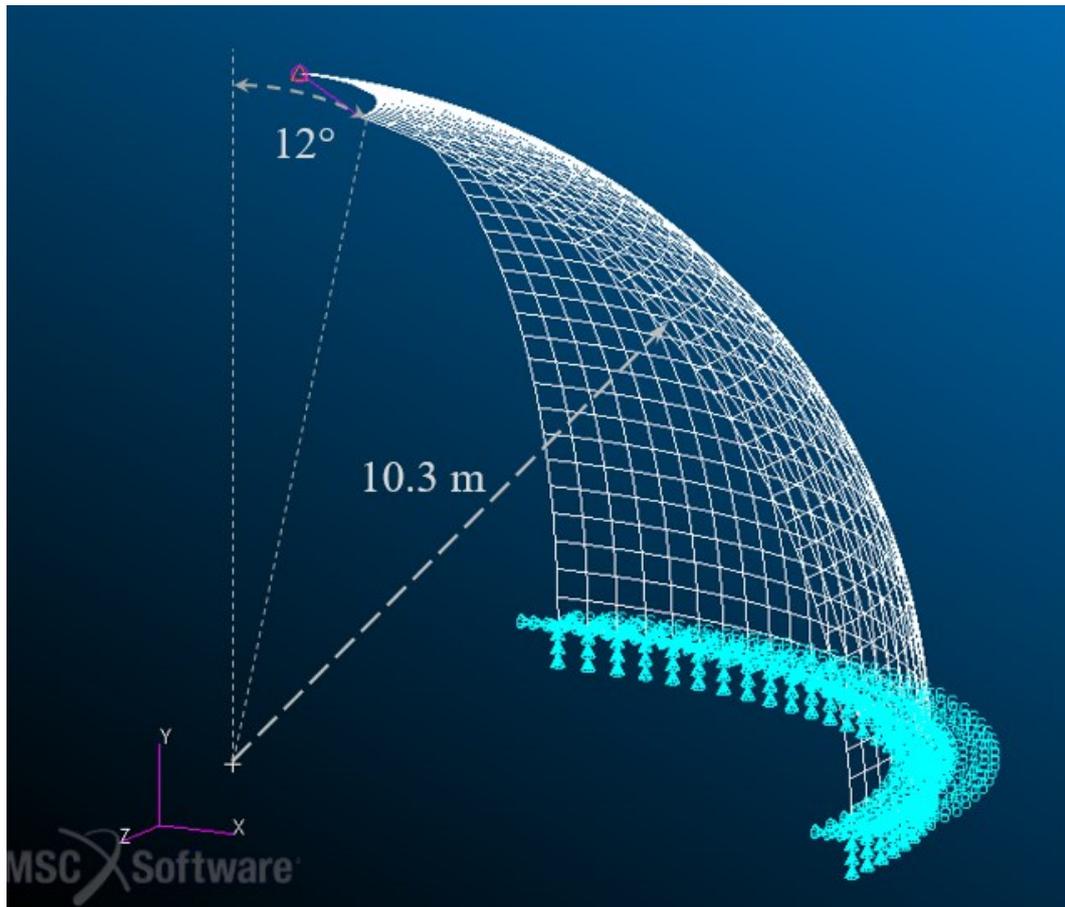


Figura 21 - Caso con un RBAR e una massa concentrata.

I risultati sono riportati nella seguente tabella:

Con massa e 1 RBAR			
	MATLAB	Nastran	E%
1	4.50	4.49	0.16%
2	6.31	6.29	0.25%
3	10.33	10.27	0.60%
4	14.44	14.35	0.64%
5	16.92	16.72	1.22%
6	21.01	20.79	1.07%
7	23.27	22.86	1.79%
8	27.08	26.64	1.64%
9	29.57	28.85	2.50%
10	33.10	32.32	2.43%

Tabella 13 - Risultati in Matlab e in Nastran con errori percentuali della struttura, caso con 1 RBAR e massa concentrata.

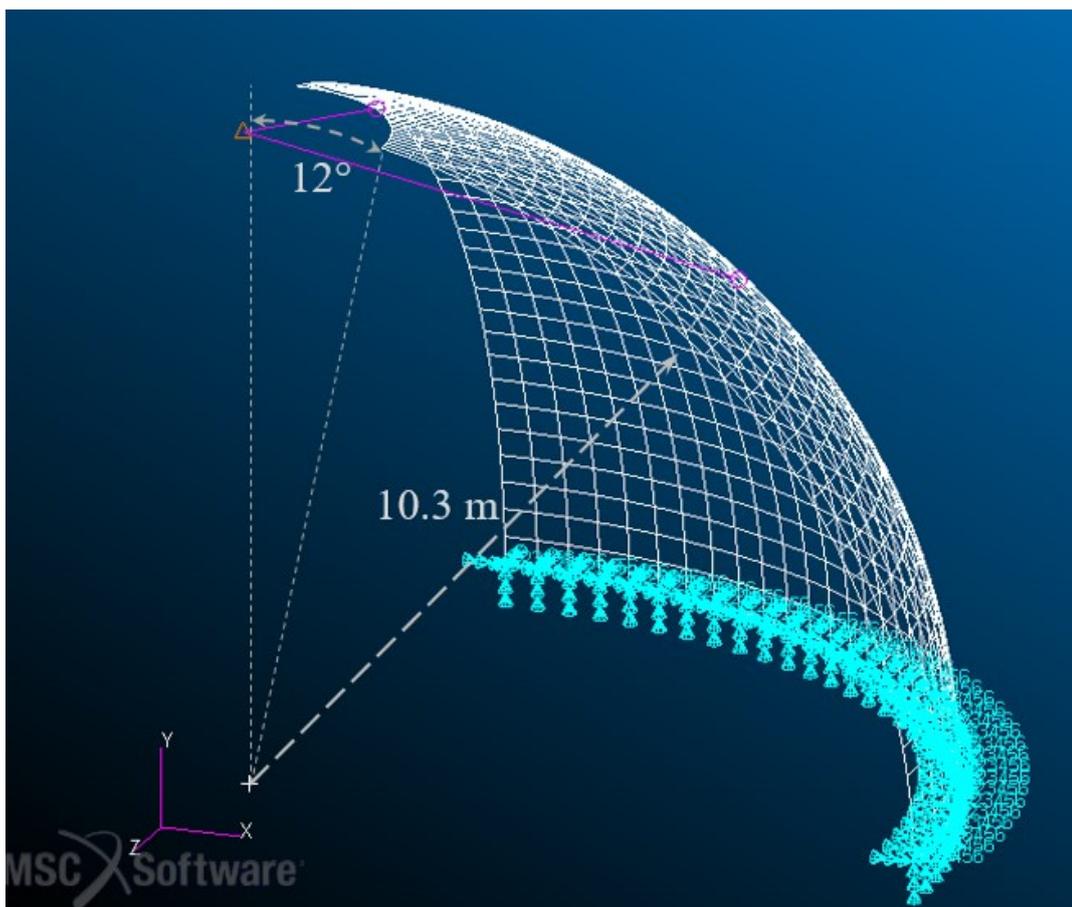


Figura 22 - Caso con 2 RBAR e una massa concentrata.

Si riportano i risultati per questo secondo caso.

Con massa e 2 RBAR			
	ML	N	E%
1	4.85	4.83	0.37%
2	6.24	6.23	0.29%
3	12.66	12.56	0.76%
4	14.38	14.33	0.39%
5	19.22	18.92	1.58%
6	20.38	20.22	0.83%
7	22.38	22.11	1.23%
8	26.27	25.90	1.43%
9	28.26	27.76	1.80%
10	32.17	31.45	2.29%

Tabella 14 - Risultati in Matlab e in Nastran con errori percentuali, caso con 2 RBAR e massa concentrata.

Per entrambi i casi gli errori risultano vicini al caso senza RBAR né massa concentrata a parità di mesh, quindi si reputa l'implementazione della massa concentrata corretta.

4.2. Validazione numerica degli elementi finiti basati su RZT.

Per questa fase occorre confrontare i risultati ottenuti dalle analisi in Matlab con elementi basati su RZT con un modello ad elementi finiti che tenga in conto della diversa rigidità dei vari strati.

Come modello test si è usato ancora il quarto di semisfera, vincolato alla base, con laminazione uguale ai casi precedenti, riportata nella tabella di seguito:

Spessore	Materiale
[0.2 / 0.2 / 0.2]	[A / C / A]

Tabella 15 - Sequenza di laminazione.

	E [N/m ²]	ν	ρ [kg/m ³]	Spessori [m]
A	7.30E+10	0.33	2800	0.2
C	7.30E+07	0.33	2.8	0.2

Tabella 16 - Proprietà degli strati del laminato sandwich.

Il modello usato per valutare le proprietà degli elementi RZT è il quarto di semisfera con foro di 12° e raggio medio di 10 m.

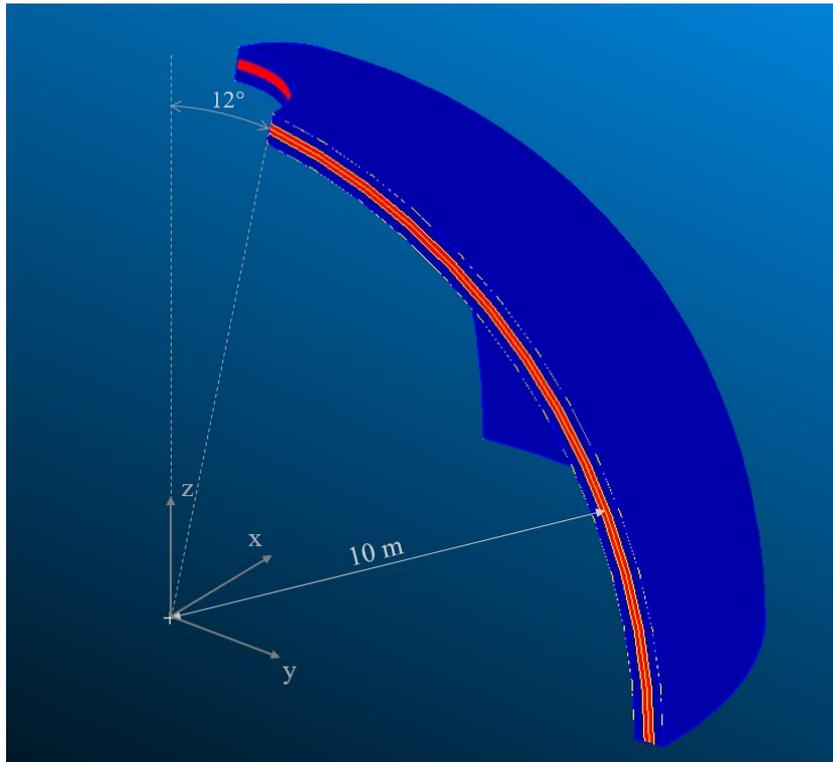
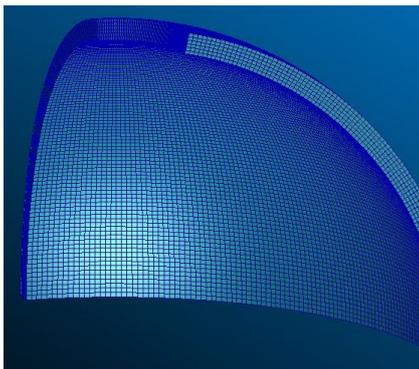
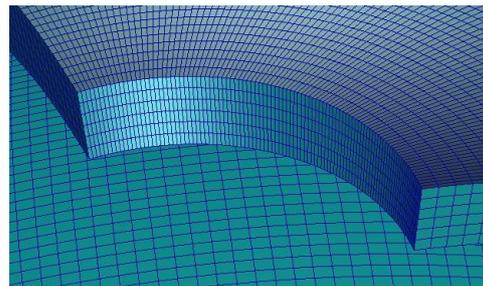


Figura 23 - Geometria della struttura usata per la valutazione dell'elemento RZT.

Come risultati di riferimento si è usato un modello con 60000 elementi finiti 3D di tipo HEXA8, 100 lungo ogni lato, 6 lungo lo spessore, 2 per ogni strato, per un totale di 180000 gradi di libertà nodali.



(a)



(b)

Figura 24- Modello Nastran 3D: (a) vista d'insieme, (b) vista del particolare in prossimità del foro.

Per valutare l'efficienza degli elementi finiti shell basati su RZT si sono lanciate analisi con mesh con 8, 16, 32, 64 elementi per ogni lato, sia Tria che Quad che con mesh mista (per le analisi dinamiche) per valutare l'effetto di mesh irregolari. Si è usato anche un confronto con gli elementi basati su FSDT.

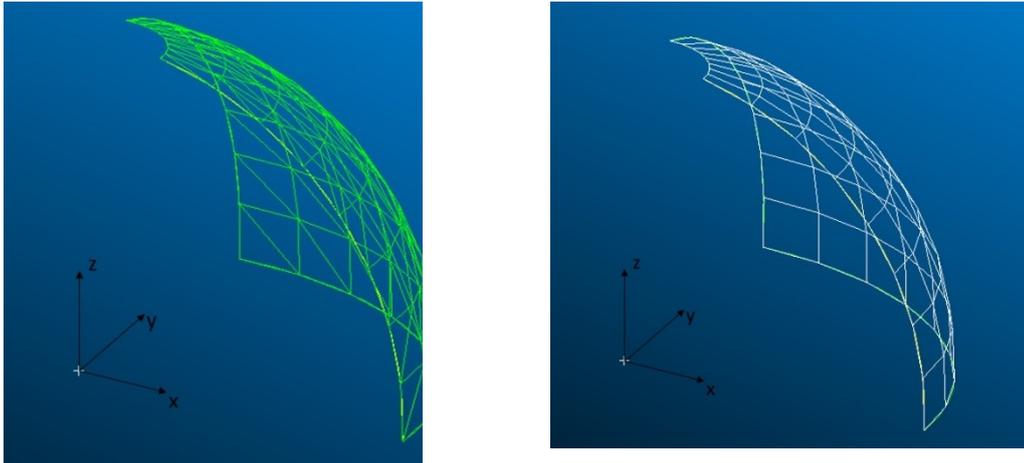


Figura 25 - modelli shell, con suddivisione 8x8: (a) mesh con elementi Tria, (b) mesh con elementi Quad.

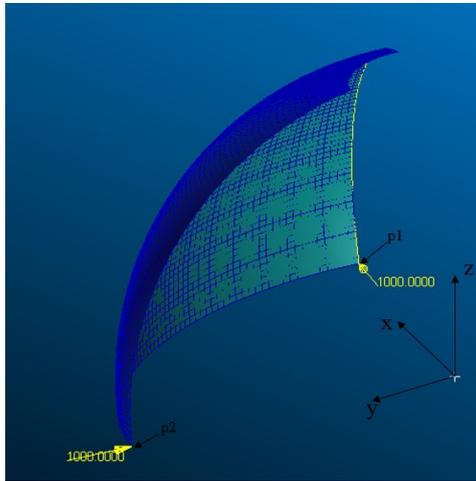
La tabella seguente riporta le caratteristiche delle mesh usate per le verifiche.

	FSDT Quad (Tria)		RZT Quad (Tria)		MSC/NASTRAN HEXA8	
Numero di suddivisioni lungo i lati	64	8	16	32	64	100
Numero di suddivisioni lungo lo spessore	1	1	1	1	1	6
Numero di elementi	4096 (8192)	64 (128)	256 (512)	1024 (2048)	4096 (8192)	60000
Numero di gradi di libertà	25350	729	2601	9801	38025	180000

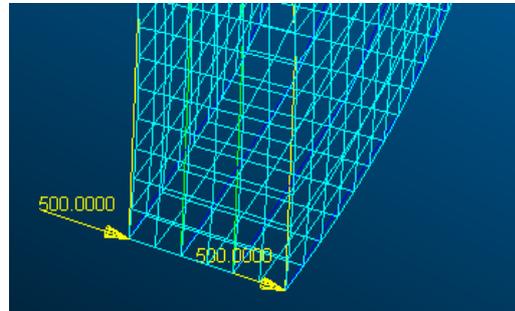
4.2.1. Risposta statica.

Per questo caso si è usato un problema simile a quello usato nel paragrafo 4.1.2, in cui si è usato il modello *pinched cap*, un quarto di semisfera con la geometria già descritta, con carichi applicati ai vertici della base con direzione alternata, vincolata con condizioni di simmetria sui lati meridiani. Come risultato di riferimento si è usata la configurazione descritta nella figura 26, il carico applicato

di 1000 N è diviso sul nodo interno ed esterno nella posizione analoga, in modo da evitare deformazioni lungo lo spessore che non sono tenute in considerazione nel modello 2D.



(a)



(b)

Figura 26 - Problema per valutare la risposta statica: (a) modello con elementi Quad shell (64x64) con carichi. (b) modello con mesh 3D, particolare dei carichi applicati.

La soluzione di riferimento è la media aritmetica degli spostamenti lungo gli assi x e z dei 7 nodi della mesh 3D che corrispondono al punto *p1* della mesh 2D: $U_x=9.151E-05$, $U_z=4.249E-05$. Nelle seguenti tabelle sono riportati gli errori percentuali, valutati secondo la (87) con le diverse mesh con elementi RZT per valutare la convergenza, e l'errore percentuale che si ottiene con elementi FSDT con la mesh più fitta.

	FSDT		RZT		
	Tria		Tria		
Numero di divisioni lungo i lati	64	8	16	32	64
E% U_x	96.72%	-11.32%	-3.92%	-1.52%	-0.52%
E% U_z	25.37%	-5.67%	-1.91%	-0.93%	-0.47%

Tabella 17 - Errori percentuali per la risposta statica per elementi Tria.

	FSDT			RZT	
	Quad			Quad	
Number of subdivisions along the edges	64	8	16	32	64
E% U_x	111.09%	-7.13%	-2.09%	-0.65%	-0.07%
E% U_z	26.02%	-2.11%	-0.75%	-0.39%	-0.13%

Tabella 18 - Errori percentuali per la risposta statica per elementi Quad.

I risultati mostrano come gli elementi basati su RZT presentino una rapida convergenza, così che con soli 32x32 elementi nel caso Quad si raggiunga un errore percentuale minore dell'1%, mentre gli elementi basati su FSDT con la mesh più fitta portano a un risultato più che doppio per lo spostamento lungo l'asse x, errore dovuto allo scarso livello di dettaglio della distorsione di tipo zig zag caratteristico per le strutture sandwich.

4.2.2. Vibrazioni libere.

Si è analizzata la stessa struttura, con condizioni di vincolo di incastro sul lato inferiore e libera sugli altri. La soluzione di riferimento è valutata con la mesh 3D già descritta per il caso precedente.

Sono riportate le frequenze proprie usate come valori di riferimento.

Ordine dei modi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frequenza naturale	6.55	8.40	18.72	19.82	32.93	33.87	47.38	51.03	66.56	71.12

Tabella 19 - Risultati di riferimento, ottenute con la mesh 3D da 60000 elementi HEXA8.

I risultati sono riportati come errori percentuali, secondo la (88), per la mesh 2D con elementi Tria e Quad basati su RZT, e gli errori che si trovano con elementi basati su FSDT.

Numero di elementi per lato	FSDT Tria		RZT Tria		
	64	8	16	32	64
E% 1	-17.48%	12.91%	2.78%	1.00%	0.60%
E% 2	-17.52%	10.70%	2.60%	0.60%	0.13%
E% 3	-27.21%	14.14%	2.82%	0.67%	0.20%
E% 4	-25.61%	11.12%	2.50%	0.74%	0.29%
E% 5	-35.85%	11.77%	2.99%	0.79%	0.26%
E% 6	-36.20%	20.32%	3.69%	0.95%	0.31%
E% 7	-42.94%	19.34%	4.19%	1.06%	0.35%
E% 8	-44.69%	29.39%	5.35%	1.29%	0.42%

E% 9	-50.21%	18.43%	5.66%	1.41%	0.47%
E% 10	-51.56%	19.26%	5.88%	1.47%	0.48%

Tabella 20 - Frequenze naturali: errori percentuali ottenute con le teorie FSDT con la mesh più dettagliata, e RZT, rispetto alla soluzione di riferimento, con elementi Tria.

Numero di elementi per lato	FSDT Quad		RZT Quad		
	64	8	16	32	64
E% 1	-17.64%	7.01%	1.71%	0.76%	0.52%
E% 2	-17.66%	5.52%	1.25%	0.28%	0.03%
E% 3	-27.40%	7.01%	1.36%	0.35%	0.10%
E% 4	-25.79%	4.86%	1.13%	0.36%	0.15%
E% 5	-36.08%	5.41%	1.25%	0.36%	0.13%
E% 6	-36.43%	8.92%	1.53%	0.37%	0.09%
E% 7	-43.21%	9.45%	1.75%	0.48%	0.16%
E% 8	-44.94%	14.54%	2.34%	0.52%	0.13%
E% 9	-50.51%	12.86%	2.82%	0.76%	0.26%
E% 10	-51.83%	13.73%	2.96%	0.69%	0.20%

Tabella 21 - Frequenze naturali: errori percentuali ottenute con le teorie FSDT con la mesh più dettagliata, e RZT, rispetto alla soluzione di riferimento, con elementi Quad.

Si nota come la convergenza per gli elementi basati su RZT, per le prime 10 frequenze proprie, permette di ottenere un errore inferiore all'1% già con la mesh 32x32, mentre con elementi basati su FSDT con la mesh più dettagliata si ottengono errori inaccettabili.

4.2.3. Comportamento degli elementi basati su RZT con mesh irregolare.

Per valutare l'affidabilità degli elementi in casi con geometrie più complesse, per cui elementi distorti sono inevitabili, si riportano i risultati ottenuti con mesh distorte. Il modello è lo stesso dei casi precedenti in cui si valutava il comportamento degli elementi basati su RZT (geometria, vincoli, laminazione).

Poiché la convergenza alla soluzione è dipendente dal numero di gradi di libertà totali nel modello, la cui misura è proporzionale al numero di nodi, si sono valutati due casi (di ciascuno si è valutato poi il comportamento con soli elementi Quad, mesh con Quad e Tria misti, e mesh con soli elementi Tria), valutando poi l'errore secondo la (88), in cui la frequenza di riferimento è quella della

mesh regolare avente numero di nodi simile, per cui alle mesh con 283 nodi corrisponde la mesh regolare 16x16 mentre alle mesh con 1083 nodi corrisponde la mesh regolare 32x32.

Numero Quad
di nodi

Quad+Tria

Tria

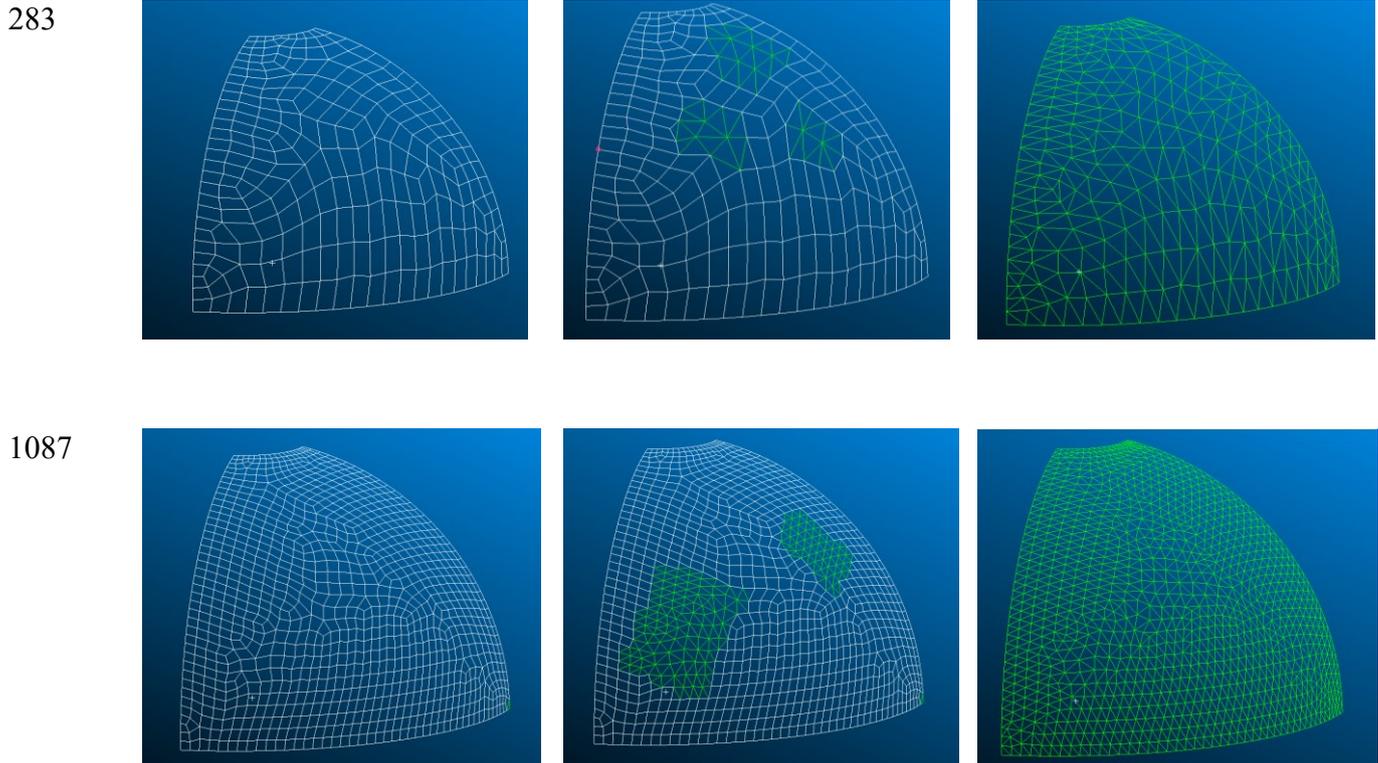


Figura 27 - Mesh usate per valutare l'effetto di elementi distorti e con elementi di forma mista.

E% 289 nodes			
Q warp - Q regular	T warp - T regular	QT warp - Q regular	QT warp - T regular
4.57%	-0.10%	3.38%	2.31%
6.10%	-0.24%	4.38%	3.01%
2.25%	-0.10%	1.52%	0.08%
2.96%	-0.08%	2.06%	0.70%
1.32%	-0.60%	0.97%	-0.74%
1.64%	-0.14%	1.45%	-0.66%
0.77%	-0.61%	0.70%	-1.66%
0.81%	-0.75%	0.86%	-2.02%
0.60%	-1.02%	0.81%	-1.90%
0.35%	-1.09%	0.54%	-2.24%

Tabella 22 - Effetto di elementi distorti. Caso con 289 nodi comparato con i risultati della mesh regolare con 16 elementi per lato.

E% 1089 nodes			
Q warp - Q regular	T warp - T regular	QT warp - Q regular	QT warp - T regular
0.72%	-0.17%	0.70%	0.47%
0.78%	-0.20%	0.62%	0.30%
0.33%	-0.14%	0.29%	-0.02%
0.38%	-0.10%	0.34%	-0.03%
0.19%	-0.15%	0.19%	-0.23%
0.19%	-0.15%	0.12%	-0.46%
0.06%	-0.21%	0.01%	-0.56%
0.12%	-0.24%	0.07%	-0.69%
0.01%	-0.31%	-0.03%	-0.68%
0.12%	-0.31%	0.12%	-0.65%

Tabella 23 - Effetto di elementi distorti. Caso con 1089 nodi comparato con i risultati della mesh regolare con 32 elementi per lato.

Questa analisi riporta che l'errore che si commette usando mesh distorte e con elementi di forma mista è simile, la forma degli elementi e la regolarità della mesh influenzano in maniera poco rilevante l'analisi di un componente più complesso.

4.3. Valutazione dell'implementazione delle funzioni aggiunte con RZT.

Per queste verifiche si è usato lo stesso modello del caso precedente, aggiungendo RBAR e massa concentrata con le proprietà descritte nella seguente tabella (massa sferica in alluminio, con dimensioni e proprietà di inerzia).

r	0.8
rho	2800
M	6005.05
I	787.0939

Tabella 24 - Proprietà della massa concentrata usata per le verifiche.

Si è valutato il comportamento della struttura con 2 RBAR che uniscono i vertici del lato libero, quello in corrispondenza del foro, di 12°, con il centro dell'arco. Nel punto in cui si uniscono i due RBAR si è posta la massa concentrata.

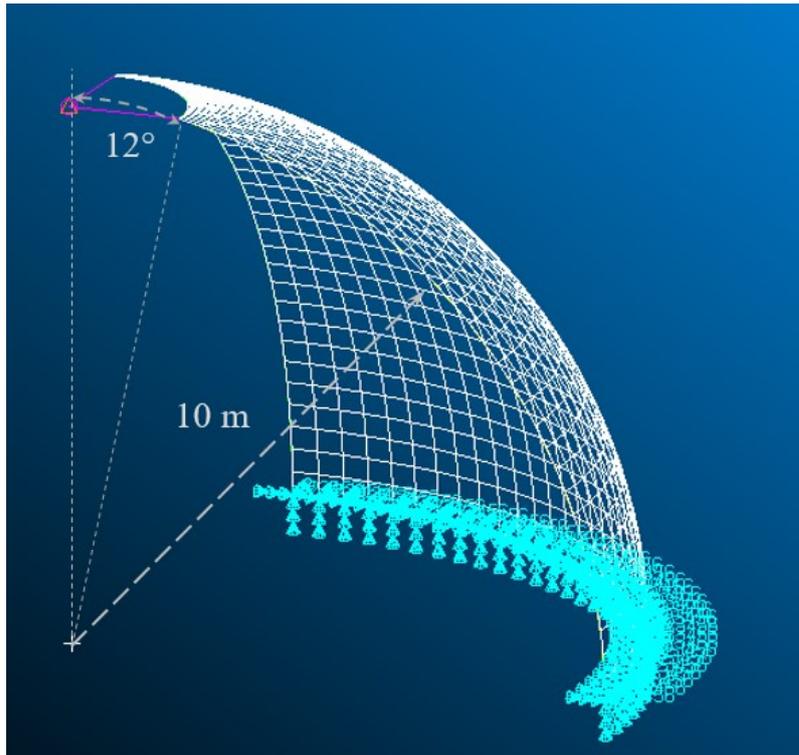


Figura 28 – Modello 2D usato per la verifica del comportamento degli elementi basati su RZT, con RBAR e massa concentrata. Mesh 64x64.

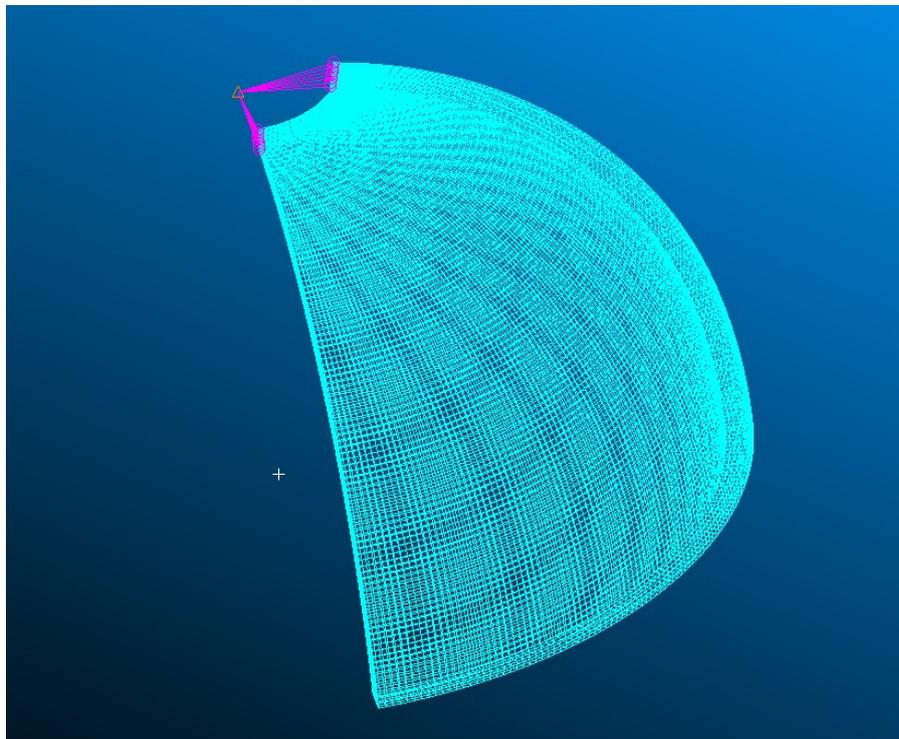


Figura 29 - Modello 3D usato per la validazione di RBAR e massa concentrata con elementi RZT.

È da dedicare particolare attenzione al comportamento della struttura in presenza di RBAR con elementi basati su RZT, in cui sono presenti anche i *fine drilling dofs*.

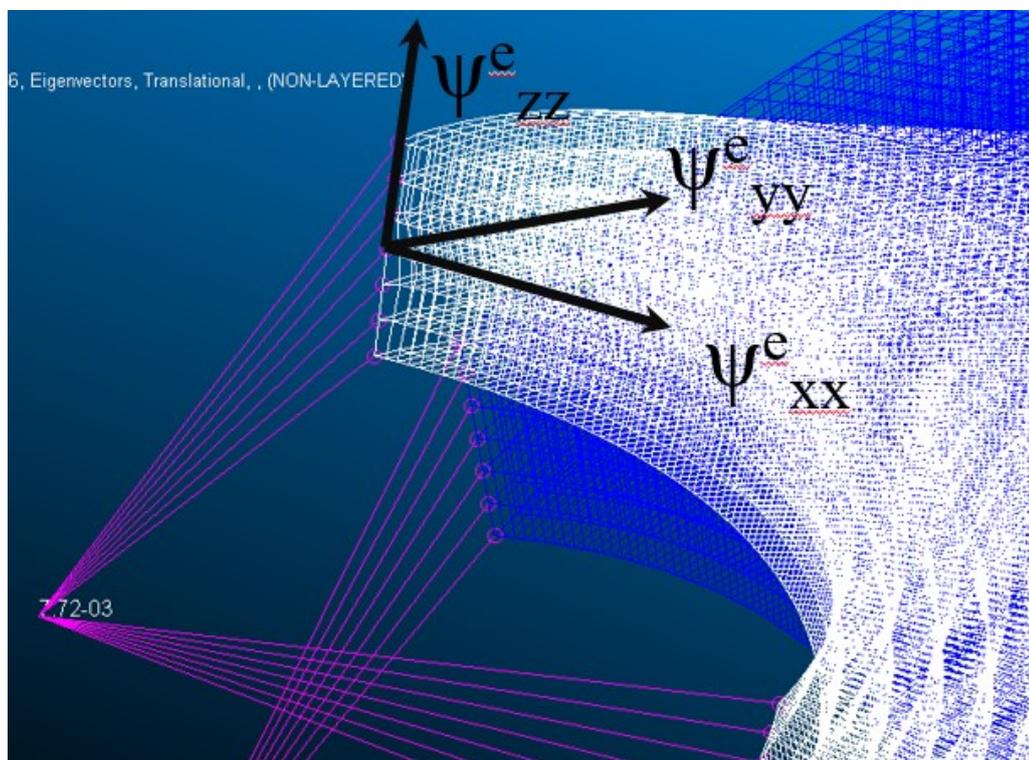


Figura 30 - Particolare della prima forma modale calcolata con Nastran, dettaglio dei nodi vincolati dagli RBAR.

Per avere un confronto tra il modello 3D e il modello 2D, visto che gli RBAR posti in questo modo (che permette di evitare deformazioni lungo lo spessore, non valutabili nel modello 2D), si usa la definizione di RBAR discussa nel paragrafo 4.1, imponendo i *fine drilling dofs* nulli così come si verifica effettivamente nell'analisi 3D.

Si riportano i risultati ottenuti dall'analisi con Nastran e gli errori percentuali al variare della mesh.

Risultati di riferimento in Nastran ed errori percentuali al variare della mesh

	risultati di riferimento (Nastran)	%E		
		16x16	32x32	64x64
E% 1	5.45	2.82%	1.23%	0.55%

E% 2	7.56	1.96%	0.68%	0.20%
E% 3	14.97	4.29%	1.31%	-0.42%
E% 4	19.87	3.43%	1.97%	1.18%
E% 5	27.28	4.62%	1.48%	-0.74%
E% 6	32.79	5.20%	3.17%	2.08%
E% 7	37.29	4.42%	1.45%	-0.60%
E% 8	49.83	7.24%	4.04%	2.26%
E% 9	51.33	4.88%	1.95%	0.64%
E% 10	67.53	7.51%	3.64%	2.04%

Tabella 25 - Risultati di riferimento in Nastran ed errori percentuali al variare della mesh.

La verifica riporta che con mesh molto fitta l'errore risulta dell'ordine del 2%. L'errore non è basso come valutato negli altri casi, ma resta tuttavia accettabile nonostante tutte le complicazioni immesse nel modello.

5. Validazione sperimentale: analisi numerica e sperimentale di una coppa dell'olio prodotta da General Motors.

5.1. Descrizione del principio fisico alla base delle analisi modali sperimentali [65].

Il problema dinamico viene descritto dall'equazione del moto, che per un sistema a N gradi di libertà si rappresenta con il sistema matriciale, con le matrici M , C , K quadrate di ordine N , che moltiplicano il vettore dei gradi di libertà di dimensioni $N \times 1$, descritto dalla seguente:

$$[M]\{\ddot{t} \quad \dot{t} \quad t\} = \{f(t)\} \quad (89)$$

Tramite la diagonalizzazione del sistema, il sistema diventa di N equazioni linearmente indipendenti, come N sistemi a un gradi di libertà:

$$\ddot{t} + \zeta \dot{t} + \omega_n^2 t = \frac{f(t)}{m} = a(t) \quad (90)$$

Con ζ coefficiente di smorzamento, ω_n frequenza naturale del sistema a un grado di libertà. Per l'analisi modale è interessante valutare le risposte nel dominio delle frequenze, quindi occorre effettuare una trasformazione, la trasformata di Fourier

$$T[f(t)] = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (91)$$

Sfruttando alcune proprietà della trasformata di Fourier si perviene alla forma del problema scritto nel dominio delle frequenze:

$$U(\omega)[1 - \beta^2 + j2\zeta\beta] = \frac{1}{\omega_n^2} A(\omega) \quad (92)$$

Dove $\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$. In particolare, l'equazione (92) si può scrivere equivalentemente come:

$$t'' + \beta^2 + j2\zeta\beta] = -\beta^2 A(\omega) \quad (93)$$

Da cui si può ottenere la funzione di trasferimento tra forza impressa e risposta del sistema, ossia:

$$H(\omega) = \frac{\ddot{l}}{A(\omega)} - \frac{-\omega^2 U(\omega)}{A(\omega)} = \frac{-\beta^2}{[1 - \beta^2 + j2\zeta\beta]} \quad (94)$$

Che costituisce la *Frequency Response Function* (FRF).

Il principio che giustifica il modo in cui vengono svolte le prove sperimentali è basato quindi sul fatto che, *conoscendo la funzione della forzante esterna nel tempo e quella della risposta in vari punti della struttura in esame, eseguendo su di esse la trasformata di Fourier, quindi analizzandole nel dominio delle frequenze invece che nel tempo, è possibile valutare le proprietà della struttura tramite la sua FRF, che dipende solo dalle proprietà della struttura stessa.*

5.2. Introduzione all'analisi modale sperimentale.

L'analisi modale sperimentale (*experimental modal analysis*, più avanti abbreviato anche con *EMA*) permette di valutare le proprietà dinamiche di una struttura valutandone grandezze come spostamenti, velocità, accelerazioni in alcuni punti, in risposta a una forzante applicata in uno o più punti della struttura. Le grandezze che si vogliono ricavare (frequenze proprie e forme modali) sono dunque grandezze indirette, perciò è necessario effettuare le misure con una certa precisione, tale per cui la propagazione degli errori, che ovviamente avviene in seguito all'elaborazione dei dati per ricavare le grandezze finali, sia contenuta.

Vari motivi possono giustificare un'analisi modale sperimentale, tra cui:

- Validazione di modelli ad elementi finiti;
- Caratterizzazione del materiale;
- Prove per la qualifica di strutture o componenti;
- Controllo attivo delle vibrazioni e del rumore;
- Identificazione del danno.

Lo svolgimento di un'analisi modale sperimentale si può riassumere nelle seguenti tre fasi:

1. Set up;
2. Acquisizione delle FRF;
3. Elaborazione delle FRF per estrarre i parametri modali.

E saranno analizzate nel dettaglio più avanti in questo capitolo.

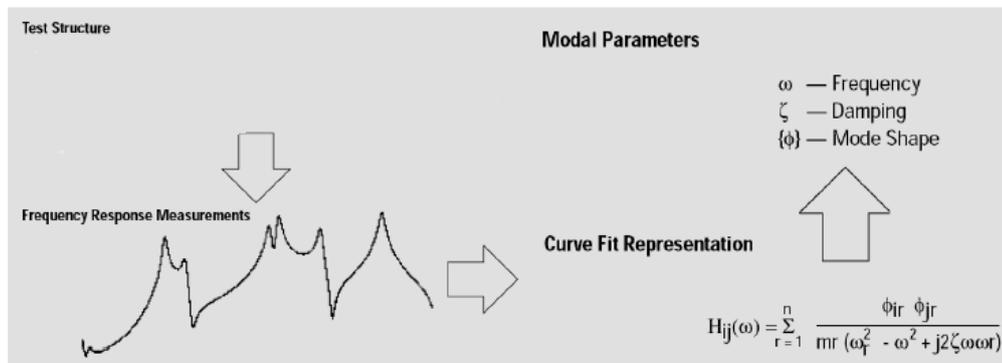


Figura 31 - Flow chart per analisi modale sperimentale [65]

Il sistema di misure necessario per un'EMA è composto da:

- Struttura in esame;
- Trasduttori della forzante esterna;
- Trasduttori della risposta, gli accelerometri;
- Sistema di amplificazione e analisi dei segnali.

5.2.1. Tipi di trasduttori della forzante esterna.

La forzante esterna può essere generata con generatori di forze armoniche (shaker), con cui si valuta il comportamento della struttura al variare della pulsazione della forzante, o generando una forza impulsiva tramite un martello strumentato, che nel dominio delle frequenze corrisponde a una funzione che idealmente è un impulso nel dominio delle frequenze, in quanto sollecita la struttura solo a una specifica frequenza. La prova con shaker permette di avere uno spettro in frequenza della forzante nota, quindi la FRF viene valutata, variando la frequenza di eccitazione, in modo preciso a costo di una strumentazione e di un set up più complicato.

La seconda tipologia, definita *hammer test*, presenta problemi dovuti al fatto che lo spettro in frequenza piatto della forzante impulsiva è piatto solo nel caso di impulso ideale (la trasformata di

Fourier di una funzione di tipo impulso è una funzione costante nel dominio delle frequenze), cosa che naturalmente non è possibile nella realtà.

Sulla base di ciò, data l'equazione (93), si ha che i risultati della FRF sono affidabili finché lo spettro in frequenza della forzante ha un andamento più simile possibile a un andamento piatto.

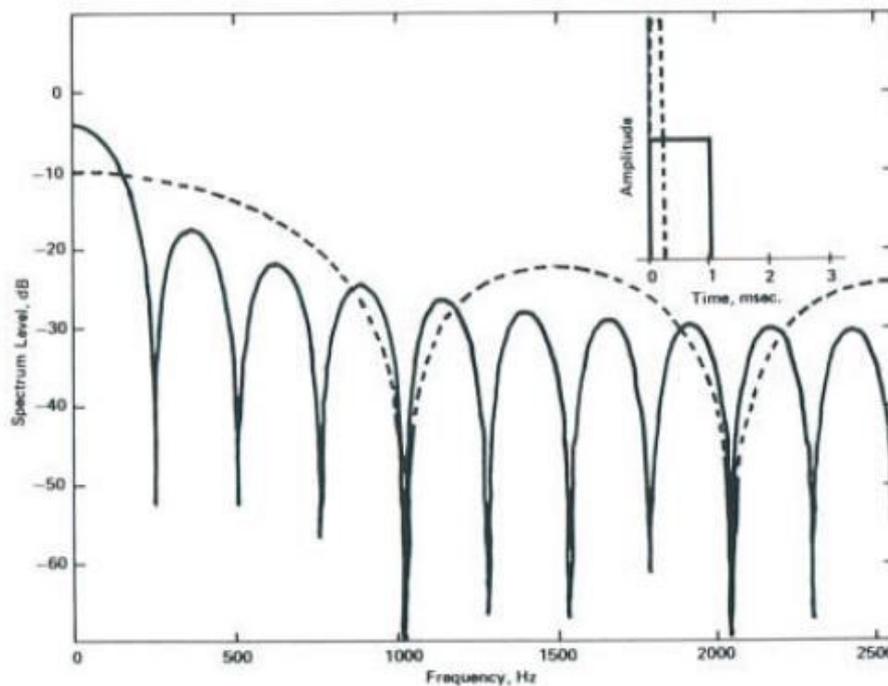


Figura 32 - La risposta in frequenza di un impulso reale. Quella di un impulso ideale sarebbe una funzione costante nel dominio delle frequenze. [65]

5.2.2. Trasduttori della risposta, gli accelerometri.

Gli accelerometri sono strumenti che permettono di tradurre lo spostamento in un segnale elettrico, possono essere usati a questo proposito componenti che sfruttano la piezoelettricità di alcuni materiali, che in presenza di una forzante esterna generano un potenziale elettrico attraverso il quale si può ricavare l'accelerazione che sta agendo in quel punto.

5.2.3. Metodo per il calcolo delle forme modali.

Come si è detto, l'analisi modale permette di valutare le frequenze proprie, che corrispondono alle frequenze per cui la FRF ha un picco (la risposta della struttura sollecitata da una forzante che

agisce a una certa frequenza è sensibilmente più alta), e le forme modali valutando invece la parte reale della FRF.

Si riporta l'esempio di una trave per descrivere il principio con cui è possibile valutare le forme modali.

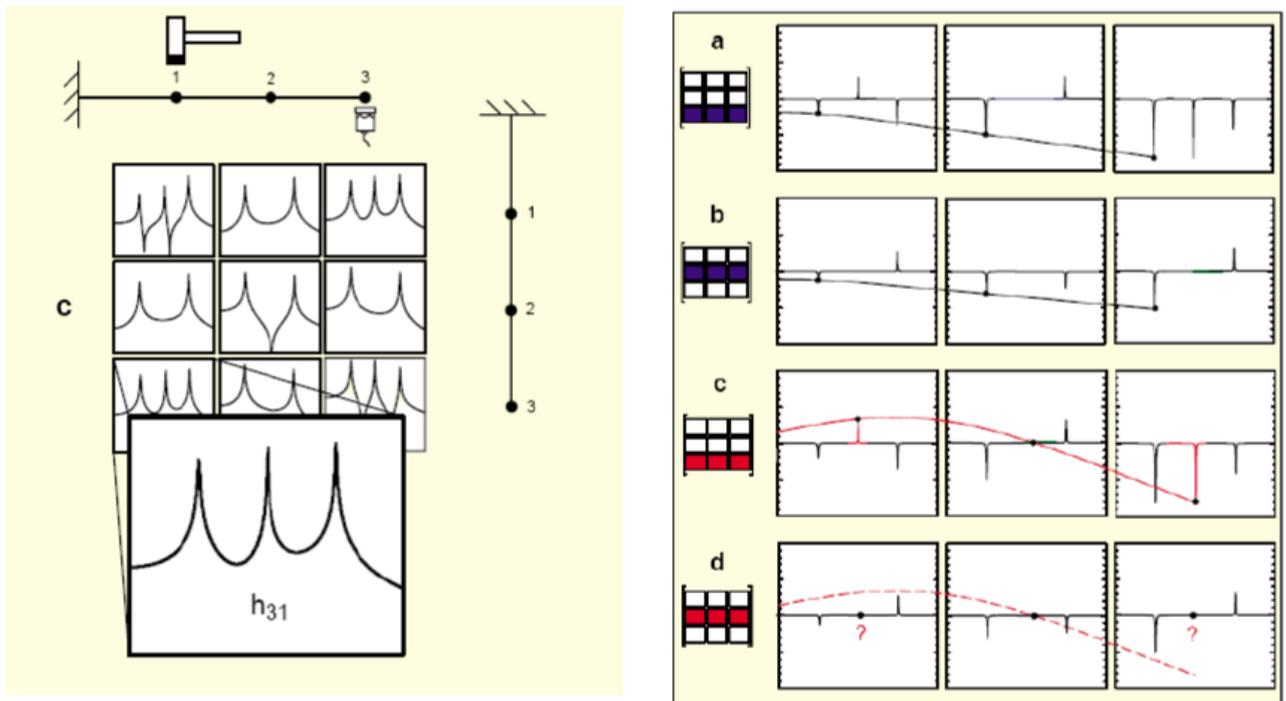


Figura 33 - Esempio di una trave per il calcolo delle forme modali. [65]

Si valuta la risposta in frequenza in seguito alla forzante agente in un sol punto (si ricava la matrice delle FRF). Considerando la sola parte reale si ottengono i diagrammi nella figura a destra. Ogni terna di diagrammi corrisponde alla i -esima riga (o colonna, dato che la matrice delle FRF è simmetrica), quindi la risposta nei tre punti in seguito alla sollecitazione nell' i -esimo punto.

Si nota che se si effettua una martellata in un punto che non è nodo per nessuna forma modale, ogni forma modale sarà sollecitata allo stesso modo, quindi dal diagramma delle parti reali delle FRF, unendo gli i -esimi picchi della *parte reale di ogni FRF_{ij}*, tramite un'interpolazione che può avvenire ad esempio con una spline, si trova una stima della i -esima forma modale.

Tuttavia, se si martella in un punto che è nodo per una forma modale (la seconda riga è interpretabile come la risposta nei tre punti in seguito alla martellata nel nodo della prima forma modale), essa non verrà sollecitata in nessuno spettro, e non è possibile unire alcun punto.

Ciò porta ad un'altra considerazione: se tra tante forme modali alcune hanno naturalmente un'ampiezza troppo bassa rispetto alle altre, in seguito all'impulso in un punto qualsiasi, dall'analisi modale sperimentale per effetto di errori sarà difficile, se non impossibile a causa di errori troppo alti, valutare quelle forme modali, in quanto essa non sarà correttamente valutabile. Questo problema può risolversi valutando forme modali che hanno ampiezze diverse in matrici di FRF diverse, in modo che, nel post-processing, i picchi delle FRF (quindi le frequenze proprie, di conseguenza le forme modali dovendone valutare i picchi nelle parti reali di queste) delle forme modali che naturalmente hanno un'ampiezza molto minore delle altre (ad esempio le forme modali torsionali hanno una risposta molto più bassa rispetto a quelle flessionali per cui vengono trascurate o interpretate come errori nell'analisi finale) non vengano trascurate e sia possibile valutarle correttamente.

Se si effettua un impulso in un punto che non è il nodo di nessuna forma modale, esse saranno tutte correttamente valutabili.

Non è necessaria l'intera matrice delle FRF (che richiederebbe di valutare la risposta in funzione di impulsi su tutti i punti in cui vengono posizionati gli accelerometri), in quanto le informazioni sulle frequenze proprie possiamo trovarle anche solo valutando la risposta di tutti i punti all'impulso esercitato su un solo punto, purché esso non sia un nodo di nessuna forma modale. Non otterremo quindi l'intera matrice ma *solo una riga*.

La forzante è una martellata, quindi la time history è una forza concentrata in un intervallo molto ristretto di tempo, cresce, decresce e torna a zero. Farne la trasformata di Fourier è possibile perché rispetta la condizione delle funzioni che si smorzano nel tempo, in particolare avviene in un tempo che deve essere più velocemente possibile, e ciò dipende da come viene data la martellata.

5.3. Prova sperimentale sulla coppa dell'olio prodotta per GM.

La prova dinamica è consistita in un hammer test, con cui, attraverso una martellata (corrispondente a un impulso), si sollecita la coppa in uno spettro di frequenze più ampio possibile.

Con la strumentazione a disposizione si riescono a sollecitare opportunamente al più le prime tre frequenze proprie.

La strumentazione usata consiste in:

- Martello strumentale PCB piezotronics, modello T086C03 con sensitività di 2.32mV/N;
- Accelerometri (13 a disposizione, ne sono stati usati 10 in più prove), marca Bruel & Kjaer, type 4518-003, con sensitività di 100 mV/g,
- Sistema di acquisizione dei segnali LMS Instruments Scadas III.

Si è eseguita una prima prova completa, con estrapolazione delle frequenze proprie e delle forme modali, su una prima coppa; si è valutata poi un'altra coppa (si sono valutate solo le frequenze proprie) per tenere conto dell'effetto di eventuali imprecisioni causate dal processo di produzione di tipo prototipale, per cui l'assenza di un controllo del processo potrebbe causare valutazioni sbagliate nell'analisi modale.

5.3.1. Prove sperimentali con Hammer Test: generalità su metodo, allestimento ed esecuzione con la strumentazione a disposizione.

Si introducono in questo paragrafo le linee guida comuni che hanno guidato l'analisi modale sperimentale del componente in esame. Le caratteristiche della procedura sono indicate nel manuale del software [66].

5.3.1.1. Selezione punti, definizione della geometria sul software.

La prima fase consiste nell'incollaggio degli accelerometri sulla coppa, occorre valutare la posizione in cui verranno incollati in modo da posizionarli senza che si trovino nei nodi delle forme modali.

Dato che è possibile rilevare solo le prime due frequenze proprie, e dato il numero di accelerometri a disposizione, si è pensato di posizionarli nelle zone piane più ampie in quantità diversa.

Scelti i punti sulla coppa, si sono riportate le distanze da punti di riferimento su Patran, come nella seguente immagine.

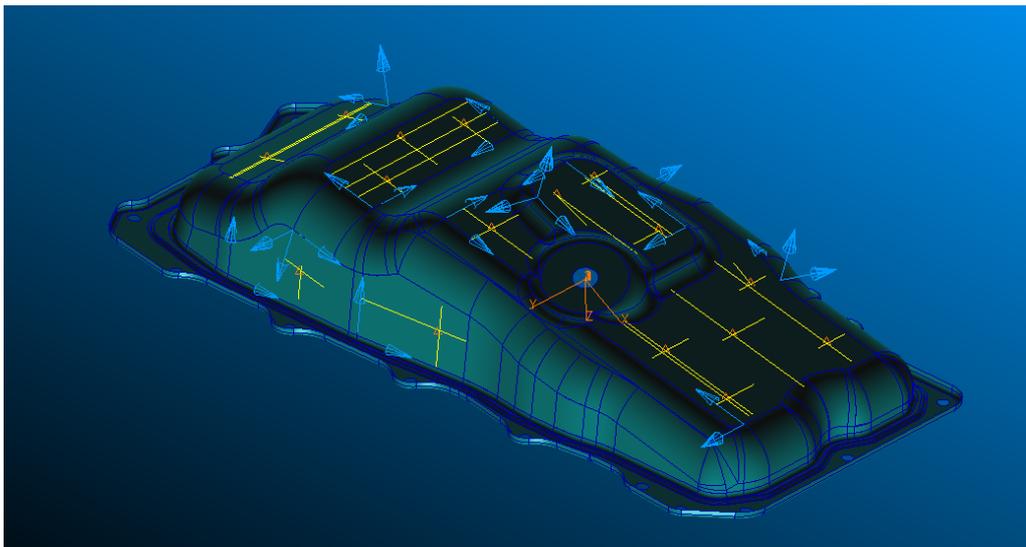


Figura 34 - Le posizioni degli accelerometri sono ricavate dal modello dopo averli incollati sulla coppa.

Da questa procedura è stato possibile valutare la posizione di ogni accelerometro.

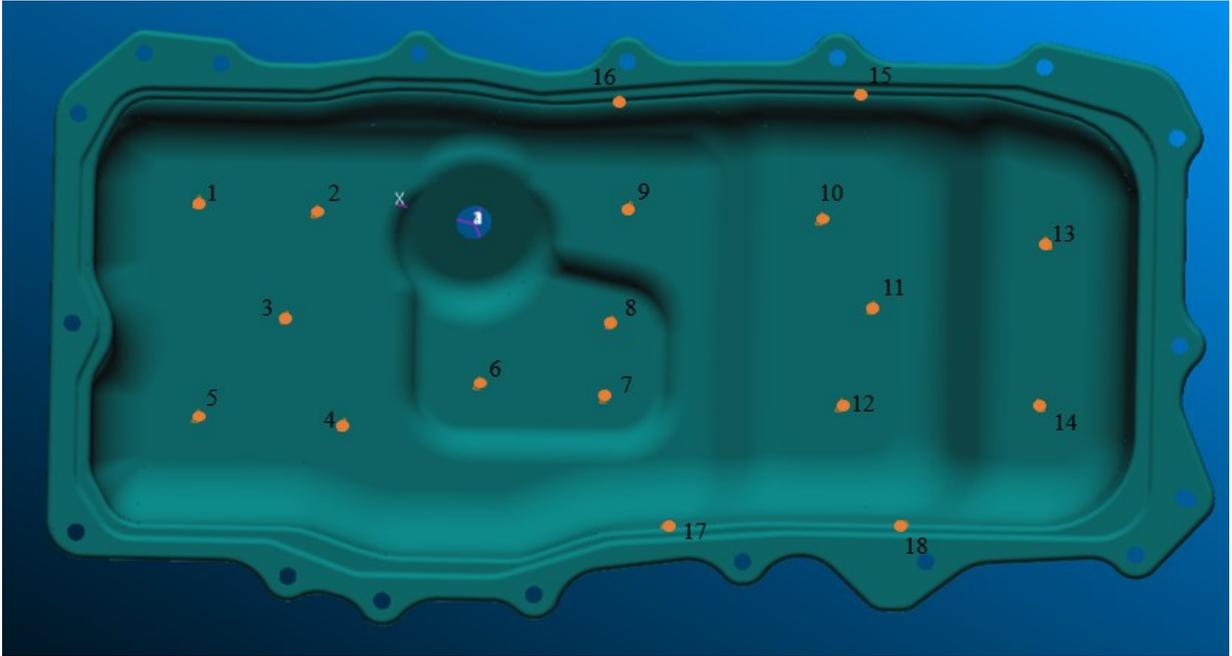


Figura 35 - Posizione degli accelerometri. Gli accelerometri dal 15 al 18 sono sui lati della coppa.

Modellizzando ogni accelerometro sul modello FEM è stato possibile ricavarne le coordinate esportando le informazioni in un file .bdf (file di input per Nastran), ed è stato possibile definire la geometria nel software proprietario del sistema di acquisizione LMS Test Lab – Impact Testing.

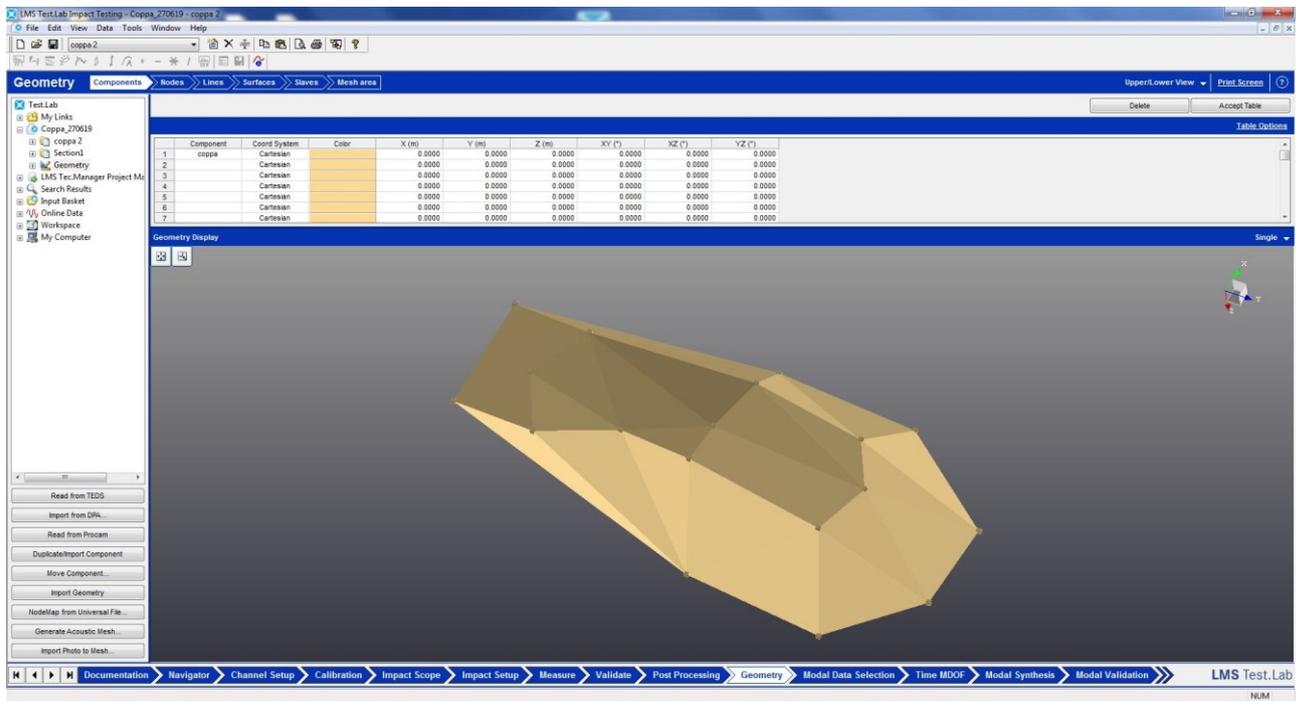


Figura 36 – Schermata di LMS TestLab Impact Testing per l'input dei punti dove sono posizionati gli accelerometri.

5.3.1.2. Channel set-up

Definita la geometria, è necessario definire in quali punti siano presenti gli accelerometri e quale sia il canale dedicato a quel punto.

Si definisce quindi la direzione lungo cui ogni accelerometro legge lo spostamento, il tipo di accelerometro, la posizione (definita per punti nella sezione precedente), la quantità che il sensore acquisisce (forza per il canale collegato al martello strumentale, accelerazione per gli altri), e la sensibilità di ogni sensore (mV/N per la cella di carico del martello strumentale, mV/g per gli accelerometri).

Channel Setup															
Status: ■ Verification OK															
	PhysicalChannelId	OnOff	Reference	UserChannelId	ChannelGroupId	Point	Direction	InputMode	Measured Quantity	Electrical Unit	Actual Sensitivity	Transducer Type	Transducer Manufact ...	Serial number	Range
1	Input1	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>		Vibration	coppa.1	+Z	ICP	Force	mV	2.83 mV/N				0.2
2	Input2	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		Vibration	coppa.1	+Z	ICP	Acceleration	mV	100 mV/g				10
3	Input3	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		Vibration	coppa.3	+Z	ICP	Acceleration	mV	100 mV/g				10
4	Input4	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		Vibration	coppa.12	+Z	ICP	Acceleration	mV	100 mV/g				5
5	Input5	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		Vibration	coppa.9	+Z	ICP	Acceleration	mV	100 mV/g				5
6	Input6	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		Vibration	coppa.10	+Z	ICP	Acceleration	mV	100 mV/g				10
7	Input7	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		Vibration	coppa.13	+Z	ICP	Acceleration	mV	100 mV/g				2
8	Input8	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		Vibration	coppa.15	+Z	ICP	Acceleration	mV	100 mV/g				5
9	Input9	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		Vibration	coppa.6	+Z	ICP	Acceleration	mV	100 mV/g				10
10	Input10	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		Vibration	coppa.18	+K	Voltage DC	Acceleration	mV	100 mV/g				0.0125
11	Input11	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		Vibration	Point11	None	Voltage AC	Acceleration	mV	100 mV/rms2				10
12	Input12	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		Vibration	Point12	None	Voltage AC	Acceleration	mV	100 mV/rms2				10
13	Input13	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		Vibration	Point13	None	Voltage AC	Acceleration	mV	100 mV/rms2				10
14	Input14	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		Vibration	Point14	None	Voltage AC	Acceleration	mV	100 mV/rms2				10
15	Input15	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		Vibration	Point15	None	Voltage AC	Acceleration	mV	100 mV/rms2				10
16	Input16	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		Vibration	Point16	None	Voltage AC	Acceleration	mV	100 mV/rms2				10

Figura 37 - Schermata del software per l'acquisizione, pagina relativa agli accelerometri.

5.3.1.3. Impact scope e set-up.

L'impact scope è necessario per impostare il range in cui il segnale verrà valutato.



Figura 38 - Schermata del software di acquisizione, pagina relativa all'impact scope.

L'impact set up permette di definire il trigger, controllare la larghezza di banda entro cui i risultati risultano affidabili e introdurre un windowing.

Il sistema di acquisizione è sempre “in ascolto”, per cui l’inizio della misura deve essere definito come il momento (più qualche frazione di secondo, consigliata dal software stesso) in cui la martellata è effettivamente avvenuta, ossia il trigger. Per ciò bisogna effettuare qualche martellata “tipica”, nel senso che saranno simili alle martellate che avverranno in fase di misura, così che il sistema riconosca quando la martellata è stata effettivamente data, cioè quando la cella di carico nel martello dà un valore di potenziale superiore alla soglia determinata in questa fase.

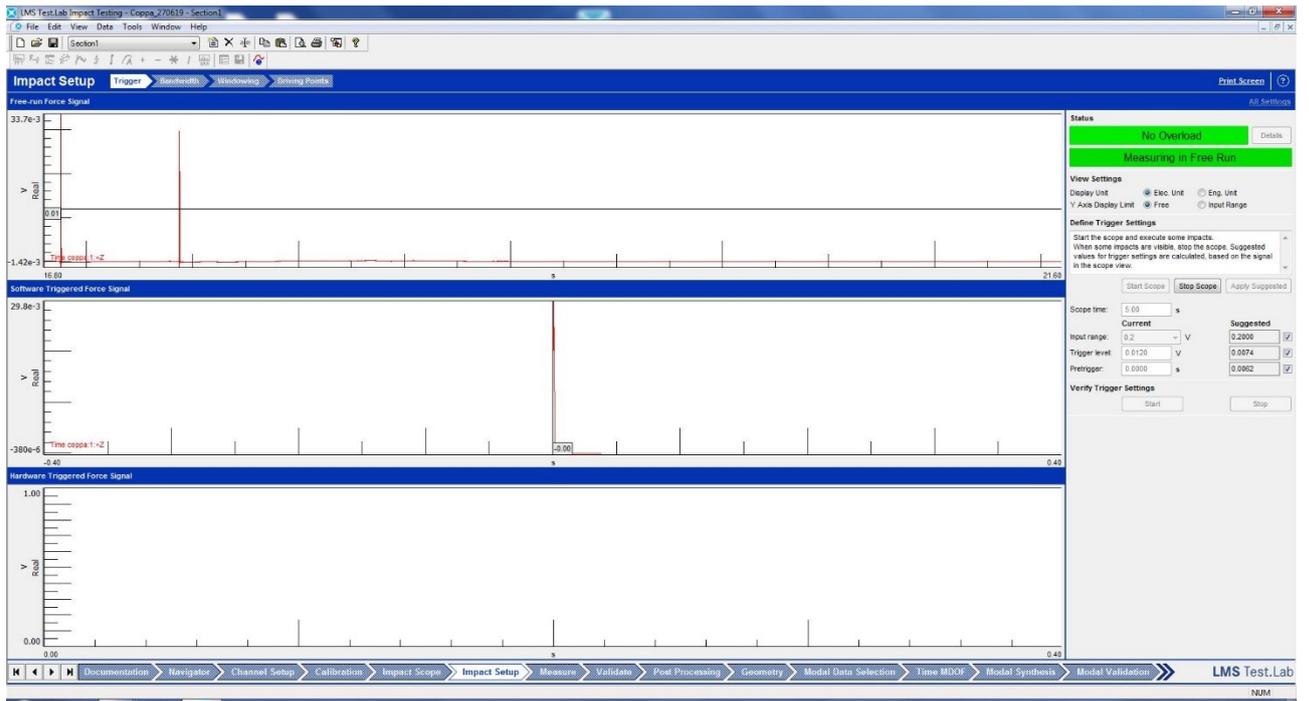


Figura 39 - Schermata del software di acquisizione, pagina relativa al trigger.

La *bandwidth* è l'intervallo in cui si possono reputare i risultati affidabili. Si eseguono varie martellate per controllare il range di frequenze tale per cui la FRF dell'impulso abbia un decadimento non superiore ai 10 dB.

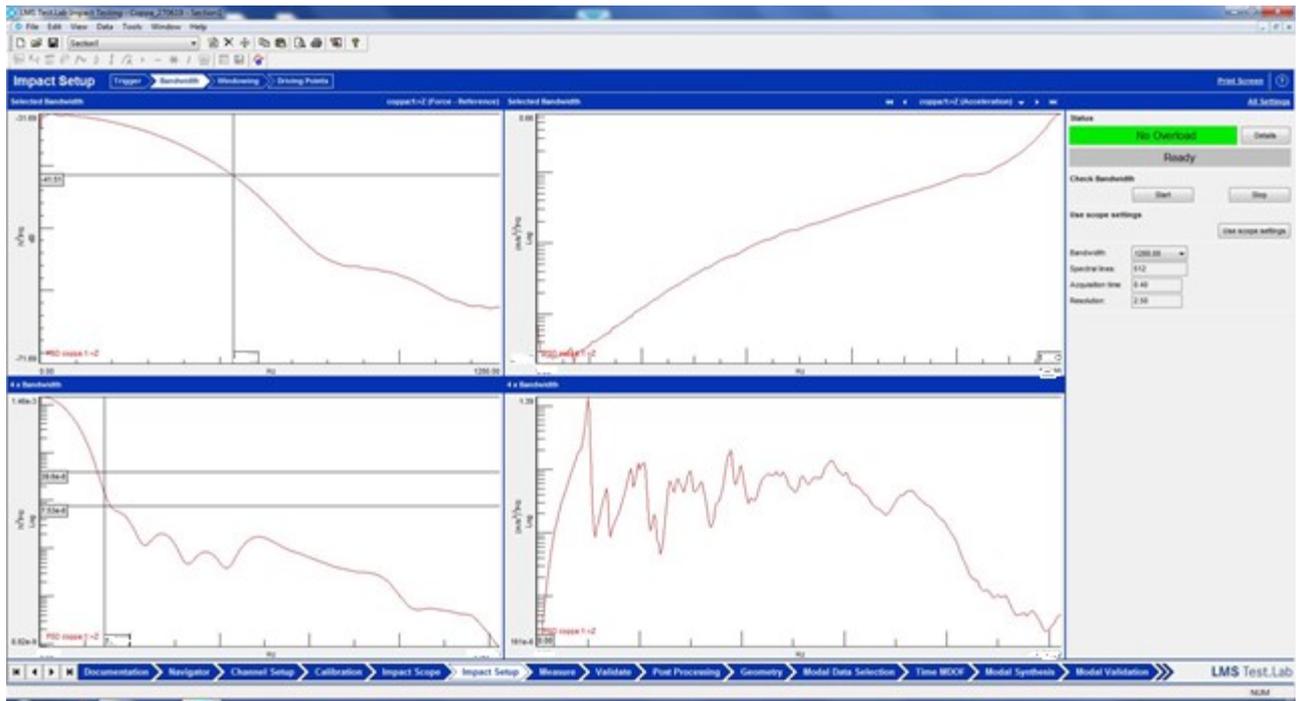


Figura 40 - Schermata del software di acquisizione, pagina relativa al bandwidth.

Il *windowing* consiste nell'imporre una "finestratura", che consiste in uno smorzamento artificiale che permetta di evitare errori nel segnale di input. Lo smorzamento artificiale infatti elimina eventuali picchi seguenti il picco principale.

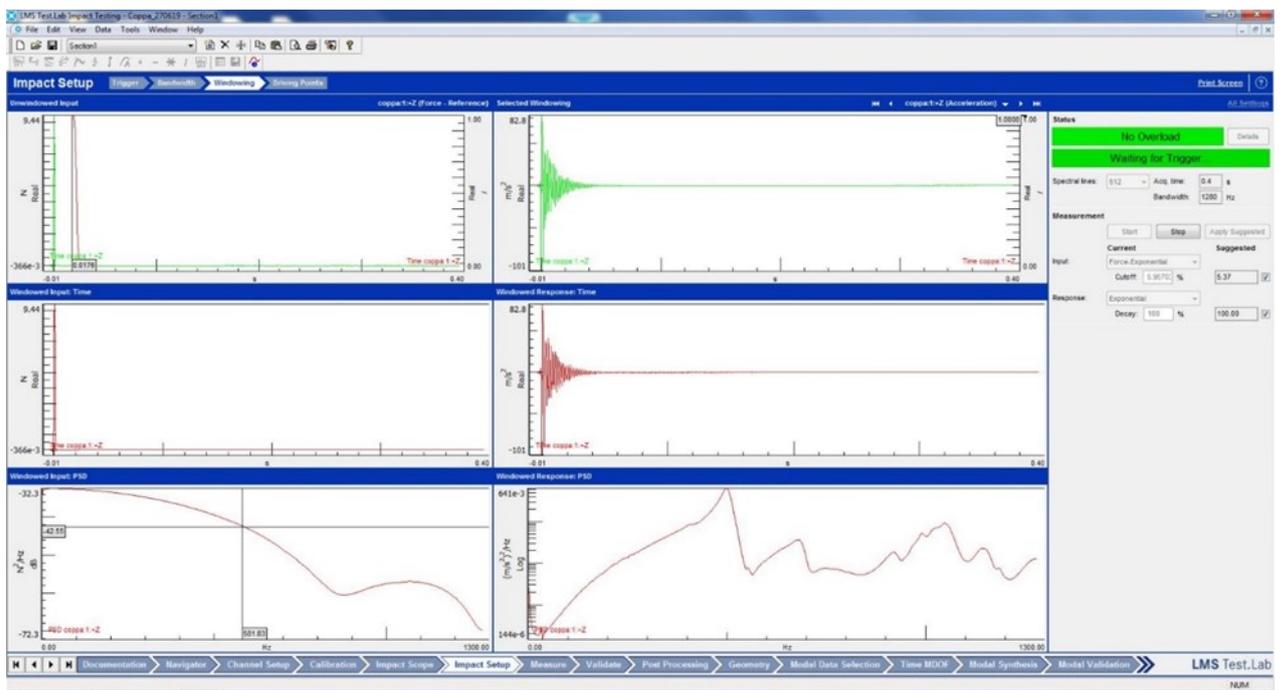


Figura 41 - Schermata del software di acquisizione, pagina relativa al windowing.

5.3.1.4. Misura.

Finito il set-up si possono valutare le FRF, che si ottengono eseguendo una serie di martellate che verranno mediate per avere la FRF finale. Delle martellate viene valutata anche la ripetibilità tramite la misura *coherence*, che misura quanto dell'output è dovuto all'influenza del solo input basandosi sulla variazione della media delle misure.

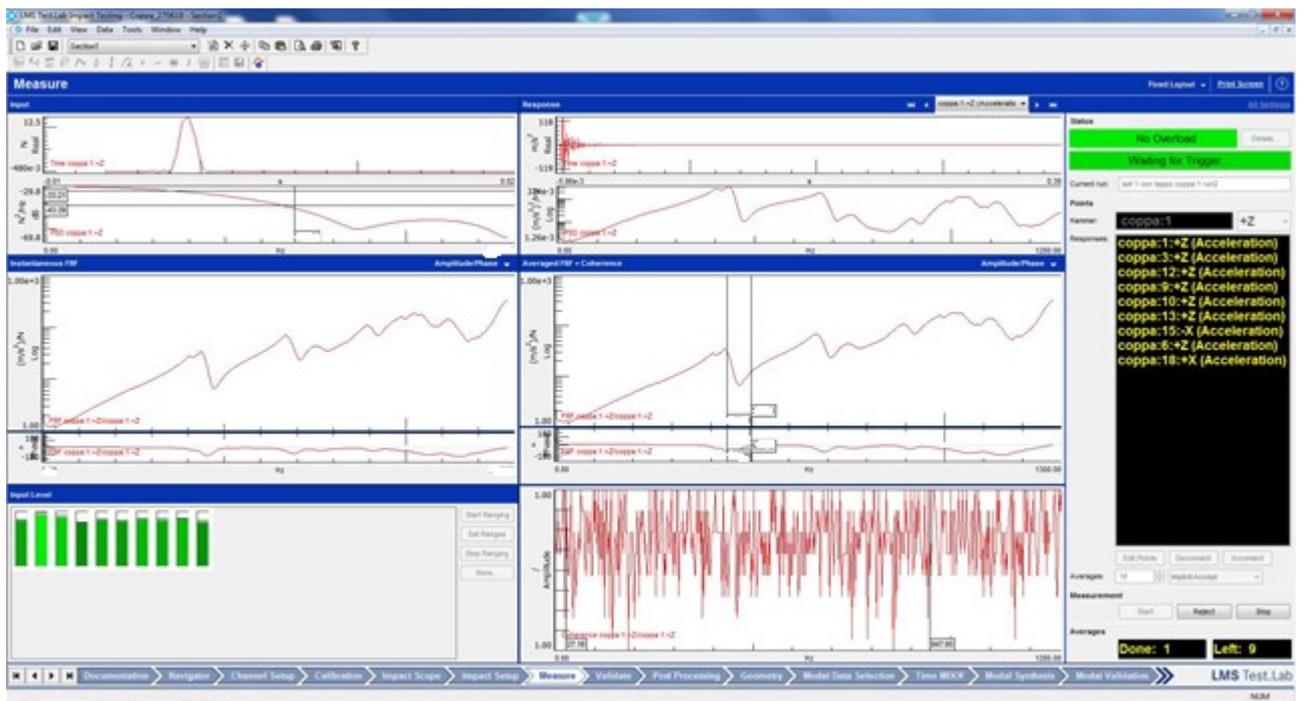


Figura 42 - Schermata del software di acquisizione, esempio di prima martellata. Si possono notare anche il range di frequenze che si possono reputare misure affidabili, e gli accelerometri coinvolti in questa serie di misure.

Finite le misure si passa al post processing con cui è possibile valutare le frequenze proprie e le forme modali.

5.3.2. Prova su prima coppa: allestimento, esecuzione e risultati.

Sono stati scelti 2 set up per ogni prova (su due coppe sono state eseguite le prove con tappo e senza tappo).

Per la disposizione degli accelerometri per i due set si è tenuto conto del fatto che le misure potrebbero subire effetti dovuti a una concentrazione della massa degli accelerometri, per cui le due disposizioni sono quanto più “random” possibile.

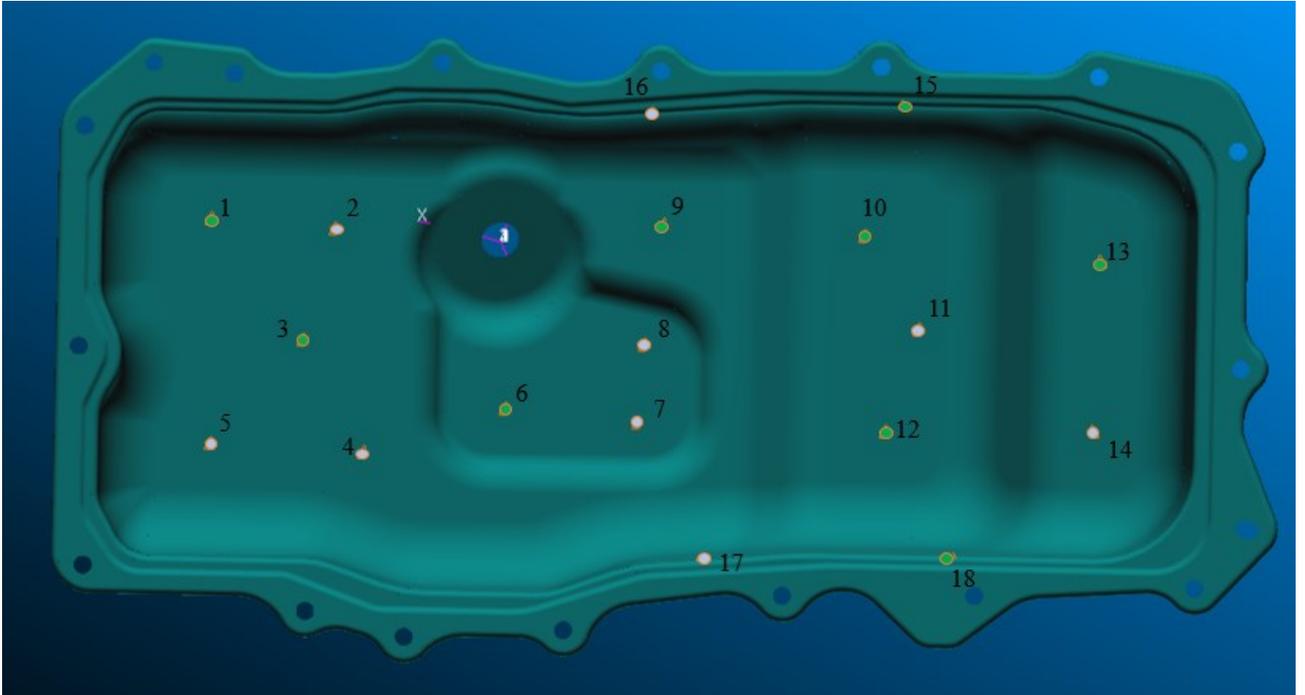


Figura 43 - Si sono effettuate due prove con set diversi, rappresentati con colori diversi per le due prove.

Si riportano in questa parte alcuni particolari della prima prova, la seconda prova è avvenuta in maniera identica, cambiando la posizione degli accelerometri.



Figura 44 - Set-up della prova con il primo set di accelerometri.

Sono state valutate due coppe per vedere se l'analisi su una coppa fosse ripetibile sulle altre, problema nato dal fatto che questi componenti sono prodotti come *prototipi*, e quindi il processo di produzione potrebbe risultare fuori controllo.

Le misure con 2 set di accelerometri hanno permesso di non appesantire la coppa senza poter controllare gli effetti, per poi essere uniti per la valutazione delle forme modali. In entrambi i casi la coppa è stata martellata in prossimità del *punto 1*, lasciando l'accelerometro in quella stessa posizione, così da avere una *riga completa* della matrice delle FRF, secondo il principio illustrato all'inizio di questo capitolo.

Si sono ottenute dunque le FRF nei due casi, con tappo e senza tappo.

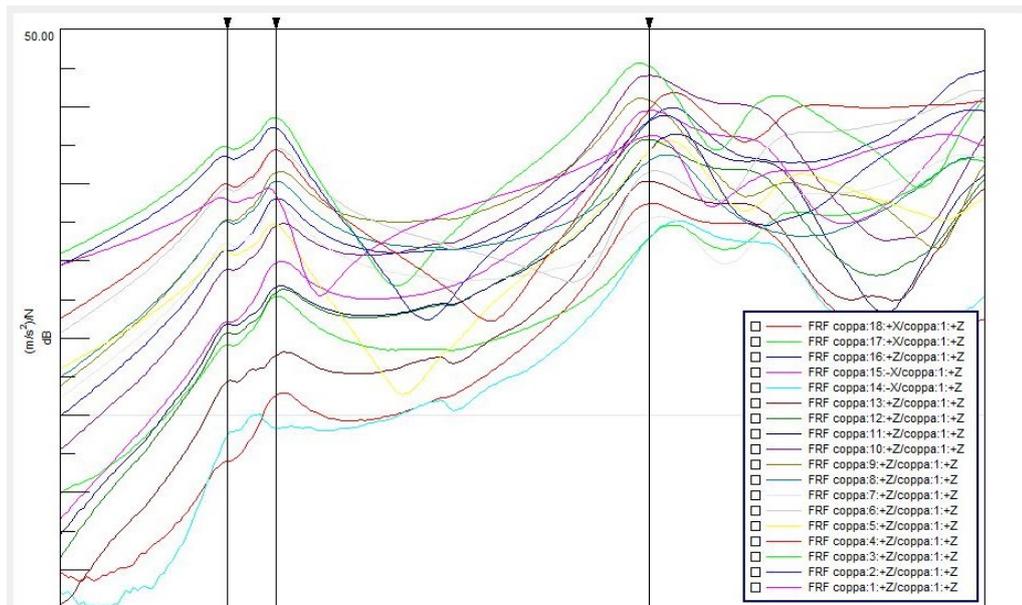


Figura 45 - FRF della coppa, prova con tappo.

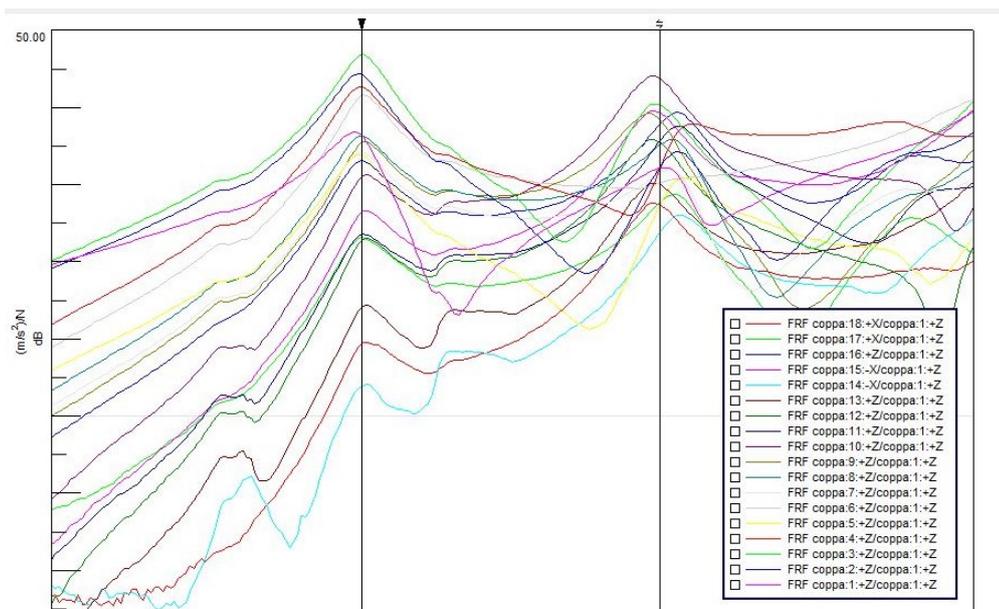


Figura 46 - FRF della coppa, prova senza tappo.

Sono state considerate solo le prime due frequenze proprie con le rispettive forme modali per entrambi i casi, che hanno portato alle seguenti misure.

Le frequenze sono valutate con il metodo *Time MDOF* (*Time Domain Multiple degrees of freedom*), che, una volta ottenuta un'intera riga di FRF, le approssima con il metodo ai minimi

quadrati, per poi permettere di scegliere le frequenze proprie e visualizzare le forme modali corrispondenti, come nella figura 47

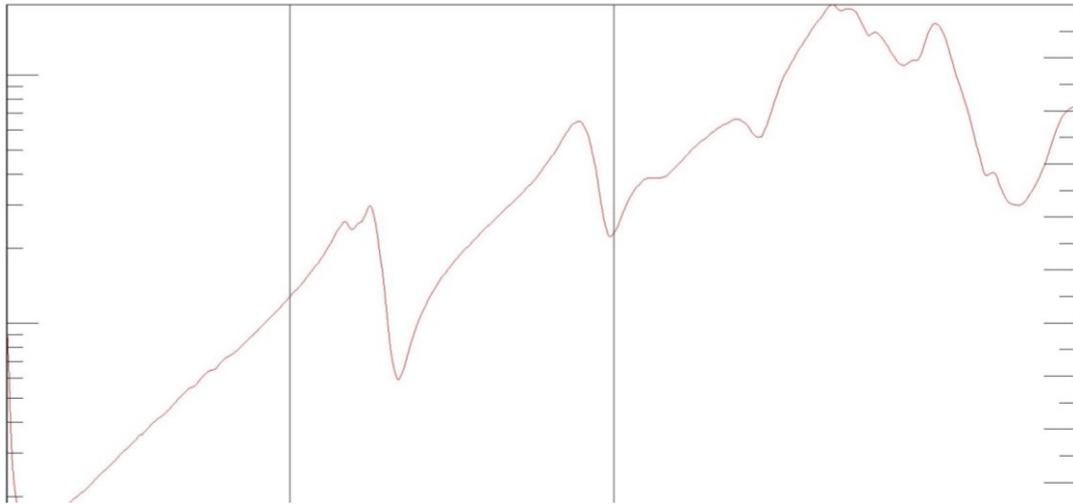


Figura 47 - Scelta dell'intervallo in cui valutare le frequenze e le forme modali.

Una volta scelto l'intervallo si continua con la *stabilizzazione*, dove si scelgono le frequenze alle quali far calcolare le forme modali, con la possibilità di scegliere tra diverse alla stessa frequenza. Si scelgono le soluzioni (poli), avendo a disposizione varie soluzioni con frequenza, smorzamento e vettore stabili nell'intervallo di tolleranza (indicate con "s" nel pannello "stabilization").

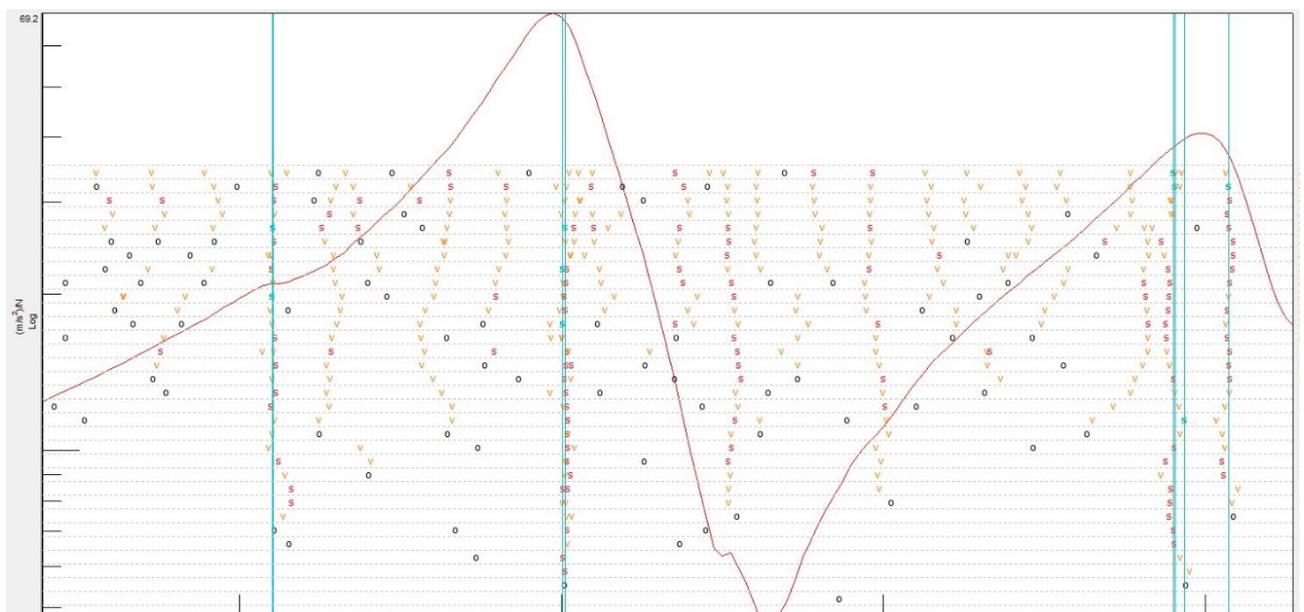


Figura 48 - Pannello "stabilization" per la scelta delle frequenze e forme modali da calcolare.

Risultano le forme modali descritte nella tabella 26. Per motivi di riservatezza sono riportati i dati adimensionati rispetto alla f_2 del caso senza tappo, su cui si effettueranno anche le prove numeriche.

	con tappo	senza tappo
f_1 [Hz]	0.812	NA
f_2 [Hz]	0.865	1
f_3 [Hz]	1.357	1.371

Tabella 26 - Frequenze proprie della prima coppa.

La prima frequenza propria nella prova senza tappo risulta troppo smorzata quindi non è stata identificata.

Vengono riportate le forme modali calcolate dal software, per il caso con tappo e il caso senza tappo. La visualizzazione per immagini si può intuire vedendo la differenza tra la configurazione indeformata e le immagini nelle forme modali.

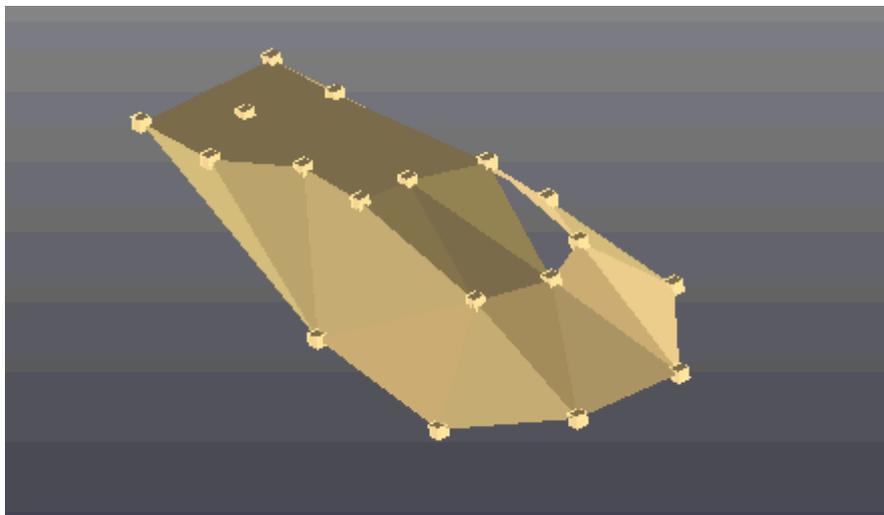


Figura 49 - Geometria come appare nella configurazione indeformata.

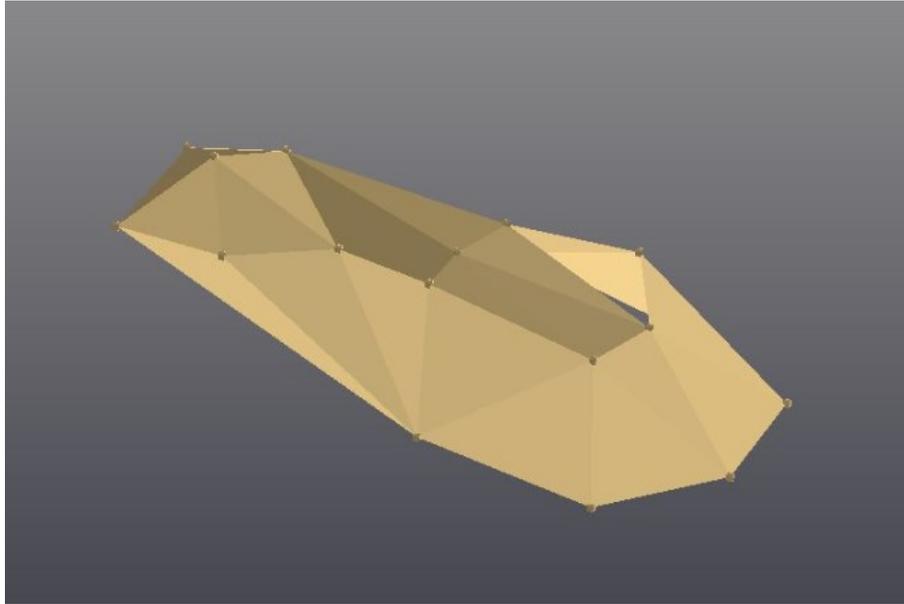


Figura 50 - 1a forma modale per la coppa con tappo.

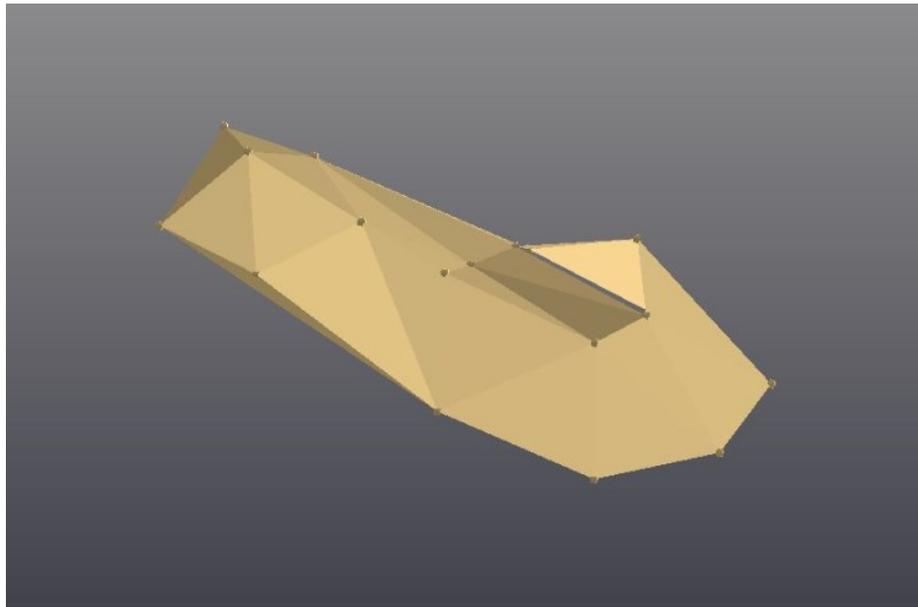


Figura 51 - 2a forma modale per la coppa con tappo.

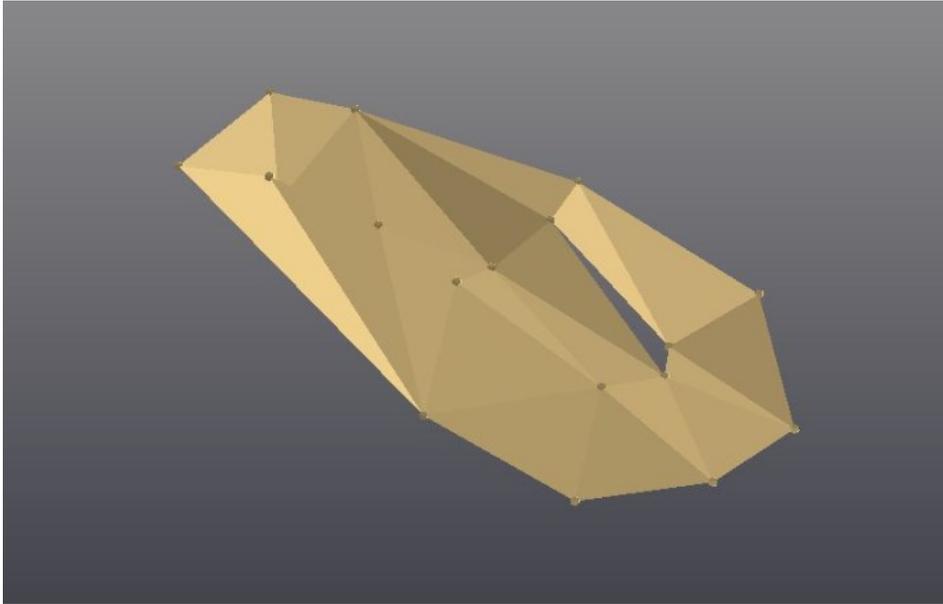


Figura 52 - 3a forma modale della coppa con tappo.

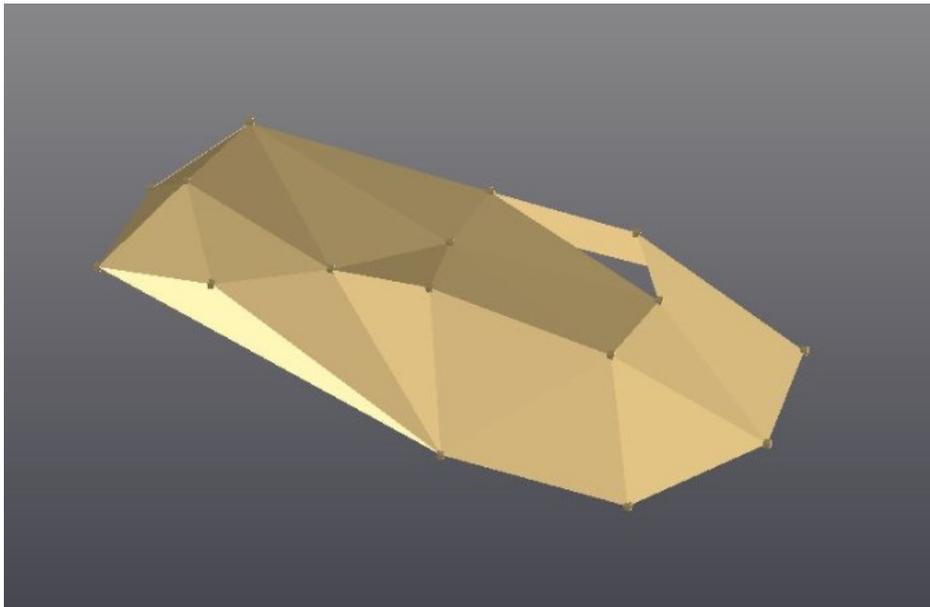


Figura 53 - 1a forma modale della coppa senza tappo.

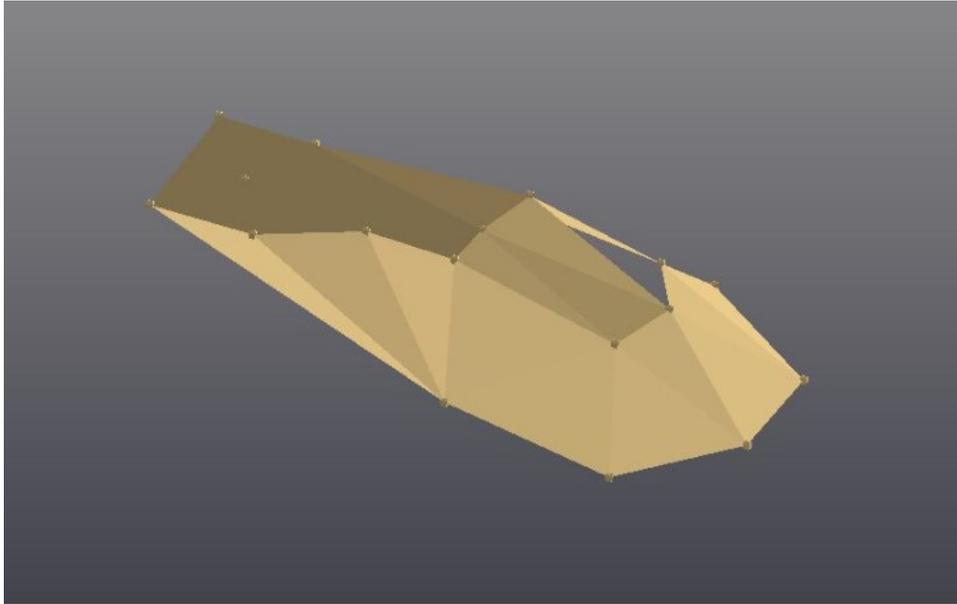


Figura 54 - 2a forma modale per la coppa senza tappo.

5.3.3. Prova sulla seconda coppa.

Per l'analisi sulla seconda coppa si è valutata la risposta in soli due punti.

Innanzitutto si è visto se la prova con soli due accelerometri avesse senso, quindi se la presenza di soli 2 accelerometri invece che 9 desse risultati utili.

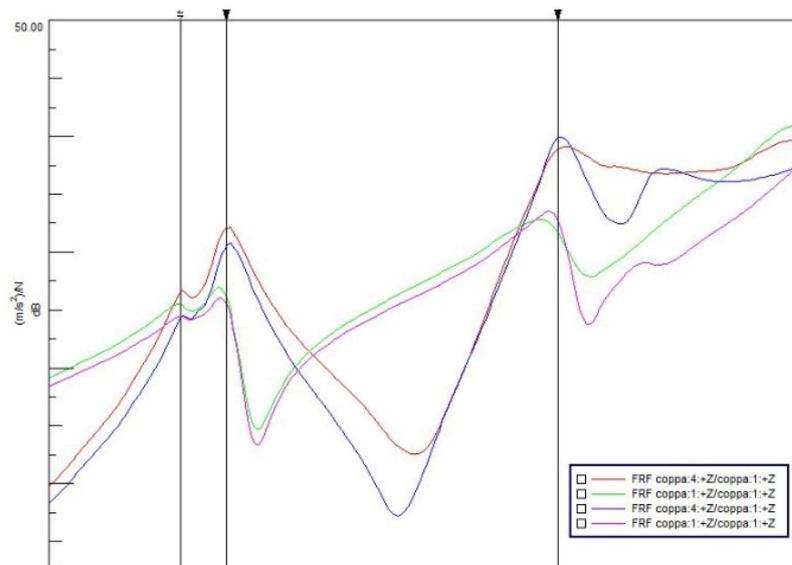


Figura 55 - FRF nei punti 1 e 4 della coppa con tappo.

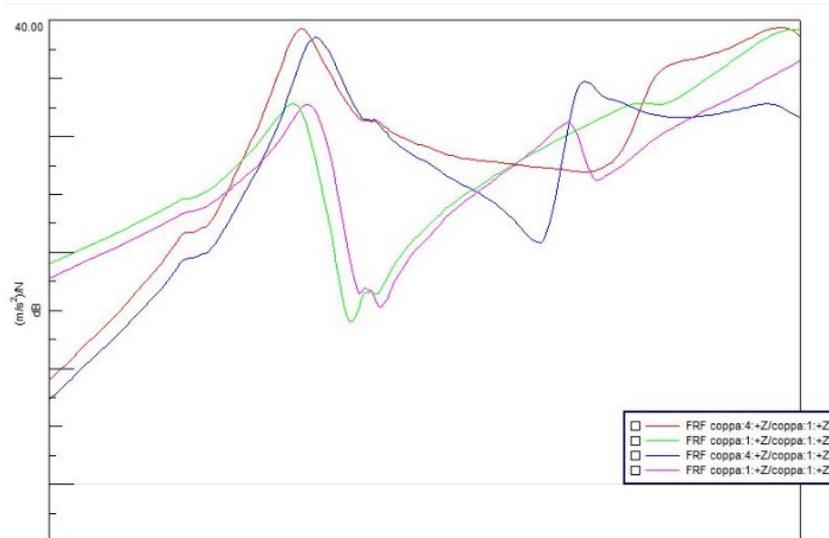


Figura 56 - FRF nei punti 1 e 4 della coppa senza tappo.

Dalla prova risulta che le FRF con 2 accelerometri e 9 accelerometri si sovrappongono dando gli stessi risultati: concludiamo che le prove sul primo campione siano indicative di tutte le coppe a nostra disposizione.

5.4. Confronto tra i risultati numerici e i risultati sperimentali.

Noti i risultati sperimentali, si vogliono valutare i risultati delle analisi numeriche. Per questa valutazione si tiene conto dei risultati che si ottengono dal software commerciale MSC Nastran, i risultati che si ottengono con il programma in MATLAB utilizzando la teoria di Mindlin, e i risultati che si ottengono dall'analisi con lo stesso programma utilizzando la RZT, confrontandoli con i risultati sperimentali.

Data la geometria in formato STL, si è ricavata la superficie media del componente.

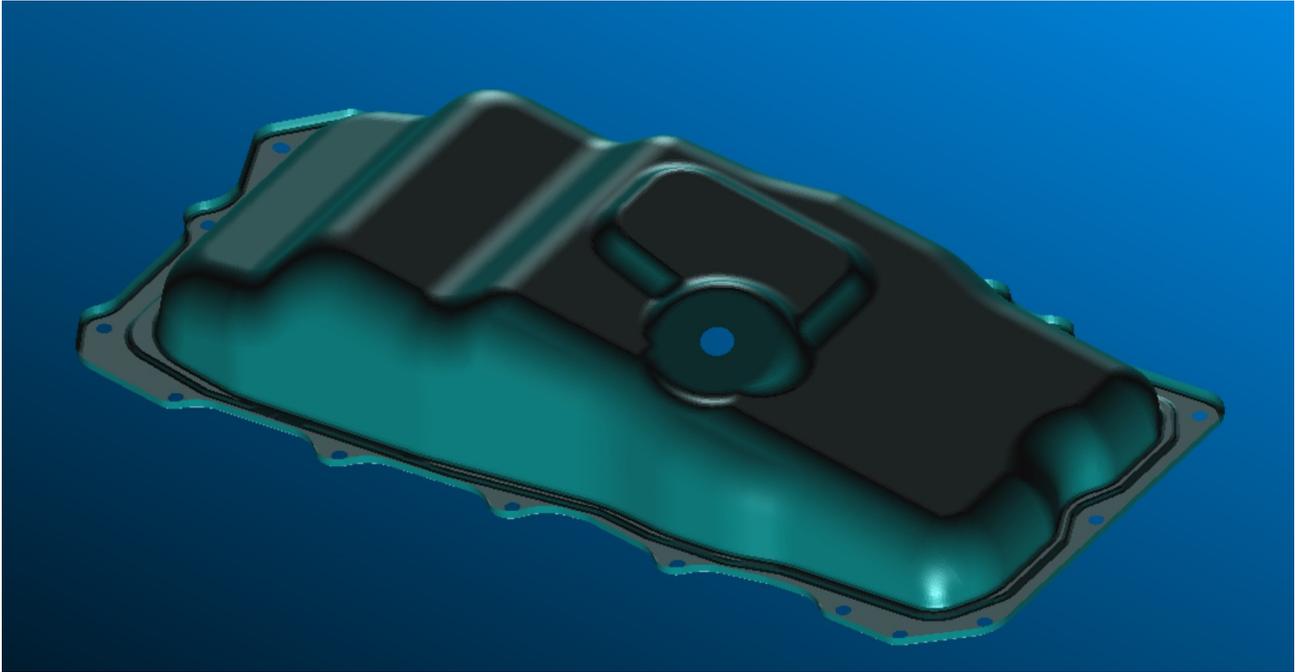


Figura 57 - Superficie media della coppa.

Si è fatta poi la mesh sulla superficie, tenendo conto che nei raccordi la mesh deve essere più fitta, mentre può essere più rada sulle parti piane.

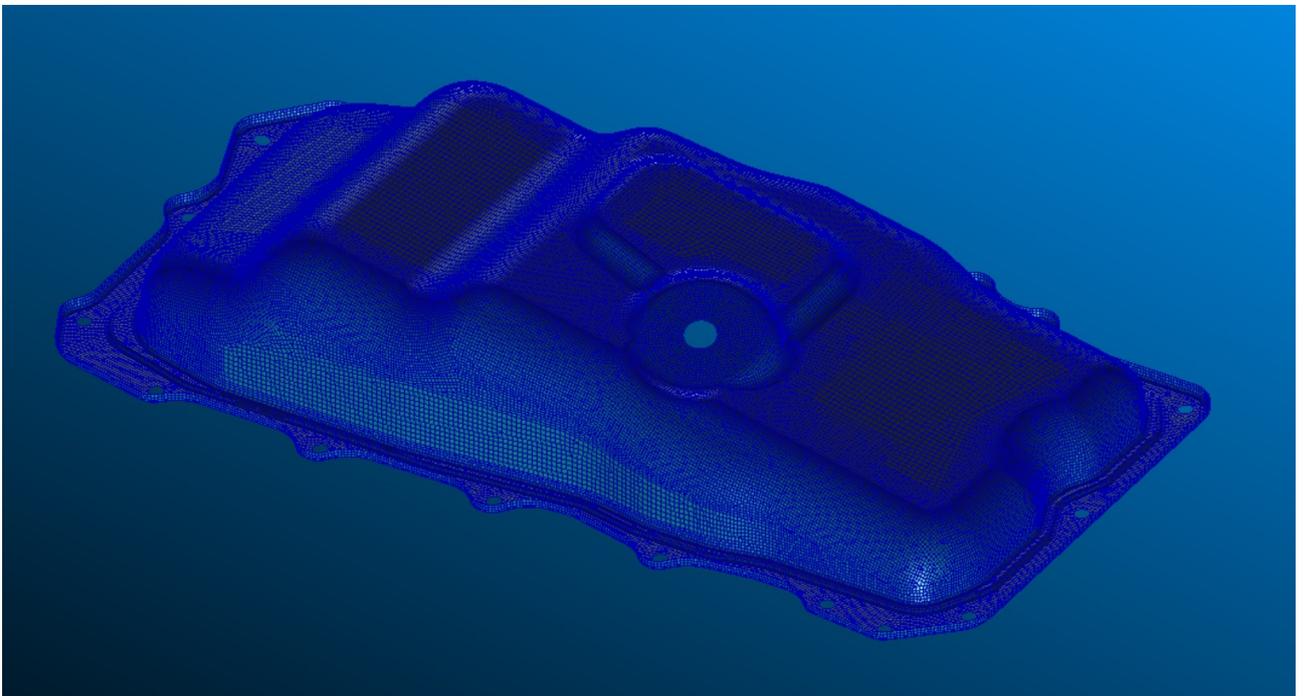


Figura 58 - Vista generale della coppa con mesh.

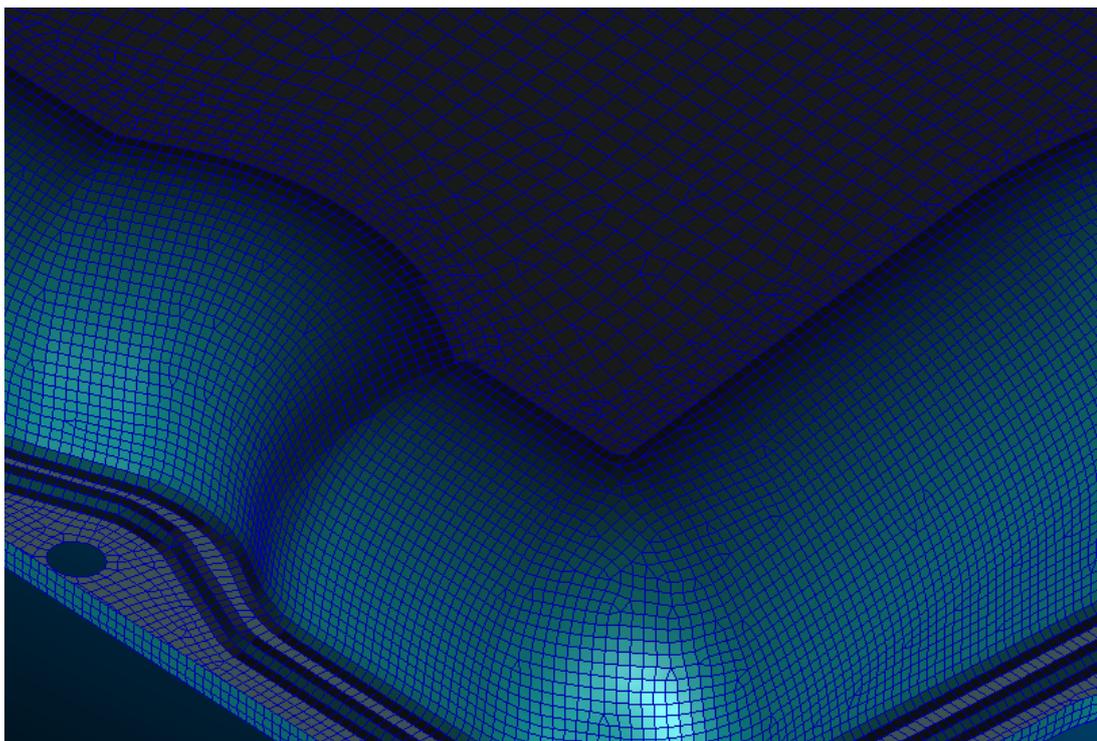


Figura 59 - Particolare della mesh. Si noti che nei punti di raccordo la mesh diventa particolarmente fitta (circa 30 elementi lungo l'arco).

Per l'analisi si sono poste le condizioni al contorno per simulare l'effetto dei bulloni con cui è fissata la coppa al motore. Si è supposto che i nodi intorno ai fori di fissaggio siano incastrati. La coppa in realtà presenta una sorta di vincolo anche sul resto dei punti sulla base della coppa, in quanto è appoggiata al motore su uno strato che funge da guarnizione; tuttavia le caratteristiche meccaniche non sono note né ricavabili, non è possibile rappresentare l'aumento di rigidità nel programma MATLAB, quindi si è trascurato questo effetto.

La struttura della coppa è in sandwich, i materiali sono omessi per riservatezza. Le dimensioni degli spessori sono adimensionati rispetto allo spessore del cuore.

sequenza	spessori [mm]
[A/B/A]	[32/1/32]

Tabella 27 - Dati della laminazione della coppa.

Si è valutata la densità dei materiali anche in funzione del valore che permette di avere un peso totale uguale a quello della coppa senza tappo, per avere una stima migliore delle proprietà di massa del componente.

Si riportano i risultati delle varie analisi, sperimentale, dal programma MATLAB con elementi basati su RZT, dal programma MATLAB con teoria di Mindlin, dall'analisi con NASTRAN, adimensionati rispetto alla prima frequenza disponibile per la coppa nel caso senza tappo.

	Sperimentale	MATLAB RZT	MATLAB Mindlin	Nastran
#1	1	0.964	0.685	0.653
#2	1.371	1.414	0.813	0.789

Tabella 28 - Risultati delle analisi (grandezze in Hz).

Le analisi riportano un errore del 5% tra i risultati in MATLAB con la teoria di Mindlin e Nastran; questo errore può essere imputato alla mesh che dovrebbe essere più fitta, come visto nel paragrafo 4.1.2., infatti i risultati rappresentati nella tabella 7 mostrano una convergenza tra i risultati analoghi per il caso del Cap.

I risultati RZT invece sono più vicini, con un errore di circa -3.6% sulla prima frequenza propria, e del 3.2% sulla seconda. Ancora, come visto nei paragrafi 4.2.2 e 4.2.3 per la convergenza dei risultati alla soluzione di riferimento, questo può essere imputato ancora a una mesh non sufficientemente fitta.

Inoltre, la coppa è posta su uno strato di gomma come guarnizione, che ha un effetto irrigidente, motivo per cui per un modello più coerente col vero sarebbe opportuno rappresentare questo aumento di rigidità locale sulla superficie a contatto con la base del motore, ad esempio introducendo la possibilità di assegnare proprietà diverse agli elementi, funzione tuttavia non implementata in questo lavoro di tesi.

6. Conclusioni.

Si sono effettuate un numero di prove non indifferente per valutare la correttezza del modello numerico implementato in MATLAB. La principale difficoltà è riscontrata nel lavoro di confronto tra i risultati ottenuti in MATLAB e quelli in Nastran, che si ottengono con elementi finiti tridimensionali, che presentano un limite, la necessità di utilizzare mesh che con 3 strati di spessore simile richiedono 6 strati di elementi finiti HEXA8, mentre il caso in esame, la coppa, richiederebbe, per una simulazione analoga, un numero di strati dell'ordine del centinaio lungo lo spessore, con numero di elementi quindi superiore di 2 ordini di grandezza, appesantendo in modo estremo il modello numerico necessario ad ottenere i risultati di riferimento.

Il grande limite dell'analisi numerica, l'impossibilità di rappresentare numericamente tutti i particolari del modello sperimentale, su cui si può comunque ancora lavorare, sembra non aver dato grandi problemi usando la teoria giusta. I risultati numerici ottenuti con le teorie di Mindlin e RZT presentano una differenza del 29% sulla prima frequenza propria, motivo per cui la presenza di un effetto zigzag non si può trascurare. L'errore del $\pm 3\%$ sulla differenza tra i risultati numerici e quelli sperimentali risultano invece molto confortanti, data la semplicità del programma a disposizione. L'errore potrebbe diminuire ancora con una mesh più fitta, aumentando il costo computazionale, che rappresenta tuttavia la peculiarità dell'elemento finito 2D per cui sarebbe insensato continuare su questa strada.

È in corso un lavoro di tesi successivo al presente, in cui si valuta il comportamento di strutture sandwich in funzione della temperatura, per cui si introdurrà l'effetto della temperatura nel modello matematico, accompagnato anch'esso dal problema sperimentale rappresentato dalla coppa con olio in temperatura.

7. Bibliografia

- [1] Reddy JN. Mechanics of laminated composite plates. New York: CRC Press; 1997.
- [2] Reissner E, Stavsky Y. Bending and stretching of certain types of heterogeneous anisotropic elastic plates. *J Appl Mech* 1961;28(3):402–8.
- [3] Mindlin RD. Influence of rotatory inertia and shear deformation on flexural motions of isotropic elastic plates. *J Appl Mech* 1951;18:31–8.
- [4] Whitney JM, Pagano NJ. Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates. *J Appl Mech* 1970;37(4):1031–6.
- [5] Liu D, Li X. An overall view of laminate theories based on displacement hypothesis. *J Compos Mater* 1996;30(14):1539–61.
- [6] Reissner E. Reflections on the theory of elastic plates. *Appl Mech Rev* 1985;38(11):1453–64.
- [7] Librescu L, Khdeir A, Reddy J. A comprehensive analysis of the state of stress of elastic anisotropic flat plates using refined theories. *Acta Mech* 1987;70:57–81.
- [8] Noor AK, Burton WS. Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates. *Appl Mech Rev* 1989;42(1):1–13.
- [9] Reddy JN. A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates. *Commun Appl Numer Meth* 1987;3(3):173–80.
- [10] Lu X, Liu D. An interlaminar shear stress continuity theory for both thin and thick composite laminates. *J Appl Mech* 1992;59(3):502–9.

- [11] Toledano A, Murakami H. A high-order laminated plate theory with improved in-plane responses. *Int J Solids Struct* 1987;23(1):111–31.
- [12] Toledano A, Murakami H. A composite plate theory for arbitrary laminate configurations. *J Appl Mech* 1987;54(1):181–9.
- [13] Di Sciuva M. A refinement of the transverse shear deformation theory for multilayered orthotropic plates. In: *Proceedings of 7th AIDAA national congress*; 1983; also in *L'aerotecnica missili e spazio*; 1984. p. 62, 84–92.
- [14] Di Sciuva M. A refined transverse shear deformation theory for multilayered anisotropic plates. *Atti Accademia delle Scienze di Torino* 1984;118:279–95.
- [15] Di Sciuva M. Development of an anisotropic, multilayered, shear-deformable rectangular plate element. *Comput Struct* 1985;21(4):789–96.
- [16] Di Sciuva M. Evaluation of some multilayered, shear-deformable plate elements. In: *Proceedings of 26th structures, structural dynamics and materials conference. AIAA/ASME/ASCE/AHS-Paper 85-0717*; 1985. p. 394–400.
- [17] Di Sciuva M. Bending, vibration and buckling of simply supported thick multilayered orthotropic plates: an evaluation of a new displacement model. *J Sound Vib* 1986;105(3):425–42.
- [18] Murakami H. Laminated composite plate theory with improved in-plane responses. *J Appl Mech* 1986;53(3):661–6.
- [19] Di Sciuva M. An improved shear-deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates. *J Appl Mech* 1987;54(3):589–96.

[20] Averill RC. Static and dynamic response of moderately thick laminated beams with damage. *Compos Eng* 1994;4(4):381–95.

[21] Di Sciuva M. Further refinement in the transverse shear deformation theory for multilayered composite plates. *Atti Accademia delle Scienze di Torino* 1990;124(5–6):248–68.

[22] Di Sciuva M. Multilayered anisotropic plate models with continuous interlaminar stresses. *Compos Struct* 1992;22(3):149–67.

[23] Cho M, Parmenter RR. Efficient higher order composite plate theory for general lamination configurations. *AIAA J* 1993;31(7):1299–306.

[24] Di Sciuva M, Gherlone M, Librescu L. Implications of damaged interfaces and of other non-classical effects on the load carrying capacity of multilayered composite shallow shells. *Int J Nonlinear Mech* 2002;37(4–5):851–67.

[25] Averill RC, Yip YC. Development of simple, robust finite elements based on refined theories for thick laminated beams. *Comput Struct* 1996;59(3):529–546.

[26] Umasree P, Bhaskar K. Analytical solutions for flexure of clamped rectangular cross-ply plates using an accurate zig-zag type higher-order theory. *Compos Struct* 2006;74(4):426–39.

[27] Tessler A, Sciuva Di, Gherlone M. A refined linear zigzag theory for composite beams: reformulation of zigzag function and shear stress constraints. In: VI international symposium on advanced composites and applications for the new millennium, Corfù, Greece; May 2007.

[28] Tessler A, Di Sciuva M, Gherlone M. Refinement of Timoshenko beam theory for composite and sandwich beams using zigzag kinematics. Technical report NASA/TP-2007-215086. NASA; December 2007.

[29] Tessler A, Di Sciuva M, Gherlone M. A refined zigzag beam theory for composite and sandwich beams. *J Compos Mater* 2009;43(9):1051–81.

[30] Tessler A, Di Sciuva M, Gherlone M. A shear-deformation theory for composite and sandwich plates using improved zigzag kinematics. In: *Proceedings of 9th international conference on computational structures technology*, Athens, Greece; September 2008.

[31] Tessler A, Di Sciuva M, Gherlone M. Refined zigzag theory for laminated composite and sandwich plates. Technical report NASA/TP-2009-215561. NASA; January 2009.

[32] Tessler A, Di Sciuva M, Gherlone M. A consistent refinement of first-order shear-deformation theory for laminated composite and sandwich plates using improved zigzag kinematics. *J Mech Mater Struct* 2010;5(2):341–67. D. Versino et al. / *Composites: Part B* 44 (2013) 218–230
229

[33] Tessler A, Di Sciuva M, Gherlone M. Refined zigzag theory for homogeneous, laminated composite, and sandwich plates: a homogeneous-limit methodology for zigzag function selection. Technical report NASA/TP-2010-216214. NASA; January 2010.

[34] Tessler A, Di Sciuva M, Gherlone M. A homogeneous limit methodology and refinements of computationally efficient zigzag theory for homogeneous, laminated composite, and sandwich plates. *Numer Meth Partial Diff Eqs* 2011;27(1):208–29.

[35] Hughes TJR, Taylor RL, Kanoknukulchai W. A simple and efficient finite element for plate bending. *Int J Numer Meth Eng* 1977;11(10):1529–43.

[36] Tessler A, Dong SB. On a hierarchy of conforming Timoshenko beam elements. *Comput Struct* 1981;14(3–4):335–44.

[37] Tessler A. An efficient, conforming axisymmetric shell element including transverse shear and rotary inertia. *Comput Struct* 1982;15(5):567–574.

[38] Tessler A, Hughes TJR. A three-node Mindlin plate element with improved transverse shear. *Comput Meth Appl Mech Eng* 1985;50(1):71–101.

[39] Tessler A. A priori identification of shear locking and stiffening in triangular Mindlin elements. *Comput Meth Appl Mech Eng* 1985;53(2):183–200.

[40] Tessler A. Shear-deformable, anisoparametric flexure elements with penalty relaxation. In: Hughes TJR, Hinton E, editors. *Finite element methods in plate and shell structures*. London: Pineridge Press; 1986 [chapter 11].

[41] Fried I, Johnson AR, Tessler A. Minimum-degree thin triangular plate and shell bending finite elements of order two and four. *Comput Meth Appl Mech Eng* 1986;56:283–307.

[42] Tessler A, Spiridigliozzi L. Curved beam elements with penalty relaxation. *Int J Numer Meth Eng* 1986;23(12):2245–62.

[43] Tessler A, Spiridigliozzi L. Resolving membrane and shear locking phenomena in curved shear-deformable axisymmetric shell elements. *Int J Numer Meth Eng* 1988;26(5):1071–86.

[44] Tessler A. A C0-anisoparametric three-node shallow shell element. *Comput Meth Appl Mech Eng* 1990;78(1):89–103.

[45] Barut A, Madenci E, Tessler A. Nonlinear elastic deformations of moderately thick laminated shells subjected to large and rapid rigid-body motion. *Finite Elem Anal Des* 1996;22(1):41–57.

[46] Barut A, Madenci E, Tessler A. Nonlinear analysis of laminates through a Mindlin-type shear deformable shallow shell element. *Comput Meth Appl Mech Eng* 1997;143(1–2):155–73.

[47] Barut A, Madenci E, Tessler A, Starnes Jr JH. A new stiffened shell element for geometrically nonlinear analysis of composite laminates. *Comput Struct* 2000;77(1):11–40.

[48] Liu J, Riggs HR, Tessler A. A four-node, shear-deformable shell element developed via explicit Kirchhoff constraints. *Int J Numer Meth Eng* 2000;49(8):1065–1086.

[49] Barut A, Madenci E, Tessler A. Nonlinear thermoelastic analysis of composite panels under non-uniform temperature distribution. *Int J Solids Struct* 2000;37(27):3681–713.

[50] Tessler A. Comparison of interdependent interpolations for membrane and bending kinematics in shear-deformable shell elements. In: *Proceedings of intern. conf. on computational engineering science (ICES2K)*, Los Angeles, CA; August 2000.

[51] Tessler A, Mohr JW. A three-node shell element with drilling degrees of freedom for thick composite and sandwich structures. In: *Proceedings of IASSIACM 2000 colloquium on computation of shell and spatial structures*, Athens, Greece; June 2000.

[52] Zienkiewicz OC, Taylor RL. *The finite element method for solid and structural mechanics*. 6th ed. Elsevier; 2005.

[53] Versino D, Gherlone M, Mattone M, Di Sciuva M, Tessler A. C0 triangular elements based on the Refined Zigzag Theory for multilayer composite and sandwich plates. *Composites: Part B* 44 (2013) 218–230

[54] L. Iurlaro, M. Gherlone, M. Di Sciuva, A. Tessler. Refined Zigzag Theory for laminated composite and sandwich plates derived from Reissner's Mixed Variational Theorem *Composite Structures* 133 (2015) 809–817

[55] Belytschko T, Leviathan I. Physical stabilization of 4-node shell element with one-point quadrature. *Comput Methods Appl Mech Eng* 1994;113:321–50.

[56] Chang-Koon Choi, Tae-Yeol Lee, Efficient remedy for membrane locking of 4-node flat shell elements by non-conforming modes, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 192, Issues 16–18, 25 April 2003, Pages 1961-1971.

[57] T.J.R. Hughes, F. Brezzi, On drilling degrees of freedom, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 72 (1989) 105–121.

[58] Ibrahimbegovic, Adnan and Taylor, Robert L. and Wilson, Edward L., A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1990

[59] Allman DJ. A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis. *Comput Struct* 1984;19:1–8.

[60] Allman DJ. A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1988;26:717–730.

[61] Gherlone M., Tessler A, Di Sciuva M., C0 beam elements based on the Refined Zigzag Theory for multilayered composite and sandwich laminates. *Composite Structures* 2011;93(11):2282-2294.

[62] Mohr JW. An efficient triangular shell finite element for thick composite and sandwich laminates, Bachelor of Science Civil Engineering Thesis, George Washington University, 2000.

[63] MSC Software, Quick Reference Guide for MSC Nastran.

[64] MacNeal R. H., Harder R. L., A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, *Finite Elements in Analysis and Design*, 1, 3-20, 1985

[65] Avitabile P., *Experimental Modal Analysis – A simple Non-Mathematical Presentation*. Dispense del corso di “Structural Dynamics and Acoustic Systems Laboratory”, University of Massachusetts Lowell.

[66] The LMS Test.Lab Modal Analysis manual.