

# POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in  
Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

## Analisi di Traiettorie verso Near Earth Asteroids per SmallSat e CubeSat



**Relatore:**

Prof. Lorenzo Casalino

**Candidato:**

Stefano Gagnaniello

A.A. 2018/2019

# INDICE

---

<b>Astratto .....</b>	<b>4</b>
<b>1. Introduzione .....</b>	<b>5</b>
1.1 Introduzione Agli Asteroidi.....	6
1.2 Near Earth Asteroids .....	8
1.3 Missioni Verso Asteroidi.....	8
<b>2. Modelli di Approssimazione delle Trasferte .....</b>	<b>12</b>
2.1 Stato dell'Arte dei Modelli di Calcolo.....	13
2.2 Trasferte a Tre Impulsi .....	14
2.3 Nuclear Electric Propulsion NEP .....	15
2.4 Solar Electric Propulsion SEP .....	16
<b>3. Costruzione del Modello Approssimato Proposto .....</b>	<b>17</b>
3.1 Approssimazione Edelbaum .....	17
3.2 Teoria del Controllo Ottimale .....	19
3.3 Modello a Consumo Minimo .....	20
3.4 Ripartizione dei Parametri Orbitali tra le Manovre .....	21
<b>4. Metodo di Ottimizzazione Indiretta .....</b>	<b>23</b>
4.1 Condizioni Al contorno di Ottimo .....	25
4.2 Problema Differenziale ai Limiti.....	26
4.3 Applicazione del Metodo.....	28
<b>5. Risultati Finali.....</b>	<b>30</b>
5.1 Primo Candidato TB57.....	31
5.2 Secondo Candidato WA44 .....	33
5.3 Terzo Candidato BS45 .....	34
5.4 Quarto Candidato XB27.....	36
5.5 Quinto Candidato PA7.....	37
5.6 Sesto Candidato TF15.....	39
<b>6. Conclusioni.....</b>	<b>41</b>

## Indice delle figure

Figura 1: Numero asteroidi fascia principale in funzione del semiasse.....	6
Figura 2: Eccentricità ed inclinazione degli asteroidi della fascia principale al variare della distanza dal Sole. In rosso gli asteroidi dalla fascia centrale, in blu gli altri.....	7
Figura 3: Spinta massima e Impulso specifico rispetto alla distanza col Sole.....	12
Figura 4: Confronto tra modello di spinta considerato e SEP.....	13
Figura 5: Modello archi spinta .....	21
Figura 6: Andamento Afelio e Perielio.....	31
Figura 7: Andamento Semiasse e Eccentricità .....	32
Figura 8: Missione e Zona di Spinta.....	32
Figura 9: Andamento Afelio e Perielio.....	33
Figura 10: Andamento Semiasse e Eccentricità .....	33
Figura 11: Missione e Zone Spinta .....	34
Figura 12: Andamento Afelio e Perielio.....	34
Figura 13: Andamento Semiasse e Eccentricità .....	35
Figura 14: Missione e Zone Spinta .....	35
Figura 15: Andamento Afelio e Perielio.....	36
Figura 16: Andamento Semiasse e Eccentricità .....	36
Figura 17: Missione e Zone Spinta .....	37
Figura 18: Andamento Afelio e Perielio.....	37
Figura 19: Andamento Semiasse e Eccentricità .....	38
Figura 20: Missione e Zone Spinta .....	38
Figura 21: Andamento Afelio e Perielio.....	39
Figura 22: Andamento Semiasse e Eccentricità .....	39
Figura 23: Missione e Zona Spinta.....	40

---

## ASTRATTO

---

Questa tesi tratta di un nuovo metodo per l'analisi approssimata di traiettorie verso i "Near Earth Asteroids". In particolare si considerano SmallSat e CubeSat con propulsione elettrica e, inoltre, le trasferte non avranno grandi variazioni di inclinazione, afelio e perielio, quindi si potranno utilizzare i modelli di manovre di Edelbaum. Questo nuovo modello approssima il DeltaV complessivo risolvendo equazioni algebricamente invece di integrare le equazioni del moto, ottenendo un costo computazionale minore e una velocità maggiore. Ciò permette di valutare missioni su più larga scala in maniera preliminare, per utilizzare, in seguito, dei metodi più raffinati e con costo computazionale maggiore per avere una stima più precisa e veritiera della trasferta. In particolare si utilizza un metodo di ottimizzazione indiretto al fine di creare un set di risultati come riferimento. Successivamente si è passato ad un confronto dei risultati per alcuni asteroidi e, nel caso di errori superiori al 15% del consumo totale, si è cercato di motivare questa discrepanza studiando più a fondo la tipologia di trasferta.

# 1. INTRODUZIONE

---

Nell'ambito della propulsione a bassa spinta quella di tipo elettrico rappresenta l'alternativa a maggior efficienza, in particolare per il consumo propellente. Questo tipo di sistemi propulsivi a bassa spinta sono in grado di fornire valori ridotti di spinta applicati lungo gran parte della traiettoria, ovviamente questo tipo di soluzioni introducono un problema di ottimizzazione della trasferta, in quanto le manovre non risultano essere impulsive ma continuative.

Al momento i metodi più accurati sono classificati come diretti o indiretti in base all'approccio che si vuole utilizzare. Tuttavia entrambi presentano grossi costi computazionali, in particolare per i metodi diretti, e scarsa robustezza per i metodi indiretti.

I metodi diretti, infatti, discretizzano la traiettoria e trasformano il problema di controllo ottimale (OCP) in un problema non lineare (NLP), che può essere risolto agevolmente per via numerica ma ad un elevato costo computazionale.

I metodi indiretti sfruttano invece i principi del calcolo variazionale, sono più rapidi ma necessitano di un'adatta soluzione di tentativo per giungere a convergenza. La ricerca di tale soluzione richiede un certo grado di esperienza da parte dell'utente e risulta comunque troppo dispendiosa per problemi in cui dev'essere valutato un grande numero di possibili trasferte. In fase preliminare conviene dunque utilizzare metodi meno accurati ma più rapidi ed automatici, al fine di ottenere una stima iniziale dei parametri caratteristici di ogni missione in modo da selezionare le missioni più promettenti. A tal punto metodi diretti o indiretti possono essere utilizzati su un campione

ridotto di missioni, al fine di ottimizzare le soluzioni più interessanti.

È dunque di fondamentale importanza che il metodo approssimato utilizzato per la fase iniziale sia in grado di fornire soluzioni sufficientemente accurate in modo da individuare correttamente le missioni a più basso costo.

In caso contrario verrebbero sprecate risorse e tempo per analizzare missioni che in realtà non sono convenienti oppure, nel caso peggiore, potrebbero essere scartate missioni interesse pratico.

L'obiettivo di questa tesi consiste nell'utilizzare un metodo basato sull'approssimazione di Edelbaum per alcune missioni e, in seguito, confrontare i risultati ottenuti con i metodi indiretti. Verranno considerati i consumi di propellente di missioni con partenza dalla Terra e diretti verso asteroidi near-Earth, inoltre le trasferte dovranno avere basse variazioni dei parametri orbitali per rispettare le ipotesi dell'approssimazione di Edelbaum.

## 1.1 INTRODUZIONE AGLI ASTEROIDI

Gli asteroidi sono piccoli corpi celesti di composizione simile ad un pianeta roccioso e generalmente privi di atmosfera. La maggior parte degli asteroidi è situata nella cosiddetta fascia principale, una regione del sistema solare compresa tra circa 2.1 UA e 3.6 UA dal Sole, collocata

quindi grossomodo tra le orbite di Marte e di Giove.

Secondo la teoria di Viktor Sergeevich Safronov, conosciuta come ipotesi planetesimale, l'origine degli asteroidi non è da attribuire ai resti di un pianeta esplosivo, come si pensava in precedenza, bensì ai componenti di un pianeta "abortito", che non è mai riuscito a formarsi a causa del disturbo gravitazionale provocato dalla presenza di Giove.

Queste perturbazioni gravitazionali avrebbero dotato i planetesimi (corpi rocciosi primordiali di ridotte dimensioni) di un'eccessiva energia orbitale, per cui le collisioni reciproche sarebbero diventate troppo violente per permetterne l'aggregazione e la conseguente formazione di un pianeta.

Gli asteroidi sarebbero quindi corpi primordiali che dovrebbero aver subito ben poche modificazioni dall'epoca della loro formazione, avvenuta agli albori del Sistema Solare. La teoria di Safronov trova una parziale conferma nella presenza delle cosiddette lacune di Kirkwood, cali nella distribuzione degli asteroidi in funzione del semiasse maggiore delle loro orbite o, equivalentemente, del loro periodo orbitale. Tali vuoti corrispondono all'ubicazione delle orbite in risonanza orbitale con Giove, per cui si ipotizza che siano imputabili proprio alla presenza del pianeta gassoso.

Nel grafico riportato in Figura 1 sono ben visibili queste lacune in corrispondenza di determinati valori di semiasse maggiore (linee tratteggiate).

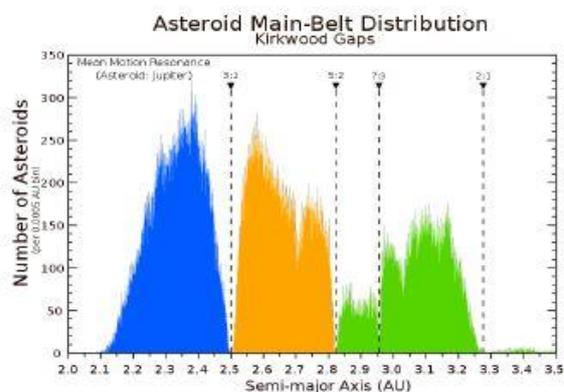


Figura 1: Numero asteroidi fascia principale in funzione del semiasse

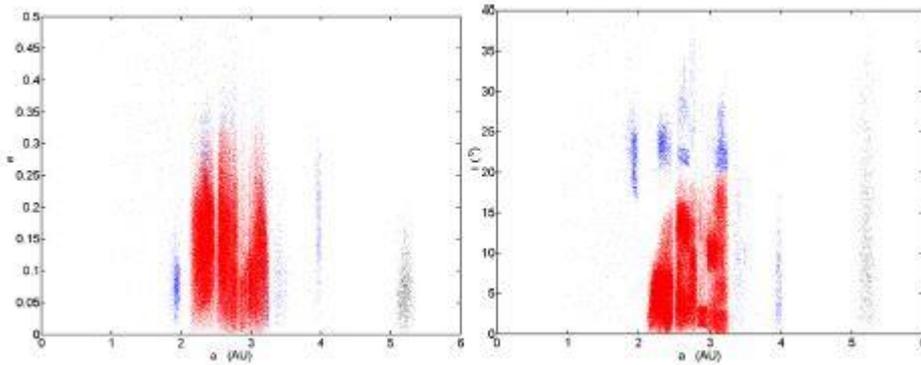


Figura 2: Eccentricità ed inclinazione degli asteroidi della fascia principale al variare della distanza dal Sole. In rosso gli asteroidi dalla fascia centrale, in blu gli altri.

La maggior parte degli asteroidi della fascia ha un'eccentricità orbitale inferiore a 0.4 e un'inclinazione inferiore a  $30^\circ$ , come riportato in Figura 2. La massima distribuzione orbitale si ha ad un'eccentricità di 0.07 circa e un'inclinazione inferiore a  $4^\circ$ ; tipicamente quindi un asteroide ha un'orbita quasi circolare a bassa inclinazione rispetto all'eclittica, sebbene esistano comunque asteroidi con orbite molto eccentriche ed inclinate.

Per quanto riguarda la composizione chimica si individuano tre categorie di asteroidi:

- Tipo C, ricchi di carbonio e concentrati nelle regioni esterne della fascia degli asteroidi. Costituiscono oltre il 75% degli asteroidi visibili, sono di colore rossastro ed hanno una bassissima albedo. Chimicamente i loro spettri corrispondono alla composizione primordiale del Sistema Solare.
- Tipo S, ricchi di silicati e concentrati nella regione interna della fascia. Gli spettri delle loro superfici rivelano la presenza di silicati ed alcuni metalli, mentre la presenza di composti carboniosi è limitata; l'albedo che li caratterizza risulta essere relativamente alta. Questi asteroidi hanno quindi subito significative modificazioni rispetto alla loro composizione primordiale, probabilmente attraverso la fusione. Costituiscono circa il 17% dell'intera popolazione di asteroidi.
- Tipo M, ricchi di metalli, con spettri simili a quelli del ferro-nichel. Costituiscono circa il 10% della popolazione totale e la loro massima distribuzione viene raggiunta ad una distanza dal Sole di 2.7 UA circa.

## 1.2 NEAR EARTH ASTEROIDS

A seguito di interazioni con il campo gravitazionale di Giove alcuni asteroidi della fascia principale possono essere guidati al di fuori della stessa, raggiungendo orbite in prossimità della Terra.

Tali asteroidi vengono perciò detti asteroidi near-Earth (o NEA). Possono sopravvivere nelle loro orbite per un periodo di tempo relativamente limitato (da 10 a 100 milioni di anni): vengono infatti eliminati a causa di decadimenti orbitali, collisioni con pianeti interni o perché ne viene modificata l'orbita a seguito di un passaggio ravvicinato con un pianeta. A compensare l'eliminazione nel tempo di tali corpi vi è tuttavia il continuo "rifornimento" di asteroidi da parte della fascia principale.

A seconda del semiasse maggiore e dell'eccentricità delle loro orbite gli asteroidi near-Earth vengono collocati in tre diverse categorie:

- Asteroidi Aten, con semiasse maggiore inferiore ad 1 UA, mentre l'afelio è generalmente posto al di là dell'orbita terrestre; il valore di eccentricità che compete a tali orbite risulta quindi non trascurabile.
- Asteroidi Apollo, con semiasse maggiore superiore ad 1 UA e perielio inferiore a 1.017 UA.
- Asteroidi Amor, con semiasse maggiore generalmente compreso tra quello della Terra e quello di Marte e perielio leggermente al di fuori dell'orbita terrestre (compreso tra 1.017 UA e 1.3 UA).

Le potenziali minacce per il nostro pianeta sono quindi costituite prevalentemente dagli asteroidi delle famiglie Aten e Apollo.

La maggior parte degli asteroidi Amor infatti interseca l'orbita marziana ma non quella terrestre.

## 1.3 MISSIONI VERSO ASTEROIDI

Ci sono diversi motivi che rendono di notevole interesse le missioni verso asteroidi.

Uno dei ruoli chiave è sicuramente rappresentato dal progresso scientifico e tecnologico, che è in genere uno degli obiettivi comuni a tutte le missioni spaziali.

Nel caso in esame lo studio e l'esplorazione degli asteroidi permettono infatti di acquisire informazioni su eventi verificatisi in un passato per noi lontano come, ad esempio, la formazione del sistema solare. Come detto in precedenza gli asteroidi, in fin dei conti, altro non sono che i residui

del processo che ha condotto alla formazione dei pianeti; non c'è da stupirsi dunque che da essi siano estrapolabili informazioni in grado di ricostruire la storia del nostro universo.

A tal fine può essere rilevante, ad esempio, mappare le proprietà globali, chimiche e mineralogiche di un asteroide per caratterizzarne la storia geologica e dinamica. Allo stesso tempo lo studio degli asteroidi potrebbe permetterci di ricavare importanti informazioni sull'origine della vita. Alcuni asteroidi contengono infatti grandi quantità di carbonio in uno stato primordiale, mentre tracce di molecole organiche sono state trovate in alcuni meteoriti e sulle comete.

Tali missioni inoltre possono essere finalizzate alla validazione di nuove soluzioni tecnologiche in ambiente spaziale (come accaduto nella missione Deep Space 1), o al test di

sequenze di comandi in vista di obiettivi futuri (missione Stardust). Un fattore che invece risulta proprio delle missioni verso asteroidi è quello della difesa planetaria: sono migliaia gli asteroidi la cui orbita è vicina a quella della Terra ed alcuni di essi potrebbero costituire una minaccia per il nostro pianeta.

Per attuare azioni preventive risulta necessario innanzitutto definire un programma spaziale serio e ben finanziato con il compito di monitorare gli asteroidi di grosse dimensioni, potenzialmente distruttivi per il nostro pianeta.

Gli asteroidi di piccole dimensioni, infatti, si disintegrano nell'atmosfera al ritmo di uno ogni due settimane circa, a differenza di quelli più grandi che riescono ad oltrepassare l'atmosfera terrestre.

Nei paragrafi successivi vengono presentati i mezzi a nostra disposizione per individuare, classificare e sventare eventuali collisioni; vengono poi riportati esempi di missioni verso asteroidi near-Earth con relativi obiettivi per meglio comprendere i due aspetti precedentemente esposti.

Di seguito vengono riportate delle missioni verso NEAs a titolo di esempio.

In primo luogo la missione *Asteroid Impact and Deflection Assessment (AIDA)* è un programma di collaborazione internazionale che vede protagonisti, oltre l'ESA, la NASA, l'agenzia Spaziale Tedesca (DLR), l'Applied Physics Laboratory della John Hopkins University (JHU/APL) e l'Osservatorio della Costa Azzurra (OCA), e che ha come obiettivo un NEO, l'asteroide binario denominato Didymos.

Scoperto nel 1996, 65803 Didymos è un asteroide sub-chilometrico della famiglia Apollo-Amor classificato come potenziale pericolo per il nostro pianeta.

Si muove su un'orbita di media eccentricità con perielio pari a 1.0133 UA (di poco inferiore all'afelio della Terra) ed afelio pari a 2.2760 UA.

Rispetto all'orbita terrestre la traiettoria dell'asteroide è inclinata di soli 3.4°, mentre il periodo orbitale è pari a 2.11 anni.

Si tratta in realtà di un sistema binario composto da due corpi di dimensioni diverse:

Didymos A, del diametro di 780 metri, e Didymos B, di 160 metri, che si muove attorno al primo ad una distanza media di 1.2 km.

La missione è costituita da una coppia di sonde spaziali che dovrebbero studiare e dimostrare l'effetto cinetico che scaturisce dall'impatto di uno spacecraft sul satellite di un asteroide.

Lo scopo della missione è infatti quello di verificare se uno spacecraft sia in grado di deviare con successo un asteroide dalla sua rotta di collisione con la Terra.

Il concept of mission prevede l'utilizzo di due spacecraft: Hera (costruito dall'ESA) che orbiterebbe attorno all'asteroide, e Double Asteroid Redirection Test (DART, costruito dalla NASA) che impatterebbe su Didymos B.

L'impatto dello spacecraft DART, di massa pari a 300 kg, avverrebbe alla velocità di 6.25 km/s e produrrebbe una variazione di velocità dell'ordine di 0.4 mm/s, causando un cambiamento significativo nell'orbita dei due asteroidi ed uno minimo nell'orbita eliocentrica del sistema binario.

Le informazioni fornite dalla sonda europea permetterebbero di raffinare i modelli matematici che descrivono come un asteroide reagisca a questo tipo di sollecitazioni dinamiche.

Così facendo sarebbe possibile valutare con maggior precisione l'entità della forza necessaria per modificare l'orbita di un asteroide in avvicinamento alla Terra.

Il lancio della sonda DART è al momento pianificato per il 2021, mentre Hera arriverebbe su Didymos qualche anno dopo l'impatto di DART.

Per massimizzare il successo scientifico della missione il team di AIDA ha proposto di ritardare il lancio di DART, in modo tale che Hera arrivi sull'asteroide prima per essere

testimone dell'impatto di DART. Così facendo, oltre a soddisfare gli obiettivi iniziali di AIDA, sarebbe possibile ottenere, mediante osservazione diretta, dati relativi all'impatto ed alla formazione delle emissioni da esso provocate.

Nel caso della missione *Origins Spectral Interpretation Resource Identification Security Regolith Explorer* (OSIRIS-REx) è una missione spaziale sviluppata dalla NASA per l'esplorazione degli asteroidi nell'ambito del Programma New Frontiers. La missione è stata sviluppata dal Lunar and Planetary Laboratory (LPL) dell'Università dell'Arizona, dal Goddard Space Flight Center della NASA e dalla divisione spaziale della Lockheed Martin.

Il target della missione è l'asteroide 101955 Benu, un asteroide carbonaceo di tipo B appartenente alla famiglia degli asteroidi Apollo, di diametro pari a 560 m.

L'asteroide in questione risulta di notevole interesse scientifico in quanto si ipotizza che abbia subito pochi cambiamenti geologici dalla sua formazione.

Dalle osservazioni telescopiche è stato possibile determinare con sufficiente accuratezza l'orbita di 101955 Benu, da cui è emerso un avvicinamento dell'asteroide al nostro pianeta ogni 6 anni.

Studi successivi<sup>2</sup> hanno individuato una serie di otto potenziali impatti con la Terra in un periodo compreso fra il 2169 ed il 2199.

La probabilità d'impatto dovrebbe essere inferiore allo 0.07 per tutti gli otto incontri: valutazioni più precise richiederebbero una conoscenza più approfondita delle proprietà fisiche dell'asteroide.

La raccolta di queste informazioni rappresenta tuttavia soltanto uno degli scopi prefissati dalla NASA.

Entrando più nello specifico, infatti, gli obiettivi scientifici della missione OSIRISREx consistono nel:

- Recuperare un campione incontaminato di regolite carbonacea in una quantità sufficiente a permettere successive analisi dei suoi costituenti e della loro distribuzione.
- Mappare le proprietà globali, chimiche e mineralogiche di un asteroide carbonaceo primordiale per caratterizzare la sua storia geologica e dinamica e fornire un contesto per il campione recuperato.
- Documentare la distribuzione, la morfologia, la geochimica e le proprietà spettrali della regolite al sito in cui sarà prelevato il campione a scale progressivamente inferiori, fino a quelle millimetriche.
- Misurare l'effetto YORP di un asteroide potenzialmente pericoloso e individuare le proprietà dell'asteroide che contribuiscono a tale effetto, in modo tale da determinare con maggiore accuratezza la probabilità d'impatto.

Le fasi attraverso cui passa la realizzazione degli obiettivi di missione possono essere riassunte come segue:

- Rendezvous con l'asteroide 101955 Benu a poco più di due anni dal lancio, avvenuto con successo l'8 Settembre 2016.
- Osservazione dell'orbita ad una distanza dalla superficie compresa tra 0.7 e 5 km. La massima durata teorica di tale fase è stata fissata a 505 giorni.
- Individuazione del sito da cui prelevare il campione di regolite ed elaborazione di un'adeguata strategia di avvicinamento. A tal fine sono rilevanti i risultati ottenuti dalla fase precedente.
- Prelevamento di un campione incontaminato mediante l'estensione di un braccio robotico.
- Ritorno verso il pianeta Terra, con termine missione previsto per Settembre 2023.

La missione OSIRIS-REx è attualmente in corso: la sonda ha raggiunto la superficie dell'asteroide l'8 Dicembre 2018 dopo una fase di ricerca, con esito negativo, di possibili minacce nella fase di avvicinamento, rappresentate dall'eventuale presenza di satelliti naturali e pennacchi di polvere.

Infine si riportano i dettagli della missione *Miniaturised Asteroid Remote Geophysical Observer* (M-ARGO), che ha ricoperto un ruolo non trascurabile nello svolgimento di questa tesi.

Il profilo di missione di riferimento, infatti, altro non è che una schematizzazione di quello stabilito per la missione M-ARGO da uno studio interno avvenuto al Concurrent Design Facility dell'ESA.

Gli obiettivi della missione, il cui lancio è previsto per il 2021, possono essere riassunti in tre punti chiave:

- 1- Esecuzione di un rendezvous con un asteroide near-Earth.
- 2- Caratterizzazione delle proprietà fisiche dell'asteroide, nello specifico della sua forma, superficie e massa.
- 3- Valutazione del potenziale di sfruttamento delle risorse disponibili.

Lo spacecraft in questione è un cubesat 12U di dimensioni 226x226x340 mm, con una massa di circa 20 kg.

La spinta è fornita da un propulsore ionico elettrostatico, mentre il sistema di generazione di potenza è costituito da 6 pannelli body mounted, da una batteria Li-ion e da 2 ulteriori pannelli solari wing-deployable.

I valori di spinta e impulso specifico valutati ad una distanza Sole di 1 UA sono, rispettivamente, pari a 1.7 mN e 3050 s (nel caso in cui vengono utilizzati solo 6 pannelli).

## 2. MODELLI DI APPROSSIMAZIONE DELLE TRASFERTE

---

Innanzitutto si deve definire il profilo di missione utilizzato per validare il modello di calcolo. In particolare si prevede che lo spacecraft parta da un'orbita terrestre per giungere a quella di un asteroide near-Earth. Nello specifico non si considera una manovra di rendezvous classica, ma una manovra a fasatura ottima, quindi il satellite si posizionerà nell'orbita di arrivo a una distanza costante dall'asteroide, ciò permette una maggiore flessibilità nelle tempistiche di missione. Inoltre questo tipo di missioni risultano essere replicabili con un periodo dipendente dall'orbita e dal target scelto.

Si ricorda che non tutti gli asteroidi near-Earth sono possibili candidati, in quanto la missione deve rispettare delle limitazioni sulle variazioni dei parametri orbitali, in particolare eccentricità, inclinazione e semiasse, anche se, in generale, missioni a basso consumo mantengono questi valori contenuti.

La missione prevede una massa complessiva di 20 Kg, in cui il propellente è compreso e vale al massimo 2.5 Kg. La finestra di lancio è compresa nell'intervallo 2020-2030 con una durata di 18-19 mesi. Mentre, per quanto riguarda i parametri del sistema propulsivo, la potenza in ingresso, la spinta massima e l'impulso specifico sono funzioni della distanza col Sole (figura 3).

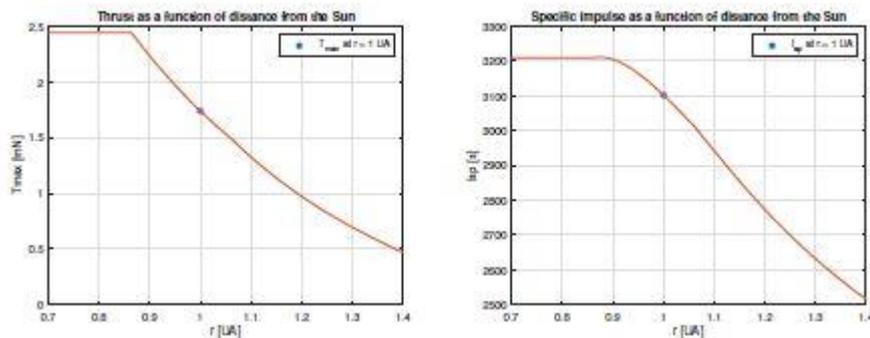


Figura 3: Spinta massima e Impulso specifico rispetto alla distanza col Sole

Il modello di spinta utilizzato nel metodo approssimato e in quello dell'ottimizzazione indiretta risulta essere diverso rispetto al modello *Solar Electric Propulsion* (SEP). Nel primo si considera un modello approssimato che considera l'impulso specifico sempre costante nell'arco della missione, mentre la spinta massima si lega al reciproco del quadrato della distanza dal Sole. Nella figura 4 si riporta la differenza che si genera da questa approssimazione tra il modello considerato e il SEP, che verrà in seguito approfondito.

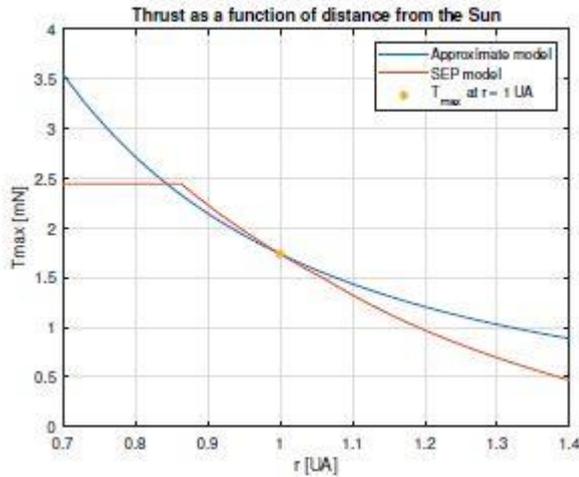


Figura 4: Confronto tra modello di spinta considerato e SEP

## 2.1 STATO DELL'ARTE DEI MODELLI DI CALCOLO

Una volta scelto il modello di approssimazione della spinta, si passa alla scelta del modello di traiettoria, al fine di ottenere una stima del  $\Delta V$  complessivo della missione e quindi del consumo in termini di massa del propellente. La scelta del modello da utilizzare dipende strettamente dalla fase di progetto, infatti non sempre è conveniente utilizzare i modelli più raffinati e precisi, in quanto richiedono un grosso costo computazionale difficilmente giustificabile.

In questa tesi si propone un modello utilizzabile nella fase preliminare di progetto. In particolare la sua semplicità e snellezza lo rende idoneo ad un utilizzo su larga scala al fine di fare una prima scrematura sull'ampia lista di asteroidi near-Earth. Il rischio di eliminare soluzioni che sono potenzialmente rilevanti esiste, infatti si richiede un certo grado di precisione oltre alla velocità di esecuzione. Di seguito si descrivono i modelli attualmente utilizzati, che risultano essere lo stato dell'arte per il calcolo approssimato di traiettorie.

## 2.2 TRASFERTE A TRE IMPULSI

Il modello a tre impulsi utilizza le trasferte di Hohmann come base, a cui si aggiunge la necessità di aggiungere manovre di variazione dell'inclinazione. In generale non è garantito che l'argomento del periastro e l'anomalia media coincidano con quelle assegnate a termine delle manovre, infatti anche per questo modello risulta fondamentale una bassa variazione di eccentricità e la irrilevanza della posizione finale dello spacecraft.

I tre impulsi vanno a modificare il vettore velocità una volta per raggiungere l'apoastro, una per il periastro e una per il cambio dell'inclinazione. L'ordine delle manovre è sempre scelto affinché la manovra di cambio inclinazione sia in corrispondenza della velocità minima, ottenendo un notevole risparmio in termini di consumo di propellente. La differenza di raggio dell'apoastro di partenza e arrivo risulta essere una discriminante:

- $R_{a1} < R_{a2}$ : conviene che la prima manovra sia al periastro dell'orbita di partenza per raggiungere l'apoastro, successivamente si aggiusta l'apoastro e si cambia l'inclinazione. Il  $\Delta V$  risulta:

$$\begin{aligned}\Delta V_{dep}/\sqrt{2\mu} &= \sqrt{1/r_{p1} - 1/(r_{p1} + r_{a2})} - \sqrt{1/r_{p1} - 1/(r_{p1} + r_{a1})} \\ V_i/\sqrt{2\mu} &= \sqrt{1/r_{a2} - 1/(r_{p1} + r_{a2})} \\ V_f/\sqrt{2\mu} &= \sqrt{1/r_{a2} - 1/(r_{p2} + r_{a2})} \\ \Delta V_{arr} &= \sqrt{V_i^2 + V_f^2 - 2V_iV_f \cos \Delta i_{rel}}\end{aligned}$$

Con:

$$\cos \Delta i_{rel} = \cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos \Omega_1 \cos \Omega_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos \Omega_1 \sin \Omega_2$$

- $R_{a1} > R_{a2}$ : in questo caso il cambio piano viene fatto all'apoastro dell'orbita di partenza. Il  $\Delta V$  complessivo:

$$\begin{aligned}\Delta V_{dep} &= \sqrt{V_i^2 + V_f^2 - 2V_iV_f \cos \Delta i_{rel}} \\ V_i/\sqrt{2\mu} &= \sqrt{1/r_{a1} - 1/(r_{p1} + r_{a1})} \\ V_f/\sqrt{2\mu} &= \sqrt{1/r_{a1} - 1/(r_{p2} + r_{a1})} \\ \Delta V_{arr}/\sqrt{2\mu} &= \sqrt{1/r_{p2} - 1/(r_{p2} + r_{a2})} - \sqrt{1/r_{p2} - 1/(r_{p2} + r_{a1})}\end{aligned}$$

## 2.3 NUCLEAR ELECTRIC PROPULSION NEP

Questo tipo di approccio prevede che il sistema propulsivo fornisca una spinta costante per tutta la missione e anche l'impulso specifico sia mantenuto tale. In questi modelli è necessario risolvere il problema di controllo ottimale (OCP) come riportato di seguito:

$$\mathcal{P}_2 : \left\{ \begin{array}{l} \text{trovare:} \quad \mathbf{u}(t) \in \mathcal{F}, t_1 \in [t_{min}, t_{max}], t_{of} \in [t_{of_{min}}, t_{of_{max}}] \\ \text{per massimizzare:} \quad J = m_f = m_i - \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{u}(t)| dt \\ \text{con vincoli:} \\ \quad \mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1, \\ \quad \mathbf{v}(t_1) = \mathbf{v}_1, \\ \quad m(t_1) = m_i, \\ \quad \mathbf{r}(t_2) = \mathbf{r}_2, \\ \quad \mathbf{v}(t_2) = \mathbf{v}_2, \\ \quad |\mathbf{u}(t)| \leq T_{max} \quad \forall t \in [t_1, t_2], \\ \quad m_f \geq 0. \end{array} \right.$$

In cui  $\mathbf{u}(t)$  è la variabile di controllo e rappresenta il vettore di spinta. Inoltre il modello considera l'influenza gravitazionale terrestre sulla traiettoria, quindi l'equazione del moto dello spacecraft in un riferimento inerziale eliocentrico risulta:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{u}(t)}{m} - \mu_e \frac{\mathbf{r}_e}{r_e^3}$$

Dove  $\mu$  è la costante gravitazionale del Sole, vale  $1.327 * 10^{20} \frac{m^3}{s^2}$ , mentre  $\mu_e$  e  $r_e$  sono rispettivamente la costante gravitazionale terrestre e la distanza Terra-Spacecraft. In genere questi problemi sono risolti con metodi diretti.

## 2.4 SOLAR ELECTRIC PROPULSION SEP

Infine il modello SEP risulta essere quello fisicamente più completo, infatti si è scelto come termine di paragone dei risultati del modello di approssimazione proposto in questa tesi. In particolare rispetto al NEP le equazioni del moto sono equivalenti:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{u}(t)}{m} \\ \dot{m} &= -\frac{|\mathbf{u}(t)|}{I_{sp}g_0}\end{aligned}$$

dove posso aggiungere alla prima l'influenza della gravità terrestre, ottenendo

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{u}(t)}{m} - \mu_e \frac{\mathbf{r}_e}{r_e^3}$$

Inoltre anche il problema di ottimizzazione del controllo OCP risulta analogo. Quindi la differenza sostanziale risiede nel diverso modello di spinta utilizzato, infatti nel SEP il sistema propulsivo è strettamente legato alla distanza col Sole, in cui la spinta massima e l'impulso specifico non sono mai costanti, come mostrato in figura 3 e 4 si rappresentano le differenze nel corso della missione.

### 3. COSTRUZIONE DEL MODELLO APPROSSIMATO PROPOSTO

---

La generazione di spinta per via chimica per molti anni è stata la tipologia di propulsione principale, questa permetteva di considerare le manovre praticamente impulsive, per cui la fase di progettazione e approssimazione delle missioni risultava più semplice rispetto alla propulsione elettrica. Questi nuovi sistemi propulsivi risultano essere delle soluzioni migliori per quelle missioni a basso costo con basse spinte e ridotte accelerazioni, tuttavia le manovre non possono più essere considerate impulsive. L'approssimazione di Edelbaum è stato uno dei primi modelli sviluppati per stimare il  $\Delta V$  per queste tipologie di missioni ed è in grado di fornire le leggi di controllo. In seguito sono state sviluppate altre metodologie, illustrate precedentemente, per cui la formulazione di Edelbaum risulta troppo imprecisa. Dunque dalla formulazione iniziale di Edelbaum è stata necessaria una rimodulazione mediante la teoria del controllo ottimale, di seguito sarà descritto il percorso che ha portato alla definizione del modello proposto per stimare la minima massa di propellente necessaria al compimento della missione.

Si aggiunge anche che questo modello si occupa di analizzare il tratto eliocentrico della traiettoria e di seguito si inseriscono le equazioni del moto generiche che dovranno essere declinate per la nostra trattazione e di conseguenza andranno risolte:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= V \\ \frac{dV}{dt} &= g + \frac{T}{m} + \frac{D}{m} + \frac{L}{m} \\ \frac{dm}{dt} &= -\frac{T}{c}\end{aligned}$$

#### 3.1 APPROSSIMAZIONE EDELBAUM

L'approssimazione di Edelbaum permette di ottimizzare trasferite tra due orbite circolari, o quasi, e a bassa spinta. Tre considerazioni base ci permettono di stilare le ipotesi di partenza del metodo:

- Orbite circolari, o quasi, quindi  $r \approx a \approx p$ ,  $V^2 \approx \frac{\mu}{r}$ ,  $E \approx v \approx M$  ;
- Orbite con piccole inclinazioni, dunque  $\cos i \approx 1$ ,  $\sin i \approx 1$ ,  $\theta = \nu + \omega + \Omega$  ;
- Spinte e accelerazioni molto piccole, ovvero  $\frac{T}{m} \ll \frac{\mu}{r^2}$ .

A questo punto le equazioni planetarie di Lagrange, le quali descrivono le variazioni temporali dei parametri orbitali, si semplificano:

$$\begin{aligned}
V \frac{da}{dt} &= 2r A_T \\
V \frac{de}{dt} &= 2 \cos \nu A_T - \sin \nu A_R \\
V \frac{di}{dt} &= \cos(\omega + \nu) A_W \\
eV \frac{d\omega}{dt} &= -V \frac{d\Omega}{dt} + 2 \sin \nu A_T - \cos \nu A_R \\
iV \frac{d\Omega}{dt} &= \sin(\omega + \nu) A_W \\
\frac{d\theta}{dt} &= \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \frac{V}{r}
\end{aligned}$$

In cui  $A_T$ ,  $A_W$  e  $A_R$  sono le accelerazioni rispettivamente tangenziali, fuori dal piano e radiali, e sono ottenute dal rapporto tra la spinta in quella direzione e la massa dello spacecraft. Dalle forme semplificate si ricava che le spinte tangenziali modificano i parametri  $a$ ,  $e$  e  $\omega$ ; per spinte in senso radiale si variano  $e$ ,  $\omega$ ; infine con spinte perpendicolari al piano variano  $i$ ,  $\Omega$ .

Nell'approssimazione di Edelbaum vengono trascurate la quarta e la quinta equazione planetaria di Lagrange semplificato, in quanto rendono il problema non ben definito per le ipotesi iniziali. Mentre considerando le prime tre equazioni si deve studiare come applicare la spinta per ottimizzare le variazioni di  $a$ ,  $e$ ,  $i$ . Dunque si passa alla scomposizione delle accelerazioni:

$$\begin{cases}
A_T = \frac{T}{m} \cos \alpha \cos \beta \\
A_R = \frac{T}{m} \sin \alpha \cos \beta \\
A_W = \frac{T}{m} \sin \beta
\end{cases}$$

In cui gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  sono rispettivamente gli angoli tra la spinta  $T$  e il vettore velocità, e tra la spinta  $T$  e il piano dell'orbita. A questo punto Edelbaum ha considerato tre macro-problemi:

- Variazione del solo semiasse maggiore: la soluzione ottimale è rappresentata dalla sola spinta tangenziale, ovvero con  $\alpha=0$  e  $\beta=0$ . Applicando questa spinta per un giro completo si ottiene una variazione di eccentricità e inclinazione nulla.

$$\Delta V_a = k_a \Delta a$$

- Variazione della sola eccentricità: la soluzione ottimale è rappresentata da una spinta circa perpendicolare alla linea degli apsi, cioè  $\beta=0$  e  $\tan \alpha = \frac{1}{2} \tan \nu$ .

$$\Delta V_e = k_e \Delta e$$

- Variazione combinata di semiasse e inclinazione: soluzione ottimale con  $\alpha=0$  e  $\beta = k \cos(\omega + \nu)$ , ma esiste una versione approssimata che considera traiettorie circa circolari, quindi con  $\beta$  costante per ogni rivoluzione,  $\frac{\sin \beta}{\sqrt{r}} = \text{cost}$ . Dunque il cambio piano conviene farlo sempre al raggio maggiore possibile.

$$\Delta V_i = k_i \Delta i$$

Nel caso in cui le variazioni dei parametri orbitali siano simultanee, il  $\Delta V$  complessivo viene stimato come la somma vettoriale delle singole variazioni, come se i parametri orbitali

fossero indipendenti tra loro,  $\Delta V = \sqrt{\Delta V_a^2 + \Delta V_e^2 + \Delta V_i^2}$ . Si nota, quindi, che l'utilizzo delle variazioni medie per ogni rivoluzione come parametro per stimare il consumo complessivo sia una grossa limitazione per l'approssimazione di Edelbaum.

### 3.2 TEORIA DEL CONTROLLO OTTIMALE

Le equazioni planetarie di Lagrange sono mal definite per problemi che hanno piccole eccentricità e inclinazioni. Risulta necessario riformulare le equazioni attraverso le seguenti variabili:

$$e_x = e \cos(\Omega + \omega), \quad e_y = e \sin(\Omega + \omega), \quad i_x = i \cos \Omega, \quad i_y = i \sin \Omega$$

Si scompone sia il vettore eccentricità  $\mathbf{e}$  sia  $\mathbf{i}$  vettore inclinazione, inoltre si legano alla rotazione della linea degli apsi, per  $e_x$  e  $e_y$ , e della linea dei nodi,  $\Omega$ . Si passa alla riformulazione:

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\theta} &= 2rA \cos \beta \cos \alpha \\ \frac{de_x}{d\theta} &= A \cos \beta (2 \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha) \\ \frac{de_y}{d\theta} &= A \cos \beta (2 \sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha) \\ \frac{di_x}{d\theta} &= A \sin \beta \cos \theta \\ \frac{di_y}{d\theta} &= A \sin \beta \sin \theta \\ \frac{dt}{d\theta} &= \sqrt{\frac{r^3}{\mu}} \end{aligned}$$

Si introduce l'accelerazione adimensionata  $A = \frac{T/m}{\mu/r^2}$  e la longitudine  $\theta$  è la variabile indipendente. Attraverso questa riscrittura, utilizzando valori medi di  $r$  e  $m$  appropriati, le equazioni differenziali non dipendono più dalle variabili di stato ma esclusivamente da  $\theta$ .

Con un nuovo insieme di equazioni planetarie si deve determinare una legge di controllo tale da minimizzare il tempo necessario per una trasferta tra due orbite determinate, assumendo un tempo iniziale  $t_0$  e la spinta continua per tutta la durata della missione.

A questo punto considerando le prime tre equazioni, integrando per la longitudine iniziale dello spacecraft  $\theta_0$  e quella finale  $\theta_f$ , si ottiene:

$$\begin{aligned}
(\Delta a)_{2\pi} &= \frac{4rA \cos \beta}{\Lambda} \sin(\Lambda\pi) \\
(\Delta e_x)_{2\pi} &= \left[ \frac{3A}{1-\Lambda} - \frac{A}{1+\Lambda} \right] \cos \beta \sin(\pi\Lambda) \cos \theta_e \\
(\Delta e_y)_{2\pi} &= \left[ \frac{3A}{1-\Lambda} - \frac{A}{1+\Lambda} \right] \cos \beta \sin(\pi\Lambda) \sin \theta_e \\
(\Delta e)_{2\pi} &= \left[ \frac{3A}{1-\Lambda} - \frac{A}{1+\Lambda} \right] \cos \beta \sin(\pi\Lambda)
\end{aligned}$$

In cui  $\Lambda = \frac{\lambda_a}{\lambda_e}$  con  $\lambda_a$  e  $\lambda_e$  sono variabili aggiuntive relative alla variazione di semiasse ed eccentricità, inoltre le variazioni dei parametri orbitali sono valutate su una rivoluzione completa. Si possono ritrovare i tre macro-problemi espressi precedentemente:  $(\Delta e_x)_{2\pi} = 3\pi A \cos \beta \cos \theta_e$ ,

- Spinta solo tangenziale, ovvero varia solamente il semiasse,  $\Lambda=0$ , con  
 $(\Delta a)_{2\pi} = 4\pi A \cos \beta r$ ,  $(\Delta e_x)_{2\pi} = 0$ ,  $(\Delta e_y)_{2\pi} = 0$
- Spinta in direzione costante, cioè varia solo l'eccentricità,  $\Lambda=1$ , con  
 $(\Delta a)_{2\pi} = 0$ ,  $(\Delta e_x)_{2\pi} = 3\pi A \cos \beta \cos \theta_e$ ,  $(\Delta e_y)_{2\pi} = 3\pi A \cos \beta \sin \theta_e$
- Caso di moto fuori dal piano, si devono integrare la quarta e la quinta equazione del sistema riformulato, e, dopo diversi passaggi, si ottiene:  $\Delta i = 2A \sin \beta \left( \frac{\Delta \theta_f}{\pi} \right)$

### 3.3 MODELLO A CONSUMO MINIMO

In generale i modelli di calcolo, compreso quello di Edelbaum, sono progettati per ottenere missioni a tempo minimo date le orbite iniziali e finali, dunque è necessario che la spinta sia applicata in maniera continua per tutta la missione, aumentando notevolmente il consumo di propellente totale. Si nota che il modo ottimale per applicare la spinta sia quello di farlo per archi propulsivi alternati a fasi di coasting. In particolare i primi sono localizzati nelle zone del periastro e apoastro, questo risulta essere in linea con i modelli di spinta impulsiva, in quanto in quelle zone si limitano molto le perdite e quindi si guadagna molto in termini di consumo di propellente. Però si deve anche tener conto del tempo massimo di volo imposto per la missione. Per tempi brevi si deve sfruttare al massimo tutto il tempo di volo e, quindi si spinge per la maggior parte della traiettoria.

Nel caso di questa tesi si considera un tempo massimo di volo pari a tre anni. Se si utilizza un modello ottimizzato per ottenere il tempo minimo, si ottiene la missione in un terzo del tempo a disposizione. Se si considera il modello a consumo minimo conviene che gli archi di spinta siano concentrati attorno ai punti più estremi dell'orbita. Più sono vicini al periastro o all'apoastro, e più sono brevi, maggiore sarà il guadagno in termini di consumo di propellente. Nel caso in questione le due manovre principali vengono divise in tre archi di spinta e si ottengono due rivoluzioni e mezzo intorno al Sole, con circa tre anni di tempo di volo. In generale si può dire che il numero di archi di spinta è dipendente dal tempo di

missione disponibile e inoltre con questo metodo di spinta si ottengono vantaggi nel recupero dello sfasamento finale.

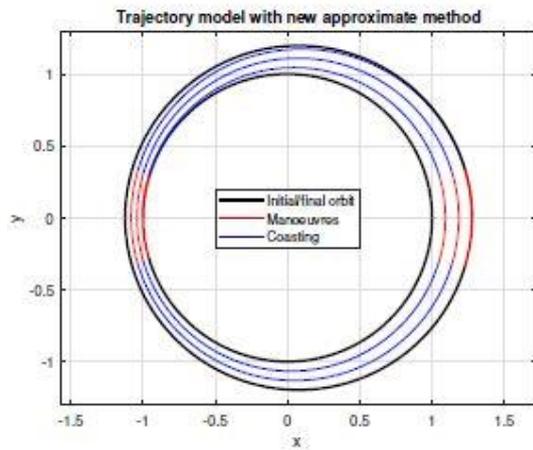


Figura 5: Modello archi spinta

### 3.4 RIPARTIZIONE DEI PARAMETRI ORBITALI TRA LE MANOVRE

Per quanto concerne la variazione dell'eccentricità e del semiasse è stato possibile utilizzare un approccio analitico del problema, mentre per l'inclinazione l'approccio è stato peculiare al problema incontrato. In generale si vedrà come per ogni n-esimo arco di spinta all'afelio e al perielio corrisponderà una variazione di  $r_a$  e  $r_p$ , questa influenzerà in maniera proporzionale la variazione del parametro di inclinazione dell'orbita.

Le variazioni di semiasse ed eccentricità possono essere scritte come:

$$\Delta a = a_2 - a_1 = \frac{r_{p2} - r_{p1}}{2} + \frac{r_{a2} - r_{a1}}{2} = \frac{\Delta r_p + \Delta r_a}{2}$$

$$\Delta e = e_2 - e_1 = 1 - \frac{r_{p2}}{a_2} - 1 + \frac{r_{p1}}{a_1} = \frac{r_{p1}a_2 - r_{p2}a_1}{a_1a_2}$$

In particolare si può riscrivere la variazione di  $e$  in maniera più significativa:

$$\Delta e = \frac{r_{p1}a_1 + r_{p1}\Delta a - (r_{p1}a_1 + \Delta r_p a_1)}{a_1(a_1 + \Delta a)}$$

$$= \frac{r_{p1}\Delta a - \Delta r_p a_1}{a_1(a_1 + \Delta a)}$$

Per cui si vede come le variazioni complessive dipendono dall'orbita iniziale  $r_{p1}$  e  $a_1$ , e da  $\Delta r_p$  e  $\Delta a$ . Le manovre di variazione sono centrate una all'apoastro e una al periaastro, per cui  $\Delta a$  e  $\Delta e$  vengono ripartite su due manovre distinte. Quindi le due uniche variabili sono  $\Delta r_p^*$  e  $\Delta r_a^*$  che rappresentano la variazione del raggio di periaastro, dovuta alla manovra all'apoastro, e del raggio di apoastro, causata dalla manovra al periaastro.

A questo punto si semplifica la notazione per chiarezza:

$$\Delta p = \Delta r_p^*, \quad \Delta k = \Delta r_a^*, \quad r = r_{p1}, \quad a = a_1$$

Ora è possibile riscrivere le equazioni con la nuova notazione:

$$\begin{aligned} \Delta a &= \frac{\Delta p + \Delta k}{2} \\ \Delta e &= \frac{r\Delta a - a\Delta p}{a(a + \Delta a)} \end{aligned}$$

Infine per rendere il sistema determinato si utilizzano le seguenti:

$$\begin{cases} \Delta a = \Delta a_1 + \Delta a_2 \\ \Delta e = \Delta e_1 + \Delta e_2 \end{cases}$$

In cui l'indice 1 riguarda le manovre al periastro, mentre il 2 è relativo a quelle all'apoaastro. Quindi dalla soluzione di quest'ultimo sistema è possibile ricavare i valori di  $\Delta p$  e  $\Delta k$ , dai quali è possibile ricavare i valori  $\Delta a_1$ ,  $\Delta e_1$ ,  $\Delta a_2$  e  $\Delta e_2$  utilizzando le definizioni ad inizio paragrafo.

Quando si considera la variazione di inclinazione l'idea iniziale è stata quella di suddividere il  $\Delta i$  totale nelle due manovre al periastro e all'apoaastro, il cui  $\Delta V$  assumerà il valore minimo per  $\Delta i_j = 0$  e il massimo per  $\Delta i_j = \Delta i$ . Come detto in precedenza non è possibile un approccio analitico e quindi sono state svolte delle simulazioni numeriche apposite, dalle quali si è ottenuta una legge in grado di valutare la miglior ripartizione di  $\Delta i$ :

$$(\Delta i_p)_{ott} = f \frac{|\Delta a_p|}{|\Delta a_p| + |\Delta a_a|} \Delta i$$

Si aggiunge che questi risultati sono stati trovati non considerando l'influenza della posizione della linea dei nodi, ciò, come si vedrà nel prosieguo, è una delle principali cause di imprecisione ed errore del metodo quando i valori di variazione dei parametri orbitali risultano troppo elevati.

## 4. METODO DI OTTIMIZZAZIONE INDIRECTA

---

Grazie a questo metodo, che verrà descritto in seguito, si è creato un modello di riferimento su cui confrontare i risultati ottenuti col metodo approssimato di Edelbaum. In generale questo metodo presenta le caratteristiche della teoria del controllo ottimale e del problema dell'ottimizzazione, utilizzando di base un metodo numerico indiretto, ovvero metodologie iterative che ricercano la soluzione del problema attraverso approssimazioni successive. In particolare per questa applicazione si utilizzano i principi del calcolo variazionale, inoltre queste tecniche offrono un'elevata precisione numerica e un importante contenuto teorico, e permettono di ottenere risultati con tempi di calcolo e parametri limitati.

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad (1)$$

Sia il generico sistema a cui si applica la teoria del controllo ottimale, in cui il vettore delle variabili di stato è  $\mathbf{x}$ , mentre  $\mathbf{u}$  è il vettore dei controlli e  $t$  è la variabile tempo indipendente. Nel caso in questione si suddivide la traiettoria in  $n$  sottointervalli, o archi, tali che le variabili al loro interno siano continue. Il problema che si sta ponendo è quello di trovare i valori di massimo o di minimo di un funzionale del tipo: (2)

$$J = \varphi(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \Phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad j = 1, \dots, n$$

La funzione  $\varphi$  dipende dai valori che le variabili e il tempo assumono ai contorni degli intervalli; l'integrale della funzione  $\varphi$  dipende dai valori assunti in ogni punto dalle variabili, dai controlli e dal tempo. Per semplificare la trattazione si possono introdurre opportune variabili ausiliarie tali da ricondursi ai casi  $\varphi = 0$ , detta formulazione di Lagrange, e  $\varphi = 0$ , detta formulazione di Mayer che sarà preferita nel caso in questione.

$$J^* = \varphi + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\chi} + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \left( \Phi + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}}) \right) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (3)$$

Con  $\boldsymbol{\lambda}$  e  $\boldsymbol{\mu}$  le variabili ausiliarie adottate.

A questo punto integrando il funzionale, per eliminare la dipendenza da  $\dot{x}$ , e differenziando si ottiene: (4)

$$\begin{aligned} \delta J^* &= \left( -H_{(j-1)+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j-1)+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{(j-1)+}} \right) \delta t_{(j-1)+} + \\ &+ \left( H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j-}} \right) \delta t_{j-} + \\ &+ \left( \lambda_{(j-1)+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{(j-1)+}} + \mu^T \left[ \frac{\partial \chi}{\partial x_{(j-1)+}} \right] \right) \delta x_{(j-1)+} + \\ &+ \left( -\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j-}} + \mu^T \left[ \frac{\partial \chi}{\partial x_{j-}} \right] \right) \delta x_{j-} + \\ &+ \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_j} \left( \left( \frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}^T \right) \delta x + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u \right) dt \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Si definisce l'Hamiltoniano del sistema come:  $H = \Phi + \lambda^T f$  (5). La condizione necessaria di ottimo richiede che il funzionale sia stazionario. Grazie alle variabili e costanti  $\lambda$  e  $\mu$  aggiunte è possibile scegliere opportuni valori affinché i coefficienti delle variazioni in (4) siano contemporaneamente nulli, ottenendo  $\delta J^* = 0$ .

In particolare annullando i coefficienti di  $\delta x$  si ottengono le equazioni di Eulero-Lagrange per le variabili aggiunte: (6)

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^T$$

Mentre per l'annullamento dei coefficienti di  $\delta u$  si ottengono le equazioni algebriche per i controlli: (7)

$$\left( \frac{\partial H}{\partial u} \right)^T = 0$$

A questo punto si presentano due possibilità:

1. Il valore ottimale del controllo è quello fornito dall'equazione (7), se rientra nel dominio di ammissibilità allora il vincolo non interviene in quel punto

2. Il valore ottimale è agli estremi del dominio, cioè il controllo assume il valore massimo o minimo, se quello fornito da (7) non rientra nel dominio di ammissibilità

Un caso particolare è costituito dalla linearità dell'Hamiltoniano rispetto a uno dei controlli soggetto a vincoli, per esempio la spinta, allora si ottengono altre due possibilità:

1. Se nell'equazione (5) il coefficiente del controllo in questione è non nullo, allora H è massimizzato per il valore massimo del controllo se il coefficiente è positivo e minimo se è negativo
2. Se nell'equazione (5) il coefficiente del controllo in questione è identicamente nullo durante un intervallo finito di tempo (arco singolare), allora è necessario imporre l'annullamento di tutte le derivate successive del coefficiente rispetto al tempo, fino a quando in una di esse non appare esplicitamente il controllo

#### 4.1 CONDIZIONI AL CONTORNO DI OTTIMO

Innanzitutto si riportano le condizioni imposte, le quali sono di tipo misto, ovvero coinvolgono le variabili di stato e la variabile indipendente tempo nei contorni interni ed esterni, inoltre sono non lineari e vengono espresse come segue: (8)

$$\chi(x_{(j-1)+}, x_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Si riporta l'annullamento dei coefficienti nella (4), ottenendo un set di relazioni:

$$\begin{aligned} -\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j-}} + \mu^T \left[ \frac{\partial \chi}{\partial x_{j-}} \right] &= 0 & j = 1, \dots, n \\ \lambda_{j+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j+}} + \mu^T \left[ \frac{\partial \chi}{\partial x_{j+}} \right] &= 0 & j = 0, \dots, n-1 \\ H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j-}} &= 0 & j = 1, \dots, n \\ -H_{j+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j+}} &= 0 & j = 0, \dots, n-1 \end{aligned}$$

La prima e la terza relazione non hanno significato all'inizio della traiettoria (j=0), mentre le altre due non ne hanno al termine (j=n). Le condizioni al contorno di ottimo si ottengono eliminando dalla prima e dall'ultima equazione la costante aggiunta  $\mu$ : (9)

$$\sigma((x_{(j-1)+}, x_{j-}, \lambda_{(j-1)+}, \lambda_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-})) = 0$$

Considerando una generica variabile di stato  $x$ , se sottoposta a particolari condizioni al contorno, attraverso le prime due equazioni ottiene le condizioni di ottimo per la sua variabile aggiunta corrispondente  $\lambda_x$ :

- Variabile di stato assegnata esplicitamente all'istante iniziale, allora la corrispondente variabile aggiunta è libera
- Valore iniziale di  $x$  non compare né in  $\varphi$  né nelle condizioni al contorno, allora la variabile aggiunta è nulla all'istante iniziale
- Se una variabile di stato è continua e libera, allora la corrispondente variabile aggiunta è continua
- Se una variabile di stato è continua e assegnata a un contorno interno, allora la variabile aggiunta corrispondente ha una discontinuità libera

Le ultime due equazioni del set ottenuto forniscono informazioni quando l'Hamiltoniano  $H$  non dipende esplicitamente dal tempo:

- Se il tempo iniziale o finale è libero, allora l'Hamiltoniano  $H$  è nullo in quel punto
- Se il tempo intermedio è libero, allora  $H$  è continuo in quel punto
- Se il tempo intermedio è esplicitamente assegnato,  $H$  ha una discontinuità libera

## 4.2 PROBLEMA DIFFERENZIALE AI LIMITI

Il metodo indiretto adottato per l'ottimizzazione delle trasferte orbitali si basa sull'applicazione della teoria del controllo ottimale al sistema di equazioni (1), il quale ha condizioni al contorno dipendenti dalle orbite di partenza e arrivo che compongono la missione. Come visto nel paragrafo precedente la teoria del controllo ottimale parte dal sistema (1) e produce un sistema di equazioni differenziali ai limiti (4). La soluzione del problema consiste nel trovare quali valori iniziali consentono di soddisfare le condizioni al contorno imposte (orbite) e quelle di ottimo (prestazioni), attraverso l'integrazione numerica del sistema differenziale.

Il primo passo consiste nel cambiare la variabile indipendente  $t$  per risolvere il problema dell'indeterminatezza della durata dei sottointervalli, in modo da fissare i contorni interni ed esterni:

$$\varepsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j}$$

Da (1) si ottiene: (10)

$$\frac{dz}{d\varepsilon} = f(z, \varepsilon)$$

Il vettore  $z$  contiene le variabili di stato e aggiunte. La (11) esprime le generiche condizioni al contorno, sia imposte sia di ottimo: (11)

$$\Psi(s) = 0$$

Dove il vettore  $s$  contiene i valori che le variabili assumono a ogni contorno,  $\varepsilon = 0, 1, \dots, n$ . Come detto in precedenza alcuni valori iniziali non sono noti e la soluzione del problema

passa attraverso la determinazione di quali valori devono assumere le variabili per soddisfare (9), ovviamente si utilizzano procedimenti iterativi che saranno descritti di seguito.

La r-esima iterazione inizia con l'integrazione di (10) con i valori iniziali  $p^r$  trovati al termine dell'iterazione precedente, in pratica si fissa:

$$z(0) = p^r$$

E si procede all'integrazione delle equazioni lungo tutta la traiettoria. Viene determinato il valore delle variabili di stato per ogni contorno e, al termine dell'integrazione, si calcola l'errore sulle condizioni al contorno  $\Psi^r$  alla r-esima iterazione. Una variazione  $\Delta p$  porta a variare l'errore sulle condizioni al contorno di una quantità:

$$\Delta \Psi = \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial p} \right] \Delta p$$

A ogni iterazione i valori iniziali vengono corretti affinché l'errore sulle condizioni al contorno sia nullo, in particolare: (12)

$$\Delta p = p^{r+1} - p^r = - \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial p} \right]^{-1} \Psi^r$$

La correzione (12) si applica fino a che le condizioni al contorno (11) non siano verificate con la precisione desiderata. Questa linearizzazione per il calcolo del  $\Delta p$ , introduce errori che inducono problemi di convergenza del metodo.

### 4.3 APPLICAZIONE DEL METODO

Si riportano le equazioni del moto che descrivono il problema, in particolare si sceglie di adottare le coordinate sferiche in un sistema di riferimento inerziale, in quanto conveniente per la corrispondenza tra le variabili aggiunte alle componenti della velocità nel sistema inerziale.

$$\frac{dr}{dt} = u$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{v}{r \cos \phi}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{w}{r}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{r^2} + \frac{v^2}{r} + \frac{w^2}{r} + \frac{T}{m} \sin \gamma_T + \frac{qS}{m} \left[ -C_D \sin \gamma + C_L \cos \sigma \cos \gamma \right]$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{uv}{r} + \frac{vw}{r} \tan \phi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \cos \psi_T + \frac{qS}{m} \left[ -C_D \cos \gamma \cos \psi + C_L \left( -\cos \sigma \sin \gamma \cos \psi + \sin \sigma \sin \psi \right) \right]$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{uw}{r} - \frac{v^2}{r} \tan \phi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \sin \psi_T + \frac{qS}{m} \left[ -C_D \cos \gamma \sin \psi + C_L \left( -\cos \sigma \sin \gamma \sin \psi - \sin \sigma \cos \psi \right) \right]$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c}$$

In cui la posizione dello spacecraft è descritta dal raggio  $r$ , dalla longitudine  $\theta$  e dalla latitudine  $\phi$ ; la velocità è suddivisa nella componente radiale  $u$ , ovvero verso lo Zenit, in quella verso Est  $v$  e in quella verso Nord  $w$ ; gli angoli  $\gamma$  e  $\psi$  sono gli angoli di elevazione e heading della velocità relativa  $\mathbf{V}_r$ ; gli angoli  $\gamma_T$  e  $\psi_T$  sono analoghi ma riferiti alla spinta  $\mathbf{T}$ ; infine l'angolo  $\sigma$  è il rollio.

A questo punto dalla (6) si possono ricavare le equazioni differenziali per le variabili aggiunte:

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_r &= \frac{1}{r^2} \left[ \lambda_\vartheta \frac{v}{\cos \phi} + \lambda_\phi w + \lambda_u \left( -\frac{2}{r} + v^2 + w^2 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \lambda_v (-uv + vw \tan \phi) + \lambda_w (-uw - v^2 \tan \phi) \right] + \frac{2qS}{mV_r} \lambda_V \omega \cos \phi \\
&\quad \left[ V_E (-C_D \cos \delta + C_L \sin \delta) + L_E (-C_D \sin \delta - C_L \cos \delta) \right] + \\
&\quad - \frac{qS}{m} \lambda_V \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{1}{\rho} (-C_D \cos \delta + C_L \sin \delta) \\
\dot{\lambda}_\vartheta &= 0 \\
\dot{\lambda}_\phi &= \frac{1}{r \cos^2 \phi} \left( -\lambda_\vartheta v \sin \phi - \lambda_v v w + \lambda_w v^2 \right) + \frac{2qS}{mV_r} \lambda_V \omega r \sin \phi \\
&\quad \left[ V_E (-C_D \cos \delta + C_L \sin \delta) + L_E (-C_D \sin \delta - C_L \cos \delta) \right] \\
\dot{\lambda}_u &= \frac{1}{r} (-\lambda_r r + \lambda_v v + \lambda_w w) - \frac{2qS}{mV_r} \lambda_V \\
&\quad \left[ V_Z (-C_D \cos \delta + C_L \sin \delta) + L_Z (-C_D \sin \delta - C_L \cos \delta) \right] \\
\dot{\lambda}_v &= \frac{1}{r} \left[ -\lambda_\vartheta \frac{1}{\cos \phi} - 2\lambda_u v + \lambda_v (u - w \tan \phi) + 2\lambda_w v \tan \phi \right] - \frac{2qS}{mV_r} \lambda_V \\
&\quad \left[ V_E (-C_D \cos \delta + C_L \sin \delta) + L_E (-C_D \sin \delta - C_L \cos \delta) \right] \\
\dot{\lambda}_w &= \frac{1}{r} (-\lambda_\phi - 2\lambda_u w - \lambda_v v \tan \phi + \lambda_w u) - \frac{2qS}{mV_r} \lambda_V \\
&\quad \left[ V_N (-C_D \cos \delta + C_L \sin \delta) + L_N (-C_D \sin \delta - C_L \cos \delta) \right] \\
\dot{\lambda}_m &= \frac{T}{m^2} \lambda_V + \frac{qS}{m^2} \lambda_V (-C_D \cos \delta + C_L \sin \delta)
\end{aligned}$$

Fondamentalmente nell'applicazione proposta in questa tesi si impongono le orbite iniziali, quella terrestre, e finali, dipendente dal target NEAs scelto, le prestazioni del sistema propulsivo e l'intervallo di partenza della missione, compreso tra il 2020 e 2023, di conseguenza il metodo descritto è in grado di risolvere le equazioni proposte in questo paragrafo e fornisce in output le condizioni di ottimo per la missione, la massa di propellente necessaria e la data di partenza ottimale.

## 5. RISULTATI FINALI

Si sono considerate missioni per i NEAs con satelliti di massa 20 Kg a propulsione elettrica, in cui veniva considerata la distanza dal Sole ma l'impulso specifico e l'efficienza sono considerate costanti per tutta la missione. Le missioni sono state valutate sia imponendo un periodo di partenza compreso tra il 2020 e il 2023 con una durata di 18 mesi, sia lasciando variabile la data di partenza ma mantenendo la durata sempre di 18 mesi.

I risultati ottenuti con questo lavoro sono stati ricavati dall'utilizzo del metodo di ottimizzazione indiretta precedentemente descritto. In particolare i valori della massa di propellente ottenuti sono stati considerati come riferimento per testare e validare il modello approssimato sulla teoria di Edelbaum.

In generale l'esito di questo confronto mostra una buona accuratezza, con un errore medio che oscilla tra il 10% e il 15%.

Si sono scelti sei asteroidi che potessero mostrare sia i casi in cui si ottengono approssimazioni con errori dentro la media sia i casi con valori finali troppo sovrastimati o sottostimati. Inoltre si è fatta una prima analisi cercando di capire le cause di queste approssimazioni errate.

Di seguito si riporta una tabella con i valori più significativi del confronto tra i due modelli:

<i>target</i>	<i>a[AU]</i>	<i>e</i>	<i>i[deg]</i>	<i>ω[deg]</i>	<i>r<sub>p</sub>[AU]</i>	<i>r<sub>a</sub>[AU]</i>	<i>m<sub>p,rif</sub></i>	<i>m<sub>p</sub></i>	<i>Δm</i>	<i>%Δm<sub>p</sub></i>
2016 TB57	1.10	0.12	0.30	147.8	0.97	1.24	1.06	1.02	-0.03	-3.01
2013WA44	1.10	0.06	2.30	176.73	1.03	1.17	1.20	1.47	0.28	23.00
2013 BS45	0.99	0.08	0.77	150.69	0.91	1.07	1.01	1.01	0	0.31
1996 XB27	1.19	0.06	2.46	58.18	1.12	1.26	1.77	2.24	0.47	26.49
2013 PA7	1.15	0.09	3.47	93.28	1.05	1.26	1.80	2.21	0.4	22.41
2007 TF15	1.11	0.04	4.25	28.86	1.06	1.16	1.77	2.27	0.5	28.22

## 5.1 PRIMO CANDIDATO TB57

Questa missione rientra nei casi in cui l'errore è molto basso, in particolare è del -3%, quindi questa approssimazione valuta un consumo di propellente totale superiore rispetto al metodo di approssimazione indiretto. Ciò avviene, in generale, quando la trasferta richiede un piccolo cambio di perielio ma grande di afelio, quindi la linea dei nodi risulta circa in quadratura rispetto a quella degli apsidi. Di conseguenza non si riesce a combinare la manovra di cambio piano con quella agli apsidi, causando una diminuzione di efficienza totale e un consumo maggiore.

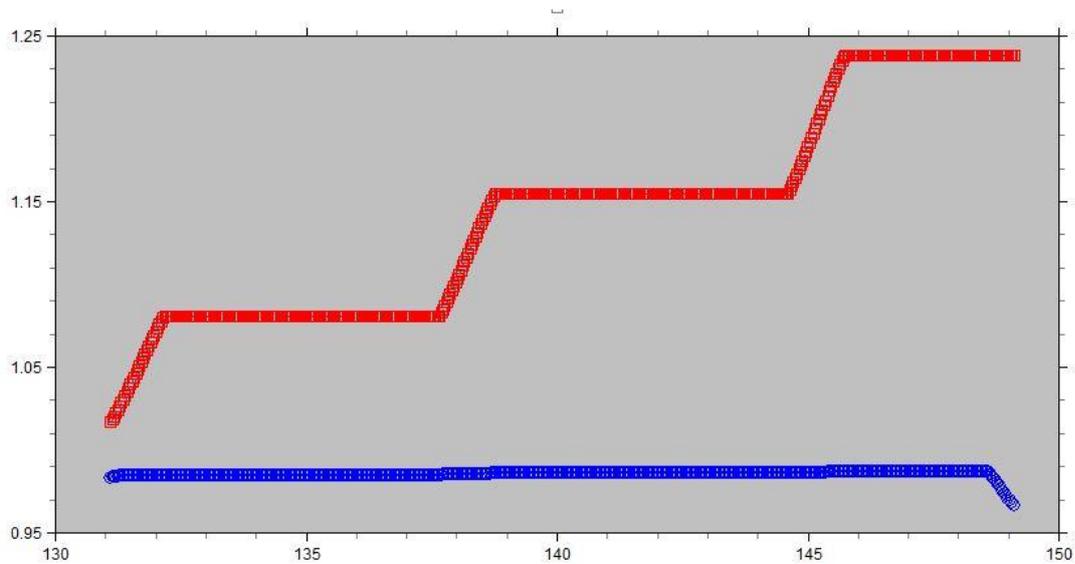


Figura 6: Andamento Afelio e Perielio

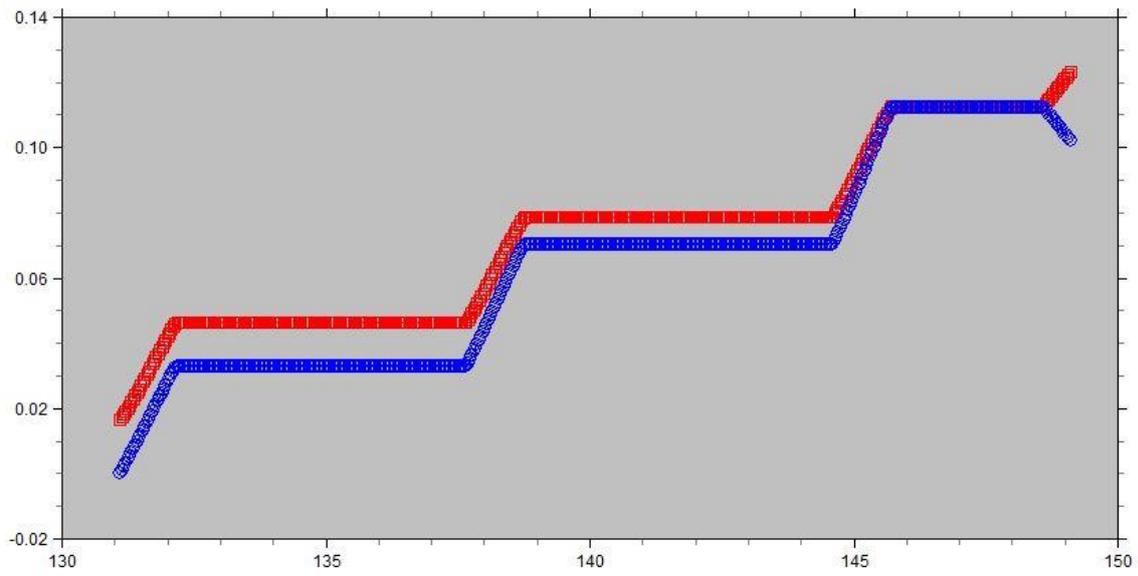


Figura 7: Andamento Semiasse e Eccentricità

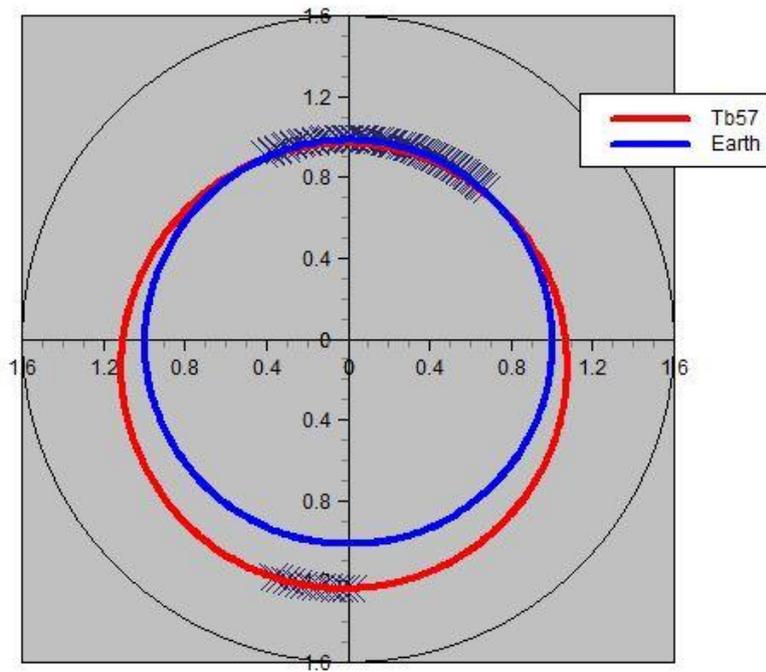


Figura 8: Missione e Zona di Spinta

## 5.2 SECONDO CANDIDATO WA44

Questa trasferta mostra una differenza tra i risultati del 23%, in particolare l'approssimazione in questo caso risparmi una quantità di propellente troppo eccessiva. Questo avviene quando è possibile cambiare sia la linea degli apsi sia l'inclinazione della traiettoria del satellite in un'unica manovra meno costosa. Infatti il cambiamento di piano viene eseguito in concomitanza dell'ultimo passaggio per afelio, ottenendo un grosso risparmio in termini di consumo. Queste manovre peculiari sono riscontrabili in *figura 4*, per quanto riguarda lo spostamento dell'afelio (Rosso), e in *figura 6*, per quanto riguarda il punto di spinta coincidente con l'afelio.

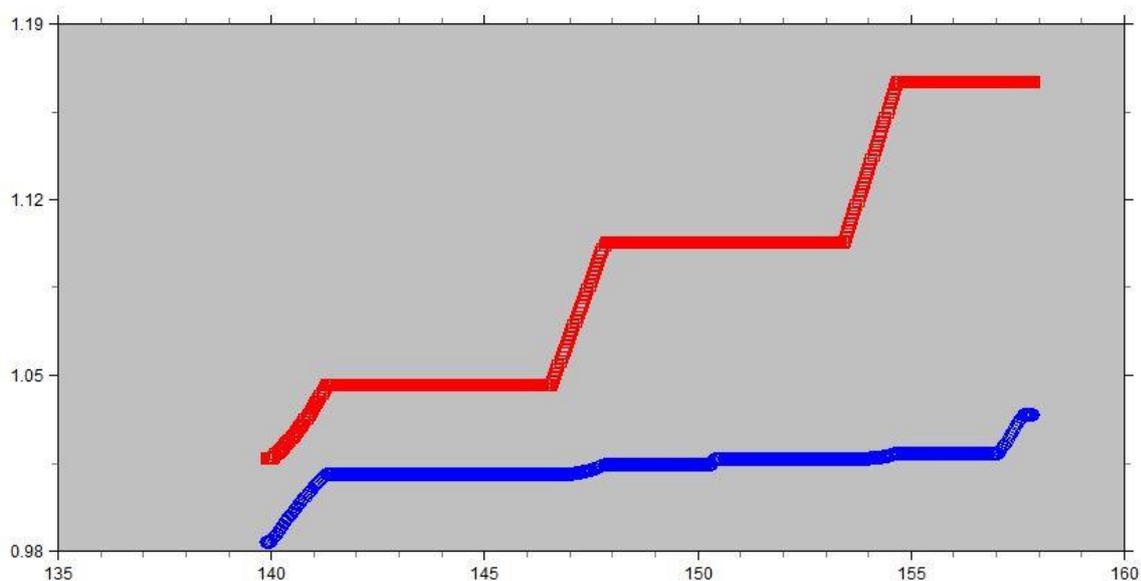


Figura 9: Andamento Afelio e Perielio

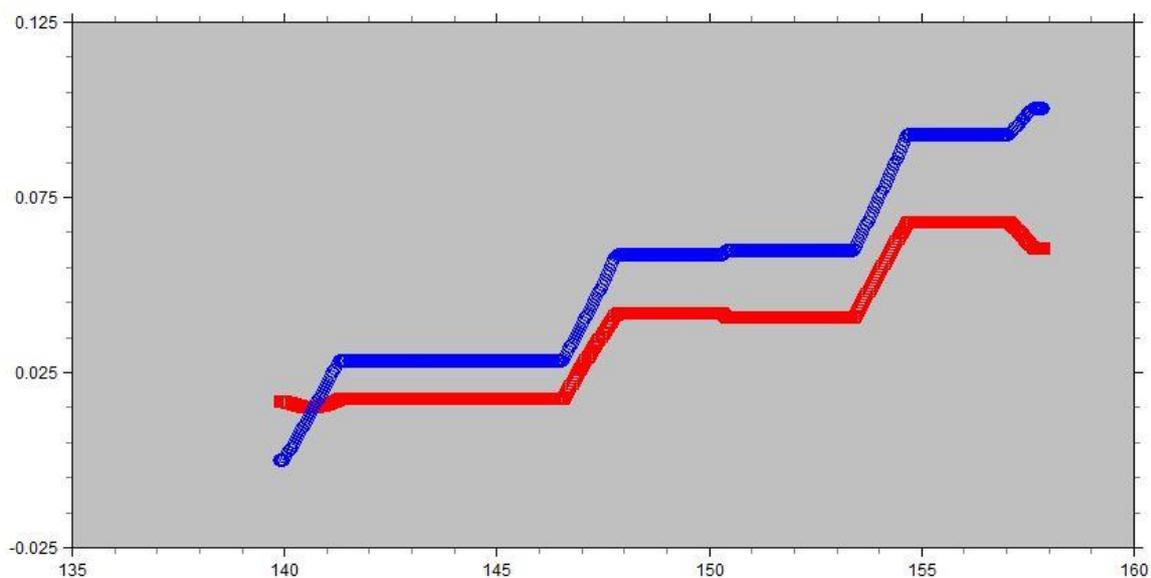


Figura 10: Andamento Semiasse e Eccentricità

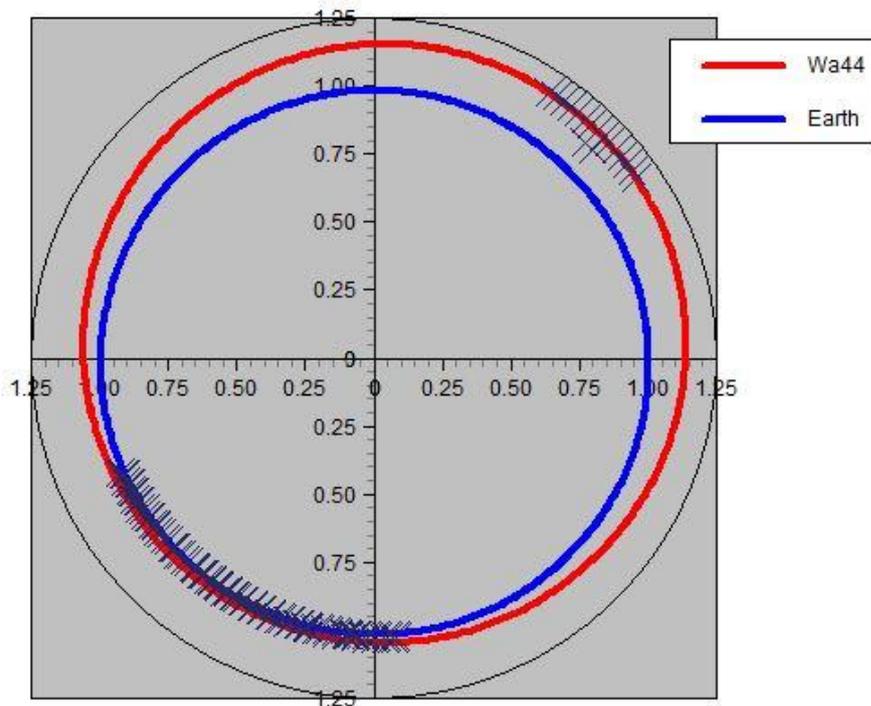


Figura 11: Missione e Zone Spinta

### 5.3 TERZO CANDIDATO BS45

Questo candidato, come il primo, ha un'ottima approssimazione, addirittura in questo caso l'errore risulta essere dello 0.31%. Ciò avviene perché questa missione non necessita ne di grandi cambi di piano ne di grosse variazioni di eccentricità.

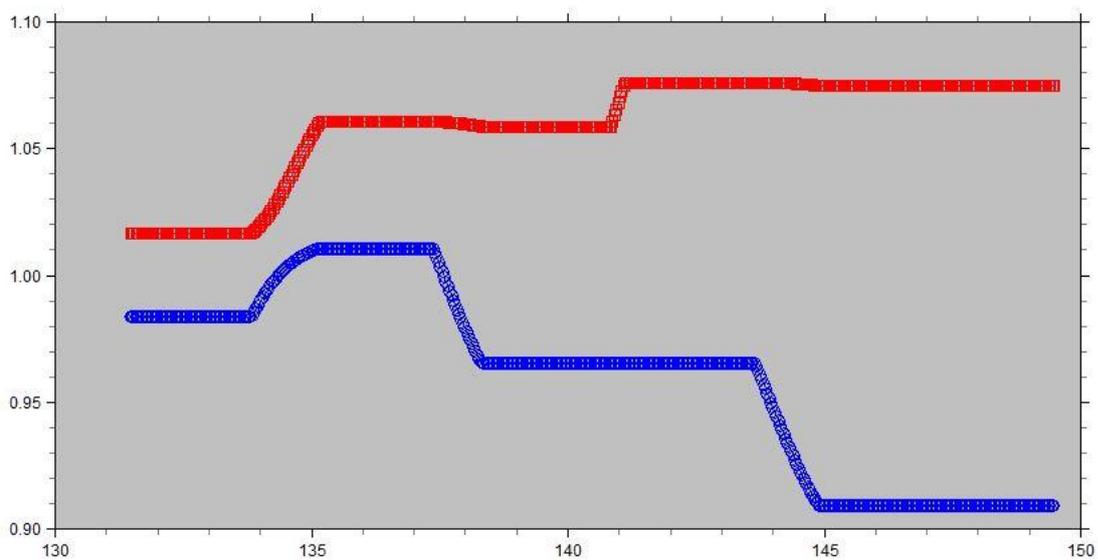


Figura 12: Andamento Afelio e Perielio

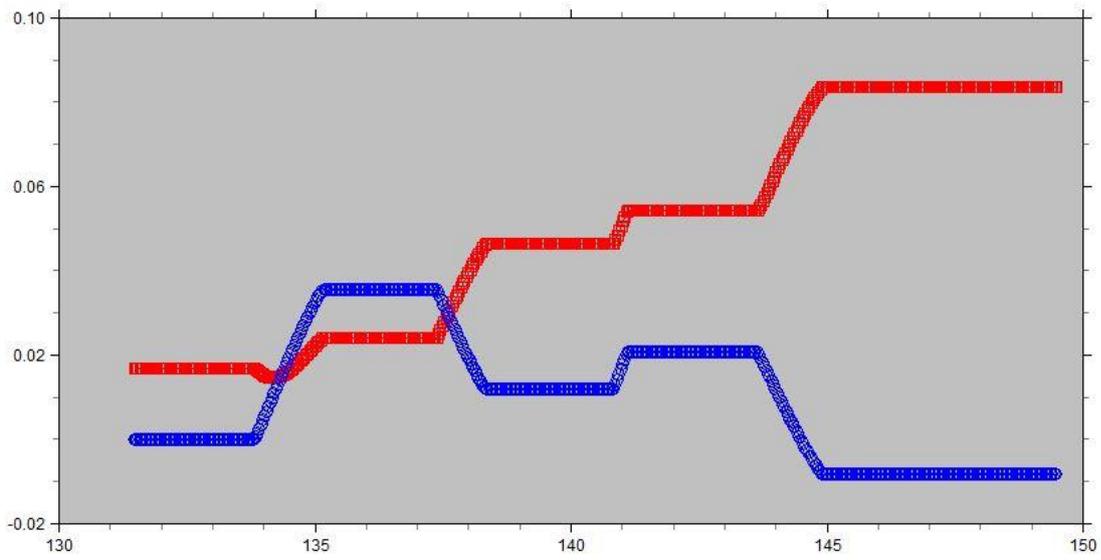


Figura 13: Andamento Semiasse e Eccentricità

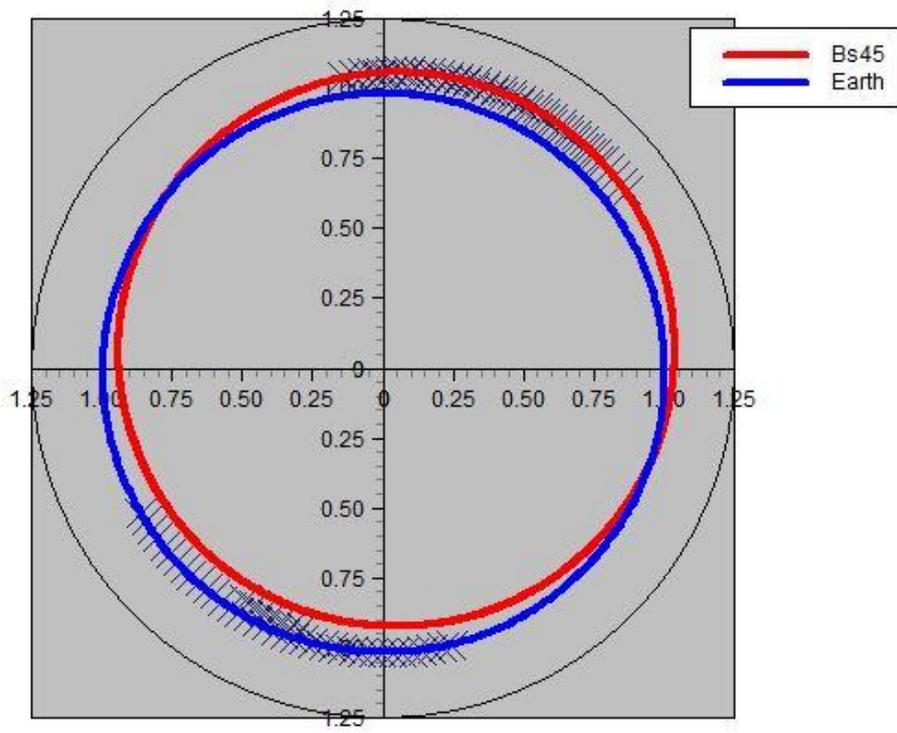


Figura 14: Missione e Zone Spinta

## 5.4 QUARTO CANDIDATO XB27

La missione verso l'asteroide XB27 presenta un errore simile al secondo candidato WA44, infatti le approssimazioni si discostano del 26.49%, anche in questo caso secondo il nuovo metodo il consumo di propellente totale è molto inferiore rispetto all'approssimazione indiretta. In questa situazione la trasferta richiede una grossa variazione di afelio e perielio (figura 10), di conseguenza anche dell'eccentricità e del semiasse (figura 11), permettendo quindi di svolgere la manovra di cambio piano ad una ampia distanza dal target (figura 12), con conseguente risparmio di propellente.

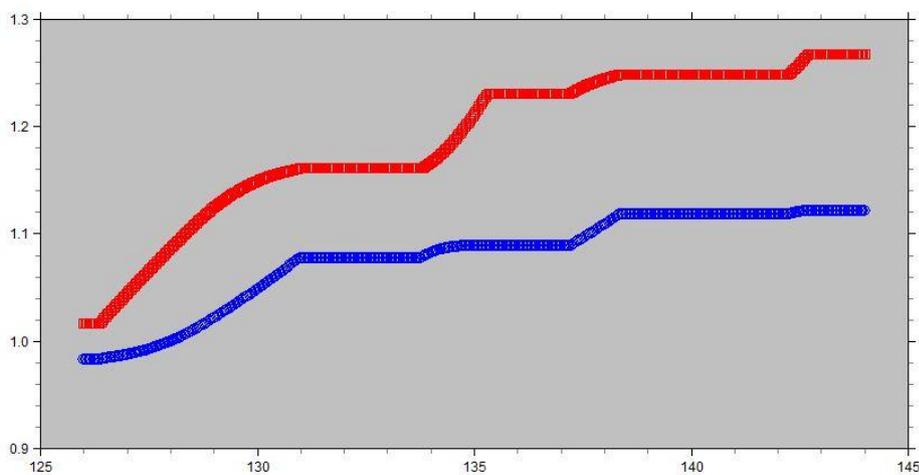


Figura 15: Andamento Afelio e Perielio

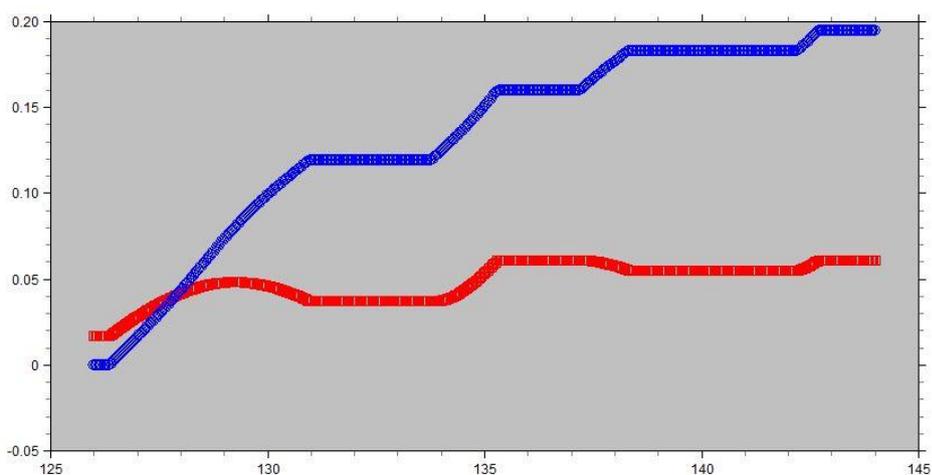


Figura 16: Andamento Semiasse e Eccentricità

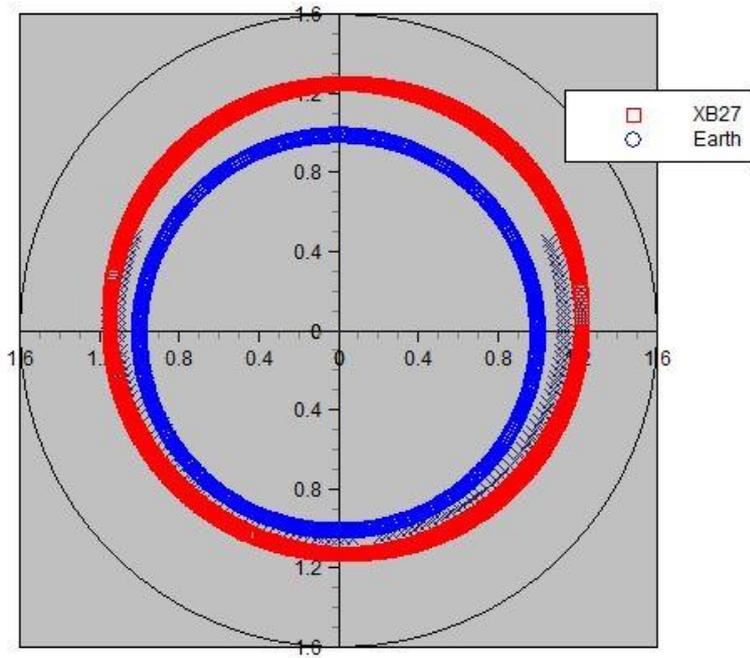


Figura 17: Missione e Zone Spinta

## 5.5 QUINTO CANDIDATO PA7

Questo candidato richiede una missione con comportamento analogo rispetto al precedente. Infatti l'errore di approssimazione è del 22.41% e presenta le stesse motivazioni della trasferta verso XB27, in cui si ha una rilevante variazione dell'afelio e del perielio che permette di svolgere la manovra di cambio piano in condizioni ottimali con conseguente risparmio di consumo complessivo.

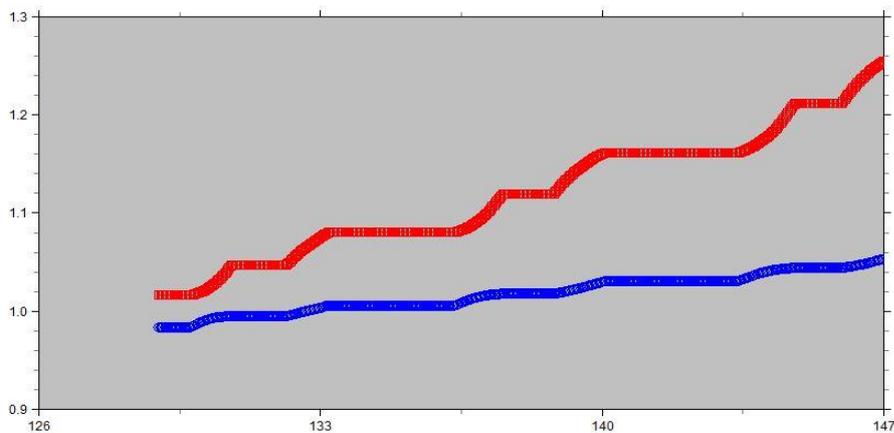


Figura 18: Andamento Afelio e Perielio

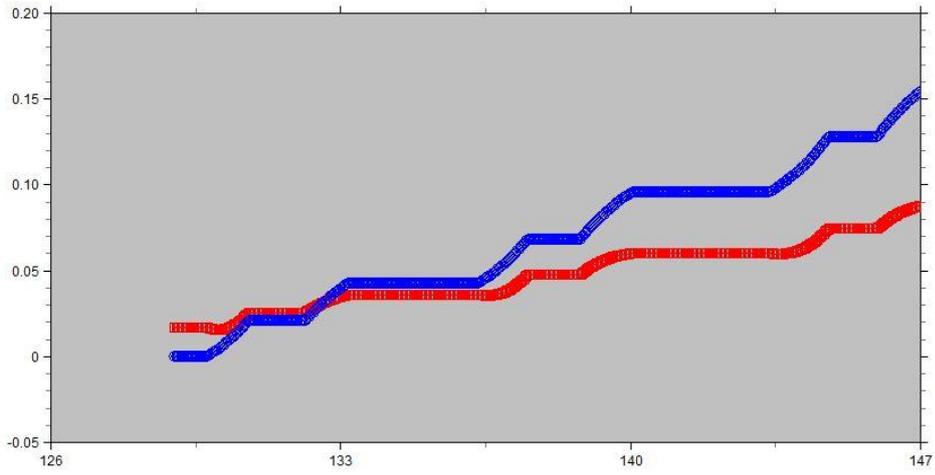


Figura 19: Andamento Semiasse e Eccentricità

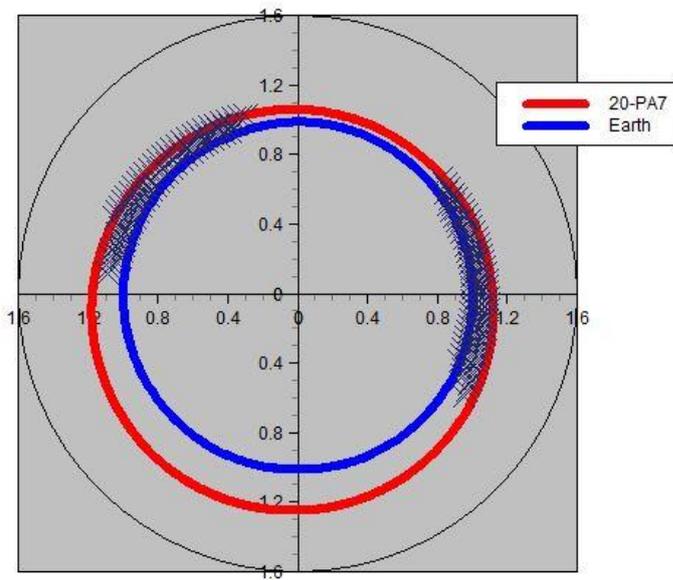


Figura 20: Missione e Zone Spinta

## 5.6 SESTO CANDIDATO TF15

L'ultimo caso rientra negli ultimi analizzati, infatti questa missione presenta un errore di approssimazione pari al 28.22%. Rispetto agli altri casi la manovra di cambio piano deve coprire un'inclinazione maggiore e, quindi numericamente l'errore risulta maggiore, ma il fenomeno fisico che causa questo comportamento è analogo ai precedenti.

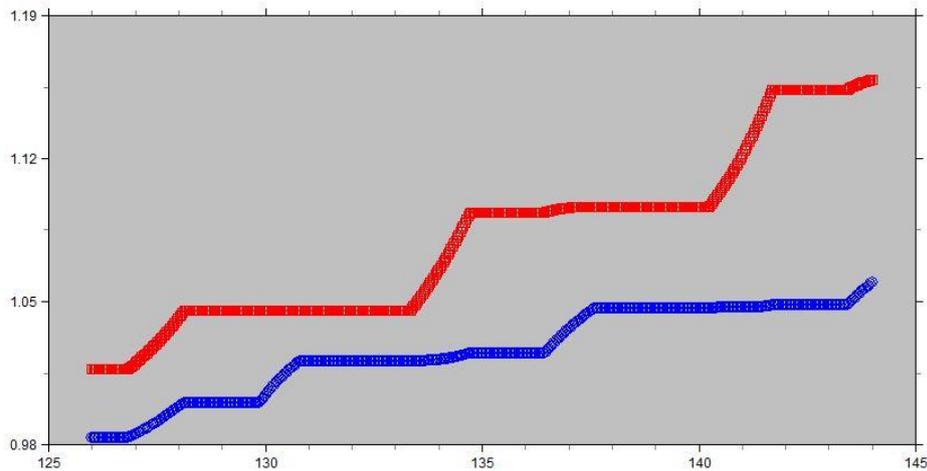


Figura 21: Andamento Afelio e Perielio

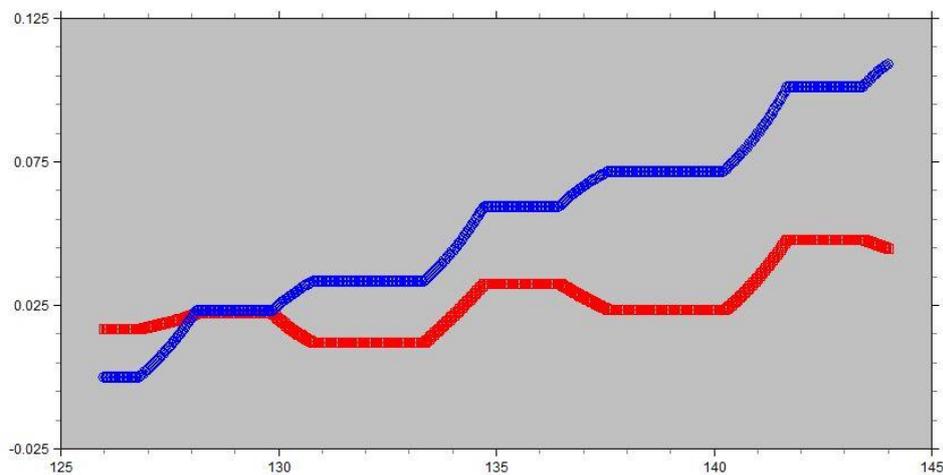


Figura 22: Andamento Semiasse e Eccentricità

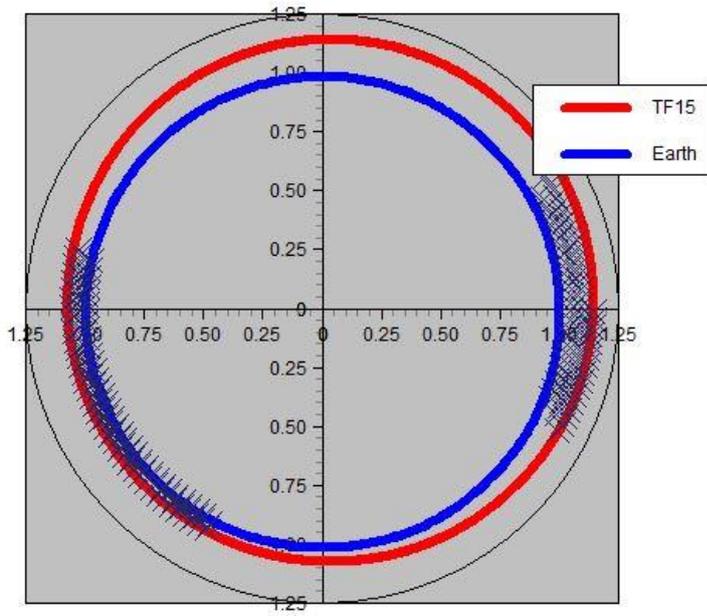


Figura 23: Missione e Zona Spinta

## 6. CONCLUSIONI

---

Infine analizzando i risultati ottenuti, si nota che la differenza di valori di massa del propellente aumenta in base ai valori di  $\Delta e$  e  $\Delta i$  richiesti. Infatti generalmente la differenza tra il modello approssimato di Edelbaum e quello ottimizzato indiretto si aggira sul 10-15%, invece nei casi di WA44, XB27, PA7 e TF15 l'errore risulta più elevato in quanto la missione richiede variazioni di parametri orbitali troppo importanti. Fondamentalmente il modello sviluppato sulle approssimazioni di Edelbaum mostra buoni risultati quando le variazioni di semiasse, eccentricità e inclinazione rimangono contenute. Se questa condizione non viene rispettata, l'errore risulta elevato in quanto la manovra di cambio piano, la quale è la più costosa in termini di  $\Delta V$  e consumo, avviene in condizioni ottimali, ovvero a raggi elevati, inoltre questa manovra è svolta simultaneamente a quella di variazione della linea degli apsidi, ottenendo un ulteriore guadagno nella stima della massa del propellente. L'errore di stima può avvenire sia per sottostima del consumo di propellente, come spiegato in precedenza, ma anche per sovrastima, ovvero viene stimata una massa di propellente necessaria superiore. Ciò avviene quando è richiesta una variazione di afelio molto maggiore rispetto al perielio, e quando la linea dei nodi risulta in quadratura con la linea degli apsidi, di conseguenza non si riesce a combinare la manovra di cambio piano a quella di variazione della linea degli apsidi.

Quindi il metodo approssimato fornisce al momento stime abbastanza buone ma migliorabili, in quanto gli errori di stima sono legati principalmente a specifiche caratteristiche dell'orbita, ne consegue in lavori futuri sarà possibile trovare modi per applicare opportune correzioni in grado di ovviare queste problematiche.

## BIBLIOGRAFIA

---

- NASA – Jet Propulsion Laboratory. Asteroids, 13/09/2010.
- Matt Williams. What is the Asteroid Belt?. Universe Today, 23/08/2015.
- NASA/JPL. The Torino impact hazard scale. Near-Earth Object Program Office, 13/04/2005
- NASA/JPL. The Palermo technical impact hazard scale. Near-Earth Object Program Office, 31/08/2005.
- NASA - Asteroid Grand Challenge. How Do We Mitigate the Hazard of Possible Asteroid Impacts?. 16/03/2015.
- Chris Bergin. Hera adds objectives to planetary defense test mission. NASASpaceFlight.com, 07/01/2019.
- Ian Carnelli. The Hera Mission Study. ESA, 11/10/2017.
- NASA. OSIRIS-REx: Asteroid Sample Return Mission. 08/2016.
- R. Walker, D. Koschny, C. Bramanti & ESA CDF study team. Miniaturised Asteroid Remote Geophysical Observer (M-ARGO): a stand-alone deep space CubeSat system for lowcost science and exploration missions. 6th Interplanetary CubeSat Workshop, Cambridge, UK, 30 /05/2017.
- Chit Hong Yam, Dario Izzo, Francesco Biscani. Towards a high fidelity direct transcription method for optimisation of low-thrust trajectories. 26/04/2010.
- T.N. Edelbaum. Propulsion Requirements for Controllable Satellites. ARS Journal, Vol. 31, No. 8, 1961, pp. 1079-1089.
- Jean Albert Kechichian. Reformulation of Edelbaum’s Low-Thrust Transfer problem Using Optimal Control Theory, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 20, No. 5 (1997), pp. 988-994.
- Alessio Mereta, Dario Izzo. Target selection for a small low-thrust mission to near-Earth asteroids. 09/2018, Volume 2, Issue 3, pp 249–263.
- Lorenzo Casalino, Luigi Mascolo, Alessandro Bosa. *Fast Estimation Method for Trajectories to Near-Earth Asteroids*, AAS Astrodynamics Specialist Conference.