

POLITECNICO DI TORINO

DIMEAS - DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA MECCANICA ED AEROSPAZIALE

Corso di Laurea in Ingegneria aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

Analisi statica e dinamica di una pala di elicottero tipo Blue Edge



Relatore

Prof. Erasmo Carrera

Correlatori:

Dott. Matteo Filippi

Dott. Enrico Zappino

Laureando

Daniel GIUSA

matricola: 245246

ANNO ACCADEMICO 2018 – 2019

*Dedico questo lavoro alla
mia famiglia, che mi ha
sempre sostenuto con amore
in questo mio lungo percorso*

Sommario

La seguente tesi di laurea magistrale in ingegneria aerospaziale ha come obiettivo quello di preparare le basi per uno studio approfondito ed efficace di una pala di elicottero di tipo *Blue Edge*. Queste particolari ali rotanti rappresentano l'ultimo ritrovato tecnologico nel campo dell'aviazione, e la loro recente comparsa nel mondo della progettazione aeronautica rendono necessari studi ancora più dettagliati del loro comportamento. Questo lavoro si focalizza sulla parte strutturale delle pale con un *modus operandi* che porta ad analizzare, in primo luogo, strutture semplici per poi complicare geometrie e materiali. Procedendo a step si potrà descrivere il problema finale con un'accuratezza maggiore e con una più elevata confidenza dei risultati ottenuti.

La particolarità dello studio effettuato sta nell'utilizzo della Carrera Unified Formulation (CUF), che consente di sviluppare un gran numero di beam theory con un numero variabile di incognite di spostamento mediante una notazione concisa e facendo riferimento ad alcuni nuclei fondamentali. Le beam theory di ordine superiore possono essere facilmente implementate sulla base del CUF e l'accuratezza di una grande varietà di teorie può essere stabilita in senso gerarchico e/o assiomatico vs. asintotico. In questo modo è stato possibile confrontare teorie ridotte con altre più accurate e studiare l'influenza di questa scelta sui risultati ottenuti. Inoltre la CUF per la sua caratteristica node-dependent permette di utilizzare elementi di diverse dimensioni all'interno della stessa struttura, ad esempio combinazioni di elementi 1D e 3D. Così facendo si riduce il costo computazionale dell'analisi inserendo elementi della dimensione opportuna in particolari zone della struttura. Per le caratteristiche sopra citate della CUF si sono potute analizzare le varie geometrie utilizzando teorie diverse nei nodi delle beam unidimensionali, questa caratteristica della formulazione permette di ottenere costi computazionali più contenuti attraverso l'utilizzo di teorie accurate solo dove il comportamento della struttura risulta essere più complesso.

La tesi quindi prende in analisi diverse strutture che si differenziano tra loro attraverso la diversa geometria, materiali ed angolo di laminazione della fibre nel caso esse siano in composito. Le strutture analizzate sono le seguenti.

- Trave multisezione in materiale isotropo;
- Piastra curva (shell) in materiale isotropo;
- Piastra curva (shell) in composito;
- Pala di elicottero con profilo rettangolare in materiale isotropo;
- Pala di elicottero con profilo rettangolare in composito;
- Pala rettilinea con profilo realistico in composito;
- Pala di tipo *Blue Edge*.

Di ogni struttura verranno presi in considerazione molteplici casi in cui varieranno i modelli strutturali e le caratteristiche del materiale.

Ringraziamenti

Ringrazio i miei genitori, *Angelo* e *Santa*, poiché il loro supporto incondizionato, nelle mie scelte di vita, mi ha portato a concludere anche questo importante traguardo. Ringrazio mio fratello *Manuel*, esempio nel lavoro e nella vita, che mi incoraggiato e consigliato in questi 5 anni universitari. Non con meno affetto estendo i ringraziamenti ai miei amici *Ilario*, a cui sarò sempre grato per avermi fatto sentire come se fossi a casa anche a chilometri di distanza dalla Sicilia, *Federico*, *Stefano*, *Lorenzo*, *Aldo*, *Francesco* e *Giovanni* che mi hanno accompagnato in questi bellissimi anni.

Ringrazio anche il prof. *Carrera* e i dottori *Filippi*, *Zappino* e *Pagani* che mi hanno permesso di affrontare un argomento di grande rilevanza e molto stimolante. La loro disponibilità nel seguirmi e i loro suggerimenti sono stati indispensabili per completare al meglio la tesi ed ottenere molte nuove conoscenze sulla materia affrontata.

Indice

Elenco delle tabelle	8
Elenco delle figure	9
I Introduzione al problema	13
1 L'evoluzione dell'elicottero: dalle origini fino alle pale <i>Blue Edge</i>	15
1.1 Le problematiche irrisolte dell'elicottero	16
1.2 Blue edge blades: storia del progetto	20
1.3 Progetto strutturale della pala <i>Blue edge</i>	21
II Teoria: formulazione unificata	25
2 Carrera Unified Formulation per lo studio strutturale di una pala <i>Blue Edge</i>	27
2.1 Introduzione alla Carrera Unified Formulation	27
2.2 Derivazioni di elementi finiti solidi e trave tramite formulazione unificata	28
2.3 Equazioni di governo per strutture rotanti	29
2.4 La procedura di assemblamento	31
III Analisi statiche e dinamiche	33
3 Trave multisezione	35
4 Piastra curva (shell)	39
5 Piastra curva (shell) in composito	43
5.1 Dinamica della piastra curva (shell) in composito	43
5.1.1 Frequenze naturali e modi di vibrare	43
5.1.2 Diagrammi di Campbell	46
5.2 Statica della piastra curva (shell) in composito	47
5.2.1 Tensione trasversale σ_{xy}	47
5.2.2 Tensione normale σ_{yy}	51
6 Pala di elicottero con profilo rettangolare ed angolo di freccia - Materiale isotropo	53
6.1 Analisi su frequenze naturali	54

7 Pala a profilo rettangolare in composito	57
8 Pala realistica in composito	65
8.1 Analisi statica	65
8.2 Analisi dinamica	79
8.3 Risposta nel tempo	85
9 Pala Blue-edge in composito	87
9.0.1 Analisi dinamica	87
9.0.2 Analisi Statica	89
10 Appendice - Piastra curva (shell) in composito: tabelle e grafici	95
11 Conclusioni	109

Elenco delle tabelle

3.1	Frequenze naturali [Hz] della trave multisezione - Variando densità	37
3.2	Frequenze naturali [Hz] della trave multisezione - Variando modulo di Young	38
4.1	Frequenze naturali [Hz] della piastra curva isotropa	40
5.1	Proprietà del composito	44
6.1	Frequenze naturali [Hz] pala isotropa. "F":flapwise;"L":chordwise; "T":torsional.	54
7.1	Frequenze naturali [Hz] alle varie configurazioni di laminazione per un angolo di freccia pari a 30°. "F":flapwise;"L":chordwise; "T":torsional.	60
7.2	Frequenze naturali [Hz] alle varie configurazioni di laminazione per un angolo di freccia pari a 45°. "F":flapwise;"L":chordwise; "T":torsional.	61
7.3	Frequenze naturali [Hz] alle varie configurazioni di laminazione per un angolo di freccia pari a 60°. "F":flapwise;"L":chordwise; "T":torsional.	62
8.1	Proprietà dei materiali	66
8.2	Frequenze naturali della pala in composito [Hz]	81
8.3	Frequenze naturali della pala in composito [Hz]	82
8.4	Frequenze naturali della pala in composito [Hz]	83
9.1	Frequenze naturali della pala <i>Blue Edge</i> al variare dei modelli - Angolo di laminazione delle fibre pari a 45°	88
9.2	Frequenze naturali della pala <i>Blue Edge</i> al variare dell'angolo di laminazione - Modelli utilizzati per le beam 1D: LE9	88
10.1	Frequenze naturali [Hz] nella configurazione. PL:Poisson Locking. f : flessione flapwise, l : flessione chordwise, t : torsione.	95
10.2	Frequenze naturali [Hz] nelle diverse configurazioni a due strati. PL:Poisson Locking. f : flessione flapwise, l : flessione chordwise, t : torsione.	96
10.3	Frequenze naturali [Hz] nelle diverse configurazioni a tre strati. PL:Poisson Locking. f : flessione flapwise, l : flessione chordwise, t : torsione.	97

Elenco delle figure

1.1	Esempi di architetture durante la prima fase di sviluppo	16
1.2	Margine dei livelli delle emissioni acustiche rispetto ai requisiti ICAO per gli elicotteri certificati da EASA negli ultimi decenni (EASA rotorcraft noise database - Issue 23/2015)	18
1.3	Emissioni acustiche elicottero	18
1.4	Sketch del X4 della airbus helicopter (ora H160) in cui si nota l'utilizzo delle pale <i>Blue edge</i> [1]	19
1.5	Tipiche interazioni parallele tra pala e vortice in avanzamento e in arretramento	19
1.6	Confronto tra una pala convenzionale del tipo 7AD e una pala ERATO	21
1.7	Modello cinematico	23
2.1	Esempio di discretizzazione multidimensionale di una pala <i>Blue edge</i> [28]	27
2.2	Discretizzazione lagrangiana di una generica sezione	29
2.3	Esempio di un modello multidimensionale: connessione tra un elemento trave e un elemento solido	31
2.4	Assemblaggio di un modello multidimensionale dove gli elementi hanno per incognite solo gli spostamenti	31
3.1	Geometria trave multisezione	35
3.2	Sistema di riferimento e geometria della sezione - Trave.	36
3.3	Sezioni della trave con diversi moduli di Young	37
4.1	Geometria piastra curva	39
4.2	Sistema di riferimento e visualizzazione dei nodi su un particolare della piastra.	40
4.3	Modi di vibrare della piastra curva isotropa	41
5.1	Esempio di laminazione - Configurazione 2	44
5.2	Frequenze naturali nelle diverse configurazioni - Modelli LE9	45
5.3	Istogrammi che evidenziano le differenze di frequenze tra modi uguali	46
5.4	Istogrammi che evidenziano le differenze di frequenze tra modi uguali	47
5.5	Modi di vibrare della piastra curva in composito	48
5.6	Modi di vibrare della piastra curva in composito	48
5.7	MAC tra le diverse laminazioni nella configurazione a due strati - Modelli LE9	49
5.8	MAC tra le diverse laminazioni nella configurazione a tre strati - Modelli LE9	49
5.9	Diagrammi di Campbell alle diverse configurazioni	50
5.10	Visualizzazione dei punti in cui sono calcolate le tensioni σ_{yy} - Esempio laminazione a triplo strato	51
6.1	Geometria della pala isotropa	53
6.2	Angoli di freccia della pala isotropa	54
6.3	Frequenze naturali vs. angolo di freccia	55
7.1	Configurazioni di laminazione utilizzate nel caso di freccia a 30°	57
7.2	Modelli utilizzati nella struttura	57

7.3	Confronto tra modi di vibrare per laminazione $0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ$ - TE1 senza correzione di Poisson (in rosso) vs. LE9 (in verde). La configurazione indeformata è visualizzata in nero	59
7.4	MAC tra modelli TE1 (senza correzione di Poisson) e LE9 - Angolo di freccia pari a 30°	63
7.5	MAC tra modelli TE1 (senza correzione di Poisson) e LE9 - Angolo di freccia pari a 45°	63
7.6	MAC tra modelli TE1 (senza correzione di Poisson) e LE9 - Angolo di freccia pari a 60°	64
7.7	MAC al variare dell'angolo di laminazione e di freccia - Modelli LE9	64
8.1	Geometria e disposizioni degli strati in composito	65
8.2	Spostamenti u_x	67
8.3	Spostamenti u_y	67
8.4	Spostamenti u_z	68
8.5	Punti in cui sono calcolate le diverse tensioni	68
8.6	Variazione σ_{yy} lungo l'apertura	69
8.7	Variazione σ_{yz} lungo l'apertura	69
8.8	Variazione σ_{yy} sul web a $L/2$	70
8.9	Variazione σ_{yz} sul web a $L/2$	70
8.10	Variazione σ_{yx} sul web a $L/2$	71
8.11	Freccia al tip al variare dell'angolo di laminazione	71
8.12	Freccia al tip al variare dell'angolo di laminazione	72
8.13	Freccia al tip al variare dell'angolo di laminazione	72
8.14	Variazione di σ_{yy} sul web	73
8.15	Variazione di σ_{yy} sul web	73
8.16	Variazione di σ_{yz} sul web	74
8.17	Variazione di σ_{yz} sul web	74
8.18	Variazione di σ_{yx} sul web	75
8.19	Variazione di σ_{yx} sul web	75
8.20	Tensioni [Pa] nella sezione trasversale del profilo a $L/2$ - Modello Eulero-Bernoulli	76
8.21	Tensioni [Pa] nella sezione trasversale del profilo a $L/2$ - Modello FSDT	76
8.22	Tensioni [Pa] nella sezione trasversale del profilo a $L/2$ - Modello Taylor grado 6	77
8.23	Tensioni [Pa] nella sezione trasversale del profilo a $L/2$ - Modello Lagrange a 9 elementi	78
8.24	Frequenze naturali al variare dei modelli	79
8.25	MAC tra i vari modelli utilizzati per l'analisi	80
8.26	MAC tra le combinazioni di laminazioni possibili nella struttura	84
8.27	Modi di vibrare con laminazione a 45°	84
8.28	Storia temporale degli spostamenti al tip dovuti da un carico a gradino	85
8.29	Storia temporale degli spostamenti al tip dovuti da un carico applicato gradualmente	86
8.30	Storia temporale degli spostamenti al tip dovuti da un carico sinusoidale	86
9.1	Geometria della pala <i>Blue Edge</i>	87
9.2	Disposizioni delle beam 1D e degli elementi 3D	87
9.3	MAC tra i vari modelli utilizzati - Angolo di laminazione di 45°	89
9.4	Confronto tra modi di vibrare - Modelli TE1 (in rosso) vs. Modelli LE9 (in verde). La configurazione indeformata è visualizzata in nero.	90
9.5	MAC tra i vari angoli di laminazione - Modelli LE9	91
9.6	Spostamenti u_x al bordo d'attacco lungo l'apertura al variare dell'angolo di laminazione	92

9.7	Spostamenti u_y al bordo d'attacco lungo l'apertura al variare dell'angolo di laminazione	92
9.8	Spostamenti u_z al bordo d'attacco lungo l'apertura al variare dell'angolo di laminazione	93
10.1	σ_{xy} al variare delle laminazioni	98
10.2	σ_{xy} al variare delle laminazioni	99
10.3	σ_{xy} al variare delle laminazioni	100
10.4	σ_{yy} per la configurazione $0^\circ/90^\circ/0^\circ$	101
10.5	σ_{yy} per la configurazione $45^\circ/0^\circ/-45^\circ$	102
10.6	σ_{yy} per la configurazione $45^\circ/-45^\circ/45^\circ$	103
10.7	σ_{yy} per la configurazione $0^\circ/0^\circ$	104
10.8	σ_{yy} per la configurazione $0^\circ/0^\circ$	105
10.9	σ_{yy} per la configurazione $45^\circ/45^\circ$	106
10.10	σ_{yy} per la configurazione $90^\circ/90^\circ$	107

Parte I

Introduzione al problema

Capitolo 1

L'evoluzione dell'elicottero: dalle origini fino alle pale *Blue Edge*

Nei primi anni del ventesimo secolo furono sviluppati velivoli in grado di compiere efficacemente missioni aeree, civili e militari, con significativo grado di efficienza e sicurezza compatibilmente con i limiti tecnologici dell'epoca [25]. Per l'elicottero non si arrivò così velocemente, come accadde per velivoli ad ala fissa, ad avere una configurazione stabile; si raggiunse solo a metà degli anni Trenta del secolo scorso grazie ai primi prototipi di Igor Sikorsky. Le difficoltà riscontrate nella progettazione di un velivolo ad ala rotante erano dovute a problematiche tecniche difficilmente risolvibili all'epoca, ma un ruolo importante la ebbe anche la mancanza di un progetto di un'architettura univoca. Infatti i vari pionieri del volo elicotteristico dispersero le proprie forze in una serie di varianti architettoniche che risultarono essere non adatte ad un volo sicuro ed efficiente; Igor Sikorsky con l'ideazione della classica architettura, che tuttora viene utilizzata, fornì solo dopo molti anni una linea guida sulla progettazione di un elicottero. Come anticipato la mancanza di un'idea comune non fu la sola causa del ritardo evolutivo dell'elicottero rispetto ai velivoli ad ala fissa, ma entrano in gioco anche i seguenti aspetti tecnici [16]:

- Errata trattazione dell'aerodinamica del rotore;
- Mancanza di articolazioni di flappeggio e brandeggio alla radice della pala;
- Difficoltà di regolazione e modulazione della trazione;
- Limiti prestazionali e funzionali dell'impianto propulsivo;
- Difficoltà tecnologiche nella progettazione e realizzazione della trasmissione meccanica;
- Mancanza di un inquadramento teorico univoco a supporto del progetto;
- Difficoltà nell'estendere le velocità massime di volo.

Tutti questi aspetti furono risolti attraverso lunghi studi scientifici relativi al comportamento aero-meccanico e alla caratterizzazione dei materiali che permisero di sviluppare velivoli stabili e prestanti. Non in misura minore fu importante il progresso tecnologico nel campo propulsivo, dei materiali (l'avvento dei materiali compositi fu estremamente importante) e delle tecniche produttive, infatti la realizzazione di trasmissioni efficienti è stata sempre una delle principali difficoltà nel progetto di un elicottero.



(a) VS-300 di Igor Sikorsky



(b) D'AT3 di Corradino D'Ascanio

Figura 1.1: Esempi di architetture durante la prima fase di sviluppo

1.1 Le problematiche irrisolte dell'elicottero

Dopo un periodo inventivo, che si estende dai primi anni del novecento fino alla seconda guerra mondiale, seguì un periodo di maturazione in cui il progetto dell'elicottero ha compiuto enormi progressi in termini di performance, qualità di volo, comfort, affidabilità e sicurezza [2]. Dopo questa fase, in cui vennero eliminate tutte le problematiche più evidenti, si intuì che l'elicottero fosse una macchina con grandissimi pregi e caratteristiche uniche che lo resero fin da subito indispensabile per l'adempimento di particolari missioni che non possono essere eseguite da velivoli ad ala fissa. Queste includono al capacità:

- di volo a punto fisso (hover);
- di prendere e smaltire quota velocemente e quasi verticalmente;
- di volare lentamente in qualsiasi direzione mantenendo sempre un'alta manovrabilità;
- di operare a basse altitudini vicino ad ostacoli e atterrare quasi ovunque anche in aree molto ristrette.

Nonostante i progressi e gli evidenti pregi l'elicottero rimane afflitto da una serie di problematiche che ne limitano l'utilizzo. Questo tema riguarda la capacità operativa del velivolo, il comfort di equipaggio, passeggeri e operatori ma anche l'ambiente circostante. In generale i problemi irrisolti dell'elicottero si possono individuare in:

- alte emissioni acustiche;
- alti livelli di vibrazioni;
- limitata velocità in volo orizzontale;
- limitate capacità in termini di carico trasportabile, range e velocità massima.

Puntando l'attenzione sugli effetti nell'ambiente circostante, l'inquinamento acustico è un problema che influenza notevolmente il progetto di un elicottero. Negli anni le normative internazionali al riguardo sono sempre più stringenti. L'ICAO (International Civil Aviation Organization) dedica un grande spazio alla valutazione dell'impatto acustico degli elicotteri, nella normativa i velivoli ad ala rotante sono trattati nel Capitolo 8 dei requisiti di certificazione (nello specifico Annesso 16 *Environmental Protection - Volume 1 Aircraft noise*). Si è reso necessario l'obbligo di stringenti requisiti di progetto poiché l'elicottero si trova spesso ad operare o atterrare in prossimità in zone abitate (chiaro esempio è quello delle eliambulanzze), creando un alto livello di disturbo nella popolazione. Questo induce la popolazione a tollerare la presenza di elicotteri solo nel caso in cui essi abbiano una grande ricaduta per il bene pubblico, ma il loro utilizzo è sempre ostacolato nel caso di operazioni non indispensabili o che non hanno un diretto impatto sulla società, come ad esempio nel caso di operazioni militari o nel caso in cui un elicottero è utilizzato come mezzo di trasporto executive. Ovviamente la riduzione di emissione sonora ha una ricaduta anche in campo militare in cui la bassa tracciabilità è uno dei requisiti di progetto più richiesti.

I livelli di emissione acustica sono valutati in termini di *Effective Perceived Noise in Decibels* (EPNdB) attraverso una misura integrata nel tempo in diverse postazioni a terra nelle fasi di decollo, atterraggio e sorvolo. In fig.1.2 sono mostrati i livelli di emissione sonora, in EPNdB, di vari elicotteri certificati dal 1970 ad oggi; si nota come il livello massimo accettato è diminuito nel corso degli anni e che i nuovi velivoli riescono a mantenere un livello sempre più basso di emissioni. Ma questo non è ancora abbastanza, gli elicotteri sono percepiti tutt'ora come macchine estremamente rumorose e poco tollerate. Per mitigare questo problema si sono condotti degli studi per individuare le principali fonti di rumore e di conseguenza adottare delle soluzioni per mitigare l'emissione acustica. Un elicottero emette in un campo di frequenze abbastanza ampio (fig.1.3), le alte frequenze derivano dai motori e dalla trasmissione invece i rotori emettono in bassa frequenza. Le alte frequenze sono attenuate dall'orecchio umano, quindi con opportuni elementi di isolamento acustico il motore e la trasmissione emettono in maniera controllata e tollerabile. La parte più importante di emissioni percepite deriva quindi dai rotori (principale e di coda), esse si possono classificare nel seguente modo [16]:

- **Thickness noise:** dovuto dallo spessore e dalla particolare conformazione geometrica del profilo, si annullerebbe nel caso teorico di profilo a spessore nullo. Propaga nel piano del rotore secondo la direzione del moto.
- **Loading noise:** termine legato al flusso sul disco. A causa dei livelli di trazione non costanti sul giro e di asimmetrie del rotore in volo traslato la circuitazione sul profilo non è costante in funzione dell'angolo di azimuth. Questo produce un riverbero acustico che è dovuto a disturbi di pressione che seguono la direzione del tubo di flusso. Questo tipo di emissione propaga seguendo la scia del rotore.
- **Blade-Vortex Interaction - BVI:** deriva dal fatto che l'estremità della pala, al pari di qualunque superficie portante ad allungamento finito, si produce un vortice di estremità che propaga a valle nella direzione del flusso. Il vortice appena creatosi viene investito dalla pala successiva, questa interazione produce un'emissione sonora verso il basso diretta in avanti o indietro a seconda se si consideri una pala avanzante o retrocedente sul giro.

- **High Speed Impulsive Noise - HSI:** deriva dalla formazione di onde d'urto legate al regime transonico che si manifesta sulla pala avanzante nel volo ad alta velocità. Questo tipo di emissione propaga nel piano del rotore secondo la direzione del moto.
- **Broadband noise:** emissione non direttiva legata alla turbolenza del flusso.

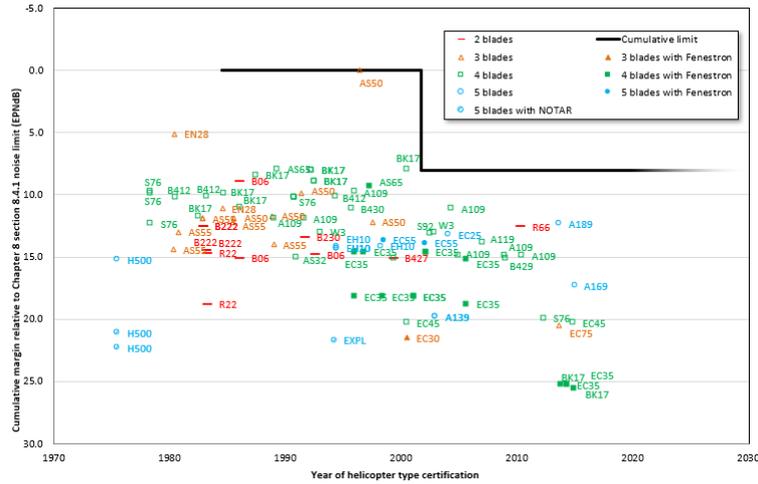


Figura 1.2: Margine dei livelli delle emissioni acustiche rispetto ai requisiti ICAO per gli elicotteri certificati da EASA negli ultimi decenni (EASA rotorcraft noise database - Issue 23/2015)

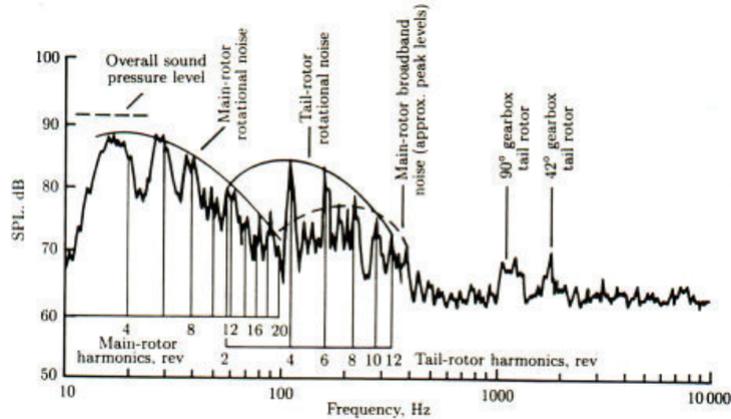


Figura 1.3: Emissioni acustiche elicottero

Dalla descrizione dei vari tipi di emissione, si nota che le fonti che influenzano maggiormente il rumore percepito dalla popolazione sono: il Loading Noise e i BVI. I primi non si possono attenuare in maniera significativa perché derivano dal funzionamento intrinseco dell'elicottero, il rumore proveniente dai BVI invece può essere mitigato con successo usando particolari geometrie della pala la cui caratteristica principale è quella di presentare un doppio angolo di freccia: essi sono le cosiddette pale *Blue edge*, denominazione utilizzata da Eurocopter, divisione della Airbus Helicopter.



Figura 1.4: Sketch del X4 della airbus helicopter (ora H160) in cui si nota l'utilizzo delle pale *Blue edge* [1]

Un tipico rumore BVI si presenta quando un vortice d'estremità nel secondo quadrante viene colpito dalla pala successiva nel primo quadrante (vedere fig.1.5). Questo tipo di BVI avanzante è abbastanza penalizzante a causa dell'elevato numero di Mach della pala avanzante. Le interazioni possono verificarsi anche su pale in arretramento, dove i vortici d'estremità nel terzo quadrante sono influenzati da una pala nel quarto quadrante. I principali parametri che regolano il rumore BVI sono:

- la forza e la dimensione dei vortici generati dalla pala, che sono principalmente determinati dalla distribuzione del carico e dalla velocità all'estremità della pala;
- la pala/vortice 'miss-distance' che è la distanza nel piano verticale tra la pala e il vortice e che è principalmente governata dalla velocità indotta al rotore;
- la geometria dell'interazione nel piano del disco del rotore, o il modo in cui i vortici sono posizionati rispetto alla pala al momento dell'interazione, e che è una funzione velocità del rotore e rapporto di avanzamento.

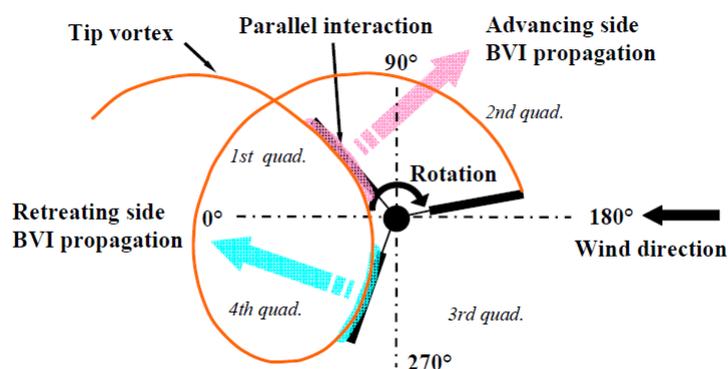


Figura 1.5: Tipiche interazioni parallele tra pala e vortice in avanzamento e in arretramento

Le soluzioni progettuali volte a ridurre il rumore BVI mirano quindi a modificare questi tre parametri, mediante tecnologie passive (planimetria della lama, forma della punta, torsione, distribuzione del profilo alare, ecc.), attraverso tecnologie attive (controllo armonico superiore, controllo

individuale della lama) o attraverso una modifica dell'assetto dell'aeromobile (procedure di abbattimento del rumore), gli ultimi due metodi non saranno trattati in questo documento. Il concetto *Blue Edge* mira a ridurre la forza del rumore BVI nelle condizioni e direzioni più penalizzanti, evitando una forte interazione parallela simultaneamente sull'intera apertura della pala. Interazioni parallele si verificano ancora su alcune parti della lama, ma il grande angolo di freccia in avanti/indietro impedisce che le pressioni acustiche si accumulino sull'intera apertura della pala. Inoltre, lo sweep all'indietro sulla parte esterna della lama provoca un'interazione parallela che mostra una direttività di propagazione principale verso il lato dell'elicottero (quasi perpendicolare alla direzione di volo). Questa direttività è vantaggiosa poiché la componente del numero di Mach nella direzione dell'osservatore, in questo caso, è inferiore rispetto a un'interazione che si propaga verso l'asse orizzontale del velivolo, e quindi il fattore di amplificazione Doppler è ridotto. Infine, il taper della pala graduale ma pronunciato provoca una distribuzione più uniforme del carico della pala che riduce la resistenza del vortice al tip.

In [14] è presentata un'analisi dettagliata delle misure effettuate su un velivolo equipaggiato da pale *Blue edge*. L'analisi dimostra, attraverso misure su un prototipo in full scale, che questo nuovo tipo di geometria riduce efficacemente il rumore BVI in tutto l'involucro di volo dell'elicottero. Comparandole con classiche pale le *Blue edge* altera significativamente la direttività del rumore BVI grazie al doppio angolo di freccia, facendo in modo che il suono propaghi anteriormente e posteriormente alla pala in base se consideriamo pale avanzanti o retrocedenti.

1.2 Blue edge blades: storia del progetto

Il concetto di un'ala rotante con doppio angolo di freccia, per mitigare gli effetti delle interazioni pala/vorticè, è stato inizialmente lanciato all'interno del progetto ERATO, *Etude d'un Rotor Aéroacoustique Technologiquement Optimisé*, una cooperazione tra ONERA¹, DLR² ed Eurocopter per sviluppare nuovi rotori per ridurre il rumore BVI. Nel 1999, un prototipo di pala in scala ha mostrato risultati molto promettenti durante i test in galleria del vento. Alla fine del 2000, Eurocopter ha firmato un accordo di ricerca con ONERA che è stato supportato dalla DGAC³ al fine di sviluppare una lama a grandezza naturale per i test di volo.

Il progetto ERATO aveva lo scopo di progettare un nuovo design aeroacustico e ottimizzato per la pala del rotore di un elicottero. Aveva l'ambizioso obiettivo di progettare, costruire e testare un rotore che sarebbe stato anche del 50 per cento meno rumoroso in specifiche condizioni di volo e di discesa rispetto a un rotore di riferimento della tecnologia attuale per un elicottero della classe da 4 a 6 tonnellate, con penalità minime in relazione a potenza prodotta e vibrazioni. È dimostrato un potenziale di riduzione del rumore del rotore ERATO fino a 7 dBA nel volo di discesa e fino a 13 dBA ad alta velocità. Inoltre, sono stati rilevati guadagni significativi delle prestazioni del rotore (da 4 a 12 %) per il volo a velocità elevata. In sintesi, il confronto dei risultati previsti e misurati mostra che la metodologia di progettazione del rotore ERATO è stata verificata globalmente con successo. Alcuni miglioramenti dell'accuratezza degli strumenti di predizione usati sarebbero stati comunque desiderabili [29].

¹*Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales* (ONERA) è il centro nazionale di ricerca aerospaziale della Francia.

²*Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt* (DLR) è il centro nazionale aeronautico e di ricerca spaziale della Repubblica federale di Germania.

³*Dirección General de Aeronáutica Civil* è l'autorità nazionale di vigilanza sul trasporto aereo civile per la Francia.

Dai risultati ottenuti dal progetto ERATO la Eurocopter, in collaborazione con ONERA, ha dato il via al progetto *Blue edge* [30]. Il programma è stato suddiviso in quattro fasi principali che possono essere riassunte come segue:

- **Fase 1:** selezione dei candidati. A partire dalle lezioni apprese con il progetto ERATO, è stata avviata una fase di progettazione al fine di migliorare significativamente le prestazioni in hover ed alcuni comportamenti dinamici. Le simulazioni numeriche in aerodinamica, acustica e dinamica sono state utilizzate principalmente in questo ciclo di ottimizzazione al fine di selezionare il candidato che offriva il miglior compromesso tra tutti questi obiettivi significativi.
- **Fase 2:** tecnologia e progettazione strutturale. Dopo la selezione di un candidato, il team è stato in grado di avviare la progettazione strutturale, l'ottimizzazione dinamica, la valutazione delle forze, la progettazione dettagliata e gli strumenti di produzione.
- **Fase 3:** convalida del progetto. La produzione è iniziata in questa fase, seguita da prove di dimostrazione a terra per convalidare il progetto e ottenere la certificazione al volo della pala.
- **Fase 4:** prove in volo su dimostratore EC155 per convalidare le caratteristiche e le prestazioni aerodinamiche, acustiche e dinamiche.

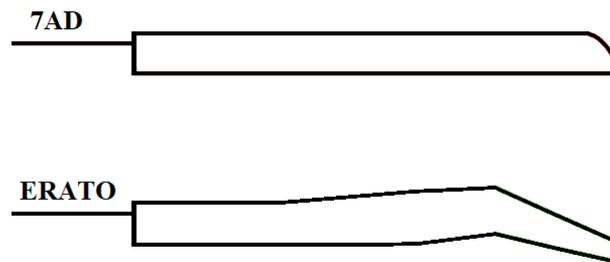


Figura 1.6: Confronto tra una pala convenzionale del tipo 7AD e una pala ERATO

1.3 Progetto strutturale della pala *Blue edge*

Una progettazione strutturale preliminare della pala è stata raggiunta ottimizzando la resistenza e il comportamento dinamico, cercando di rispettare i vincoli di fabbricazione. Questo studio si basava su uno studio di fattibilità condotto su una lama ERATO a grandezza naturale. I punti, che meritano di essere evidenziati, sono:

- Resistenza statica negli angoli di sweep negativi per la presenza di carichi elevati in quest'area;
- Irrigidimento torsionale della pala per resistenza e comportamento dinamico;
- Instabilità dinamica dell'accoppiamento torsione/aletta.

Il primo prototipo di una pala *Blue edge* sperimentata in volo è stata progettata strutturalmente con un approccio agli elementi finiti tridimensionali (3D FE), attraverso l'utilizzo del software commerciale CATIA. La pala *Blue edge* è diventata la prima ad essere progettata utilizzando un

modello CATIA 3D comune dei componenti interni della lama per il processo di produzione e una modellazione CSM/CFD per la sua analisi complessa (CSM: Computational Structural Mechanics). Partendo da un modello CATIA completo con skin, nervature, longheroni e parti solide in composito, è stata realizzata una meshing con elementi volume utilizzando il software IDEAS [30].

Sebbene l'approccio tridimensionale (3D) ad elementi finiti (FE) sia il metodo più affidabile, il suo utilizzo è spesso impraticabile, specialmente durante la fase di progettazione preliminare, quando devono essere eseguite molte analisi di stress, dinamiche e aerodinamiche. Pertanto, la necessità di uno strumento completo e computazionalmente efficace per le attività di progettazione giustifica l'idea di adottare modelli con dimensionalità minore rispetto ai modelli 3D, ovvero le formulazioni a trave (o 1D) e piastra/shell (o 2D) [28].

In generale, le teorie 1D possono essere categorizzate in base a quale procedura viene utilizzata per esprimere le relazioni tra le tensioni generalizzate e gli sforzi sulla sezione trasversale. La prima categoria include le teorie assiomatiche in cui le variabili primarie sono approssimate usando un certo numero di funzioni di coordinate trasversali per catturare quanti più meccanismi di deformazione possibili [31] [27]. Le formulazioni assiomatiche sono pertanto implicitamente basate su alcune assunzioni cinematiche che dipendono dalle caratteristiche del problema, ad esempio i modi di deformazione della sezione trasversale e le proprietà del materiale. Il secondo gruppo di formulazioni mira a rimuovere tali ipotesi attraverso rigorose analisi trasversali. Uno dei lavori pionieristici è di Giavotto [15] in cui si propone una metodologia per il calcolo della rigidità e delle tensioni delle travi con profili arbitrari, realizzate con materiali anisotropici e non omogenei. La procedura ha permesso di determinare i parametri di deformazione e gli sforzi globali delle sezioni centrali delle travi, non influenzate dagli effetti delle zone di estremità, risolvendo un problema di FE 2D definito sopra la sezione trasversale. Le matrici di rigidità completamente popolate, calcolate con queste analisi, sono state quindi integrate in formulazioni 1D per eseguire analisi globali di strutture di pale [4] [18]. Hodges e i suoi collaboratori hanno fornito altri contributi straordinari in questo contesto con lo sviluppo del codice VABS (Variational- Asymptotical Beam Sectional Analysis) [17]. Sulla base del metodo asintotico variazionale (VAM) proposto da Berdichevskii [3], il problema 3D viene diviso in due parti: l'analisi sulla cross-section (per lo più lineare) e le equazioni non lineari, geometricamente esatte, del moto lungo l'asse longitudinale della trave. La migliore serie di costanti elastiche di sezione, che sono parametri di input per la formulazione della trave, sono ottenute attraverso un'analisi asintotica sulla sezione trasversale di forma arbitraria [19]. Il metodo consente di calcolare i campi tridimensionali di spostamento, stress e deformazione con un significativo risparmio di costi computazionali [33]. La metodologia VABS è stata inclusa in molti codici 1D come il RCS (Rotorcraft Comprehensive Analysis System) con l'elemento GCB (Generalised Composite Beam) [21] [32] e i software multibody flessibili DYMORE [11] e CAMRAD [22].

Grazie alla loro accuratezza e all'efficacia computazionale, i modelli che utilizzano elementi 1D basati su VABS possono essere considerati lo stato dell'arte nella soluzione di problemi strutturali e aeroelastici per le applicazioni dell'ala rotante. L'uso di formulazioni classiche della trave, tuttavia, può ridurre l'applicabilità in alcuni casi, a causa della complessità del problema trattato. Confronti sistematici con soluzioni FE 3D [32] e 2D [23] hanno dimostrato che i risultati dell'1D sono diversi anche se in maniera moderata; questa differenza non è trascurabile quando si valutano le pale con angolo di freccia elevato in prossimità del tip con un rapporto lunghezza-corda inferiore a dieci. Inoltre, la necessità di simulare condizioni limite realistiche o strutture non uniformi mostra i limiti di queste tecniche ridotte. Per questo motivo, sono stati recentemente sviluppati modelli che uniscono sia le formulazioni solide che quelle shell a 1D FE [23] [20]. La connessione di elementi con diversa dimensionalità può generare inconsistenze nei campi di spostamento e di stress all'interfaccia. Gli elementi di travi sono di solito basati su modelli cinematici classici, ad esempio il modello trave di Timoshenko, che non può prevedere campi di spostamento complessi.

Il collegamento di questi elementi con la FE tridimensionale richiede l'imposizione di condizioni di compatibilità per garantire la continuità dei campi di spostamento. A tal fine, sono stati concepiti vincoli multipunto come elementi del corpo rigido, elementi di transizione e tecniche di accoppiamento variazionale.

Tali metodologie forniscono risultati soddisfacenti in termini di spostamenti globali e frequenze naturali, ma possono prevedere distribuzioni di stress errate a livello di interfaccia [34] [5]. In questo documento si utilizzerà una metodologia coerente per l'unione di elementi finiti 3D e 1D, che non richiede né complicate manipolazioni matematiche né ipotesi ad hoc. La procedura sfrutta la caratteristica di una particolare formulazione cinematica 1D che utilizza solo spostamenti come gradi di libertà. Questa proprietà consente di unire direttamente gli elementi 1D e 3D sommando i contributi elastici e inerziali dei nodi condivisi dai due modelli.

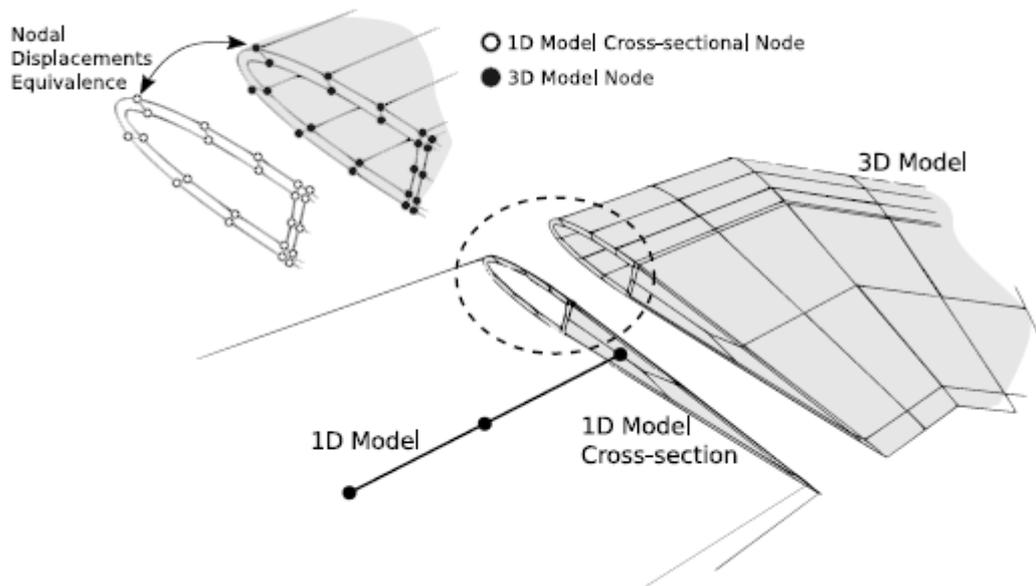


Figura 1.7: Modello cinematico

La figura 1.7 illustra l'idea della procedura utilizzata. Le potenziali capacità dei modelli unidimensionali cinematici raffinati sono quelle di prevedere deformazioni complesse della sezione trasversale e, di conseguenza, l'accoppiamento non produce alcuna concentrazione di stress. La tecnica multidimensionale proposta consente di imporre condizioni al contorno non classiche alla radice della pala senza la necessità di discretizzare la regione con elementi finiti 3D. La natura tridimensionale intrinseca della formulazione 1D consente di modellare tutte le superfici fisiche della struttura e non è necessaria alcuna procedura di post-elaborazione per recuperare i campi tridimensionali di spostamento, deformazione e sollecitazione. Sia gli elementi finiti solidi che quelli a travi sono derivati con facilità usando una formulazione unificata.

Parte II

Teoria: formulazione unificata

Capitolo 2

Carrera Unified Formulation per lo studio strutturale di una pala *Blue Edge*

2.1 Introduzione alla Carrera Unified Formulation

I modelli multi dimensionali saranno sviluppati utilizzando il formalismo dalla Carrera Unified Formulation (CUF) [10]. La CUF fornisce teorie unidimensionali (trave) e bidimensionali (piastre e gusci) che vanno oltre le teorie classiche (quelle di Eulero, Kirchhoff, Reissner, Mindlin, Love) sfruttando una notazione condensata e esprimendo i campi di spostamento in corrispondenza della sezione trasversale (nel caso della trave) e lungo lo spessore (nei casi di piastra e guscio) in termini di funzioni di base le cui forme e gli ordini sono arbitrari. La notazione unificata porta al cosiddetto nucleo fondamentale (FN) di tutte le matrici e vettori FEM coinvolti. I FN sono costituiti da poche dichiarazioni matematiche le cui forme sono indipendenti dalla teoria delle strutture (TOS) impiegate. I FN derivano dalle equazioni di elasticità 3D tramite il principio degli spostamenti virtuali (PVD) e possono essere facilmente ottenuti per i casi 3D, 2D e 1D. Le FE 1D e 2D che derivano dal CUF hanno funzionalità avanzate poiché possono ottenere risultati che di solito sono forniti solo da elementi 3D con costi computazionali molto più bassi. Gli elementi 1D sono particolarmente vantaggiosi in quanto possono trattare i problemi 2D e 3D in modo corretto.

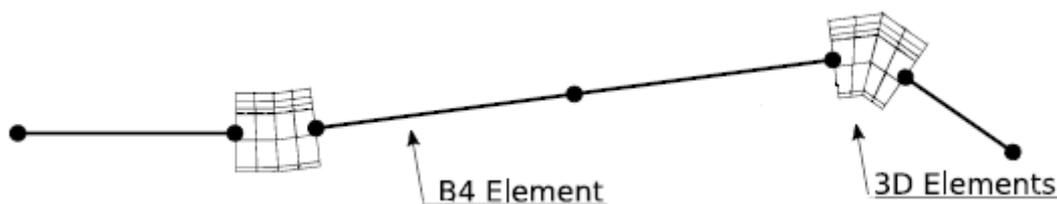


Figura 2.1: Esempio di discretizzazione multidimensionale di una pala *Blue edge* [28]

In questo lavoro verranno trattati gli elementi 1D e 3D, poiché la struttura della pala *Blue edge* può essere analizzata efficacemente utilizzando l'accoppiamento di questi elementi. A differenza di una pala convenzionale, che presenta prevalentemente una geometria lineare, la *Blue edge* presenta un doppio angolo di freccia. Questa particolare geometria modifica il comportamento

strutturale della pala in campo statico, dinamico e soprattutto aeroelastico a causa di accoppiamenti tra flessione e torsione generati dalla presenza dell'angolo di freccia. Per questo motivo, come verrà illustrato nel dettaglio nei capitoli seguenti, per rappresentare questo tipo di pala sono stati utilizzati elementi 1D nella zona lineare ed elementi 3D nelle zone in cui si ha una deviazione dalla linearità della geometria, un esempio di questo concetto è mostrato in figura 2.1. L'utilizzo di un modello multidimensionale è stato possibile grazie all'utilizzo della CUF.

La CUF è una formulazione gerarchica che considera l'ordine della teoria come un input dell'analisi. Ciò ci permette di trattare un grande varietà di problemi strutturali, senza avere la necessità di introdurre formulazioni pensate ad hoc. Gli effetti cosiddetti non-classici, come ad esempio il warping, le deformazioni planari, gli effetti di taglio, l'accoppiamento flesso-torsionale, vengono presi in considerazione semplicemente aumentando in modo opportuno l'ordine del modello adottato. Per trattare geometrie, condizioni di vincolo e carichi arbitrari, ci si avvale della formulazione agli elementi finiti. Originariamente la teoria era basata sull'utilizzo di polinomi tipo Taylor per definire il campo di spostamenti sulla sezione trasversale della trave. Analisi statiche [7] [6], hanno mostrato l'efficacia della CUF alle prese con fenomeni di warping, di deformazioni nel piano e con effetti dovuti al taglio. L'uso dei polinomi di Taylor presenta alcune limitazioni intrinseche, dovute principalmente al fatto che i termini dell'espansione del campo di spostamenti non hanno sempre un significato fisico. Per superare questi problemi sono state recentemente implementate nuove teorie della trave [8], le quali descrivono il campo di spostamenti della sezione trasversale con polinomi tipo Lagrange. La scelta di queste espansioni ci porta ad avere solo variabili di spostamento.

La scelta dei polinomi di Lagrange, oltre a portare molti benefici in termini di versatilità dei modelli strutturali, consente di trovare risultati ancora migliori dei modelli basati su espansioni polinomiali di Taylor, riuscendo a cogliere fenomeni che altrimenti sarebbero individuabili solo tramite modelli 2D o 3D. Inoltre, la possibilità di modellizzare i singoli componenti di una data struttura con un numero arbitrario di elementi tipo Lagrange, ci permetterà di focalizzare le analisi in zone prestabilite. Si pensi ad esempio ad un corpo tridimensionale soggetto ad un carico concentrato. Infiltrando la sezione trasversale con un maggior numero di elementi in corrispondenza del carico, saremo in grado di studiare fenomeni e deformazioni locali.

2.2 Derivazioni di elementi finiti solidi e trave tramite formulazione unificata

Secondo la dimensionalità dell'elemento finito considerato, il campo di spostamenti tridimensionale $\mathbf{u}(x, y, z, t) = (u_x, u_y, u_z)$ viene approssimato come:

$$\begin{aligned} 3D - FE \rightarrow \mathbf{u}(x, y, z, t) &= \mathbf{u}_{i\tau}(t) \cdot N_i(x, y, z) \cdot 1 & i = 1 \dots N_n^{3D} \\ 1D - FE \rightarrow \mathbf{u}(x, y, z, t) &= \mathbf{u}_{i\tau}(t) \cdot N_i(y) \cdot F_\tau(x, y) & \tau = 1 \dots M; \quad i = 1 \dots N_n^{3D} \end{aligned} \quad (2.1)$$

dove N_i è la funzione di forma lagrangiana 1D e 3D FE, F_τ sono le funzioni utilizzate per approssimare la soluzione sulla sezione trasversale della trave (piano x-z), e $\mathbf{u}_{i\tau}(t)$ è il vettore dei coefficienti incogniti. L'indice i si riferisce all'approssimazione degli elementi finiti e varia da 1 al numero massimo di nodi degli elementi, che è N_n^{3D} per i solidi e N_n^{1D} per gli elementi trave. Il pedice τ è correlato all'espansione utilizzata per definire la cinematica della sezione trasversale e il suo valore massimo, M , è un parametro di input dell'analisi. Sebbene possono essere utilizzate diverse funzioni F_τ , la connessione tra elementi finiti 1D e 3D è particolarmente semplice quando vengono utilizzate espansioni di tipo Lagrange (LE). In questo caso, la cinematica della trave viene ottenuta come combinazioni di polinomi di Lagrange che sono definiti all'interno di sottoregioni (o elementi) delimitati da numeri arbitrari di punti (o nodi). Il numero di punti determina l'ordine

del polinomio. Le espansioni bi-lineari (L4), bi-quadratiche (L9) e bi-cubiche (L16) sono ottenute rispettivamente con quattro, nove e sedici nodi. Per l'elemento a nove punti (L9), le funzioni di interpolazione sono:

$$\begin{aligned}
 F_\tau &= \frac{1}{4}(r^2 + rr_\tau)(s^2 + ss_\tau) & \tau = 1,3,5,7 \\
 F_\tau &= \frac{1}{2}s_\tau^2(s^2 - ss_\tau)(1 - r^2) + \frac{1}{2}r_\tau^2(r^2 - rr_\tau)(1 - s^2) & \tau = 2,4,6,8 \\
 F_\tau &= (1 - r^2)(1 - s^2) & \tau = 9
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

dove r e s variano da -1 a $+1$, e r_τ e s_τ sono le coordinate dei nove punti nel sistema di coordinate naturali. Il campo di spostamento relativo a un elemento 1L9 è:

$$\begin{aligned}
 u_x &= F_1u_{x1} + F_2u_{x2} + F_3u_{x3} + \dots + F_9u_{x9} \\
 u_y &= F_1u_{y1} + F_2u_{y2} + F_3u_{y3} + \dots + F_9u_{y9} \\
 u_z &= F_1u_{z1} + F_2u_{z2} + F_3u_{z3} + \dots + F_9u_{z9}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Le incognite (u_{x1}, \dots, u_{z9}) hanno la stessa dimensione e rappresentano gli spostamenti traslazionali dei nove punti dell'elemento. La figura 2.2 mostra una generica sezione trasversale modellata usando un elemento L9.

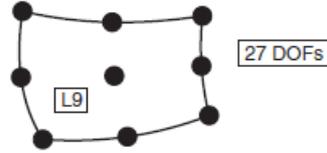


Figura 2.2: Discretizzazione lagrangiana di una generica sezione

Per il 3D-FE (vedi equazione 2.2), solo il numero di nodi elementari (N_n^{3D}) definisce il tipo di elemento finito, poiché tutte le funzioni $F_i u$ sono uguali a 1. In questo caso, elementi tri-lineari (HEXA-8) ed elementi esaedrici tri-quadratici (HEXA-27) sono derivati utilizzando rispettivamente 8 e 27 nodi.

2.3 Equazioni di governo per strutture rotanti

La formulazione è valida per piccoli spostamenti, rotazioni e vibrazioni in ampiezza, nonché per materiali perfettamente elastici. L'assunto relativo alla linearità geometrica deve essere considerato come una semplificazione del problema piuttosto che un limite della teoria. Una formulazione geometrica non lineare completamente 3D all'interno della struttura attuale è stata già presentata e convalidata in [12] per analisi dinamiche di strutture rotanti. Qui, si è ipotizzato che le strutture considerate non si deformino significativamente sotto l'azione dei carichi centrifughi. Questa ipotesi vale per molti casi pratici, anche se potrebbe essere troppo restrittivo quando vengono considerate altre condizioni di carico (forza gravitazionale a basse velocità di rotazione). Tuttavia, il contributo di irrigidimento dovuto alle forze centrifughe viene preso in considerazione calcolando la matrice di rigidezza geometrica linearizzata.

Le equazioni del moto sono derivate dal Principio del Lavoro Virtuale (PVW), che stabilisce la

condizione di equilibrio tra le variazioni virtuali δ e il lavoro eseguite da deformazioni elastiche (δL_{int}), inerzia (δL_{ine}) e forze esterne (δL_{ext})

$$\delta L_{int} = \delta L_{ine} + \delta L_{ext} \quad (2.4)$$

L'energia di deformazione può essere scritta come:

$$\delta L_{int} = \int_V \delta \epsilon^T \sigma dV \quad (2.5)$$

dove ϵ e σ sono rispettivamente i vettori di sforzo e di tensione, e V è il volume iniziale del corpo. Utilizzando l'equazione 2.2, il lavoro interno si può scrivere come:

$$\delta L_{int} = \delta \mathbf{u}_{js}^T \left(\int_V F_S N_j \mathbf{b}^T \mathbf{C} \mathbf{b} N_i F_\tau dV \right) \mathbf{u}_{i\tau} = \delta \mathbf{u}_{js}^T \mathbf{K}^{ij\tau s} \mathbf{u}_{i\tau} \quad (2.6)$$

La matrice \mathbf{C} contiene i coefficienti di materiali elastici lineari e la matrice \mathbf{b} è l'operatore differenziale lineare che mette in relazione i tre spostamenti con le componenti della deformazione. È possibile verificare che $\mathbf{K}^{ij\tau s}$ sia una matrice 3×3 sia per elementi solidi sia per elementi trave. Le espressioni dei suoi termini non dipendono né dal tipo né dal numero di funzioni utilizzate nell'espansione cinematica. Le matrici globali sono ottenute permutando i quattro indici i , j , τ ed s , indipendentemente da quale elemento finito è stato utilizzato. Maggiori dettagli sulla derivazione del nucleo fondamentale si possono trovare in [10].

Il lavoro virtuale svolto dalle forze inerziali, \mathbf{F}_I , è:

$$\delta L_{ine} = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}_I dV \quad (2.7)$$

Gli spostamenti e le derivate temporali corrispondenti, ovvero le velocità \dot{u} e le accelerazioni \ddot{u} , sono espresse rispetto a un sistema di riferimento coordinato fissato alla pala che ruota a velocità costante Ω . Di conseguenza, le forze inerziali sono:

$$\mathbf{F}_I = -\rho \begin{pmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_z \end{pmatrix} - 2\rho\Omega \begin{pmatrix} -\dot{u}_y \\ \dot{u}_x \\ 0 \end{pmatrix} + \rho\Omega^2 \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{pmatrix} + \rho\Omega^2 \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Il vettore $r = [x_e, y_e, 0]$ definisce la distanza di un punto generico rispetto all'asse di rotazione. Sostituendo Equazione 2.8 in Equazione 2.7, i nuclei fondamentali delle matrici di massa $\mathbf{M}^{ij\tau s}$, matrici di Coriolis $\mathbf{G}^{ij\tau s}$, matrici centrifughe $\mathbf{K}_\Omega^{ij\tau s}$, e il vettore delle forze centrifughe \mathbf{F}_Ω^{is} possono essere ottenuti con facilità. D'altra parte, la matrice di rigidezza geometrica \mathbf{K}_σ deriva dall'energia di deformazione geometrica definita come il prodotto tra la parte non lineare delle deformazioni, ϵ_{nl} , e il vettore di stress iniziale, σ_0 . Per calcolare le sollecitazioni indotte dalla rotazione, viene eseguita un'analisi lineare statica

$$(\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_\Omega)|_{\Omega=1} \mathbf{u} = \mathbf{F}_\Omega|_{\Omega=1} \quad (2.9)$$

Va sottolineato che lo stato di sollecitazione tridimensionale viene utilizzato per calcolare la matrice di rigidezza geometrica, \mathbf{K}_σ . Le frequenze naturali (ω) e gli autovettori ($\bar{\mathbf{u}}$) associati alle vibrazioni di ampiezza ridotta si ottengono assumendo una soluzione armonica ($\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} e^{\sqrt{-1}\omega t}$) per la seguente equazione omogenea, che viene risolta attraverso la tecnica di trasformazione state-space.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K}_0 + \Omega^2 \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_\Omega) \mathbf{u} = 0 \quad (2.10)$$

2.4 La procedura di assemblamento

La configurazione strutturale di figura 2.3 è utilizzata per spiegare la procedura di assemblaggio. Una struttura prismatica deve essere modellata con elementi trave e solidi. Si utilizza un elemento di Lagrange a 4 nodi (L4) sulla sezione trasversale e un elemento trave a due nodi lungo l'asse longitudinale. La figura 2.3 mostra che il modello trave ha quattro nodi in ciascuna sezione trasversale. Gli spostamenti incogniti sono, quindi, $u_i = (u_x u_y u_z)_{i\tau}$ con $i = 1, 2$ e $\tau = 1, 2, 3, 4$. D'altra parte, l'elemento solido ha otto nodi in cui gli spostamenti devono essere calcolati. Poiché entrambi i modelli hanno le stesse incognite, l'imposizione della compatibilità tra i nodi condivisi è semplice:

$$\mathbf{u}_{21} = \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_{22} = \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_{23} = \mathbf{u}_3 \quad \mathbf{u}_{24} = \mathbf{u}_4 \quad (2.11)$$

Le condizioni mostrate nell'equazione 2.11 possono essere utilizzate durante la procedura di assemblaggio per identificare i nodi che devono essere collegati, (vedi fig.2.4). Le matrici dei due elementi possono essere utilizzate per costruire la matrice globale dell'intera struttura semplicemente sommando i contributi dei nodi condivisi. Poiché il modello matematico assemblato ha dodici nodi strutturali (SN), i gradi di libertà sono 36 ($DoF = SN \times 3$).

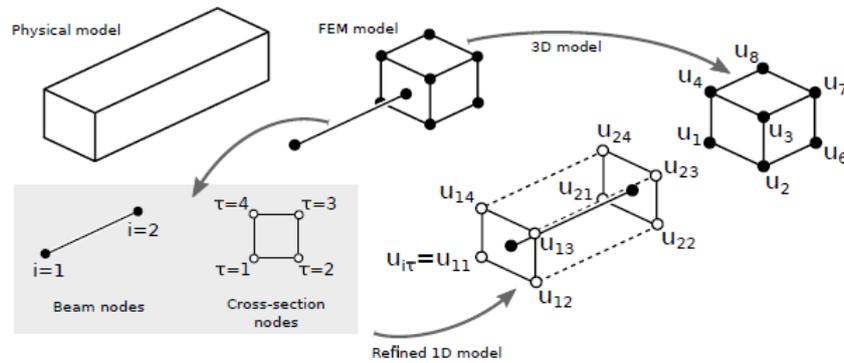


Figura 2.3: Esempio di un modello multidimensionale: connessione tra un elemento trave e un elemento solido

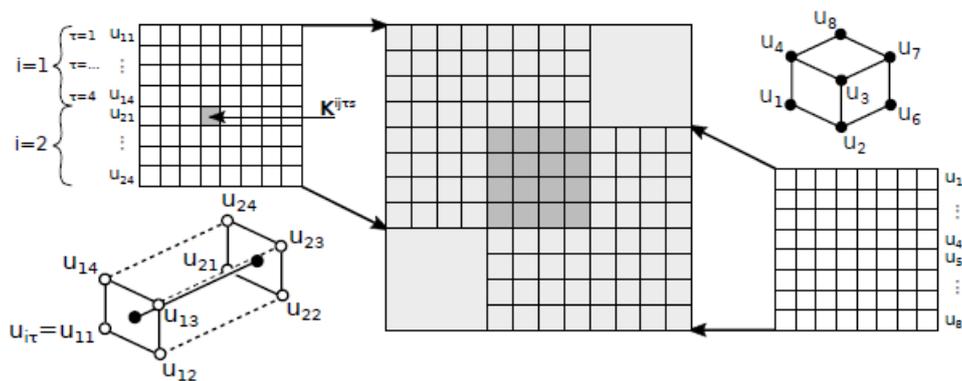


Figura 2.4: Assemblaggio di un modello multidimensionale dove gli elementi hanno per incognite solo gli spostamenti

Parte III

Analisi statiche e dinamiche

Capitolo 3

Trave multisezione

In questo capitolo si effettueranno analisi per ottenere le frequenze naturali di strutture con geometrie semplici e le si confronteranno con dei risultati di riferimento ottenuti dai lavori di Filippi [13] e Kang [23]. Oltre ai risultati ottenuti verranno schematizzati i processi di costruzione del modello FEM e della mesh della sezione, passaggi necessari per eseguire l'analisi utilizzando il programma Mul2. Mul2 permette di eseguire analisi strutturali attraverso l'utilizzo della CUF (Carrera Unified Formulation) [10]. I risultati mostrati sono stati acquisiti utilizzando diversi modelli di espansione per approssimare le varie sezioni della struttura, in particolare si sono utilizzate espansioni in serie di Taylor e modelli in serie di Lagrange. La prima analisi riguarda una trave con le seguenti caratteristiche geometriche e meccaniche:

- $L_h + L = 1,016 \times 10^{-3}$ mm
- $t = 1,6002$ mm
- $b = 25,4$ mm
- $S_1 = 0,76216$ m
- $S_2 = 0,9398$ m
- Modulo di Young $E = 68,9475$ GPa
- Coefficiente di Poisson $\nu = 0.3$

La densità è pari a $\rho_0 = 2712,36 \text{ Kg m}^{-3}$, tranne nella porzione tra S_1 e S_2 in cui è assunta essere pari a $\rho_1 = 0.5\rho_0$ e $\rho_2 = 1.5\rho_0$

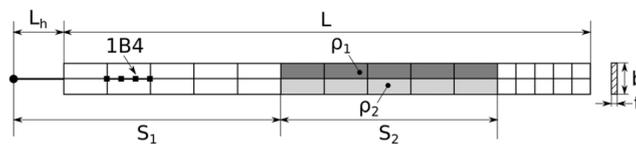


Figura 3.1: Geometria trave multisezione

La struttura è stata modellizzata utilizzando quindici beam element a quattro nodi (B4) lungo l'asse longitudinale. Per la sezione sono stati utilizzati due tipi diversi di elementi bidimensionali:

- **Q4** piastra quadrilatera a quattro nodi;

- **Q9** piastra quadrilatera a nove nodi.

Si procede analizzando la struttura con due valori di L differenti.

Costruzione del modello FEM In questa fase è necessario creare il modello FEM della geometria data. Adottando un sistema di riferimento cartesiano si è posto l'asse y coincidente con l'asse longitudinale della trave e l'asse x in modo tale da suddividere la sezione simmetricamente attorno all'asse, l'asse z di conseguenza perpendicolare ai primi rivolto verso l'alto. È necessario definire le coordinate dei vari nodi e la connettività tra gli elementi del modello. Utilizzando quindici beam element B4 si sono definiti le coordinate di 46 nodi equispaziati all'interno delle varie sezioni a diversa densità; data la geometria del corpo ad ogni nodo è stato attribuito un valore nullo delle coordinate x e z facendo variare solo la coordinata longitudinale.

Mesh della sezione Per costruire la mesh della sezione è necessario definire le coordinate dei nodi che la definiscono in un sistema di riferimento locale. Inoltre bisogna definire la connettività tra gli elementi in modo tale da descrivere correttamente la sezione analizzata. Il sistema di riferimento adottato è mostrato in figura 3.2 insieme alla geometria della sezione.

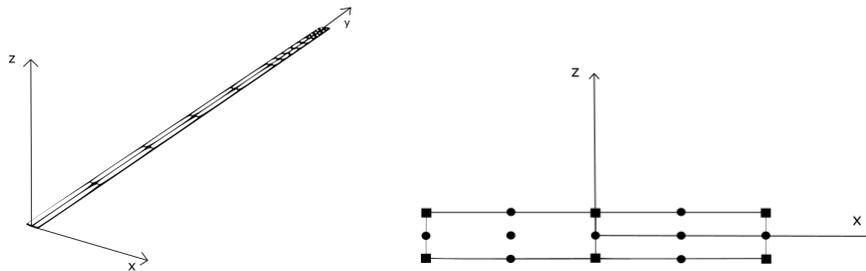


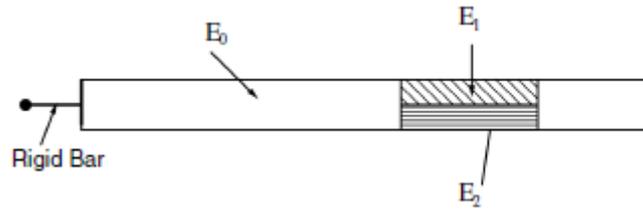
Figura 3.2: Sistema di riferimento e geometria della sezione.
 ■ Nodi di Q4 e Q9 • Nodi di Q9

Risultati ottenuti Le frequenze naturali del sistema sono mostrate nella tabella 3.1. Si nota una discrepanza di risultati tra modelli L4 e L9, con i secondi molto più accurati dei primi. Infatti i valori ottenuti con modelli L9 sono confrontabili con quelli ricavati da Filippi[13] e con i risultati ottenuti da espansioni in serie di Taylor, la migliore accuratezza è giustificata anche da un più alto numero di gradi di libertà. Analizzando il valore delle frequenze naturali si nota come nei modelli di Taylor del primo ordine TE1 si sovrastimi la prima frequenza torsionale, mentre approssimazioni di Taylor di grado superiore e modelli di lagrange LE riescono a percepire più correttamente la torsione della struttura fornendo risultati migliori, ovviamente con un maggior costo computazionale. È importante notare come il costo computazionale di analisi con modelli LE sia significativamente minore rispetto ad espansioni TE4-TE5, nonostante i risultati siano praticamente coincidenti; da questo aspetto appare evidente una dei punti di forza di un'analisi con modelli LE, cioè la possibilità di ottenere risultati confrontabili con modelli ad espansioni di Taylor di alto grado ma con minore costo computazionale.

Per una ulteriore validazione dei risultati è stata eseguita un'analisi della medesima trave ma con differenti moduli di Young nelle zone della struttura in cui precedentemente variava la densità. Il caso in esame è mostrato nel dettaglio in figura 3.3. Nello specifico i valori del modulo di Young utilizzati sono: $E_0 = 68,9475$ GPa, $E_1 = 2 \times E$ e $E_2 = 6,895$ GPa. I valore della densità invece è ρ_0 per tutta la struttura.

Tabella 3.1: Frequenze naturali [Hz] trave multisezione variando la densità delle sezioni. "F":flapwise;"L":chordwise; "T":torsional.

Theory	F1	F2	F3	F4	F5	L1	L2	T1	DoF
$L = 0,9525\text{ m } L_h = 0,0635\text{ m}$									
TE1	1.437	9.002	25.207	49.399	81.696	22.791	142.405	840.826	414
TE2	1.450	9.089	25.474	49.948	82.254	22.915	143.184	106.755	828
TE3	1.445	9.058	25.365	49.656	81.631	22.913	143.119	106.645	1380
TE4	1.445	9.057	25.364	49.653	81.613	22.913	143.119	106.186	2070
TE5	1.445	9.057	25.363	49.652	81.611	22.913	143.118	106.183	2898
Q4 - 2L4	1.659	10.396	29.107	56.932	92.730	23.231	145.150	108.147	828
Q9 - 2L9	1.445	9.058	25.364	49.655	81.621	22.913	143.123	106.342	2070
TE1 [13]	1.437	9.003	25.230	49.540	82.300	22.790	142.400	844.000	414
TE2 [13]	1.451	9.095	25.510	50.110	82.900	22.920	143.200	108.000	828
TE3 [13]	1.449	9.077	25.430	49.870	82.330	22.920	143.200	107.900	1380
TE4 [13]	1.448	9.075	25.430	49.860	82.300	22.920	143.200	107.400	2070
TE5 [13]	1.448	9.075	25.430	49.860	82.300	22.920	143.200	107.400	2898
Q9 - 2L9 [13]	1.449	9.077	25.430	49.870	82.320	22.920	143.200	107.600	2070
$L = 0,4318\text{ m } L_h = 0,5842\text{ m}$									
TE1	6.990	43.802	122.631	240.281	397.136	110.685	683.923	1906.508	414
TE2	7.088	44.394	124.267	245.531	407.383	111.046	686.104	242.879	828
TE3	7.035	44.057	122.976	241.197	400.107	111.004	684.729	243.481	1380
TE4	7.032	44.040	122.923	240.824	399.926	111.003	684.713	242.621	2070
TE5	7.032	44.037	122.913	240.800	399.883	111.001	684.689	242.595	2898
Q4 - 2L4	8.072	50.542	140.792	243.740	457.893	112.595	695.475	276.796	828
Q9 - 2L9	7.035	44.053	122.961	241.004	400.073	111.007	684.822	242.909	2070
TE1 [13]	6.990	43.800	122.600	240.400	397.500	110.700	683.900	1907.000	414
TE2 [13]	7.090	44.400	124.300	245.700	407.800	111.000	686.100	243.300	828
TE3 [13]	7.044	44.100	123.100	241.500	400.800	111.000	684.800	243.900	1380
TE4 [13]	7.039	44.080	123.000	241.100	400.500	111.000	684.700	243.000	2070
TE5 [13]	7.039	44.070	123.000	241.100	400.500	111.000	684.700	242.900	2898
Q9 - 2L9 [13]	7.043	44.100	123.100	241.300	400.700	111.000	684.800	243.300	2070

**Figura 3.3:** Sezioni della trave con diversi moduli di Young

In questo caso si è sorvolata l'analisi con elementi Q4 nella sezione poiché già precedentemente si sono evidenziate le differenze tra i due approcci. Le frequenze naturali ottenute (tabella 3.2) sono confrontabili con quelle mostrate da lavoro di Kang [23] in cui si utilizzano elementi beam non lineari. Le differenze tra i valori sono molto basse ed associabili al modo in cui è stata costruita la mesh nel modello beam non lineare.

Tabella 3.2: Frequenze naturali [Hz] trave multisezione variando il modulo di Young delle sezioni. "F":flapwise;"L":chordwise; "T":torsional.

$L = 0,9525 \text{ m } L_h = 0,0635 \text{ m}$											
Theory	F1	F2	F3	F4	F5	F6	L1	L2	T1	DoF	
TE1	1.44	9.01	25.33	49.76	82.24	122.87	22.75	136.69	802.82	414	
TE2	1.45	9.09	25.53	50.26	83.31	124.59	22.87	137.21	103.79	828	
TE3	1.45	9.06	25.42	49.97	82.68	123.38	22.86	137.12	103.74	1380	
TE4	1.45	9.06	25.41	49.96	82.67	123.36	22.86	137.01	103.24	2070	
TE5	1.45	9.06	25.41	49.95	82.66	123.34	22.86	136.98	103.23	2898	
Q9 - 2L9	1.45	9.06	25.41	49.95	82.66	123.34	22.86	136.95	103.40	2070	
NL beam element[23]	1.51	9.07	24.95	49.15	78.26	124.37	22.68	142.91	100.57	-	
$L = 0,4318 \text{ m } L_h = 0,5842 \text{ m}$											
Theory	F1	F2	F3	F4	F5	F6	L1	L2	T1	DoF	
TE1	7.01	44.43	124.07	243.29	400.79	598.63	102.94	512.71	1,517.89	414	
TE2	7.09	44.83	125.14	245.33	403.55	606.75	102.95	513.67	232.00	828	
TE3	7.04	44.48	123.94	241.90	396.03	593.05	102.86	512.86	230.86	1380	
TE4	7.03	44.44	123.83	241.63	395.52	592.55	102.71	512.27	229.72	2070	
TE5	7.03	44.43	123.80	241.52	395.27	592.32	102.66	512.14	229.50	2898	
Q9 - 2L9	7.04	44.44	123.82	241.54	395.25	592.24	102.59	512.14	229.92	2070	
NL beam element[23]	7.10	43.79	119.53	237.87	389.35	-	110.65	-	221.89	-	

Capitolo 4

Piastra curva (shell)

In questa sezione verrà analizzata una piastra curva le cui caratteristiche geometriche e meccaniche sono di seguito elencate

- $L = b = 30,5$ cm
- $t = L/100$
- Modulo di Young $E = 200$ Gpa
- Coefficiente di Poisson $\nu = 0.3$
- $\rho = 7860$ kgm⁻³

Quindi la struttura risulta essere costituita da un unico materiale con caratteristiche isotrope, nello specifico il materiale presenta le connotazioni tipiche dell'alluminio. La piastra è stata modellizzata con otto beam element a quattro nodi (B4) lungo l'asse longitudinale. Nella sezione sono stati utilizzati 32 elementi bidimensionali di tipo Q9, quindi per un totale di 165 nodi sulla sezione. La mesh è stata costruita in modo tale da suddividere la piastra in due strati, così facendo sarà possibile confrontare i risultati ottenuti con il caso composito (trattato nella sezione successiva) con un caso isotropo con gli stessi gradi di libertà per modello. L'analisi è stata effettuata per due valori diversi di raggio di curvatura R_x .

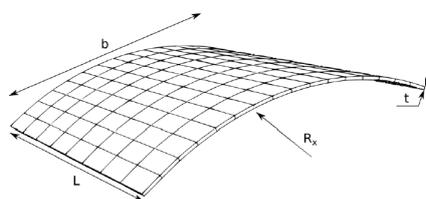


Figura 4.1: Geometria piastra curva

Costruzione modello FEM Per la costruzione del modello FEM è stato utilizzato un sistema globale di riferimento identico a quello per la trave multisezione. Quindi l'asse longitudinale, in cui sono stati disposti otto beam element B4, si estende lungo L ; l'asse z verso l'alto e di conseguenza l'asse x perpendicolare ai primi due. In questo caso i 25 nodi sono tutti equispaziati lungo L .

Mesh della sezione Per trovare le coordinate dei vari punti della sezione è stato utilizzato il programma di progettazione CAD3D *SolidWorks*. Per una configurazione con modelli Q9 si sono identificati 165 punti. In figura 4.2 è mostrato il sistema di riferimento globale la geometria della sezione e la posizione dei vari nodi rispetto al sistema di riferimento locale.

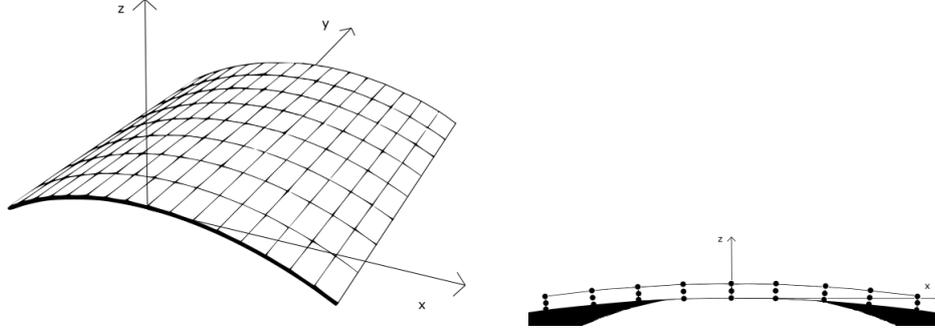


Figura 4.2: Sistema di riferimento e geometria della sezione.
 • Nodi di Q9

Tabella 4.1: Frequenze naturali [Hz] piastra curva in materiale isotropo. PL:Poisson Locking.
 f : flessione flapwise, l : flessione chordwise, t : torsione.

Theory							DoF
$R_x = 2b$							
EULE	176.77 1_f	1,102.22 2_f	2,264.59 1_l	3,061.56 3_f	4,134.70	5,931.11 4_f	225
FSDT	176.38 1_f	1,085.85 2_f	1,782.37 1_l	2,959.05 3_f	4,134.70	4,785.38 4_f	225
TE1	176.38 1_f	1,085.87 2_f	1,782.49 1_l	2,564.23 1_t	2,959.34 3_f	3,417.31	225
TE1 - No PL	204.49 1_f	1,253.49 2_f	1,928.68 1_l	2,564.23 1_t	3,395.13 3_f	4,187.46	225
TE2	166.02 1_f	431.76 1_t	640.77 2_f	1,116.03 3_f	1,457.35 2_t	1,503.67 $2_f/1_t$	450
TE3	87.50 1_t	151.59 1_f	360.40 $2_f/1_t$	507.72 2_t	610.08 $2_f/2_t$	798.29 $3_f/1_t$	750
TE4	86.17 1_t	143.74 $1_f/2_t$	266.17 2_t	342.65 $2_f/1_t$	403.59 $2_f/2_t$	732.00 3_f	1125
TE5	84.84 1_t	137.83 $1_f/2_t$	243.92 2_t	340.25 $2_f/1_t$	384.88 $2_f/2_t$	575.75 3_t	1575
TE6	84.72 1_t	137.31 $1_f/2_t$	242.73 2_t	338.82 $2_f/1_t$	380.34 $2_f/2_t$	525.66 3_t	2100
LE9	84.67 1_t	137.16 $1_f/2_t$	242.48 2_t	338.06 $2_f/1_t$	379.07 $2_f/2_t$	514.94 3_t	12375
Sperimentazione [26]	85.6 1_t	134.5 $1_f/2_t$	259.0 2_t	351.0 $2_f/1_t$	395.0 $2_f/2_t$	531.0 3_t	-
Shell Anlt. [26]	85.9 1_t	137.8 $1_f/2_t$	248.6 2_t	342.9 $2_f/1_t$	387.4 $2_f/2_t$	531.9 3_t	-
Shell FEM [24]	85.7 1_t	138.4 $1_f/2_t$	249.9 2_t	346.4 $2_f/1_t$	389.5 $2_f/2_t$	541.0 3_t	3456
3D [13]	84.8 1_t	137.3 $1_f/2_t$	240.9 2_t	338.4 $2_l/1_t$	377.8 $2_f/2_t$	507.1 3_t	6534
$R_x = b$							
EULE	368.55 1_f	2,260.33 2_f	2,283.76 1_l	4,134.70 3_f	6,124.09	8,881.04 4_f	225
FSDT	365.09 1_f	1,792.30 2_f	2,129.36 1_l	4,134.70 3_f	4,781.16	5,428.84 4_f	225
TE1	365.09 1_f	1,792.53 2_f	2,129.66 1_l	2,564.23 1_t	3,425.36 3_f	4,783.43	225
TE1 - No PL	422.22 1_f	1,938.08 2_f	2,423.96 1_l	2,564.23 1_t	4,194.15 3_f	5,138.30	225
TE2	342.24 1_f	858.73 1_t	1,259.81 2_f	1,817.31 3_f	2,068.20 2_t	2,554.74 $2_f/1_t$	450
TE3	127.42 1_t	266.33 1_f	461.18 $2_f/1_t$	556.82 2_t	833.86 $2_f/2_t$	1,159.28 $3_f/1_t$	750
TE4	125.50 1_t	199.01 $1_f/2_t$	387.32 2_t	467.35 $2_f/1_t$	514.52 $2_f/2_t$	769.73 3_f	1125
TE5	123.66 1_t	173.62 $1_f/2_t$	381.07 2_t	447.83 $2_f/1_t$	470.79 $2_f/2_t$	544.70 3_t	1575
TE6	123.36 1_t	171.67 $1_f/2_t$	380.91 2_t	446.36 $2_f/1_t$	451.47 $2_f/2_t$	510.13 3_t	2100
LE9	125.13 1_t	176.60 $1_f/2_t$	382.61 2_t	450.39 $2_f/1_t$	471.14 $2_f/2_t$	525.45 3_t	12375
3D [13]	124.3 1_t	170.6 $1_f/2_t$	381.3 2_t	444.5 $2_f/1_t$	445.7 $2_f/2_t$	501.3 3_t	6534

Risultati ottenuti Le frequenze naturali sono mostrate nella tabella 4.1, analizzando questi dati si può concludere che modelli ridotti come Eulero-Bernoulli (EULE), Timoshenko (FSDT) e Taylor N=1,2 sono troppo semplificati per descrivere correttamente la dinamica della struttura. Le frequenze risultano essere molto più elevate rispetto ai modelli più accurati (Taylor N=3,4,5,6 e Lagrange con sezioni di tipo Q9), questo perché la geometria della struttura porta a degli accoppiamenti che non possono essere descritti al meglio se la torsione non è considerata nel modello. La profonda differenza tra i modelli la si nota anche graficamente (fig. 4.3) analizzando i primi sei modi di vibrare, sia EULE che FSDT mostrano solo modi flessionali che descrivono molto lontanamente la vera dinamica della piastra (essa è mostrata nell’ultima colonna). Per TE1 si nota che la quarta frequenza coglie la torsione della piastra, invece per LE9 è la prima con una differenza il valori di frequenza in Hz di due ordini di grandezza. Per TE2 la torsione viene catturata alla seconda frequenza con una differenza rispetto al caso accurato di circa 400 Hz. In tabella 4.1 le varie frequenze sono confrontate con i risultati ottenuti tramite modelli 3D sviluppati in Nastran [13], modelli shell e risultati sperimentali [26][24]. Si nota come tutti i modelli strutturali differenti convergono a risultati molto simili fra loro validando le analisi svolte sulla struttura anche utilizzando modelli ridotti.

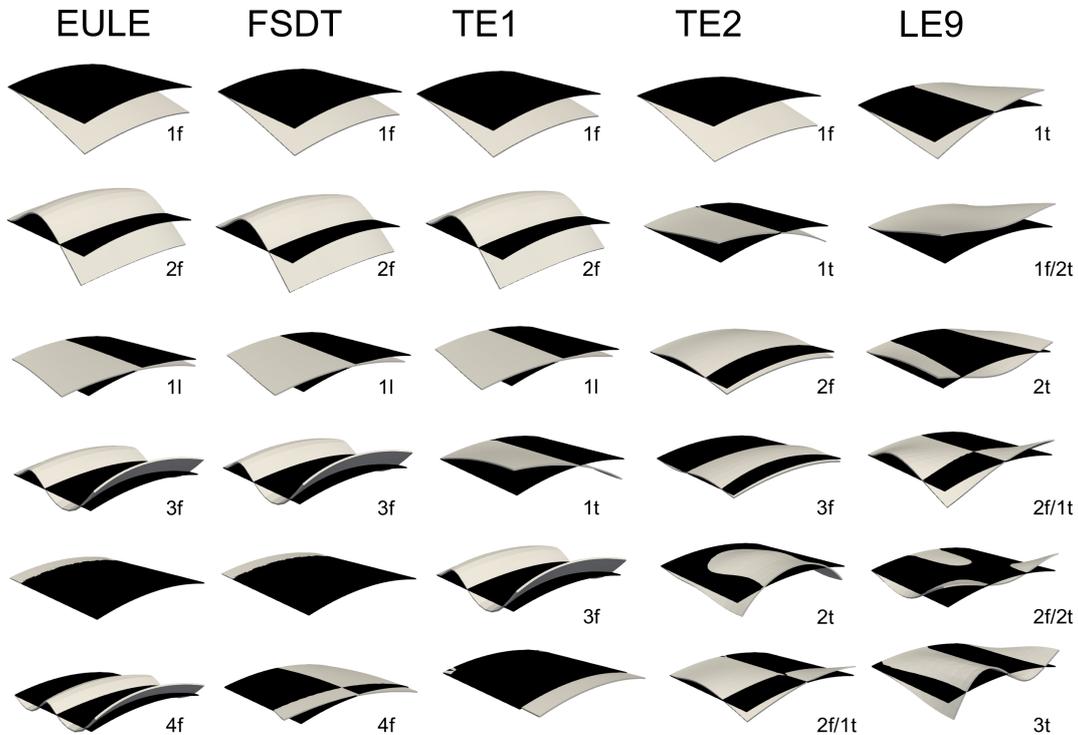


Figura 4.3: Modi di vibrare per le prime sei frequenze naturali al variare del modello utilizzato - Configurazione isotropa $R_x = 2b$. In nero è rappresentata la configurazione indeformata, mentre in grigio sono raffigurati i modi di vibrare della struttura

Capitolo 5

Piastra curva (shell) in composito

Di grande interesse è lo studio della piastra curva nel caso in cui sia formata da diversi strati in composito (le cui proprietà sono mostrate in tab. 5.1), e confrontare i risultati ottenuti con la configurazione precedente interamente isotropa. Per i due o tre strati in composito si è scelta un'angolazione variabile ed indipendente delle fibre in modo tale da studiare casi diversi (un esempio è mostrato in fig. 5.1), in particolare si è posta l'attenzione sui seguenti casi:

Configurazione	Angolo di laminazione		
	Strato 1	Strato 2	Strato 3
1	0°	0°	-
2	0°	90°	-
3	90°	90°	-
4	45°	-45°	-
5	0°	90°	0°
6	45°	-45°	45°
7	45°	0°	-45°

La laminazione a 0° ha le fibre allineate con l'asse y del sistema di riferimento globale della struttura (che in questo caso corrisponde anche con quello locale), all'aumentare del valore dell'angolo si ha una rotazione antioraria delle fibre. Le diverse configurazioni considerano casi simmetrici e non simmetrici, anche se i secondi non trovano applicazione nelle strutture reali perché presentano dei comportamenti particolari che li rendono instabili. Alcune configurazioni presentano un triplo strato, soluzione necessaria per avere il caso simmetrico di alcune combinazioni di laminazione; in questi casi si sono utilizzati sempre elementi Q9 nella sezione portando i nodi ad un valore pari a 231 con un conseguente aumento dei gradi di libertà per modelli LE9.

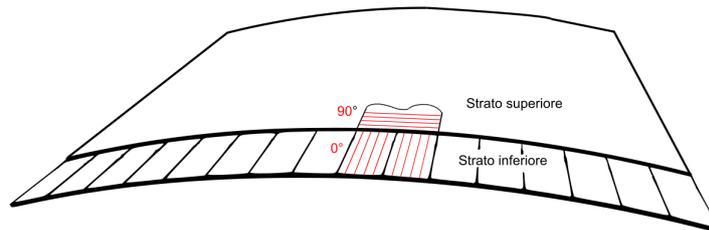
5.1 Dinamica della piastra curva (shell) in composito

5.1.1 Frequenze naturali e modi di vibrare

Per far in modo da analizzare correttamente la struttura nel non lineare si è considerata solo il caso in cui il raggio di curvatura è pari a $2b$. Nelle tabelle 10.2, 10.1 e 10.3 sono mostrate le frequenze [in Hz] nelle varie configurazioni; si nota che anche nel caso del composito modelli ridotti (EULE, FSDT e TE N=1,2) non sono in grado di cogliere al meglio la dinamica della struttura, analogamente al caso isotropo si ha un netto miglioramento dei risultati per modelli di Taylor con

Tabella 5.1: Proprietà del composito

Grafite/matrice epossidica		
E_L	Gpa	181
E_z	GPa	10.3
G_{Lz}	GPa	7.17
ν_{Lz}	-	0.28
ν_{xz}	-	0.33
ρ	Kg/m^3	1600

**Figura 5.1:** Esempio di laminazione - Configurazione 2

$N \geq 3$ e per modelli LE9. Negli istogrammi in fig. 5.3 e 5.4 sono mostrate le differenze in termini di frequenze naturali tra i vari modelli, considerando uno stesso modo di vibrare tra i primi sei modi propri della struttura (i modi con frequenze fuori scala non sono del tutto visualizzati nei grafici, è possibile leggere le frequenze esatte nelle tabelle 10.2, 10.1 e 10.3). Si nota, come già anticipato, che nel caso di modelli ridotti gli errori sono molto alti soprattutto quando è richiesto il calcolo della prima frequenza torsionale. Meno significativi, ma comunque non trascurabili sono gli errori sulle prime due frequenze flessionali, nei casi in cui sono è possibile confrontarli con modelli LE9. Inoltre risulta evidente che, in tutti i casi di laminazione, si raggiunge una certa similitudine tra le varie frequenze ai diversi modi solo per Modelli TE = 5,6 e LE9. Per TE = 4 si raggiunge lo stesso grado di similitudine tra i modi, ma con valori maggiormente differenti di frequenze, ma in alcuni casi si nota la mancanza di certi modi rispetto ai modelli LE9. Per TE3 si riscontra un grado di accuratezza soddisfacente solo per la prima frequenza computata, che risulta sempre essere la prima torsionale, ma confrontando i modi a frequenze maggiori si evidenzia una discrepanza maggiore tra i valori delle frequenze. Infine, dagli istogrammi, risulta ancora più evidente la scarsa accuratezza di modelli TE1 e TE2, anche per modi a frequenze basse, inoltre i modi computati simili a quelli di modelli più rifiniti sono inferiori in numero, dato che evidenzia la scarsa capacità di questi modelli di descrivere al meglio il comportamento della struttura. Per quanto riguarda le differenze rispetto all'angolo di laminazione delle fibre si nota, all'aumentare del valore dell'angolo, una diminuzione delle frequenze (graficamente in fig 5.2). I valori minimi si raggiungono nella laminazione $90^\circ/90^\circ$, quindi questa disposizione delle fibre porta ad far accettare la struttura modi di vibrare energeticamente più bassi; mentre i valori maggiori si riscontrano nel caso $0^\circ/0^\circ$, accettando modi a energia maggiore. Conseguentemente le altre combinazioni presentano valori medi di frequenze naturali che si assestano all'interno dell'intervallo delimitato dalle laminazioni sopra citate. Per analizzare al meglio la differenza dei modi di vibrare ed avere una visione globale si è deciso di utilizzare il *Modal Assurance Criterion* (MAC). La Modal Assurance Criterion Analysis (MAC) viene utilizzata per determinare la somiglianza tra due modi di vibrare:

- Se i modi di vibrare sono identici (ovvero, tutti i punti si muovono allo stesso modo) il MAC

avrà un valore unitario;

- Se i modi di vibrare sono diversi, il valore MAC sarà vicino a zero.

Esso è definito come:

$$MAC_{ij} = \frac{|\{\Phi_{A_i}\}^T \{\Phi_{B_j}\}|^2}{\{\Phi_{A_i}\}^T \{\Phi_{A_i}\} \{\Phi_{B_j}\}^T \{\Phi_{B_j}\}} \quad (5.1)$$

Idealmente, ogni modo dovrebbe essere osservato in modo univoco e avere una forma diversa rispetto agli altri modi. Può anche essere pensato come il quadrato di correlazione tra due vettori modali $\{\Phi_A\}$ e $\{\Phi_B\}$. Se esiste una relazione lineare (cioè i vettori si muovono allo stesso modo) tra i due vettori complessi, il valore MAC sarà vicino a uno. Se sono linearmente indipendenti, il valore MAC sarà piccolo (vicino allo zero). I quadrati neri indicano un valore unitario del MAC, quindi gli autovettori che determinano il modo di vibrare sono uguali mentre le colorazioni più chiare mostrano una differenza tra i vari modi. Confrontando casi con ugual numero di strati (fig. 5.7 e 5.8) si evidenzia una notevole differenza tra i vari modi di vibrare, con una corrispondenza tra modi presente solo in pochissimi casi (riquadro nero), per le altre combinazioni le differenze sono marcate come evidenziano la colorazione chiara dei quadrati. Come previsto, le seppur poche somiglianze, si concentrano lungo la diagonale poiché è in quella zona in cui si confrontano modi con frequenze simili.

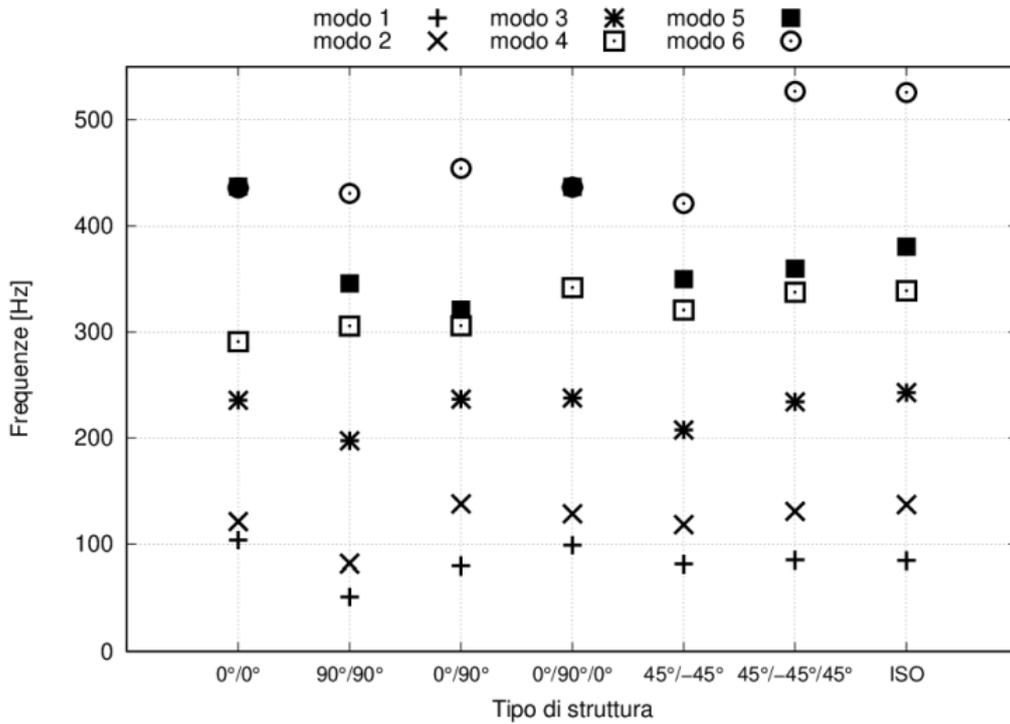


Figura 5.2: Frequenze naturali nelle diverse configurazioni - Modelli LE9

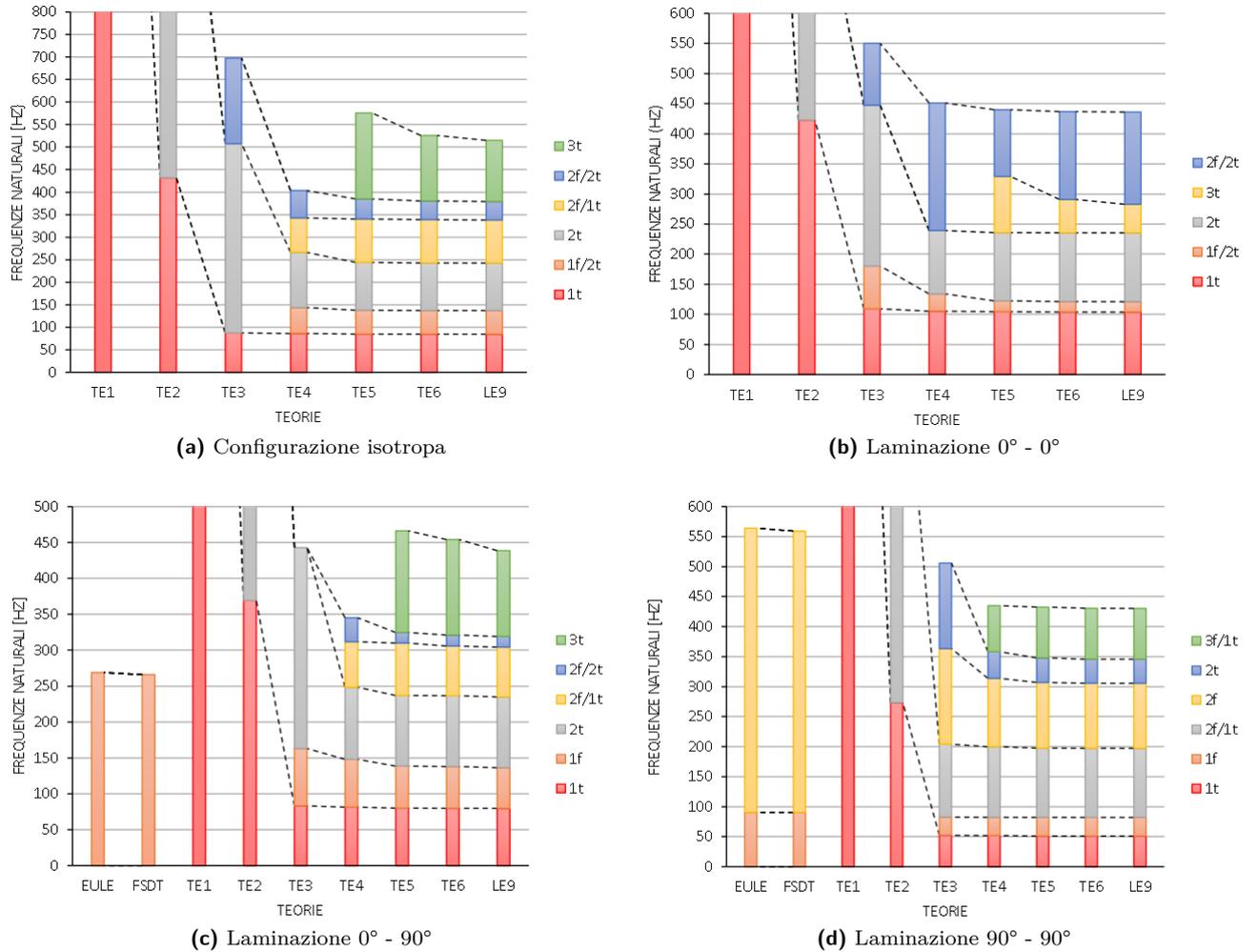


Figura 5.3: Istogrammi che evidenziano le differenze di frequenze tra modi uguali

5.1.2 Diagrammi di Campbell

Della struttura in questione sono stati costruiti anche i diagrammi di Campbell (fig. 5.9) in cui la velocità di rotazione e le frequenze sono state adimensionalizzate, per confrontarle con [13], nel seguente modo:

- $\omega_n^* = \omega_n(\sqrt{12\rho L^4(1-\nu^2)}/Et^2)$
- $\Omega^* = \Omega/\omega$

Con ω_1 la prima frequenza naturale. Analizzando i diagrammi si osserva quanto già anticipato studiando le frequenze naturali, in certe configurazioni stessi modi di vibrare si presentano a frequenze diverse in base all'angolazione delle fibre all'interno del materiale composito. Inoltre si osserva, in tutte i casi, un veering tra il primo ed il secondo modo che compare a velocità diverse in base al tipo di laminazione. Questo comporta che per alcune laminazioni l'instabilità dovuto al veering è anticipata rispetto ad altri casi, quindi in fase di progettazione è una caratteristica

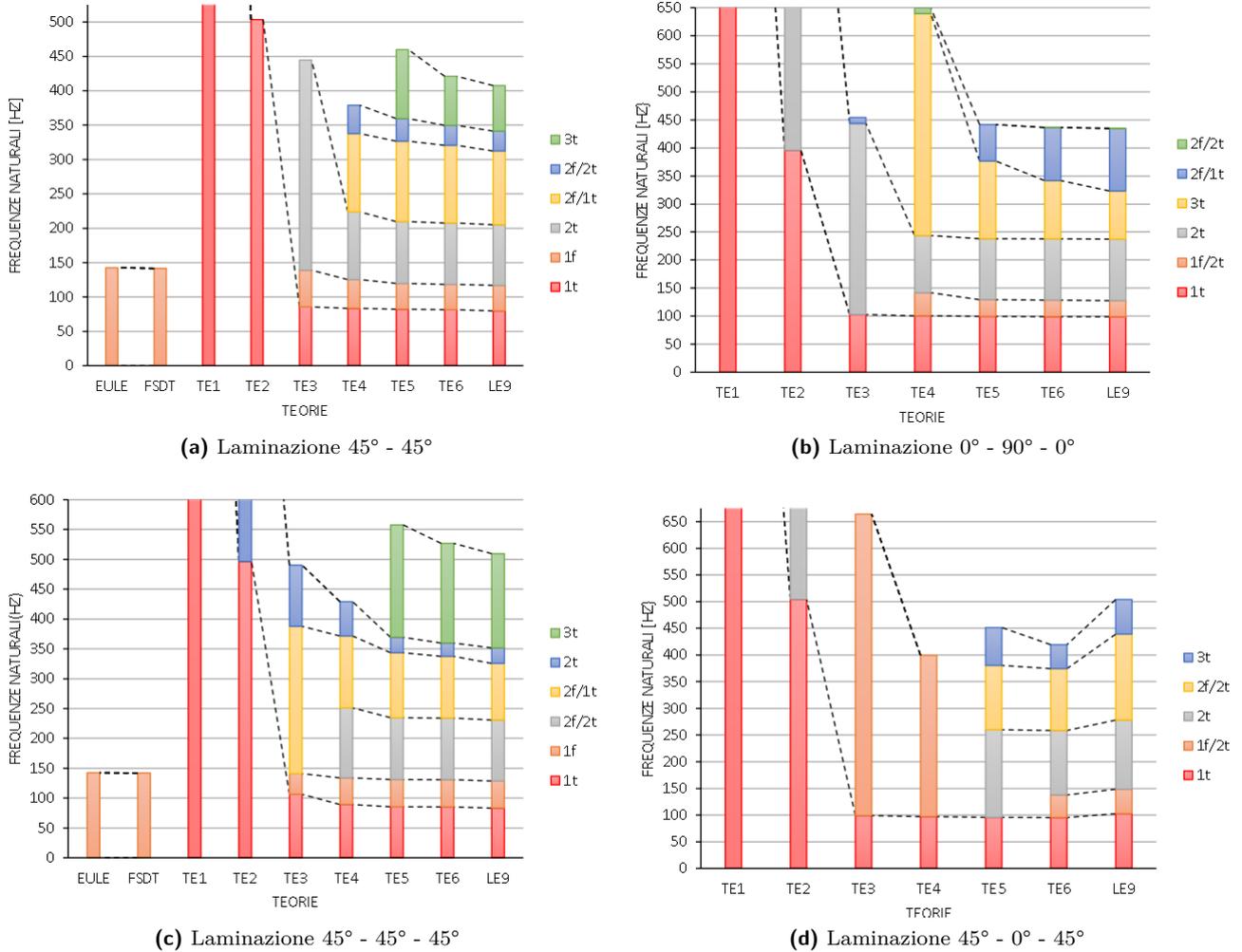


Figura 5.4: Istogrammi che evidenziano le differenze di frequenze tra modi uguali

che deve essere tenuta in considerazione. Per modi a frequenze più alte si nota che per ogni tipo di configurazioni si hanno andamenti diversi, questo sottolinea il fatto che la variazione delle disposizione delle fibre fa assumere alla struttura comportamenti che devono essere studiati caso per caso.

5.2 Statica della piastra curva (shell) in composito

5.2.1 Tensione trasversale σ_{xy}

In questa sezione si è analizzato il comportamento statico della shell nel caso in cui sia sottoposta a sole forze centrifughe, queste ultime prodotte da una velocità angolare $\omega = 1000$, *RPM* attorno all'asse *z* del sistema di riferimento globale. In una prima analisi si è studiato l'andamento della σ_{xy} lungo le laminazioni in una sezione posta ad $L/2$ dall'incastro, come descritto in figura 10.1. Gli andamenti analizzati sono mostrati in fig. 10.1, 10.2 e 10.3. È importante notare che,

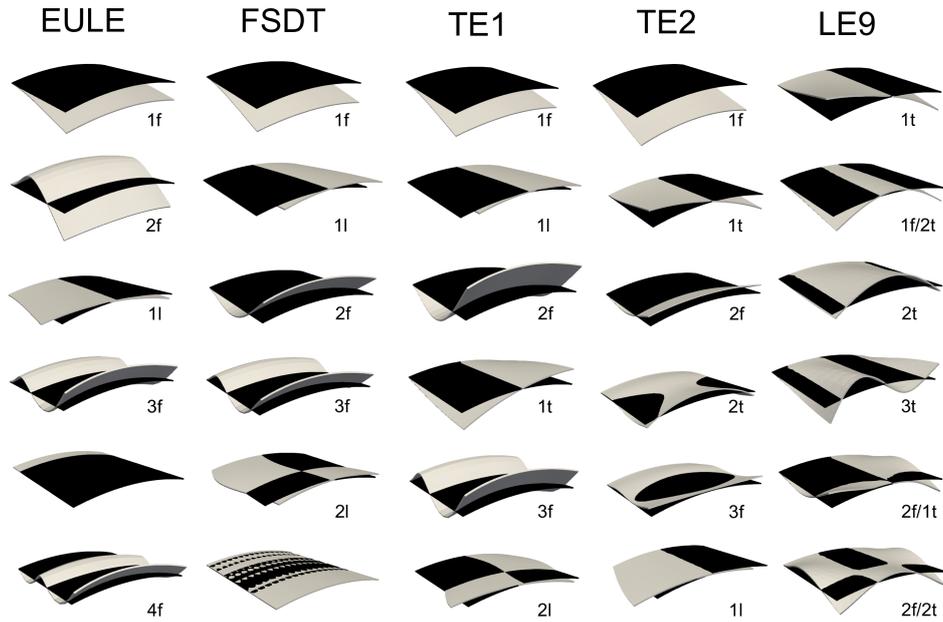


Figura 5.5: Modi di vibrare per le prime sei frequenza naturali al variare del modello utilizzato - Laminazione $0^\circ/90^\circ/0^\circ$. In nero è rappresentata la configurazione indeformata, mentre in grigio sono raffigurati i modi di vibrare della struttura

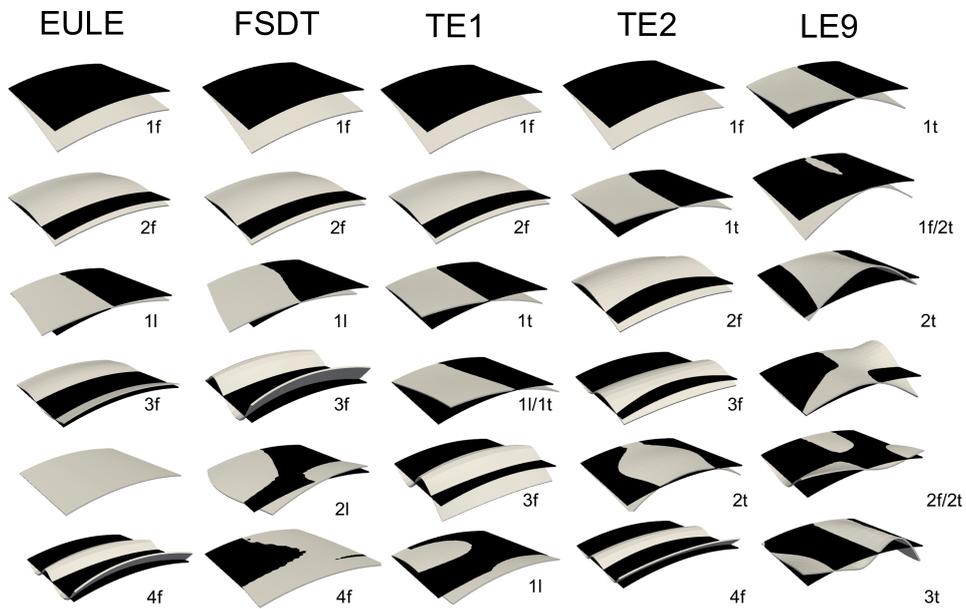


Figura 5.6: Modi di vibrare per le prime sei frequenza naturali al variare del modello utilizzato - Laminazione $45^\circ/0^\circ/-45^\circ$. In nero è rappresentata la configurazione indeformata, mentre in grigio sono raffigurati i modi di vibrare della struttura

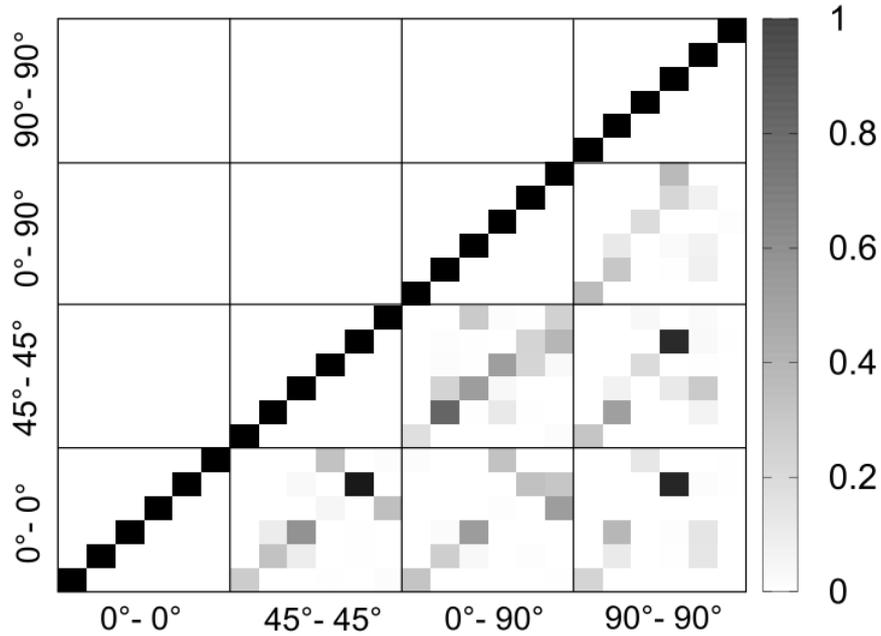


Figura 5.7: MAC tra le diverse laminazioni nella configurazione a due strati - Modelli LE9

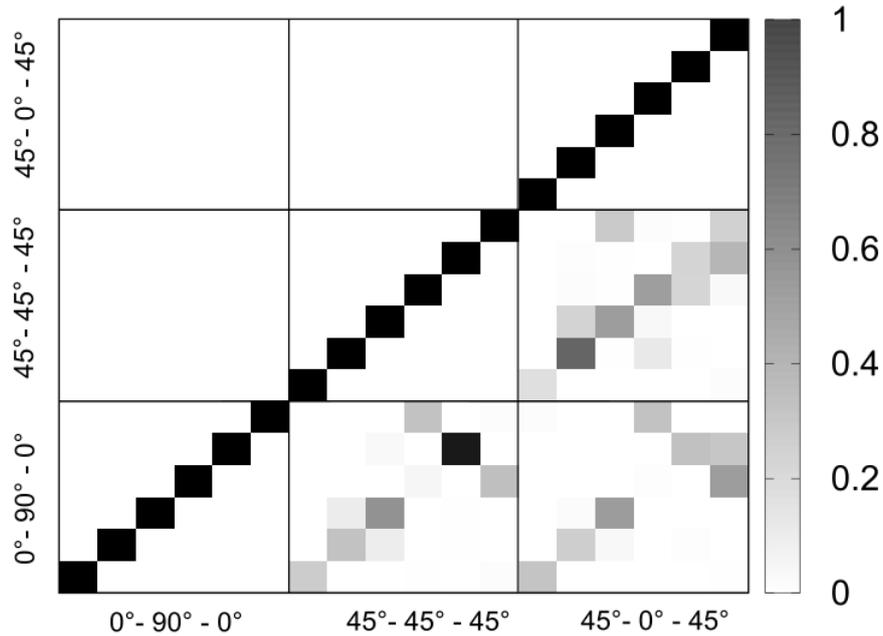


Figura 5.8: MAC tra le diverse laminazioni nella configurazione a tre strati - Modelli LE9

rispetto all'analisi delle frequenze naturali, modelli Taylor con $N=3$ non riescono ad analizzare il comportamento tensionale della struttura in modo adeguato. Nel dettaglio i modelli EULE, FSMT e TE1 percepiscono quasi nulle nella maggioranza dei casi analizzati, TE2 e TE3 presentano un comportamento lineare che si allontana molto dalla realtà sia dal punto di vista dell'andamento

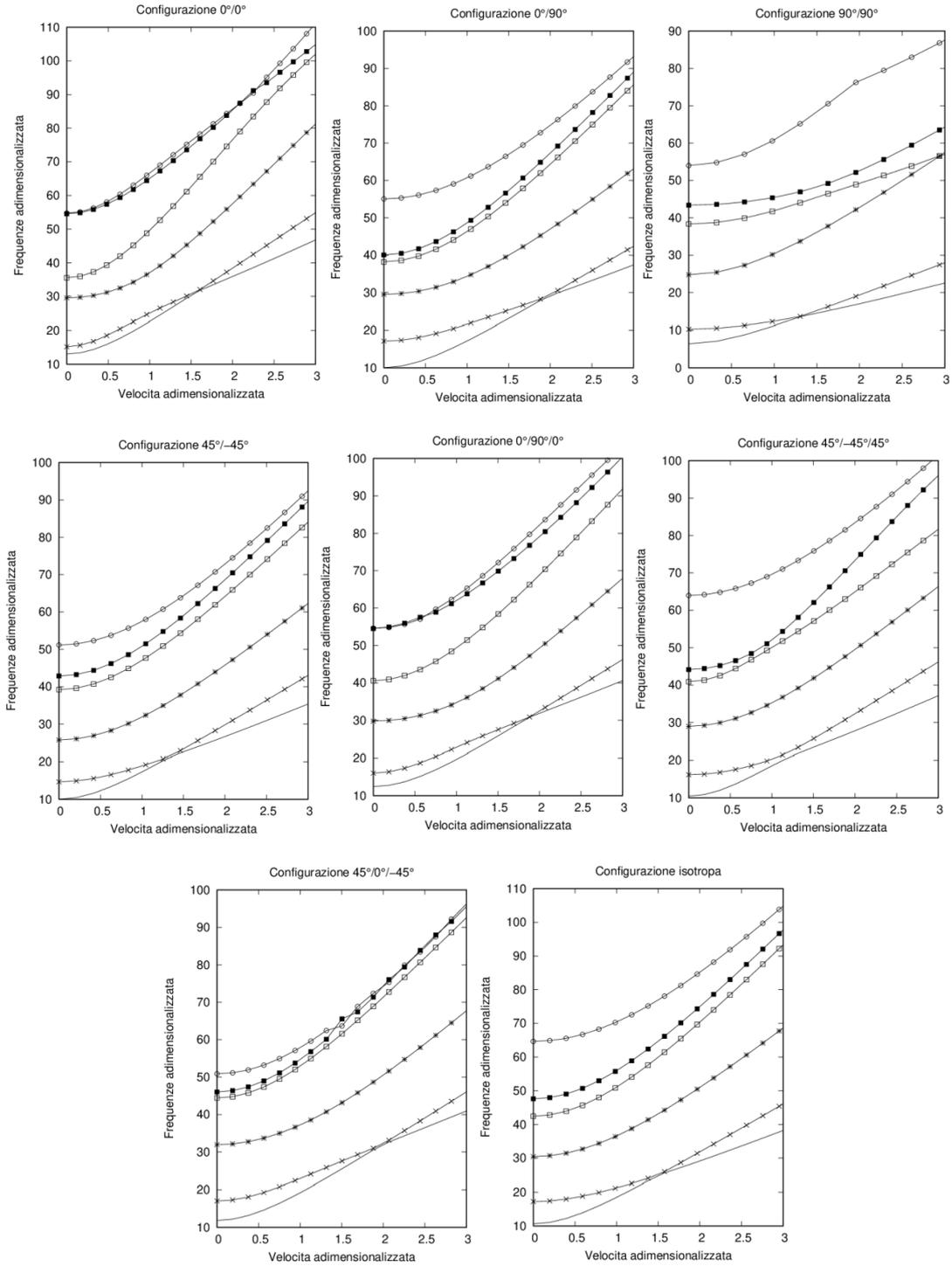


Figura 5.9: Diagrammi di Campbell alle diverse configurazioni

che dei valori computati. Solamente da modelli TE con $N \geq 4$ si ha un accordo sempre maggiore con il caso più dettagliato, cioè quello in cui si utilizzano modelli LE9. Anche in questo caso si nota che le laminazioni inducono andamenti nettamente diversi tra caso a caso, evidenziando che esse incidono in maniera evidente anche sul comportamento statico della struttura.

5.2.2 Tensione normale σ_{yy}

La seconda tensione analizzata è la σ_{yy} lungo la coordinata y dall'incastro fino ad $L = 305$, mm . In base al numero di strati della struttura si sono considerati due o tre punti nello spessore della piastra, come mostrato in figura 5.10. Analizzando i grafici delle tensioni alle varie configurazioni (fig. 10.4, 10.5, 10.6, 10.7, 10.8, 10.9 e 10.10) si osserva che, come previsto, sono gli strati con fibre ad angolazione nulla ad essere le più efficaci per resistere a questo tipo di tensione, meno prestanti risultano essere le fibre con un angolo pari a 45° ed infine le fibre rivolte a 90° . Inoltre in tutti i casi si evidenzia una maggiore sollecitazione dello strato superiore, inoltre confrontando i vari modelli si osserva che solo LE9 riesce a cogliere bene l'andamento delle tensioni nello strato inferiore vicino all'incastro. Lontano dall'incastro e negli altri strati invece si manifesta lo stesso comportamento visto per le tensioni σ_{xy} , infatti per modelli di Taylor ad $N \geq 3$ gli andamenti sono molto distanti da quelli reali, maggiore accuratezza la si raggiunge aumentando l'ordine dell'espansione di Taylor.

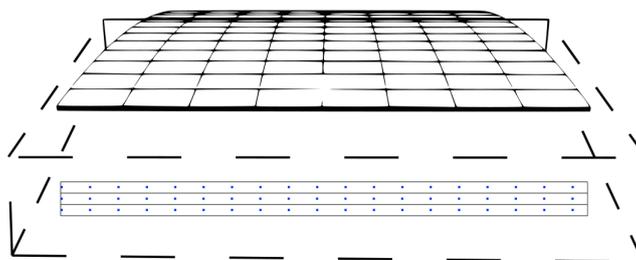


Figura 5.10: Visualizzazione dei punti in cui sono calcolate le tensioni σ_{yy} - Esempio laminazione a triplo strato

Capitolo 6

Pala di elicottero con profilo rettangolare ed angolo di freccia - Materiale isotropo

Nel seguente capitolo si analizzerà, dal punto di vista statico e dinamico, un modello di pala di elicottero semplificato in modo tale da porre le basi per l'analisi di strutture più complesse. Per effettuare misurazioni affidabili i modelli di pale sono stati costruiti in modo tale da sfruttare una delle più apprezzate caratteristiche della CUF; cioè la possibilità di usare nella stessa struttura elementi sia 1D sia 3D, come descritto nel capitolo di introduzione teorica (parte II). In particolare nei seguenti modelli saranno utilizzati modelli tridimensionali nelle zone della struttura in cui è presente un angolo di freccia, questo per fare in modo che gli accoppiamenti tra flessione e torsione siano percepiti durante l'analisi. La struttura analizzata è una pala di elicottero con caratteristiche meccaniche e geometriche semplici, infatti si tratta di una struttura isotropa con una sezione costante lungo la sua apertura. La particolarità della struttura risiede nella presenza di un angolo di freccia posto ad una distanza L dalla radice, come mostrato in figura. Questa particolare configurazione produrrà degli effetti di accoppiamento tra flessione e torsione. Lo scopo di questa analisi è quello di studiare la variazione delle frequenze naturali, per valutare l'incidenza dell'angolo di freccia.

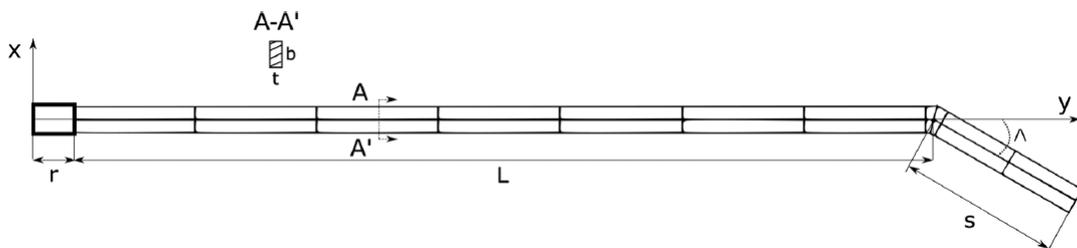


Figura 6.1: Geometria della pala isotropa

In particolare la pala, mostrata in figura 6.2 insieme alle configurazioni analizzate, presenta le seguenti caratteristiche geometriche e meccaniche:

- $L = 0,8001$ m
- $s = 0,1524$ m

- $t = 1,6002 \times 10^{-3}$ m
- $b = 2,54 \times 10^{-2}$ m
- Densità $\rho = 2682 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- Modulo di Young $E = 73,08$ GPa
- Coefficiente di Poisson $\nu = 0.325$

Per confronto queste proprietà identificano una struttura identica a quella analizzata nella pubblicazione [28].



Figura 6.2: Angoli di freccia della pala isotropa

Costruzione del modello FEM Tutte le configurazioni della pala analizzata sono state costruite utilizzando sette elementi unidimensionali B4 tra la radice e L , quattro elementi tridimensionali in corrispondente dell'angolo di freccia ed infine tre elementi B4 nella sezione di pala identificata dalla lunghezza s .

6.1 Analisi su frequenze naturali

I risultati ottenuti sono mostrati in tabella 6.1 e il loro andamento in figura 6.3. Si nota come per le prime due frequenze in cui si trovano accoppiate flessione e torsione i valori in Hertz hanno un leggero aumento all'aumentare dell'angolo di freccia, comportamento opposto si osserva per le altre tre frequenze accoppiate in maniera molto più marcata. Invece la flessione lungo la corda (1L) si verifica ad una frequenza pressoché costante con una leggera tendenza ad aumentare con l'angolo.

Tabella 6.1: Frequenze naturali [Hz] pala isotropa. "F":flapwise;"L":chordwise; "T":torsional.

Angolo freccia	1B/1T	2B/1T	3B/1T	4B/1T	5B/1T	1L	Dof
90°	1.591	10.525	20.185	35.652	68.392	25.114	1575
75°	1.566	10.124	20.945	36.593	68.738	24.737	1575
60°	1.543	9.824	22.236	38.195	69.354	24.396	1575
45°	1.524	9.614	23.752	40.928	70.578	24.115	1575
30°	1.509	9.479	25.103	45.076	73.239	23.900	1575
15°	1.500	9.405	25.977	49.541	79.100	23.768	1575
0°	1.497	9.381	26.269	51.492	85.166	23.723	1665

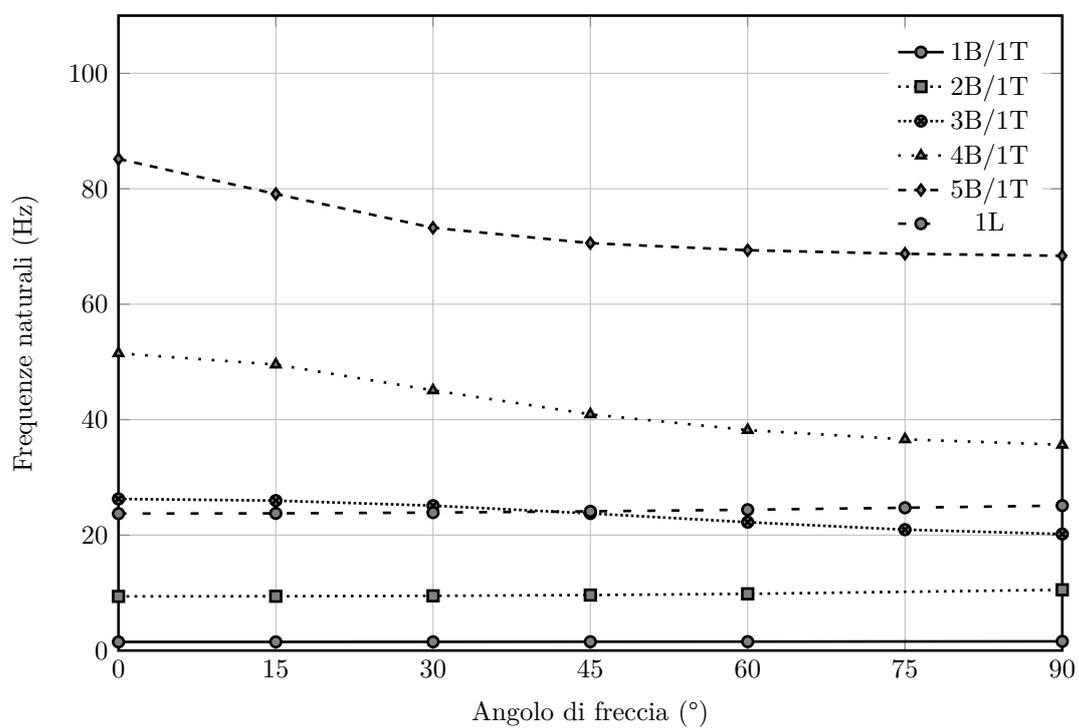


Figura 6.3: Frequenze naturali vs. angolo di freccia

Capitolo 7

Pala a profilo rettangolare in composito

In questa sezione si andrà ad analizzare geometricamente la stessa struttura precedente ma costituita da quattro strati di materiale composito (proprietà in tab. 5.1), in cui l'angolo di laminazione delle fibre è indipendente per ogni strato. Una visualizzazione grafica delle configurazioni adottate è mostrata in fig. 7.1. Poiché lo studio di questa struttura è focalizzato anche sulle differenze nell'utilizzo di modelli diversi, all'interno della stessa struttura, si è reso necessario adottare uno schema di collegamento idoneo per permettere l'accoppiamento tra le beam 1D e gli elementi 3D. Per fare ciò, anche nel caso in cui sono stati utilizzati modelli Taylor, è stata posta una intera beam di collegamento tra l'elemento tridimensionale e le restanti beam (fig. 7.2). Questo sia per permettere il collegamento tra i nodi della sezione 1D e 3D sia per creare una struttura in cui ci fosse un graduale passaggio da modelli meno rifiniti a complessi nella zona in cui sono presenti evidenti fenomeni di accoppiamento flessio-torsionale, che corrisponde alla zona dell'angolo di freccia.

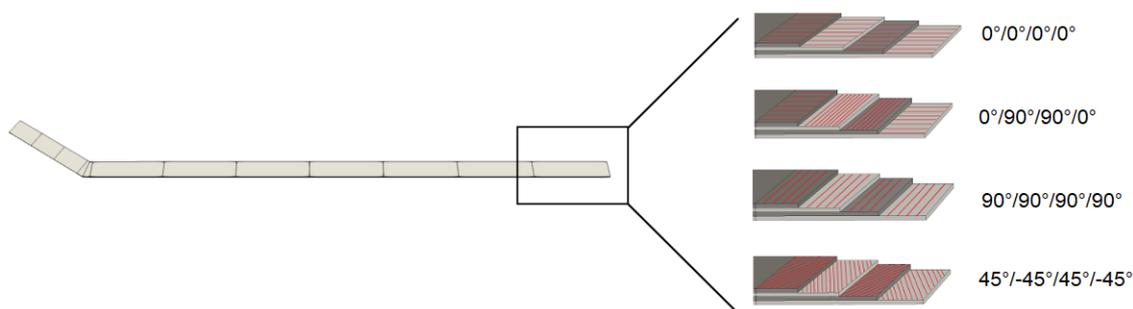


Figura 7.1: Configurazioni di laminazione utilizzate nel caso di freccia a 30°



Figura 7.2: Modelli utilizzati nella struttura

Analizzando le frequenze naturali nei vari casi (tab. 7.1, 7.2 e 7.3) si nota che, anche utilizzando modelli molto diversi da loro in fatto di complessità, i valori ottenuti sono molto simili al variare dei modelli con angolo di laminazione fissata. Questo è un risultato interessante perché rende valido l'utilizzo di un metodo a modelli variabili i cui pregi sono evidenti: infatti anche utilizzando modelli Taylor di primo ordine, in confronto ai casi più rifiniti, si ottengono valori molto simili di frequenza ma con un costo computazionale notevolmente più basso, come si nota dal differente numero di gradi di libertà. Un'ulteriore validazione dei risultati è fornita dall'analisi dei modi di vibrare, in figura 7.3 sono messi a confronto i primi sei modi della struttura (laminazione $0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ$) e risulta evidente la somiglianza tra i rispettivi modi. Questa similarità tra i modi è un risultato ancora più apprezzabile considerando che modelli di Taylor di primo ordine non sono in grado di percepire la torsione nel modo adeguato, ma questo problema è stato superato utilizzando modelli complessi, in particolare beam 1D con modelli LE9 ed elementi 3D, collocati opportunamente solo nelle zone in cui i fenomeni di flesso-torsione si manifestano in maniera più evidente. Un'altra prova, che mostra la somiglianza tra modelli meno rifiniti e più complessi, è fornita dall'analisi del MAC mostrato in figure 7.4, 7.5 e 7.6 al variare di tre angoli di freccia. È evidente la somiglianza marcata tra i modi tramite la presenza di riquadri neri all'interno delle zone in cui si confrontano modelli diversi ad uguale laminazione. Concentrando l'attenzione su questi confronti si nota che tutte e sei i modi sono presenti in entrambi i modelli; solo in alcuni casi sono presenti degli scambi. Ovviamente le somiglianze si fanno meno evidenti nelle zone del grafico in cui vengono confrontate laminazioni diverse.

Studiando invece il comportamento della pala in composito al variare dell'angolo di laminazione si nota che le maggiori differenze, al variare dei modelli, le si hanno per la laminazione di tipo $45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ$, ciò si può spiegare affermando che in questo caso la più complicata laminazione produce accoppiamenti flesso-torsionale più difficili da cogliere da modelli poco rifiniti. In tutti gli altri casi invece il livello di errore è molto più basso.

Focalizzando l'attenzione alla sola laminazione si nota che i primi sei modi si presentano con le stesse modalità rispettivamente per la coppia $0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ$ e $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$ e per la coppia $45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ$ e $90^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ$. Queste differenze sono concordi ai tipi di modi che si presentano nelle varie laminazioni; infatti la prima coppia, per via dell'angolo di laminazione delle fibre, accetta a frequenze più basse (quindi ad energia più bassa) modi torsionali rispetto ai modi flessionali. Comportamento opposto si nota per la seconda coppia, che risulta evidente confrontando le frequenze del modo flessionale infatti tra le due coppie di laminazioni la torsione si presenta nelle laminazioni $45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ$ e $90^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ$ con frequenze mediamente doppie. Queste considerazioni portano alla conclusione attesa che al variare dell'angolo di laminazione una struttura risulta essere più resistente alla flessione rispetto alla torsione, o viceversa. Anche in questo caso è stato analizzato il MAC per confrontare i modi alle diverse laminazioni, esso è mostrato in figura 7.7. Analizzando il grafico si evidenziano i concetti già espressi, infatti le zone in cui viene confrontata la coppia $0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ$ e $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$ presentano una maggioranza di riquadri neri lungo la diagonale, sottolineando la similarità tra i modi; stessa considerazioni può essere fatta per la coppia di laminazioni rimanenti. Di conseguenza le zone del grafico in cui si ha il confronto tra laminazioni delle due diverse coppie si nota la presenza quasi esclusiva di riquadri chiari.

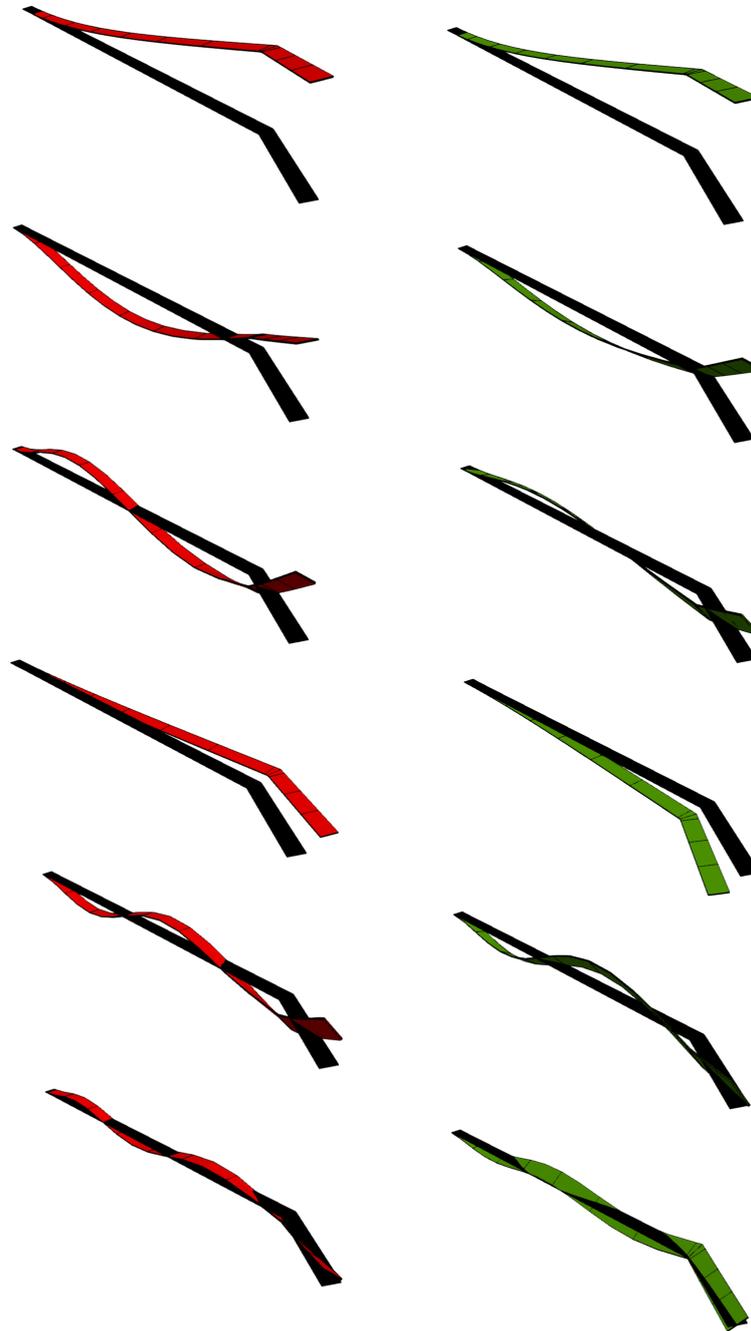


Figura 7.3: Confronto tra modi di vibrare per laminazione $0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ$ - TE1 senza correzione di Poisson (in rosso) vs. LE9 (in verde). La configurazione indeformata è visualizzata in nero

Tabella 7.1: Frequenze naturali [Hz] alle varie configurazioni di laminatione per un angolo di freccia pari a 30°. "F": flapwise; "T": chordwise; "T": torsional.

Freccia 30												
Laminatione 0°/0°/0°/0°						Laminatione 0°/90°/0°/90°						
DoF	TE1	TE1 - No PL	TE2	TE3	TE4	LE9	TE1	TE1 - No PL	TE2	TE3	TE4	LE9
1F	3.055	3.075	3.045	3.044	3.044	3.044	2.869	2.889	2.864	2.864	2.864	2.864
1F/1T	19.049	19.141	16.932	16.929	16.908	16.928	17.938	18.032	16.205	16.204	16.186	16.203
2F/1T	48.628	48.767	32.805	32.799	32.729	32.793	35.161	35.501	31.843	31.842	31.772	31.835
1L	48.283	48.600	48.289	48.258	48.258	48.289	46.327	46.472	35.228	35.216	35.215	35.226
3F/1T	86.412	86.731	70.277	70.255	70.221	70.251	82.562	82.888	66.517	66.512	66.477	66.508
2T	145.692	146.248	129.461	129.404	129.337	129.397	138.038	138.596	122.557	122.541	122.487	122.535
Laminatione 45°/-45°/45°/-45°												
DoF	TE1	TE1 - No PL	TE2	TE3	TE4	LE9	TE1	TE1 - No PL	TE2	TE3	TE4	LE9
1F	1.106	1.614	1.161	1.148	1.148	1.148	0.730	0.776	0.731	0.731	0.731	0.731
2F	7.329	9.874	7.365	7.285	7.280	7.281	4.670	4.897	4.614	4.613	4.613	4.613
1L	18.090	25.535	18.245	18.211	18.211	18.216	11.564	12.291	11.577	11.577	11.577	11.577
3F	21.113	27.364	20.523	20.247	20.220	20.233	13.062	13.490	12.571	12.570	12.566	12.570
4F/1T	38.926	49.712	39.389	38.740	38.654	38.705	24.963	25.934	23.326	23.324	23.308	23.323
5F/1T	65.843	83.127	64.062	62.797	62.625	62.730	40.868	42.313	37.441	37.439	37.413	37.437

Tabella 7.2: Frequenze naturali [Hz] alle varie configurazioni di laminazione per un angolo di freccia pari a 45°. "F": flapwise; "L": chordwise; "T": torsional.

Freccia 45												
Laminazione 0°/0°/0°/0°												
	TE1	TE1 - No PL	TE2	TE3	TE4	LE9	TE1	TE1 - No PL	TE2	TE3	TE4	LE9
DoF	1107	1107	1323	1611	1971	2835	1107	1107	1323	1611	1971	2835
1F	3.083	3.104	3.062	3.062	3.061	3.044	2.897	2.917	2.882	2.882	2.882	2.882
1F/1T	19.133	19.222	14.941	14.940	14.905	16.920	18.072	18.163	14.531	14.530	14.499	14.528
2F/1T	43.857	43.962	28.591	28.585	28.546	32.781	35.474	35.818	27.464	27.462	27.421	27.458
1L	48.711	49.030	48.717	48.685	48.685	48.287	42.340	42.451	35.542	35.530	35.528	35.540
3F/1T	78.460	78.770	70.222	70.198	70.183	70.253	74.789	75.101	66.215	66.209	66.194	66.207
2T	141.370	141.949	134.162	134.097	134.057	129.192	133.406	133.987	126.619	126.602	126.573	126.598
Laminazione 45°/ -45°/45°/ -45°												
	TE1	TE1 - No PL	TE2	TE3	TE4	LE9	TE1	TE1 - No PL	TE2	TE3	TE4	LE9
DoF	1107	1107	1323	1611	1971	2835	1107	1107	1323	1611	1971	2835
1	1.117	1.631	1.173	1.160	1.159	1.159	0.737	0.784	0.738	0.738	0.738	0.737
2	7.508	10.189	7.551	7.467	7.461	7.463	4.790	5.027	4.708	4.708	4.708	4.708
3	18.249	26.401	18.411	18.376	18.375	18.381	11.668	12.402	11.681	11.681	11.681	11.681
4	21.772	27.619	20.818	20.543	20.501	20.527	13.388	13.827	12.412	12.411	12.402	12.410
5	39.644	50.094	38.396	37.820	37.669	37.777	25.051	25.975	21.726	21.725	21.699	21.723
6	65.527	81.744	61.148	59.977	59.752	59.904	40.003	41.339	35.456	35.454	35.433	35.452

Tabella 7.3: Frequenze naturali [Hz] alle varie configurazioni di laminazione per un angolo di freccia pari a 60°. "F": flapwise; "T": chordwise; "T": torsional.

Freccia 60												
Laminazione 0°/0°/0°/0°						Laminazione 0°/90°/0°/90°						
DoF	TE1	TE1 - No PL	TE2	TE3	TE4	LE9	TE1	TE1 - No PL	TE2	TE3	TE4	LE9
1F	3.121	3.142	3.088	3.088	3.087	3.088	2.932	2.953	2.909	2.908	2.908	2.908
1F/1T	19.336	19.421	13.326	13.325	13.285	13.321	18.328	18.418	13.098	13.097	13.060	13.094
2F/1T	39.468	39.555	26.873	26.867	26.845	26.865	35.884	36.232	25.598	25.597	25.573	25.594
1L	49.271	49.595	49.278	49.245	49.245	49.278	38.464	38.552	35.953	35.940	35.939	35.951
3F/1T	74.446	74.759	70.173	70.149	70.141	70.148	70.594	70.907	66.075	66.069	66.061	66.067
2T	139.569	140.158	136.184	136.114	136.092	136.112	131.429	132.021	128.286	128.268	128.253	128.265
Laminazione 45°/-45°/45°/-45°												
DoF	TE1	TE1 - No PL	TE2	TE3	TE4	LE9	TE1	TE1 - No PL	TE2	TE3	TE4	LE9
1F	1.131	1.653	1.188	1.175	1.174	1.174	0.746	0.794	0.747	0.747	0.747	0.747
2F	7.741	10.601	7.800	7.712	7.704	7.707	4.948	5.200	4.842	4.842	4.841	4.842
1L	18.456	27.676	18.627	18.591	18.591	18.596	11.802	12.546	11.817	12.226	11.816	11.817
3F	22.684	27.952	21.268	20.997	20.933	20.978	13.870	14.331	12.226	11.816	12.210	12.224
4F/1T	40.721	50.507	36.866	36.388	36.162	36.336	25.175	26.016	20.148	20.146	20.119	20.144
5F/1T	64.625	79.043	58.178	57.045	56.838	56.977	38.646	39.858	34.245	34.243	34.230	34.242

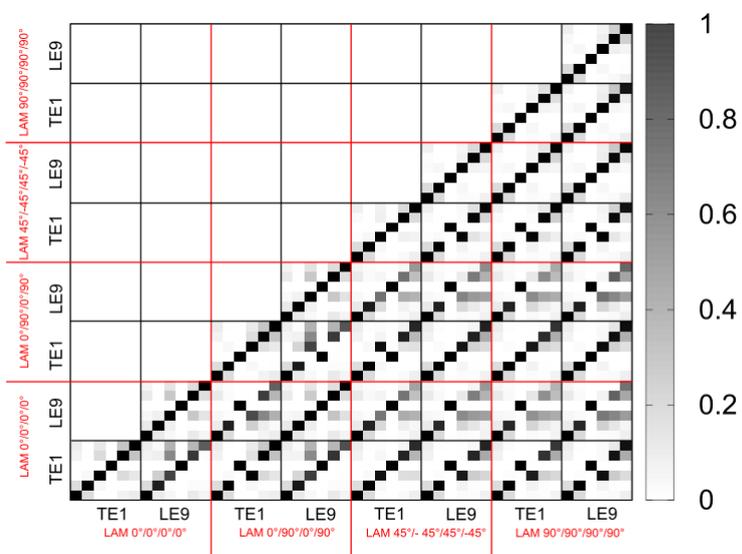


Figura 7.4: MAC tra modelli TE1 (senza correzione di Poisson) e LE9 - Angolo di freccia pari a 30°

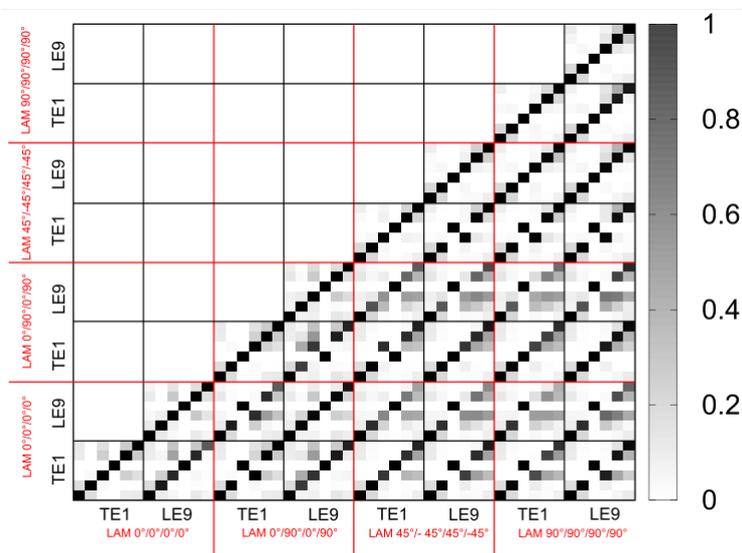


Figura 7.5: MAC tra modelli TE1 (senza correzione di Poisson) e LE9 - Angolo di freccia pari a 45°

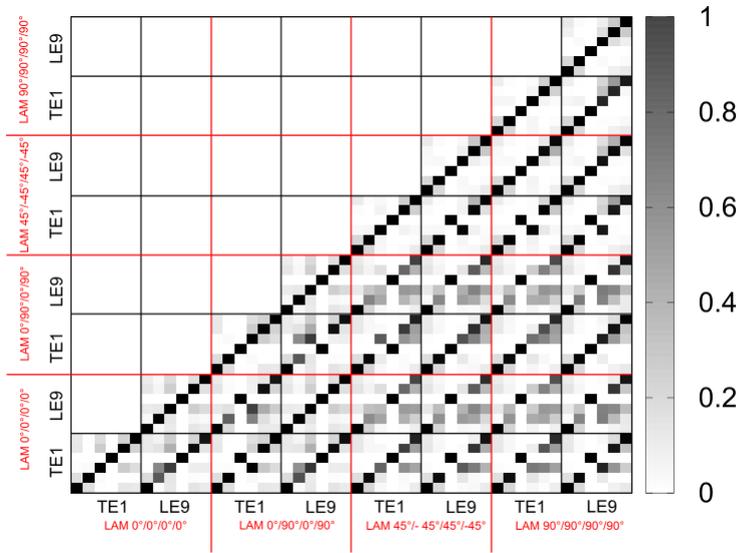


Figura 7.6: MAC tra modelli TE1 (senza correzione di Poisson) e LE9 - Angolo di freccia pari a 60°

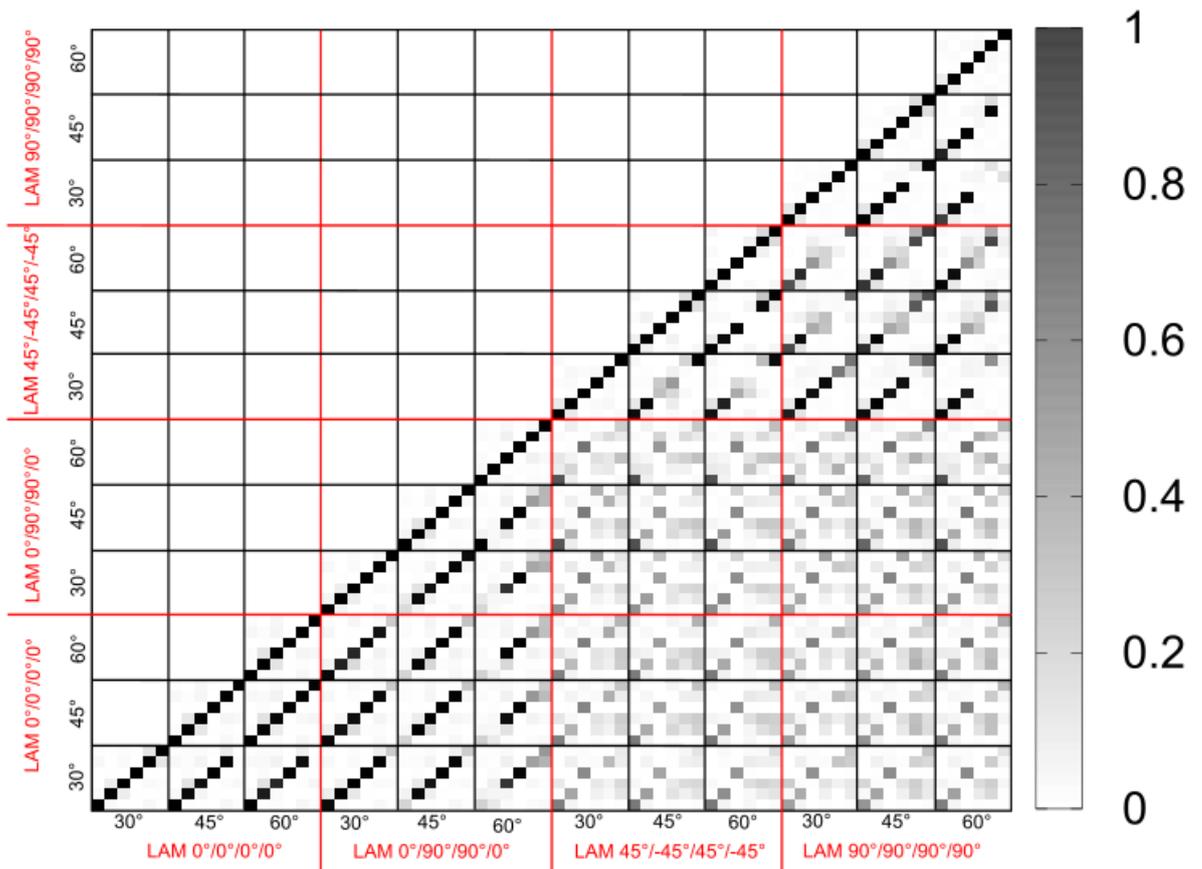


Figura 7.7: MAC al variare dell'angolo di laminazione e di freccia - Modelli LE9

Capitolo 8

Pala realistica in composito

L'ala rotante analizzata presenta un profilo realistico e le dimensioni sono identiche a quelle presenti in ref. [21]. La figura 8.1 e la tabella 8.1 descrivono la geometria, la laminazione e i materiali che caratterizzano la struttura. La sezione frontale del profilo consiste in un rivestimento in titanio di 1.016 mm di spessore, e cinque strati in composito tutti con spessore di 1.78 mm. I tre strati unidirezionali con un angolo di laminazione di 0° sono stati considerati come un unico strato. La sezione trasversale è stata divisa in 101 sottodomini corrispondenti al numero di elementi di Lagrange con quattro o nove nodi. Otto elementi a quattro nodi (beam B4) sono stati utilizzati lungo l'apertura alare.

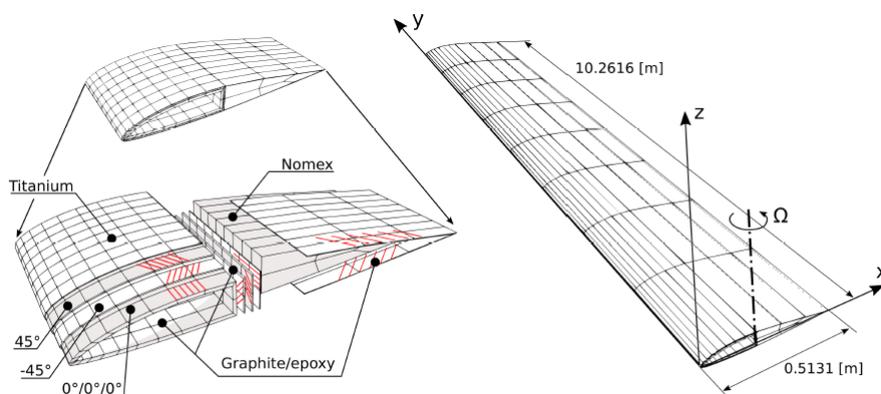


Figura 8.1: Geometria e disposizioni degli strati in composito

8.1 Analisi statica

Analisi sui modelli La risposta statica della struttura è stata studiata utilizzando solo forze di tipo centrifugo dovute da una velocità di rotazione costante pari a 2π attorno all'asse z del sistema di riferimento globale. In figura 8.2, 8.3 e 8.4 sono mostrati gli spostamenti della pala lungo la sua apertura, come si ci poteva aspettare i valori più alti si riscontrano lungo la direzione x , inoltre, non si nota una grande differenza tra i risultati ottenuti utilizzando i vari modelli. Si osserva che gli spostamenti sono paragonabili con quelli ottenuti tramite modelli realizzati con il software NX-Nastran [9]. Sono stati analizzati lo sforzo normale σ_{yy} (fig. 8.6, nel punto di fig.

Tabella 8.1: Proprietà dei materiali

		Titanio	Grafite/matrice epossidica	Nomex
E_L	Gpa	103	181	0.193
E_z	GPa	-	10.3	0.193
G_{Lz}	GPa	-	7.17	0.324
ν_{Lz}	-	0.34	0.28	0.3
ν_{xz}	-		0.33	0.3
ρ	Kg/m^3	4510	1600	64

8.5b) e trasversale σ_{yz} (fig. 8.7, nel punto di fig. 8.5b) lungo l'apertura della pala, per lo sforzo normale i risultati sono molto simili tra i vari modelli; maggiori differenze si riscontrano nel caso di σ_{yz} in cui le tensioni calcolate si distribuiscono attorno ai risultati ottenuti con modelli Lagrange Q9, che risultano essere i più efficaci per analizzare la struttura. La distribuzione delle tensione lungo l'anima del profilo (fig. 8.5c) rispecchia il comportamento atteso, infatti la tensione σ_{yy} (fig. 8.8) è supportata maggiormente in corrispondenza delle fibre a zero gradi, mentre si ha un brusco calo nella zona delle fibre a $\pm 45^\circ$. Comportamento opposto per la tensione σ_{yz} (fig. 8.9) che si scarica quasi esclusivamente sulle fibre a 45° , in segno opposto dipende dall'angolazione delle due diverse laminazioni. Infine per σ_{yx} (fig. 8.10) per tutti i modelli i valori di tensione risultano costantemente circa nulli. È possibile osservare la distribuzione delle tensione nelle figure 8.20, 8.21, 8.22, 8.23 in cui è mostrato una visione generale del comportamento del profilo a metà dell'apertura alare.

Tayloring della struttura Di particolare interesse è lo studio del comportamento statico della struttura al variare dell'angolo di laminazione delle fibre che compongono gli strati in composito. Questo processo di tayloring strutturale è stato eseguito modificando l'orientamento delle fibre degli strati a $\pm 45^\circ$ della parte frontale del profilo (la altre laminazioni non sono state modificate) facendo in modo che il valore assoluto dell'angolo di laminazione rimanesse sempre uguale tra i vari strati. In questo modo si sono ripetute le analisi precedenti, in particolare per l'analisi degli spostamenti (fig. 8.11, 8.12 e 8.13) si è studiata solamente la freccia massima al tip per ogni tipo di laminazione. Come prevedibile la freccia minima si ha con le fibre che seguono la direzione assiale della pala perché in questa configurazione favoriscono la resistenza a flessione della struttura, da un'angolazione di circa 45° si raggiunge il massimo di freccia che rimane pressoché costante con un picco a 60° . Si nota anche che i risultati sono sovrapponibili utilizzando sia modelli Q4 sia Q9.

L'analisi dello sforzo normale e trasversale sul web (fig. 8.5c) è stato condotto servendosi di soli modelli Q9 (fig. 8.14, 8.15, 8.16, 8.17, 8.18 e 8.19). Data la complessità della struttura sia dal punto di vista geometrico sia di laminazione delle fibre si nota un comportamento particolare in base al tipo di laminazione, possibili interazioni tra i diversi materiali, ed anche tra i vari strati del composito, possono favorire la resistenza a certi tipi di tensioni di certi tipi di laminazioni che normalmente non si userebbero per contrastare determinate sollecitazioni. Confrontando i vari modelli invece si nota che, come atteso, anche modelli meno rifiniti come EULE ed FSDT riescono a percepire le tensioni σ_{yy} e σ_{yz} , pur ammettendo degli errori rispetto ai modelli più complessi. Invece per tensioni torsionali come σ_{yx} essi non sono abbastanza accurati per poter descrivere queste sollecitazioni mostrando un valore costantemente nullo di tensione.

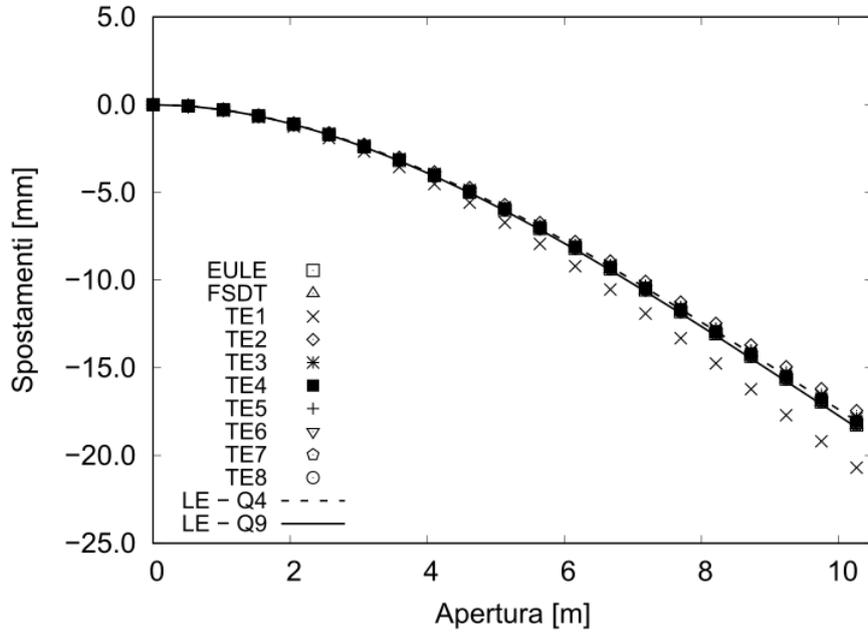


Figura 8.2: Spostamenti u_x

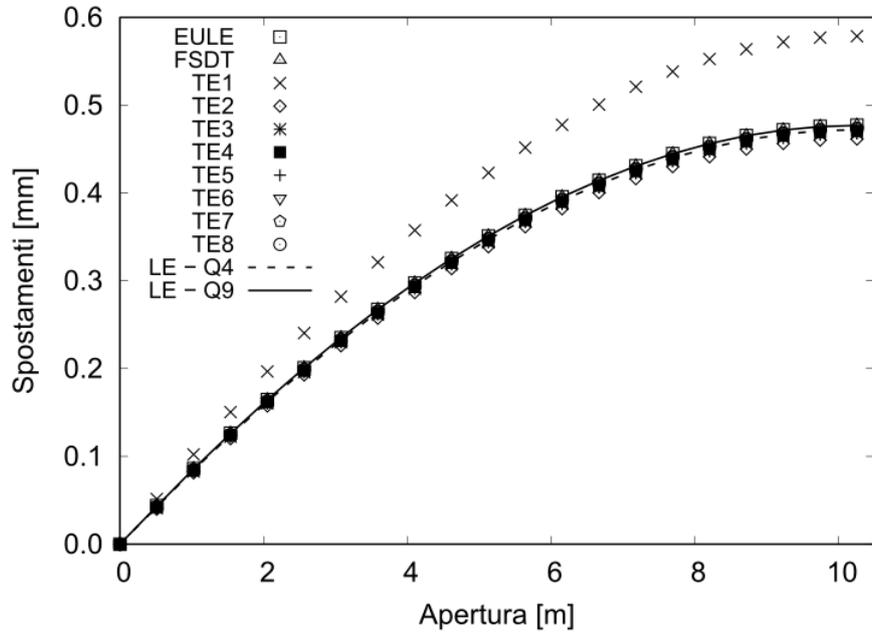


Figura 8.3: Spostamenti u_y

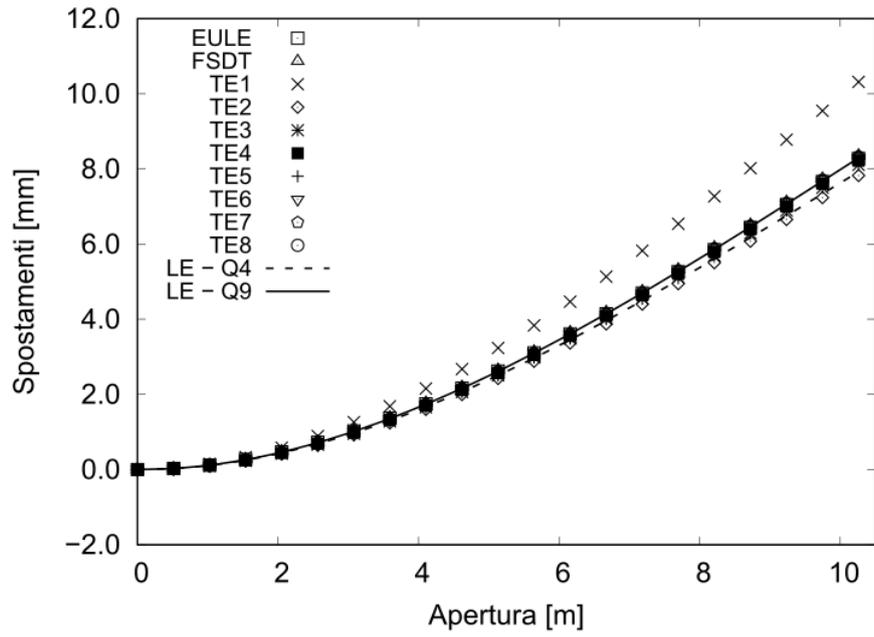


Figura 8.4: Spostamenti u_z

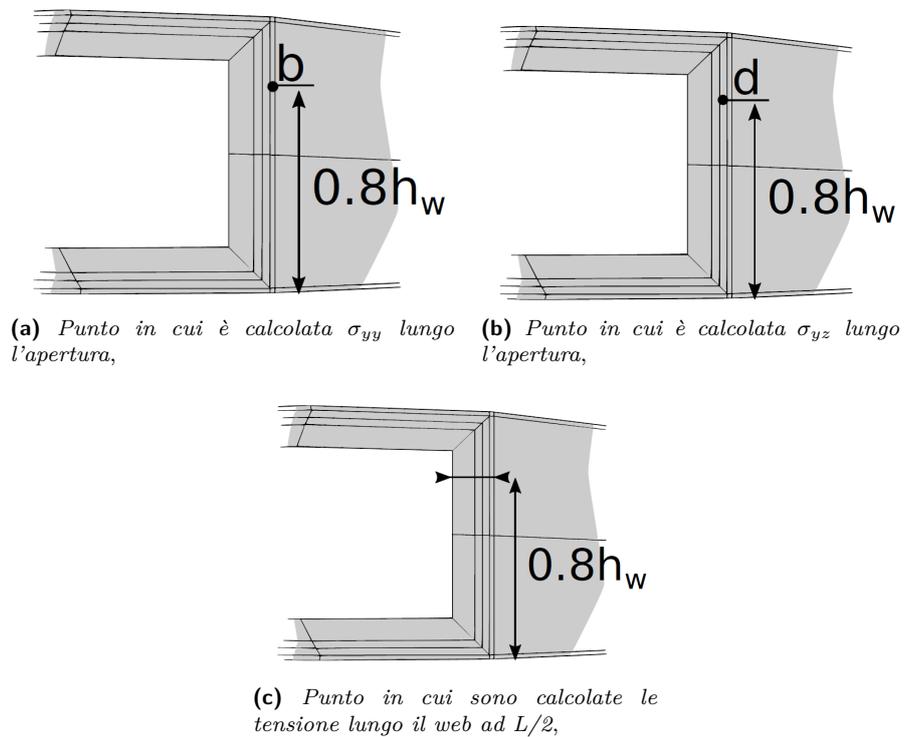


Figura 8.5: Punti in cui sono calcolate le diverse tensioni

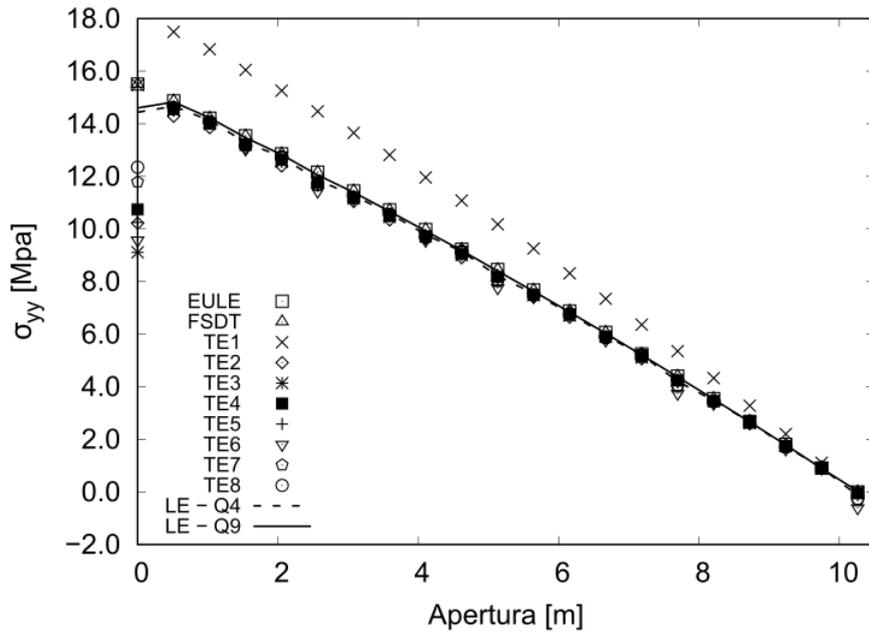


Figura 8.6: Variazione σ_{yy} lungo l'apertura

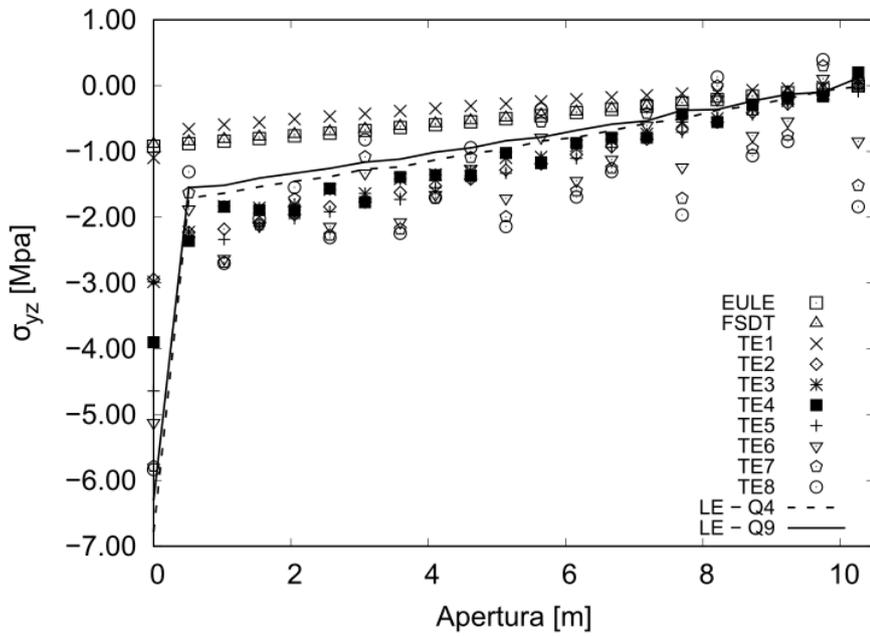


Figura 8.7: Variazione σ_{yz} lungo l'apertura

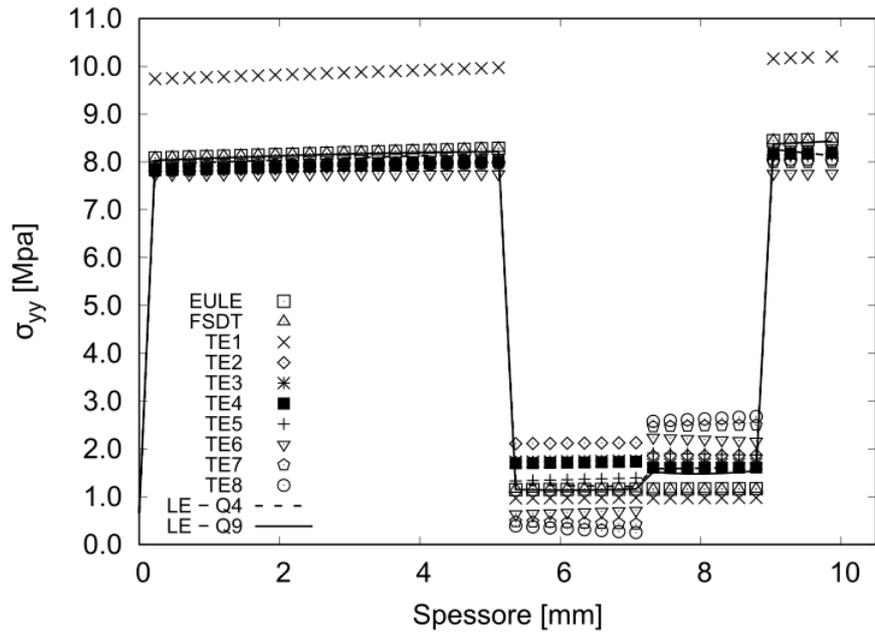


Figura 8.8: Variazione σ_{yy} sul web a $L/2$

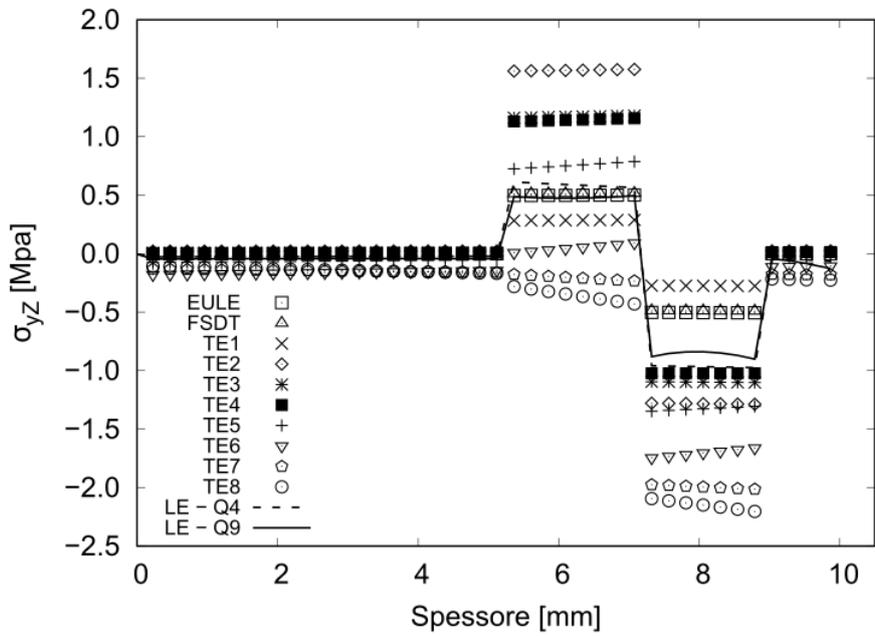


Figura 8.9: Variazione σ_{yz} sul web a $L/2$

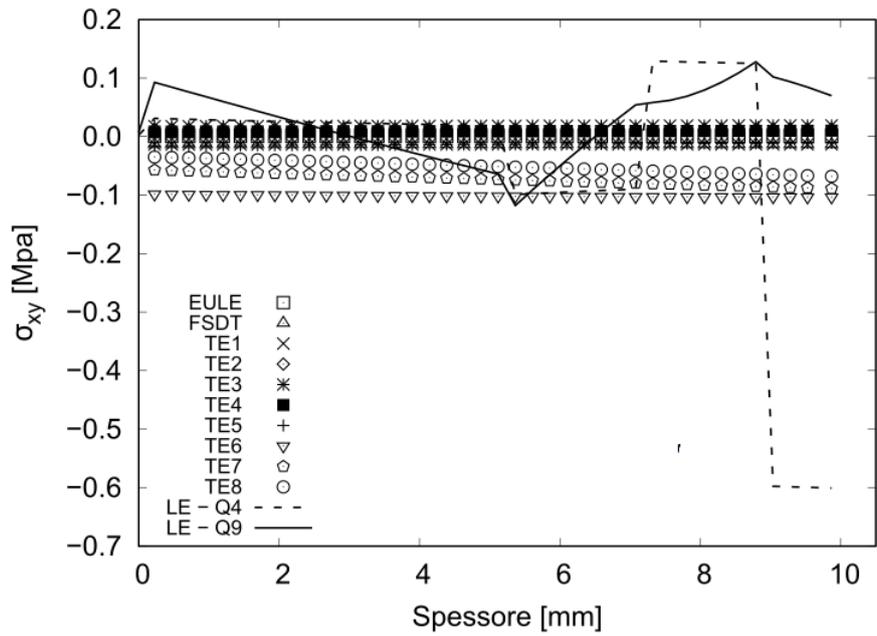


Figura 8.10: Variazione σ_{yx} sul web a $L/2$

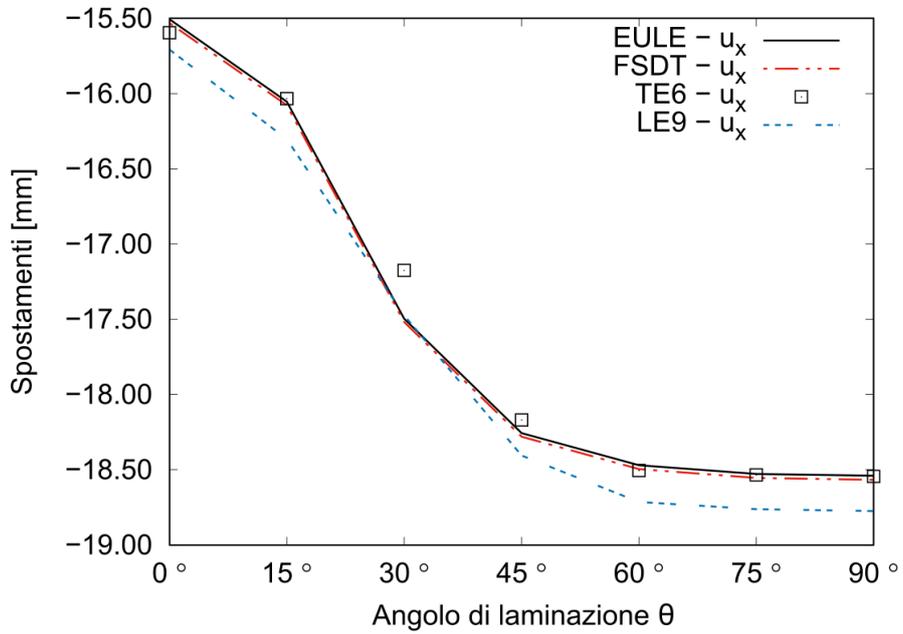


Figura 8.11: Freccia al tip al variare dell'angolo di laminazione

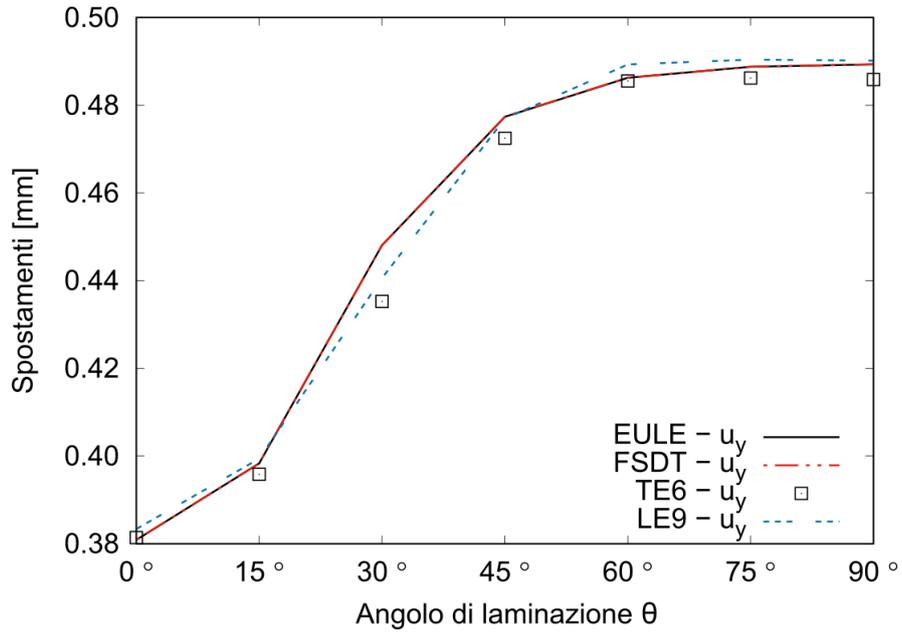


Figura 8.12: Freccia al tip al variare dell'angolo di laminazione

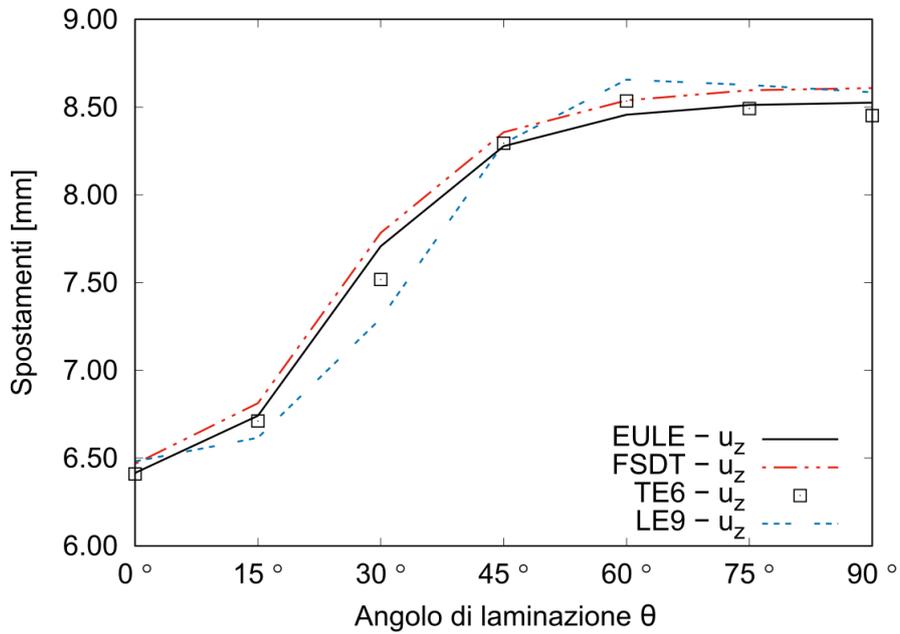


Figura 8.13: Freccia al tip al variare dell'angolo di laminazione

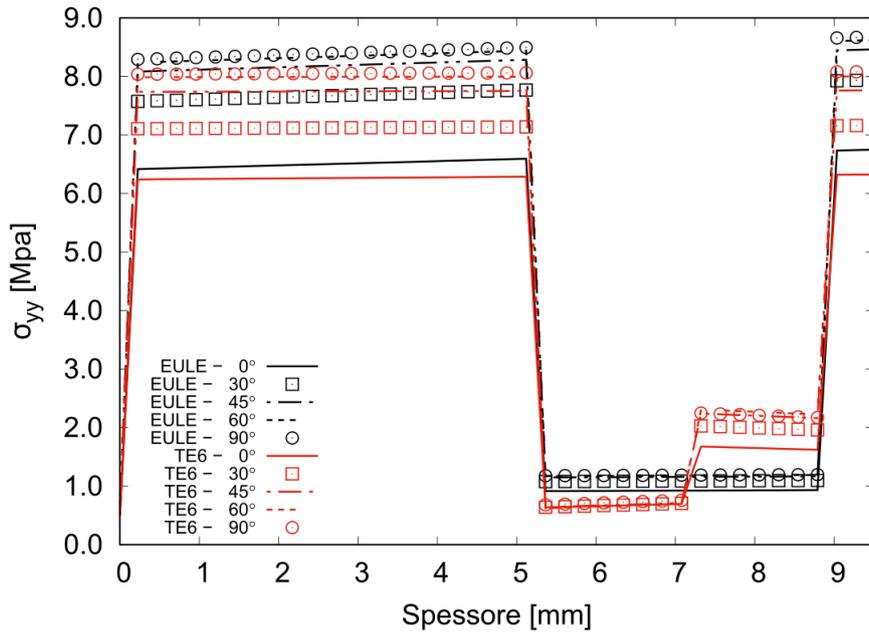


Figura 8.14: Variazione di σ_{yy} sul web

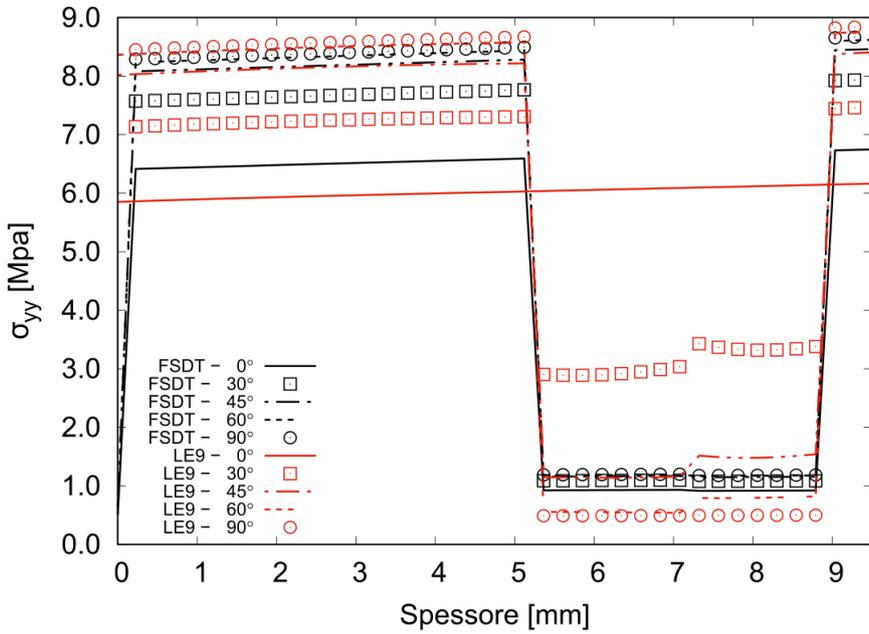


Figura 8.15: Variazione di σ_{yy} sul web

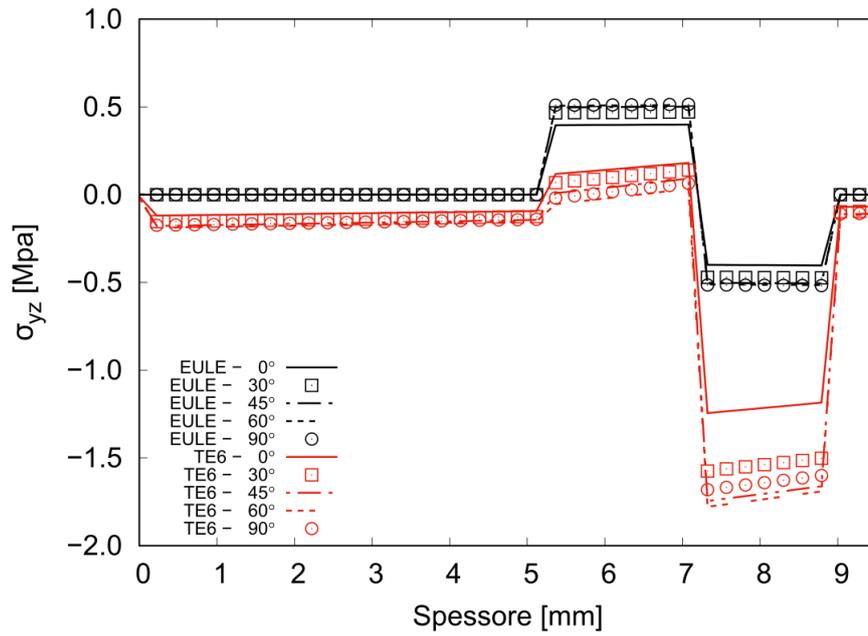


Figura 8.16: Variazione di σ_{yz} sul web

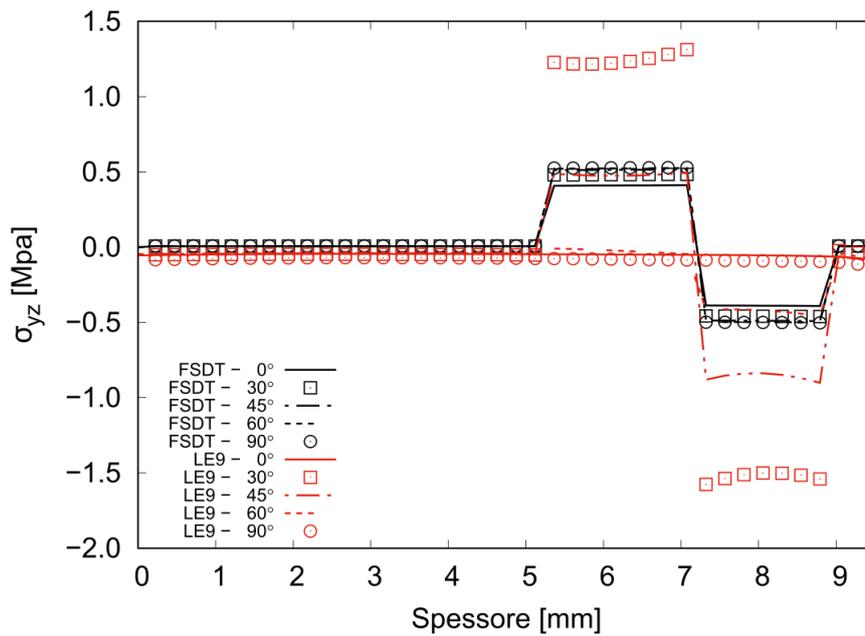


Figura 8.17: Variazione di σ_{yz} sul web

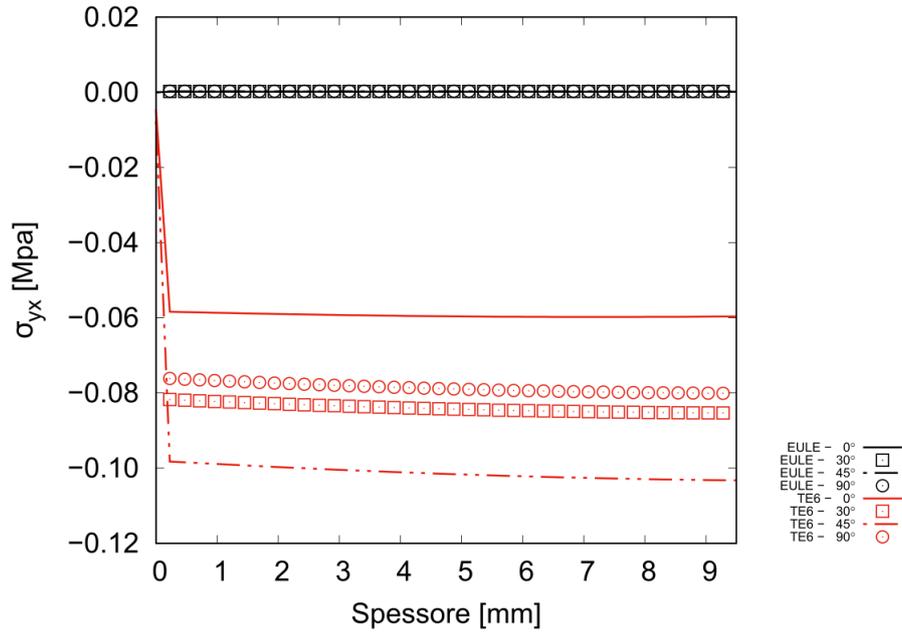


Figura 8.18: Variazione di σ_{yx} sul web

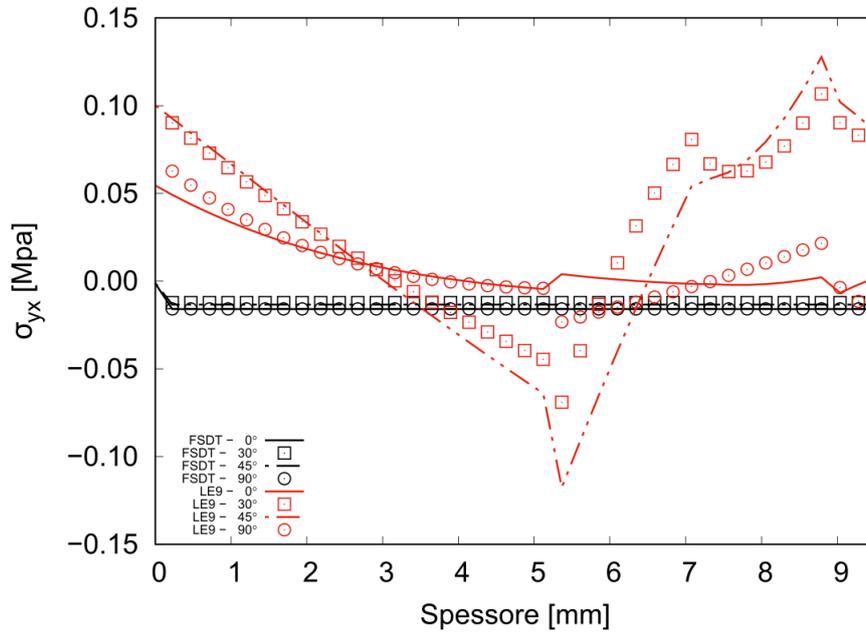


Figura 8.19: Variazione di σ_{yx} sul web

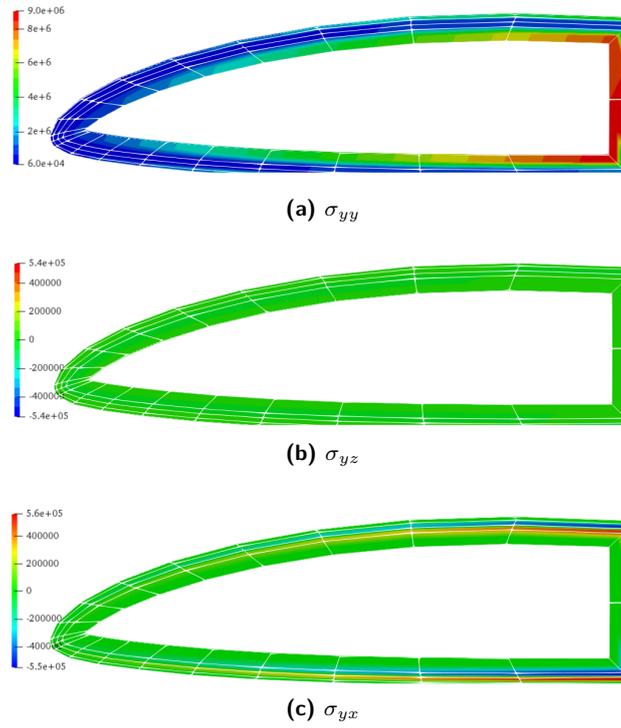


Figura 8.20: Tensioni [Pa] nella sezione trasversale del profilo a L/2 - Modello Eulero-Bernoulli

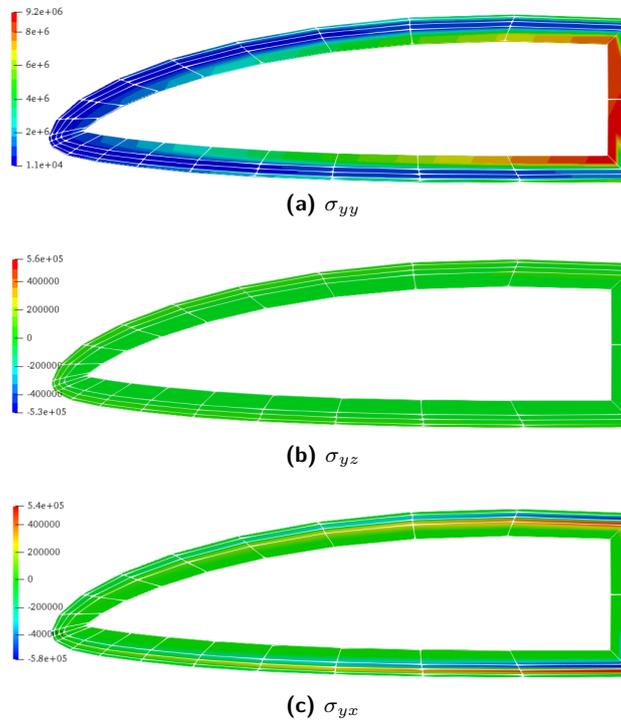


Figura 8.21: Tensioni [Pa] nella sezione trasversale del profilo a L/2 - Modello FSDT

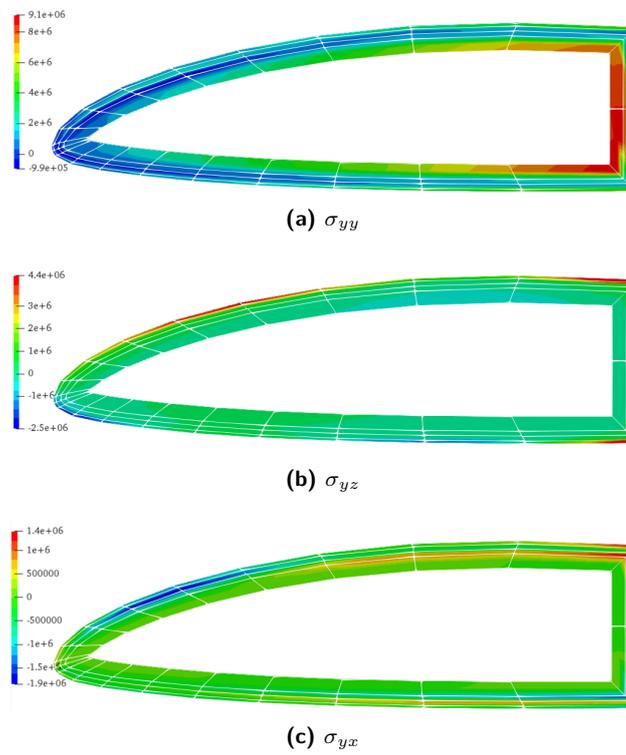


Figura 8.22: Tensioni [Pa] nella sezione trasversale del profilo a L/2 - Modello Taylor grado 6

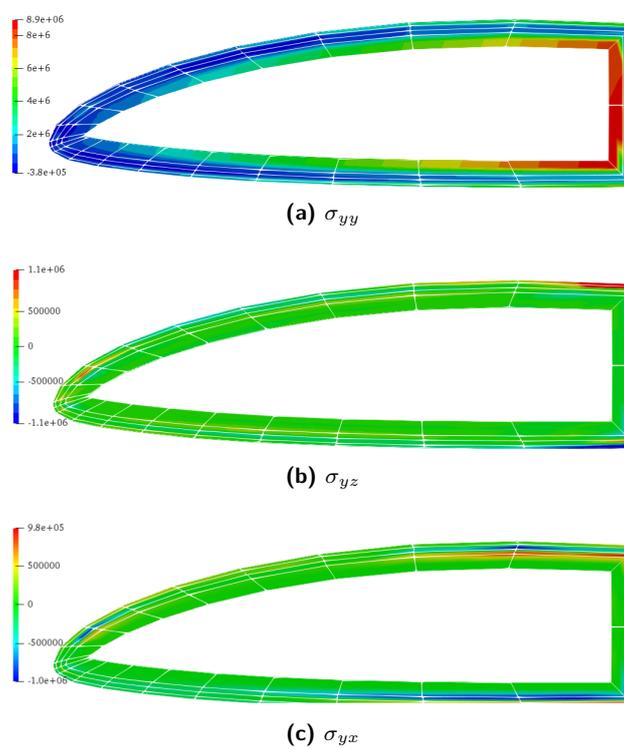


Figura 8.23: Tensioni [Pa] nella sezione trasversale del profilo a L/2 - Modello Lagrange a 9 elementi

8.2 Analisi dinamica

Per l'analisi dinamica è stata eseguito uno studio delle frequenze naturali della pala in composito. Nelle tabelle 8.2, 8.3 e 8.4 sono mostrati le prime dieci frequenze naturali associati a tre modi di vibrare: modo "F" associato al moto di flappeggio, modo "L" inerente ad una vibrazione attorno l'asse z della pala e il modo "T" associato al moto torsionale. In figura 8.24 è possibile confrontare, per una laminazione a 45° , le frequenze al variare dei modelli; si nota come prevedibile che attraverso teorie semplici, come Eulero-Bernoulli o Timoshenko, non è stato possibile descrivere il modo torsionale della pala. Questo non accade per i modelli di Taylor e Lagrange che riescono a cogliere la torsione, si evidenzia però una sovrastima della frequenza del modo torsionale per TE1. Si nota che la scelta del modello non incide particolarmente sul computo delle frequenze naturali.

Anche per l'analisi dinamica è stato analizzato il comportamento della struttura al variare dell'angolo di laminazione tra le fibre, oltre alla già citata analisi strutturale in base ai modelli utilizzati. Anche in questo caso si è utilizzata il MAC (fig. 8.25) per avere una visione globale e chiara delle differenze. Nel confronto tra i vari modelli si nota che le maggiori differenze si hanno tra i modelli Eulero-Bernoulli (EULE), Timoshenko (FSDT) e Taylor di grado 1 (TE1) questo perché il modo torsionale non è percepito con precisione (nei primi due modi non è neanche considerato). Negli altri casi invece si ha la costruzione di matrici con diagonal unitarie, significando che si ha il confronto solo tra modi identici. L'analisi del MAC conferma la buona efficienza dei modelli ridotti per il calcolo delle frequenze naturali e la determinazione dei rispettivi modi. Invece nel confronto tra le varie laminazioni (fig. 8.26) si nota come le diagonal siano quasi sempre dei valori unitari perché si confrontano due modi uguali, si evidenziano però anche degli scambi di frequenze in alcuni casi (tutti nel confronto tra le varie laminazioni e quella a 0°). In figura 8.27 sono mostrati, dal punto di vista grafico, i primi sei modi di vibrare della pala nel caso di una laminazione a 45 gradi ed usando un modello di Lagrange a nove elementi.

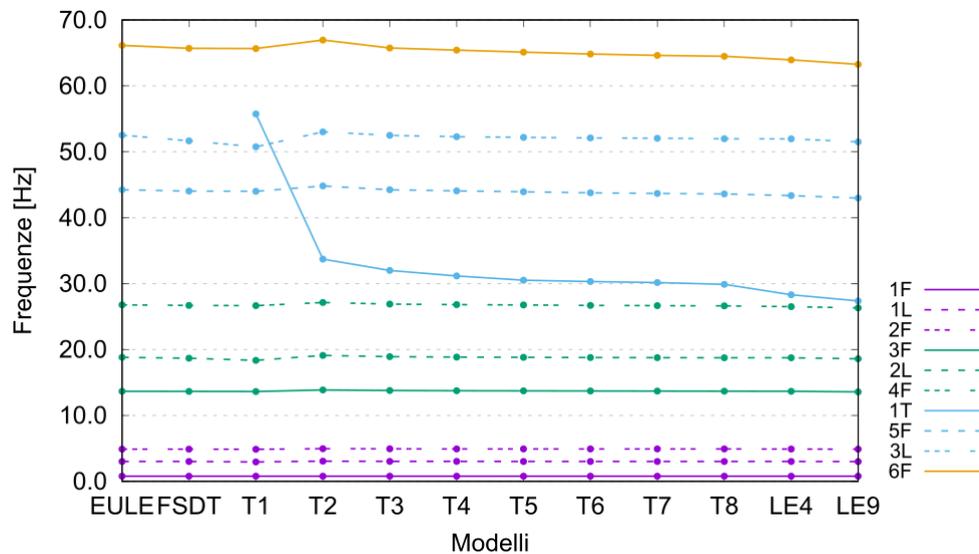


Figura 8.24: Frequenze naturali al variare dei modelli

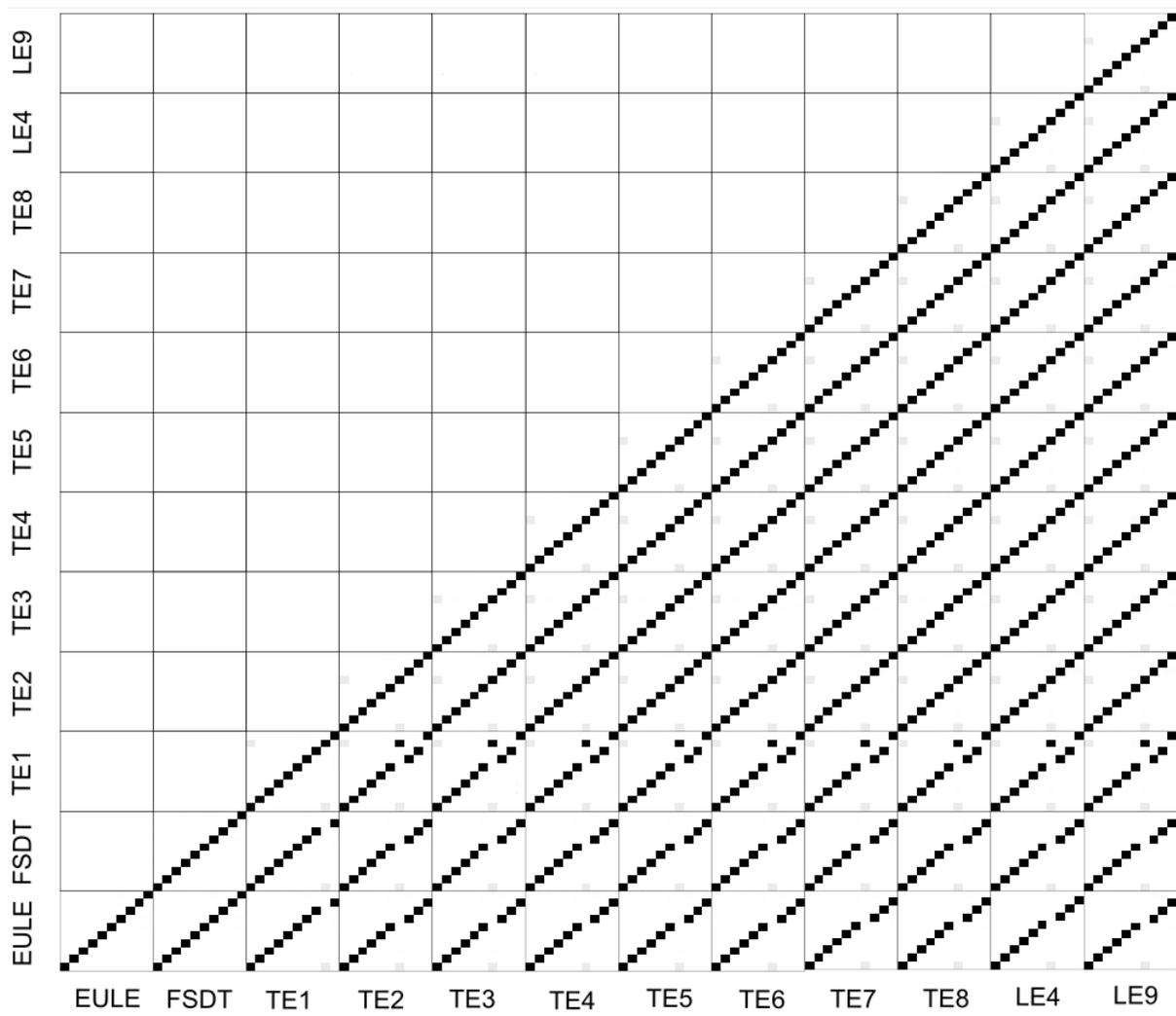


Figura 8.25: MAC tra i vari modelli utilizzati per l'analisi

Tabella 8.2: Frequenze naturali della pala in composito [Hz]

Laminazione 0°										
	EULE	FDTS	TE1	TE2	TE3	TE4	TE5	TE6	LE4	LE9
DOF	252	252	252	504	840	1,260	1,764	2,352	10,584	38,136
1F	0.98	0.98	0.98	0.99	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98
1L	3.41	3.41	3.31	3.46	3.42	3.41	3.40	3.40	3.41	3.39
2F	6.16	6.15	6.15	6.17	6.15	6.14	6.13	6.13	6.11	6.09
3F	17.25	17.20	17.18	17.25	17.17	17.12	17.06	17.01	16.89	16.82
2L	21.35	21.12	20.53	21.43	21.18	21.11	21.06	21.04	21.13	20.98
1T	-	-	54.91	24.33	23.52	22.89	22.65	22.44	22.50	21.51
4F	33.79	33.64	33.61	33.74	33.47	33.31	33.10	32.95	32.51	32.33
5F	55.86	55.47	56.56	55.62	54.94	54.56	54.06	53.68	52.57	52.15
3L	59.63	58.14	55.42	59.02	58.31	58.06	57.85	57.80	58.01	57.56
6F	83.49	82.63	82.58	73.05	70.53	68.55	67.82	67.18	67.47	64.28

Laminazione 30°										
	EULE	FDTS	TE1	TE2	TE3	TE4	TE5	TE6	LE4	LE9
DOF	252	252	252	504	840	1,260	1,764	2,352	10,584	38,136
1F	0.89	0.83	0.83	0.82	0.82	0.82	0.82	0.82	0.85	0.85
1L	5.19	3.33	3.04	2.82	2.79	2.84	2.74	2.70	3.11	3.08
2F	9.00	5.23	5.23	5.34	5.33	5.33	5.32	5.32	5.32	5.29
3F	11.78	14.68	14.63	14.83	14.77	14.78	14.74	14.75	14.80	14.71
2L	16.71	19.87	18.94	19.52	19.42	19.57	19.35	19.21	19.34	19.18
1T	-	-	56.17	28.73	28.49	28.53	28.43	28.43	27.62	26.71
4F	32.15	28.77	28.62	33.02	31.37	30.52	29.67	29.39	28.73	28.50
5F	52.27	47.54	47.23	47.77	47.14	47.34	46.90	46.76	46.86	46.44
3L	52.27	53.32	52.44	52.82	52.42	52.18	51.94	51.70	53.57	53.09
6F	72.75	70.82	70.44	71.86	70.58	71.10	69.98	69.43	68.97	68.19

Tabella 8.3: Frequenze naturali della pala in composito [Hz]

Laminazione 45°											
	EULE	FDTS	TE1	TE2	TE3	TE4	TE5	TE6	LE4	LE9	
DOF	252	252	252	504	840	1,260	1,764	2,352	10,584	38,136	
1F	0.78	0.78	0.78	0.79	0.79	0.79	0.79	0.79	0.79	0.78	
1L	3.01	3.00	2.95	3.06	3.04	3.02	3.02	3.01	3.01	2.99	
2F	4.88	4.87	4.87	4.95	4.93	4.92	4.92	4.91	4.91	4.88	
3F	13.66	13.64	13.62	13.86	13.78	13.74	13.73	13.70	13.65	13.57	
2L	18.81	18.68	18.35	19.10	18.92	18.84	18.81	18.78	18.75	18.59	
1T	-	-	55.74	27.14	26.90	26.81	26.75	26.69	26.51	27.37	
4F	26.77	26.69	26.66	33.71	32.00	31.17	30.52	30.31	28.31	26.32	
5F	44.25	44.05	44.01	44.83	44.25	44.08	43.93	43.79	43.36	43.00	
3L	52.53	51.67	50.77	53.02	52.50	52.29	52.18	52.11	51.97	51.51	
6F	66.14	65.70	65.66	66.95	65.74	65.42	65.12	64.83	63.95	63.27	
Laminazione 60°											
	EULE	FDTS	TE1	TE2	TE3	TE4	TE5	TE6	LE4	LE9	
DOF	252	252	252	504	840	1,260	1,764	2,352	10,584	38,136	
1F	0.76	0.76	0.76	0.77	0.76	0.76	0.76	0.76	0.76	0.76	
1L	2.97	2.97	2.93	3.04	2.99	2.98	2.97	2.97	2.98	2.95	
2F	4.77	4.77	4.77	4.80	4.78	4.78	4.77	4.76	4.76	4.74	
3F	13.37	13.34	13.34	13.43	13.37	13.33	13.31	13.28	13.25	13.19	
2L	18.59	18.45	18.21	18.95	18.60	18.54	18.49	18.47	18.54	18.38	
1T	-	-	55.27	26.28	26.10	26.01	25.94	25.87	25.71	25.89	
4F	26.19	26.11	26.10	31.74	30.28	29.53	28.96	28.76	26.84	25.53	
5F	43.30	43.11	43.08	43.40	42.95	42.76	42.59	42.43	42.03	41.72	
3L	51.92	51.00	50.33	52.57	51.60	51.41	51.27	51.21	51.34	50.90	
6F	64.72	64.30	64.28	64.76	63.84	63.48	63.12	62.81	61.93	61.34	

Tabella 8.4: Frequenze naturali della pala in composito [Hz]

		Laminazione 90°										
	EULE	FDTS	TE1	TE2	TE3	TE4	TE5	TE6	LE4	LE9		
DOF	252	252	252	504	840	1,260	1,764	2,352	10,584	38,136		
1F	0.76	0.76	0.76	0.77	0.77	0.76	0.76	0.76	0.76	0.76		
1L	2.96	2.96	2.92	3.11	2.99	2.98	2.97	2.96	2.97	2.97		
2F	4.74	4.73	4.73	4.81	4.79	4.78	4.77	4.76	4.75	4.73		
3F	13.27	13.25	13.24	13.46	13.38	13.34	13.30	13.27	13.18	13.12		
2L	18.53	18.38	18.16	19.30	18.58	18.51	18.42	18.40	18.43	18.27		
1T	-	-	54.91	24.43	23.71	23.05	22.77	22.54	22.47	21.49		
4F	26.00	25.92	25.91	26.33	26.14	26.03	25.90	25.80	25.52	25.38		
5F	42.98	42.79	42.78	43.46	43.03	42.78	42.47	42.23	41.56	41.26		
3L	51.75	50.76	50.18	53.31	51.33	51.10	50.82	50.74	50.83	50.36		
6F	64.24	63.83	63.82	64.82	63.98	63.49	62.86	62.38	61.02	60.43		

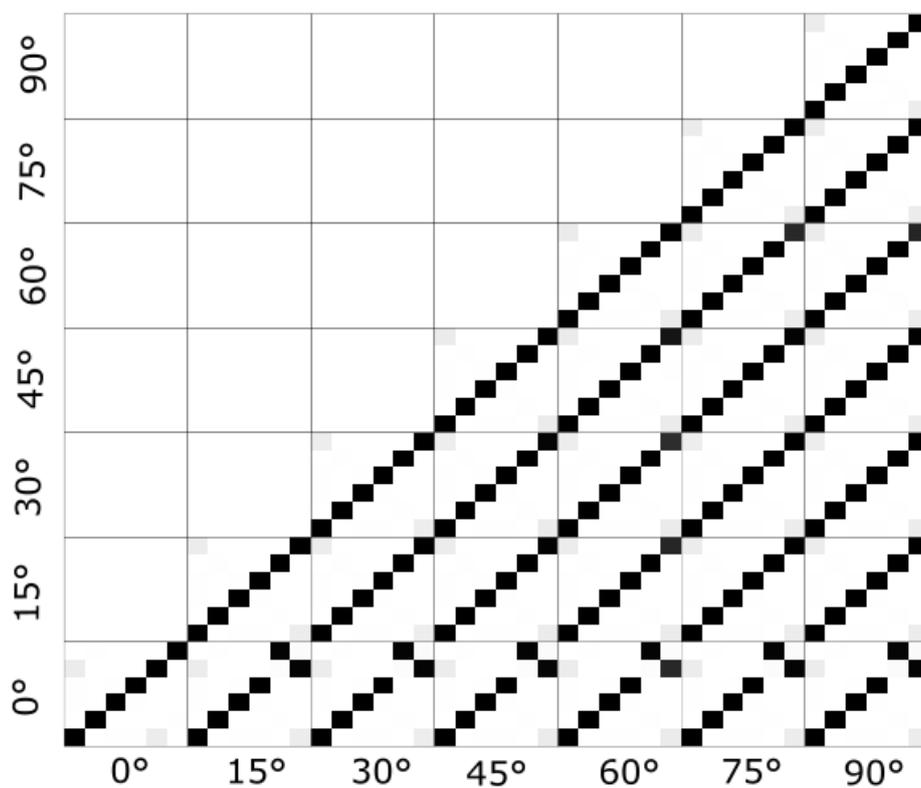


Figura 8.26: MAC tra le combinazioni di laminazioni possibili nella struttura

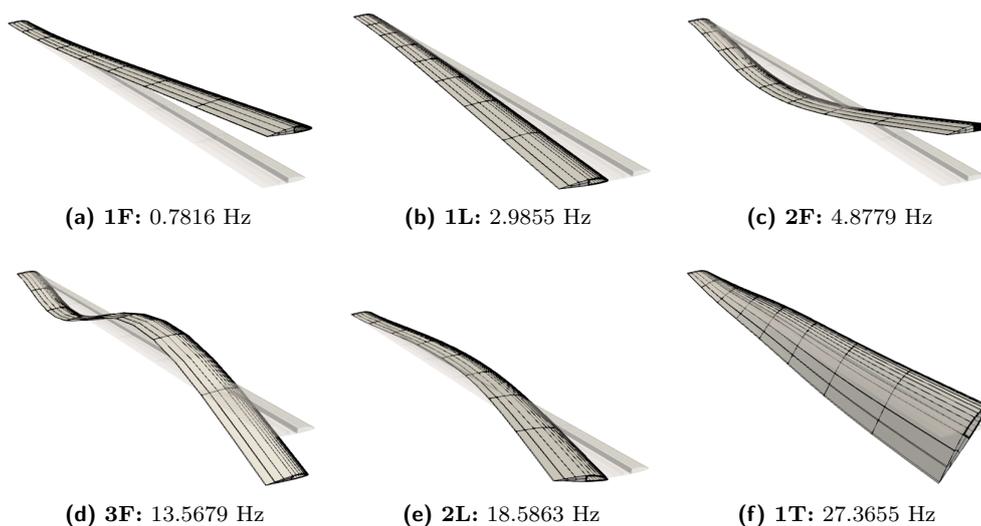


Figura 8.27: Modi di vibrare con laminazione a 45°

8.3 Risposta nel tempo

In questo ultimo caso sottoponiamo la struttura a carichi variabili nel tempo di diversa natura. Dato un carico di 100 N applicato al tip alare si modificherà la sua storia temporale, si identificano tre casi:

- STEP: il carico partendo da un valore nullo raggiunge ad un certo istante il suo valore massimo e lo mantiene fino ad analisi conclusa;
- RAMPA: il carico partendo da un valore nullo raggiunge ad un certo istante il suo valore massimo gradualmente seguendo una rampa di pendenza impostata precedentemente all'analisi;
- SINUSOIDALE: il carico assume un andamento sinusoidale dall'istante iniziale fino ad analisi conclusa.

Si nota che dato la natura del carico lo spostamento maggiore, in tutti i casi, risulta essere quello rivolto verso l'asse z. Il sistema è stato dotato di uno smorzamento definito da parametri adimensionali i cui valori descrivono in prima approssimazione il comportamento reale della struttura. I grafici rispettano i comportamenti attesi validando ulteriormente la correttezza nella scelta di modelli LE9 per descrivere al meglio la dinamica della struttura.

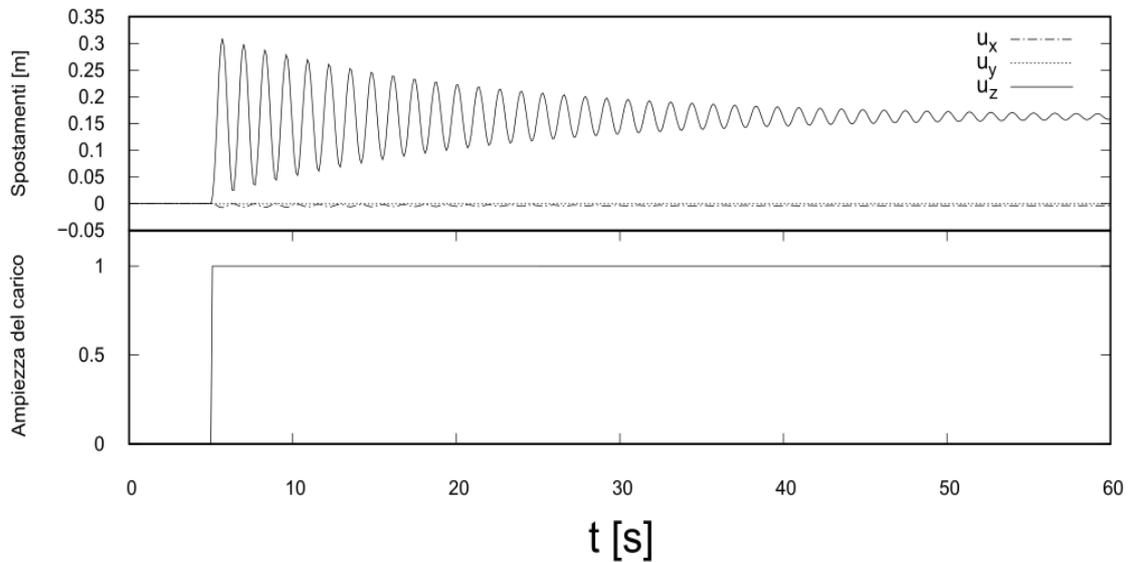


Figura 8.28: Storia temporale degli spostamenti al tip dovuti da un carico a gradino

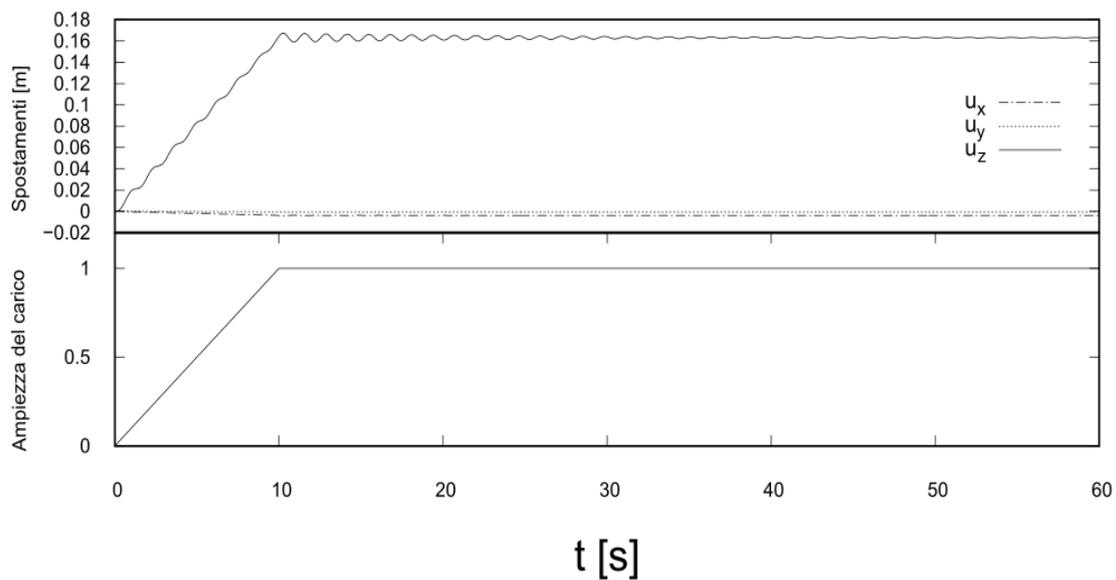


Figura 8.29: Storia temporale degli spostamenti al tip dovuti da un carico applicato gradualmente

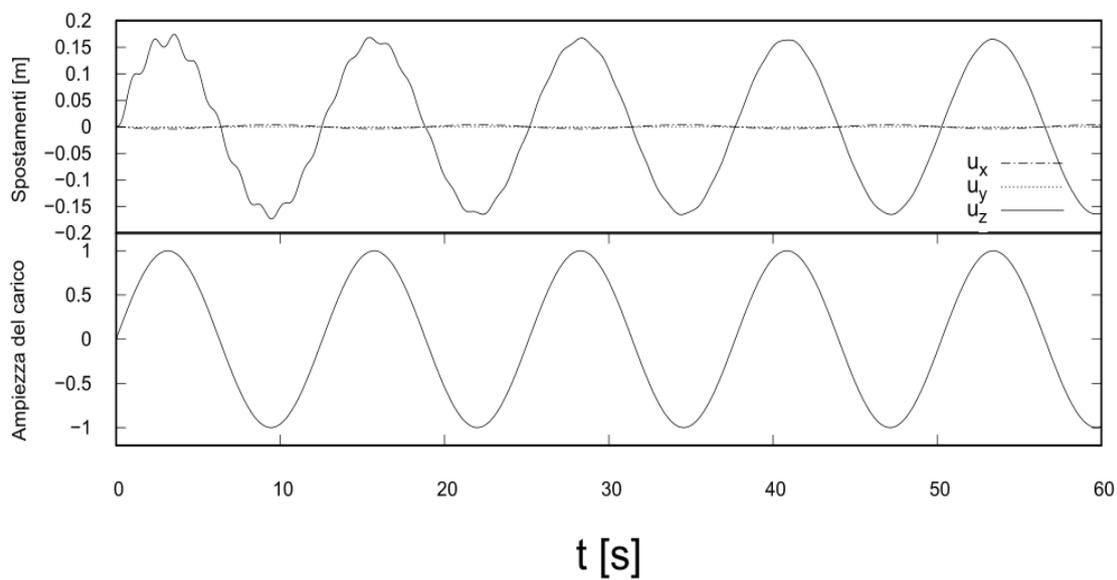


Figura 8.30: Storia temporale degli spostamenti al tip dovuti da un carico sinusoidale

Capitolo 9

Pala Blue-edge in composito

Le prossime analisi sono state eseguite prendendo in considerazione una pala in composito a doppio angolo di freccia, chiamate *Blue edge* dalla denominazione fornita dalla Airbus Helicopter. Il profilo è identico a quello utilizzato per la pala precedente, risulta modificata solo la geometria in pianta della struttura (fig. 9.1). Il modello matematico consiste in elementi 1D nelle zone lineari ed elementi 3D nelle zone di transizione in cui è presente l'angolo di freccia (fig. 9.2). La sezione trasversale degli elementi 1D è stata modellata utilizzando 101 elementi di Lagrange di tipo Q9. Il modello riproduce accuratamente tutte le superfici e i volumi della struttura.

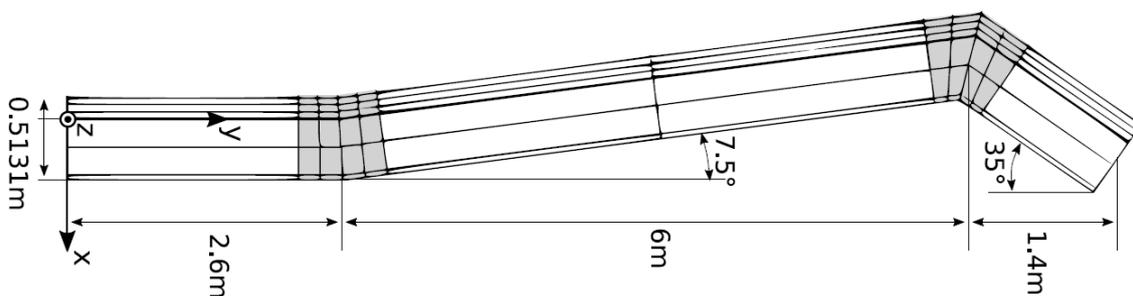


Figura 9.1: Geometria della pala *Blue Edge*

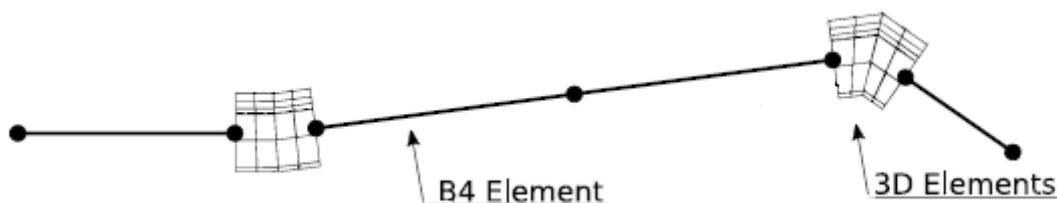


Figura 9.2: Disposizioni delle beam 1D e degli elementi 3D

9.0.1 Analisi dinamica

Come per le strutture precedenti è stata eseguita un'analisi della frequenze naturali della pala *Blue Edge* al variare dei modelli utilizzati. Per permettere il collegamento tra gli elementi 1D

e 3D sono stati utilizzati modelli LE9 per i due nodi, delle beam 1D, più prossimi agli elementi tridimensionali. In tabella 9.1 sono mostrati i risultati al variare dei modelli utilizzati per un angolo di laminazione pari a 45° . Si nota che la struttura ha lo stesso comportamento riscontrato nella pala a profilo rettangolare, infatti risulta evidente come modelli EULE ed FSDT non siano assolutamente adatti per queste tipi di analisi multidimensionali. Invece con modelli di Taylor di ordine $N \geq 1$ si ottengono frequenze naturali molto simili rispetto ai modelli di riferimento LE9. Questi risultati dimostrano che è possibile ridurre il costo computazionale di un'analisi su strutture molto complesse utilizzando modelli meno rifiniti e ottenendo comunque risultati molto simili a quelli di riferimento. Un'ulteriore conferma è fornita dall'analisi dei modi di vibrare, dalla figura 9.4 è evidente la similitudine tra i modi utilizzando modelli diversi, inoltre l'analisi del MAC tra i vari modelli (fig. 9.3) mostra come i riquadri neri siano tutti disposti sulla diagonale di ogni riquadro di confronto.

Tabella 9.1: Frequenze naturali della pala *Blue Edge* al variare dei modelli - Angolo di laminazione delle fibre pari a 45°

	EULE	FSDT	TE1	TE2	TE3	TE4	TE5	TE6	LE9
DoF	30162	30162	30162	30360	30624	30954	31350	31812	59928
1F	51.79	55.22	0.81	0.76	0.76	0.76	0.76	0.76	0.75
1L	66.23	67.19	3.30	2.93	2.92	2.91	2.91	2.90	2.88
2F/1T	102.23	102.73	5.23	4.74	4.71	4.70	4.68	4.68	4.60
3F/1T	107.42	108.88	11.60	10.08	9.93	9.85	9.78	9.75	9.38
4F/1T	133.93	134.01	21.40	18.46	18.29	18.23	18.21	18.19	18.00
5F/1T	135.87	136.61	21.68	19.50	19.30	19.20	19.12	19.08	18.73

Infine è stata effettuata un'analisi delle frequenze al variare dell'angolo di laminazione, utilizzando solo modelli LE9, in modo tale da studiare il comportamento della struttura variando questi parametri. L'analisi è stata effettuata modificando l'orientamento delle fibre degli strati e nelle modalità descritte nel capitolo precedente sulla pala realistica in composito. I risultati ottenuti sono mostrati in tabella 9.2, si nota che anche in questo caso si ha la conferma che l'angolo di laminazione è significativo nell'analisi delle frequenze naturali, infatti tra i vari casi si notano variazioni in percentuali non trascurabili. Il MAC tra le varie laminazioni (fig. 9.5) mostra che si hanno delle differenze tra le varie configurazioni anche considerando i modi di vibrare.

Tabella 9.2: Frequenze naturali della pala *Blue Edge* al variare dell'angolo di laminazione - Modelli utilizzati per le beam 1D: LE9

Angolo di laminazione						
0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0.9383 _{1f}	0.9014 _{1f}	0.8185 _{1f}	0.7549 _{1f}	0.7336 _{1f}	0.7306 _{1f}	0.7305 _{1f}
3.2651 _{1l}	3.1376 _{1l}	2.9769 _{1l}	2.8833 _{1l}	2.8514 _{1l}	2.8431 _{1l}	2.8402 _{1l}
5.0765 _{2f/1t}	5.1316 _{2f/1t}	4.9058 _{2f/1t}	4.6023 _{2f/1t}	4.4542 _{2f/1t}	4.3571 _{2f/1t}	4.2913 _{2f/1t}
9.0883 _{3f/1t}	9.3623 _{3f/1t}	9.5815 _{3f/1t}	9.3820 _{3f/1t}	8.9707 _{3f/1t}	8.4005 _{3f/1t}	8.0531 _{3f/1t}
20.3070 _{4f/1t}	19.5802 _{4f/1t}	18.6210 _{4f/1t}	18.0000 _{4f/1t}	17.6893 _{4f/1t}	18.0261 _{4f/1t}	17.9530 _{4f/1t}
21.8628 _{5f/1t}	21.3115 _{5f/1t}	19.9086 _{5f/1t}	18.7309 _{5f/1t}	18.2279 _{5f/1t}	17.4557 _{5f/1t}	17.3158 _{5f/1t}

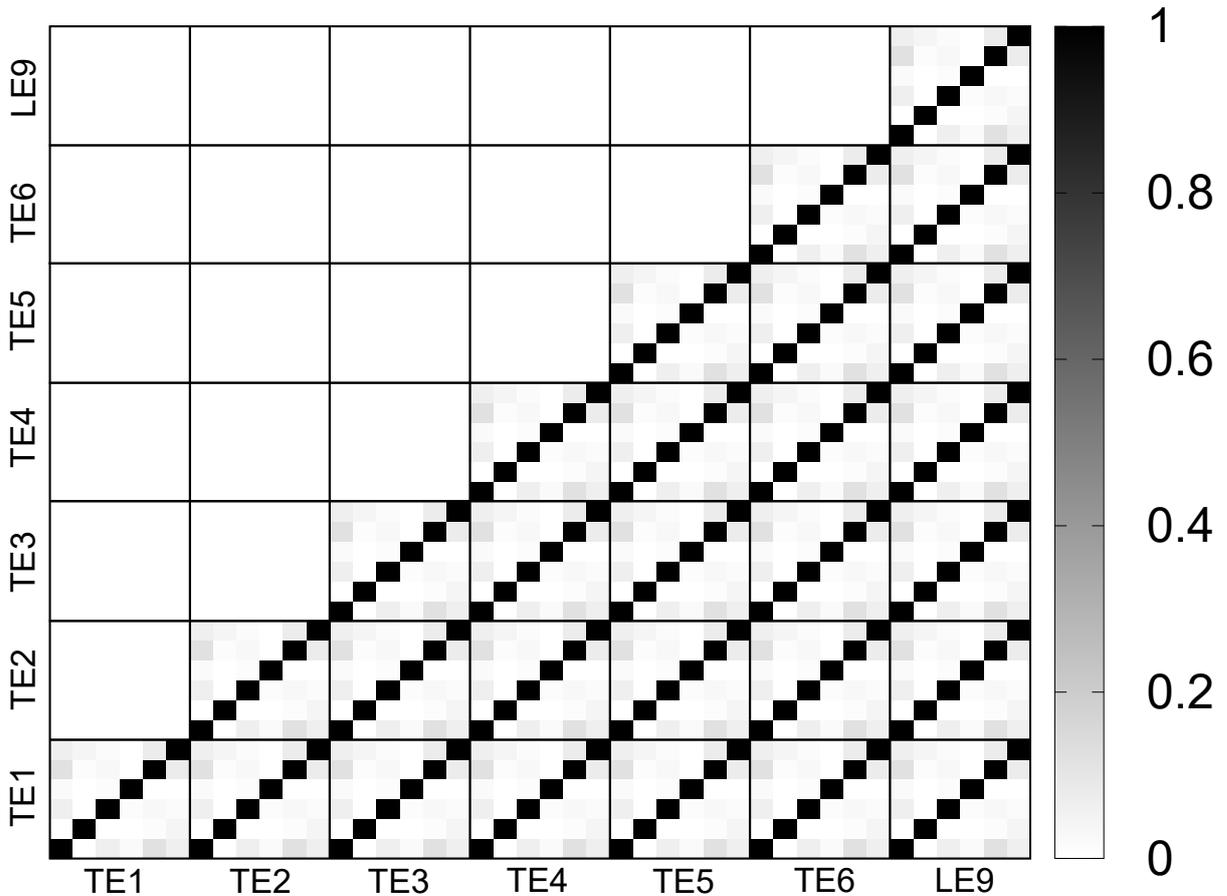


Figura 9.3: MAC tra i vari modelli utilizzati - Angolo di laminazione di 45°

9.0.2 Analisi Statica

Per questa struttura è stata eseguita un'analisi statica degli spostamenti, sottoposta ad un carico centrifugo dovuto da una velocità angolare della pala pari a 2π attorno all'asse z . Nelle figure 9.6, 9.7 e 9.8 sono rappresentati gli spostamenti al bordo di attacco della pala al variare dell'apertura della stessa, come per le analisi precedenti si è confrontato il comportamento della struttura al variare dell'angolo di laminazione delle fibre dei due strati più interni della parte frontale del profilo. Si nota che per gli spostamenti lungo l'asse x e y gli andamenti sono abbastanza simili tra le possibili laminazioni, si osserva una certa disomogeneità per gli spostamenti lungo l'asse z . Questo comportamento è probabilmente dovuto a particolari accoppiamenti tra flessione e torsione che variano al variare delle laminazioni.



Figura 9.4: Confronto tra modi di vibrare - Modelli TE1 (in rosso) vs. Modelli LE9 (in verde). La configurazione indeformata è visualizzata in nero.

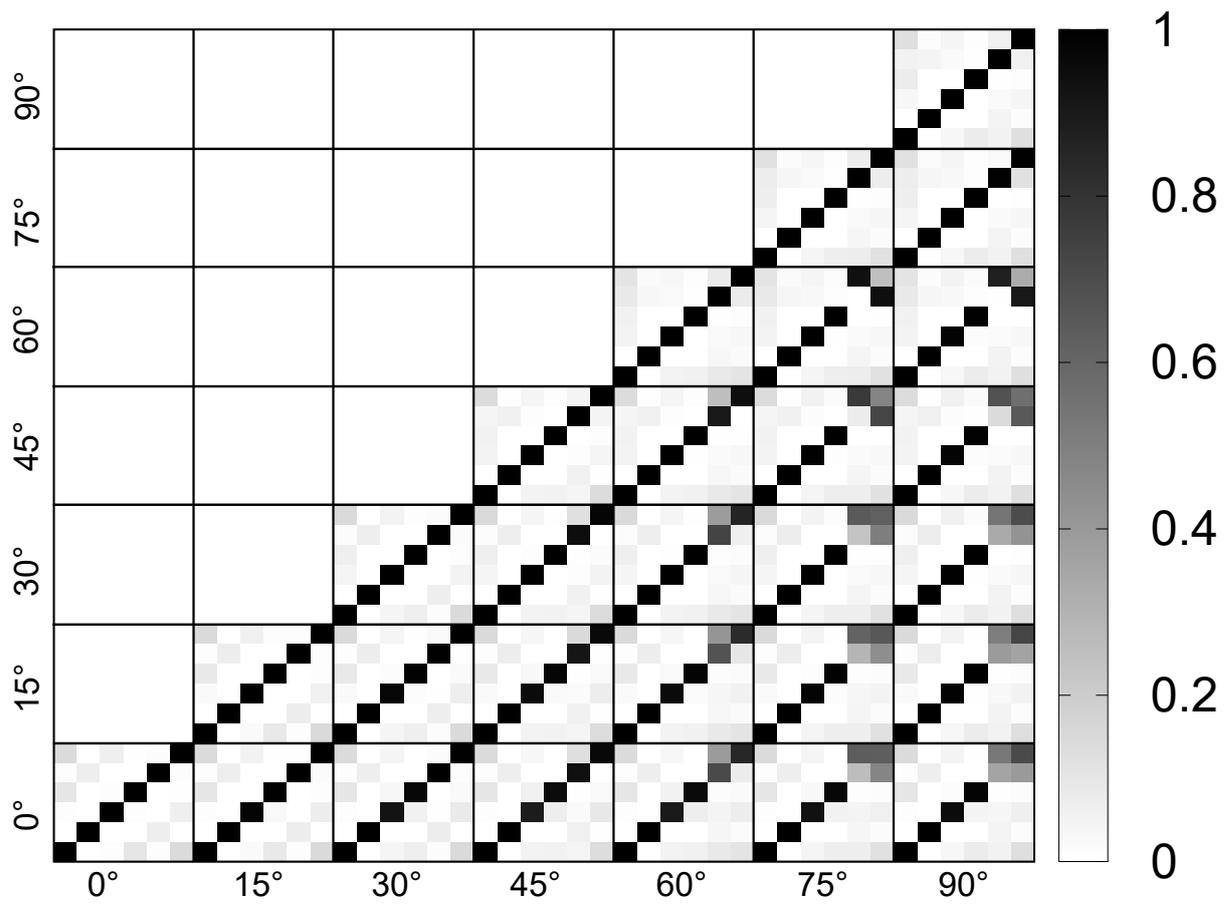


Figura 9.5: MAC tra i vari angoli di laminazione - Modelli LE9

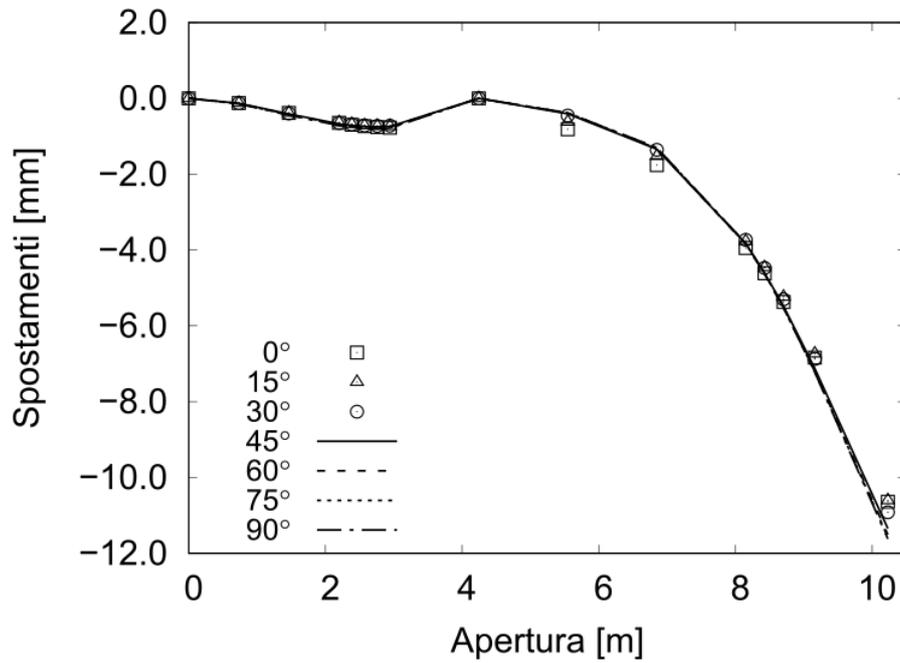


Figura 9.6: Spostamenti u_x al bordo d'attacco lungo l'apertura al variare dell'angolo di laminazione

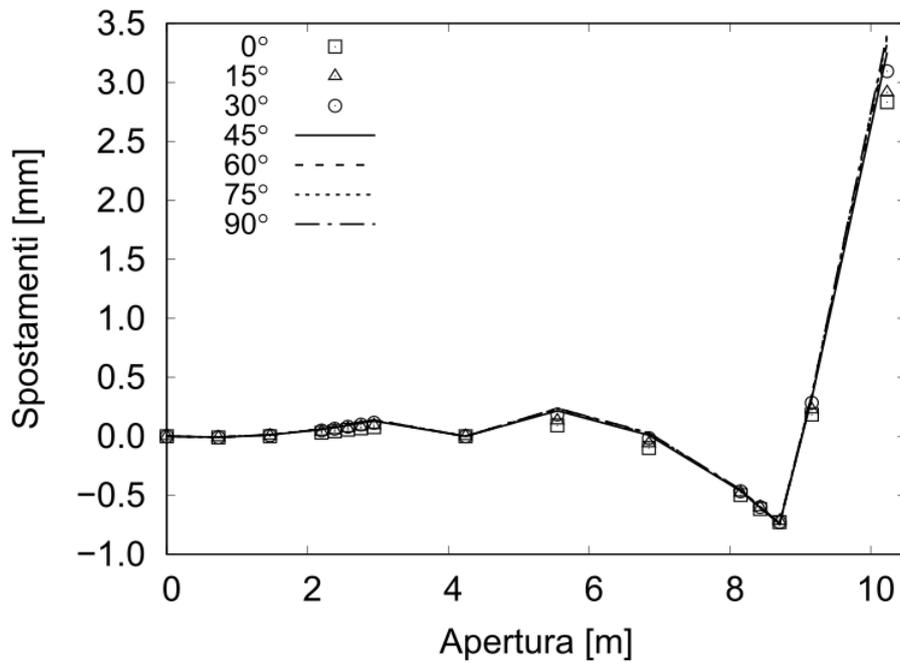


Figura 9.7: Spostamenti u_y al bordo d'attacco lungo l'apertura al variare dell'angolo di laminazione

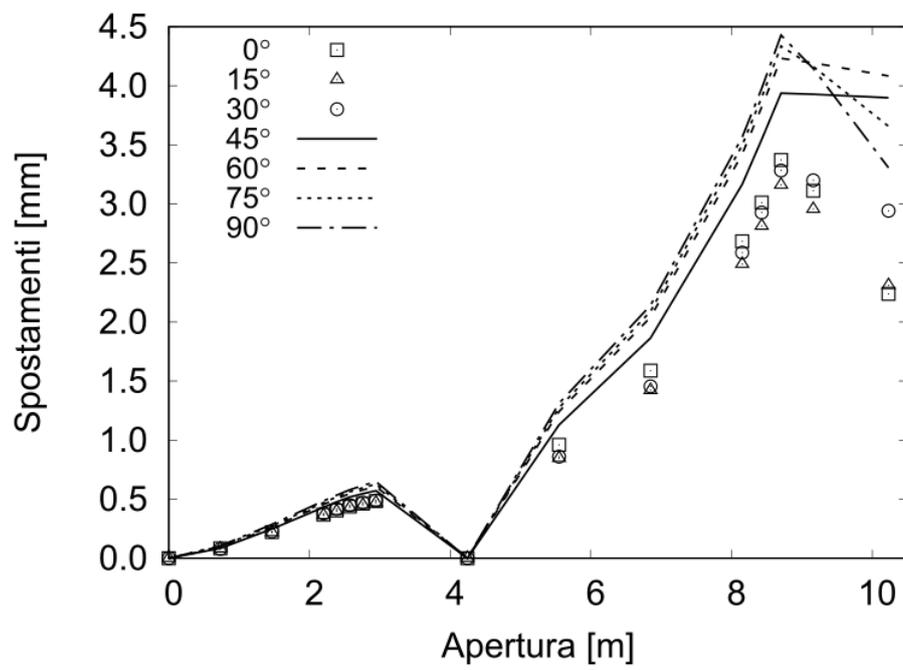


Figura 9.8: Spostamenti u_z al bordo d'attacco lungo l'apertura al variare dell'angolo di laminazione

Capitolo 10

Appendice - Piastra curva (shell) in composito: tabelle e grafici

Tabella 10.1: Frequenze naturali [Hz] nella configurazione. PL:Poisson Locking.
 f : flessione flapwise, l : flessione chordwise, t : torsione.

	45° / -45°						DoF
EULE	142.45 $_{1f}$	888.19 $_{2f}$	1,834.54 $_{1l}$	2,466.90 $_{3f}$	3,305.90	4,778.64 $_{4f}$	225
FSDT	141.66 $_{1f}$	869.37 $_{2f}$	1,557.10 $_{1l}$	2,358.41 $_{3f}$	3,305.89	4,429.39 $_{4f}$	225
TE1	176.38 $_{1f}$	1,085.87 $_{2f}$	1,782.49 $_{1l}$	2,564.23 $_{1t}$	2,959.34 $_{3f}$	3,417.31	225
TE1_{noPL}	207.41 $_{1f}$	1,258.94 $_{2f}$	1,831.00 $_{1l}$	2,370.16 $_{1t}$	3,308.85 $_{3f}$	3,785.62	225
TE2	163.33 $_{1f}$	503.44 $_{1t}$	630.80 $_{2f}$	966.99 $_{3f}$	1,203.49 $_{4f/2t}$	1,241.69 $_{4f}$	450
TE3	85.59 $_{1t}$	138.92 $_{1f}$	345.23 $_{2f/1t}$	444.53 $_{2t}$	615.36 $_{2f}$	740.28 $_{3f/1t}$	750
TE4	83.44 $_{1t}$	125.29 $_{1f}$	223.66 $_{2t}$	337.67 $_{2f/1t}$	378.86 $_{2f/2t}$	673.16 $_{3f}$	1125
TE5	82.19 $_{1t}$	119.68 $_{1f}$	209.65 $_{2t}$	326.59 $_{2f/1t}$	359.41 $_{2f/2t}$	459.82 $_{3t}$	1575
TE6	81.50 $_{1t}$	118.31 $_{1f}$	207.53 $_{2t}$	320.61 $_{2f/1t}$	349.64 $_{2f/2t}$	420.98 $_{3t}$	2100
LE9	79.69 $_{1t}$	116.90 $_{1f}$	205.06 $_{2t}$	312.30 $_{2f/1t}$	341.28 $_{2f/2t}$	407.53 $_{3t}$	17,325

Tabella 10.2: Frequenze naturali [Hz] nelle diverse configurazioni a due strati. PL:Poisson Locking.
 f : flessione flapwise, l : flessione chordwise, t : torsione.

ISO							DoF
EULE	176.77 $_{1f}$	1,102.22 $_{2f}$	2,264.59 $_{1l}$	3,061.56 $_{3f}$	4,134.70	5,931.11 $_{4f}$	225
FSDT	176.38 $_{1f}$	1,085.85 $_{2f}$	1,782.37 $_{1l}$	2,959.05 $_{3f}$	4,134.70	4,785.38 $_{4f}$	225
TE1	176.38 $_{1f}$	1,085.87 $_{2f}$	1,782.49 $_{1l}$	2,564.23 $_{1t}$	2,959.34 $_{3f}$	3,417.31	225
TE1_{noPL}	204.49 $_{1f}$	1,253.49 $_{2f}$	1,928.68 $_{1l}$	2,564.23 $_{1t}$	3,395.13 $_{3f}$	4,187.46	225
TE2	166.02 $_{1f}$	431.76 $_{1t}$	640.77 $_{2f}$	1,116.03 $_{3f}$	1,457.35 $_{2t}$	1,503.67 $_{2f/1t}$	450
TE3	87.50 $_{1t}$	151.59 $_{1f}$	360.40 $_{2f/1t}$	507.72 $_{2t}$	610.08 $_{2f/2t}$	798.29 $_{3f/1t}$	750
TE4	86.17 $_{1t}$	143.74 $_{1f/2t}$	266.17 $_{2t}$	342.65 $_{2f/1t}$	403.59 $_{2f/2t}$	732.00 $_{3f}$	1125
TE5	84.84 $_{1t}$	137.83 $_{1f/2t}$	243.92 $_{2t}$	340.25 $_{2f/1t}$	384.88 $_{2f/2t}$	575.75 $_{3t}$	1575
TE6	84.72 $_{1t}$	137.31 $_{1f/2t}$	242.73 $_{2t}$	338.82 $_{2f/1t}$	380.34 $_{2f/2t}$	525.66 $_{3t}$	2100
LE9	84.67 $_{1t}$	137.16 $_{1f/2t}$	242.48 $_{2t}$	338.06 $_{2f/1t}$	379.07 $_{2f/2t}$	514.94 $_{3t}$	12375
0° / 0°							
EULE	372.69 $_{1f}$	2,322.94 $_{2f}$	4,737.30 $_{1l}$	6,448.30 $_{3f}$	8,718.03	12,481.63 $_{4f}$	225
FSDT	364.98 $_{1f}$	1,661.06 $_{1l}$	2,040.96 $_{2f}$	4,938.68 $_{2l}$	4,979.15 $_{3f}$	8,400.22 $_{4f}$	225
TE1	364.98 $_{1f}$	1,661.32 $_{1l}$	2,041.29 $_{2f}$	1,735.04 $_{1t}$	4,945.23 $_{2l}$	4,983.96 $_{3f}$	225
TE1_{noPL}	367.33 $_{1f}$	1,662.27 $_{1l}$	2,051.85 $_{2f}$	1,735.04 $_{1t}$	4,949.27 $_{2l}$	5,004.09 $_{3f}$	225
TE2	214.76 $_{1f}$	422.79 $_{1t}$	600.27 $_{2f}$	858.49 $_{2t}$	1,152.52 $_{3f}$	1,661.71 $_{1l}$	450
TE3	109.10 $_{1t}$	180.25 $_{1f/2t}$	447.46 $_{2t}$	455.28 $_{2f/1t}$	550.17 $_{2f/2t}$	1,081.72 $_{3f/1t}$	750
TE4	105.18 $_{1t}$	133.87 $_{1f/2t}$	239.15 $_{2t}$	441.75 $_{2f/1t}$	451.20 $_{2f/2t}$	629.78	1125
TE5	104.33 $_{1t}$	122.28 $_{1f/2t}$	235.69 $_{2t}$	329.15 $_{3t}$	440.03 $_{2f/2t}$	440.29 $_{2f/1t}$	1575
TE6	103.90 $_{1t}$	121.20 $_{1f/2t}$	235.47 $_{2t}$	290.90 $_{3t}$	436.98 $_{2f/2t}$	435.75 $_{2f/1t}$	2100
LE9	103.73 $_{1t}$	120.86 $_{1f/2t}$	235.36 $_{2t}$	282.95 $_{3t}$	436.11 $_{2f/2t}$	434.50 $_{2f/1t}$	12375
0° / 90°							
EULE	268.87 $_{1f}$	1,676.03 $_{2f}$	3,454.78 $_{1l}$	4,653.33 $_{3f}$	6,338.34	9,009.96 $_{4f}$	225
FSDT	265.93 $_{1f}$	1,560.56 $_{2f}$	1,598.68 $_{1l}$	3,997.82 $_{3f}$	4,647.34 $_{2l}$	6,337.28	225
TE1	265.91 $_{1f}$	1,560.60 $_{2f}$	1,598.80 $_{1l}$	1,735.04 $_{1t}$	3,999.94 $_{3f}$	4,651.38 $_{2l}$	225
TE1_{noPL}	268.35 $_{1f}$	1,573.24 $_{2f}$	1,601.12 $_{1l}$	1,735.04 $_{1t}$	4,027.57 $_{3f}$	4,663.04 $_{2l}$	225
TE2	188.22 $_{1f}$	369.39 $_{1t}$	602.81 $_{2f}$	1,072.71 $_{3f}$	1,448.15 $_{2t}$	1,524.09 $_{4f}$	450
TE3	83.11 $_{1t}$	163.09 $_{1f}$	323.85 $_{2f/1t}$	442.86 $_{2t}$	544.99 $_{2f}$	688.22 $_{3f/1t}$	750
TE4	81.40 $_{1t}$	147.96 $_{1f}$	248.34 $_{2t}$	311.72 $_{2f/1t}$	345.16 $_{2f/2t}$	659.12 $_{3f}$	1125
TE5	80.00 $_{1t}$	138.50 $_{1f}$	236.90 $_{2t}$	309.87 $_{2f/1t}$	324.58 $_{2f/2t}$	466.25 $_{3t}$	1575
TE6	79.82 $_{1t}$	138.00 $_{1f}$	236.61 $_{2t}$	305.76 $_{2f/1t}$	321.07 $_{2f/2t}$	454.12 $_{3t}$	2100
LE9	79.74 $_{1t}$	136.30 $_{1f}$	234.92 $_{2t}$	304.23 $_{2f/1t}$	319.06 $_{2f/2t}$	438.69 $_{3t}$	12375
90° / 90°							
EULE	90.45 $_{1f}$	563.96 $_{2f}$	1,162.05 $_{1l}$	1,566.43 $_{3f}$	2,104.15	3,034.46 $_{4f}$	225
FSDT	90.33 $_{1f}$	559.15 $_{2f}$	1,006.80 $_{1l}$	1,535.85 $_{3f}$	2,104.15	2,931.07 $_{4f}$	225
TE1	90.33 $_{1f}$	559.15 $_{2f}$	998.45 $_{1l}$	1,535.97 $_{3f}$	1,735.04 $_{1t}$	1,999.85	225
TE1_{noPL}	94.47 $_{1f}$	584.38 $_{2f}$	1,037.29 $_{1l}$	1,603.66 $_{3f}$	1,735.04 $_{1t}$	2,113.94	225
TE2	85.47 $_{1f}$	273.18 $_{1t}$	406.12 $_{2f}$	834.69 $_{3f}$	907.80 $_{2f/1t}$	996.70 $_{1l}$	450
TE3	52.21 $_{1t}$	82.66 $_{1f}$	203.99 $_{2f/1t}$	363.28 $_{2f}$	452.14 $_{3f/1t}$	505.69 $_{2t}$	750
TE4	51.79 $_{1t}$	82.23 $_{1f}$	199.82 $_{2f/1t}$	313.65 $_{2f}$	358.01 $_{2t}$	434.72 $_{3f/1t}$	1125
TE5	51.12 $_{1t}$	82.14 $_{1f}$	197.46 $_{2f/1t}$	306.85 $_{2f}$	347.76 $_{2t}$	432.46 $_{3f/1t}$	1575
TE6	51.09 $_{1t}$	82.12 $_{1f}$	197.28 $_{2f/1t}$	305.47 $_{2f}$	345.61 $_{2t}$	430.56 $_{3f/1t}$	2100
LE9	51.07 $_{1t}$	82.11 $_{1f}$	197.21 $_{2f/1t}$	305.39 $_{2f}$	345.57 $_{2t}$	430.21 $_{3f/1t}$	12375

Tabella 10.3: Frequenze naturali [Hz] nelle diverse configurazioni a tre strati. PL:Poisson Locking.
 f : flessione flapwise, l : flessione chordwise, t : torsione.

		$0^\circ / 90^\circ / 0^\circ$					DoF						
EULE	310.20	1_f	1,933.39	2_f	3,924.59	1_l	5,366.82	3_f	7,222.93	10,387.94	4_f	225	
FSDT	305.72	1_f	1,628.78	1_l	1,761.94	2_f	4,425.80	3_f	4,794.14	2_l	7,222.93	225	
TE1	305.72	1_f	1,628.99	1_l	1,762.15	2_f	1,735.04	1_t	4,429.05	3_f	4,799.45	2_l	225
TE1_{noPL}	308.76	1_f	1,631.52	1_l	1,777.09	2_f	1,735.04	1_t	4,459.92	3_f	4,811.47	2_l	225
TE2	208.70	1_f	395.62	1_t	687.27	2_f	1,319.80	2_t	1,340.96	3_f	1,630.92	1_l	450
TE3	102.90	1_t	178.47	1_f	443.69	2_t	454.19	$2_f/1_t$	634.10	2_f	1,094.88	$3_f/1_t$	750
TE4	100.56	1_t	141.71	$1_f/2_t$	243.74	2_t	442.56	$2_f/1_t$	452.50	$2_f/2_t$	639.32	3_t	1125
TE5	99.60	1_t	129.35	$1_f/2_t$	238.00	2_t	376.56	3_t	439.40	$2_f/2_t$	441.61	$2_f/1_t$	1575
TE6	99.09	1_t	128.56	$1_f/2_t$	237.76	2_t	341.80	3_t	436.69	$2_f/2_t$	436.35	$2_f/1_t$	2100
LE9	98.94	1_t	127.52	$1_f/2_t$	237.23	2_t	323.19	3_t	434.21	$2_f/1_t$	435.26	$2_f/2_t$	17,325
		$45^\circ / -45^\circ / 45^\circ$											
EULE	142.45	1_f	888.18	2_f	1,834.06	1_l	2,466.78	3_f	3,305.63	4,778.20	4_f	225	
FSDT	142.06	1_f	871.63	2_f	1,540.76	1_l	2,364.09	3_f	3,229.04	4,438.57	4_f	225	
TE1	139.63	1_f	861.84	2_f	1,483.15	1_l	1,907.35	2_l	1,875.32	1_t	2,340.73	3_f	225
TE1_{noPL}	206.64	1_f	1,250.94	2_f	1,830.38	1_l	2,330.30	2_l	3,285.81	1_t	3,753.05	3_f	225
TE2	162.23	1_f	496.39	1_t	637.13	2_f	1,028.03	3_f	1,216.68	2_t	1,432.28	4_f	450
TE3	106.34	1_t	140.93	1_f	387.73	$2_f/1_t$	490.26	2_t	631.23	$2_f/2_t$	810.72	$3_f/1_t$	750
TE4	89.15	1_t	133.81	1_f	251.13	$2_f/2_t$	371.49	$2_f/1_t$	428.96	2_t	718.77	3_f	1125
TE5	85.42	1_t	131.16	1_f	234.70	$2_f/2_t$	343.55	$2_f/1_t$	369.28	2_t	557.69	3_t	1575
TE6	85.21	1_t	130.86	1_f	233.98	$2_t/2_t$	337.43	$2_f/1_t$	359.74	2_t	526.76	3_t	2100
LE9	83.21	1_t	128.65	1_f	230.79	$2_f/2_t$	325.63	$2_f/1_t$	351.60	2_t	509.52	3_t	17,325
		$45^\circ / 0^\circ / -45^\circ$											
EULE	241.24	1_f	1,503.98	2_f	3,105.11	1_l	4,176.40	3_f	5,617.17	8,087.93	4_f	225	
FSDT	239.05	1_f	1,423.91	2_f	1,943.81	1_l	3,713.03	3_f	5,315.15	2_l	5,620.02	225	
TE1	238.31	1_f	1,420.74	2_f	1,726.06	1_t	2,039.55	$1_l/1_t$	3,702.62	3_f	4,784.01	1_l	225
TE1_{noPL}	270.22	1_f	1,602.34	2_f	1,834.70	1_t	2,738.07	$1_l/1_t$	4,113.86	3_f	5,526.36	1_l	225
TE2	226.19	1_f	504.19	1_t	732.60	2_f	1,057.12	3_f	1,208.81	2_t	1,319.50	4_f	450
TE3	99.11	1_t	197.13	1_f	403.50	$2_f/1_t$	473.06	2_t	664.17	$1_f/2_t$	795.95	$3_f/1_t$	750
TE4	97.13	1_t	152.08	1_f	272.03	2_t	399.52	$1_f/2_t$	388.16	$2_f/1_t$	717.98	$2_f/3_t$	1125
TE5	95.77	1_t	139.67	1_f	259.87	2_t	372.25	$2_f/1_t$	380.44	$2_f/2_t$	451.44	3_t	1575
TE6	95.42	1_t	137.74	$1_f/2_t$	258.60	2_t	374.53	$2_f/2_t$	361.59	$2_f/1_t$	419.40	3_t	2100
LE9	102.60	1_t	148.48	$1_f/2_t$	278.06	2_t	368.51		439.13	$2_f/2_t$	503.98	3_t	17,325

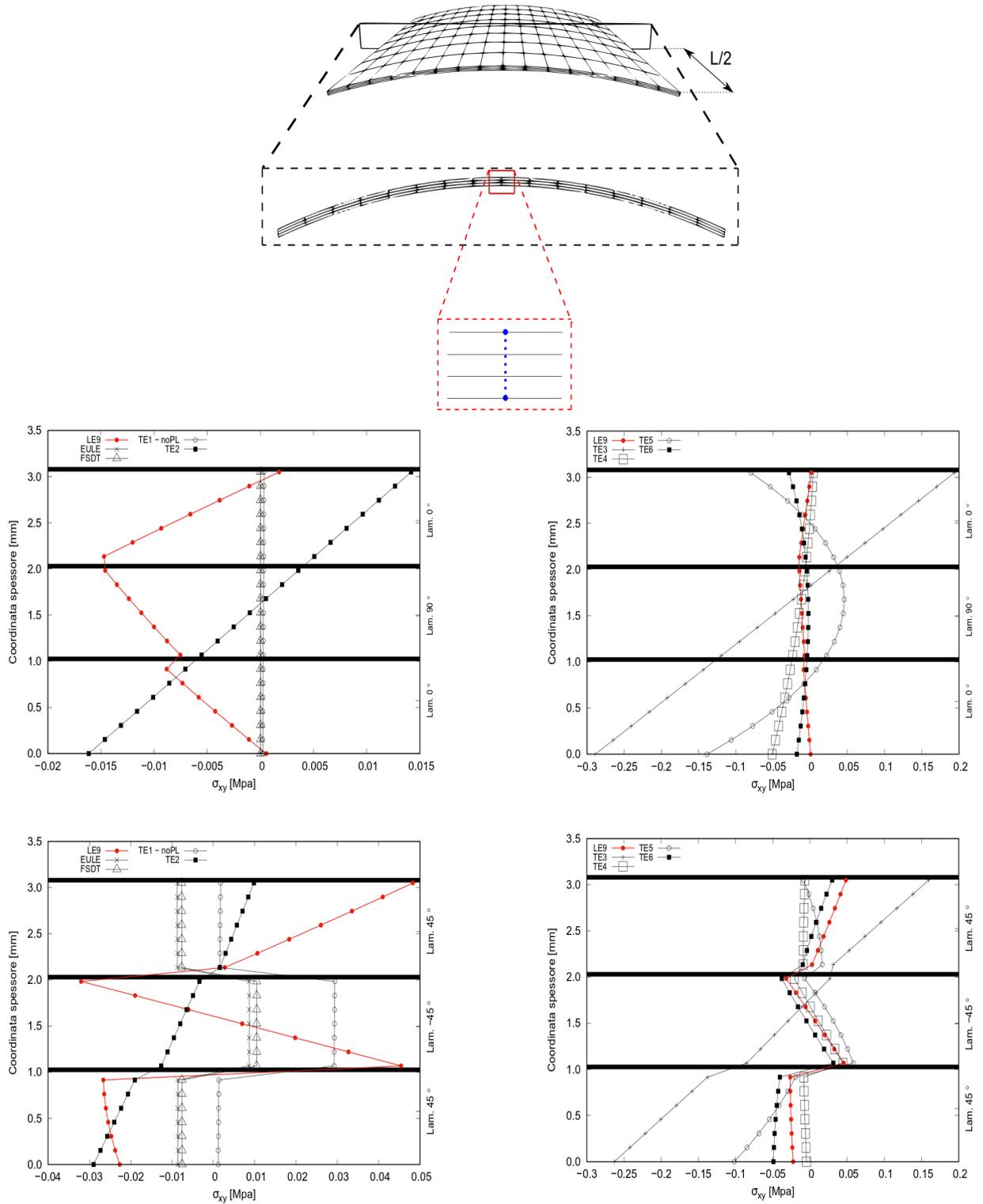


Figura 10.1: σ_{xy} al variare delle laminazioni

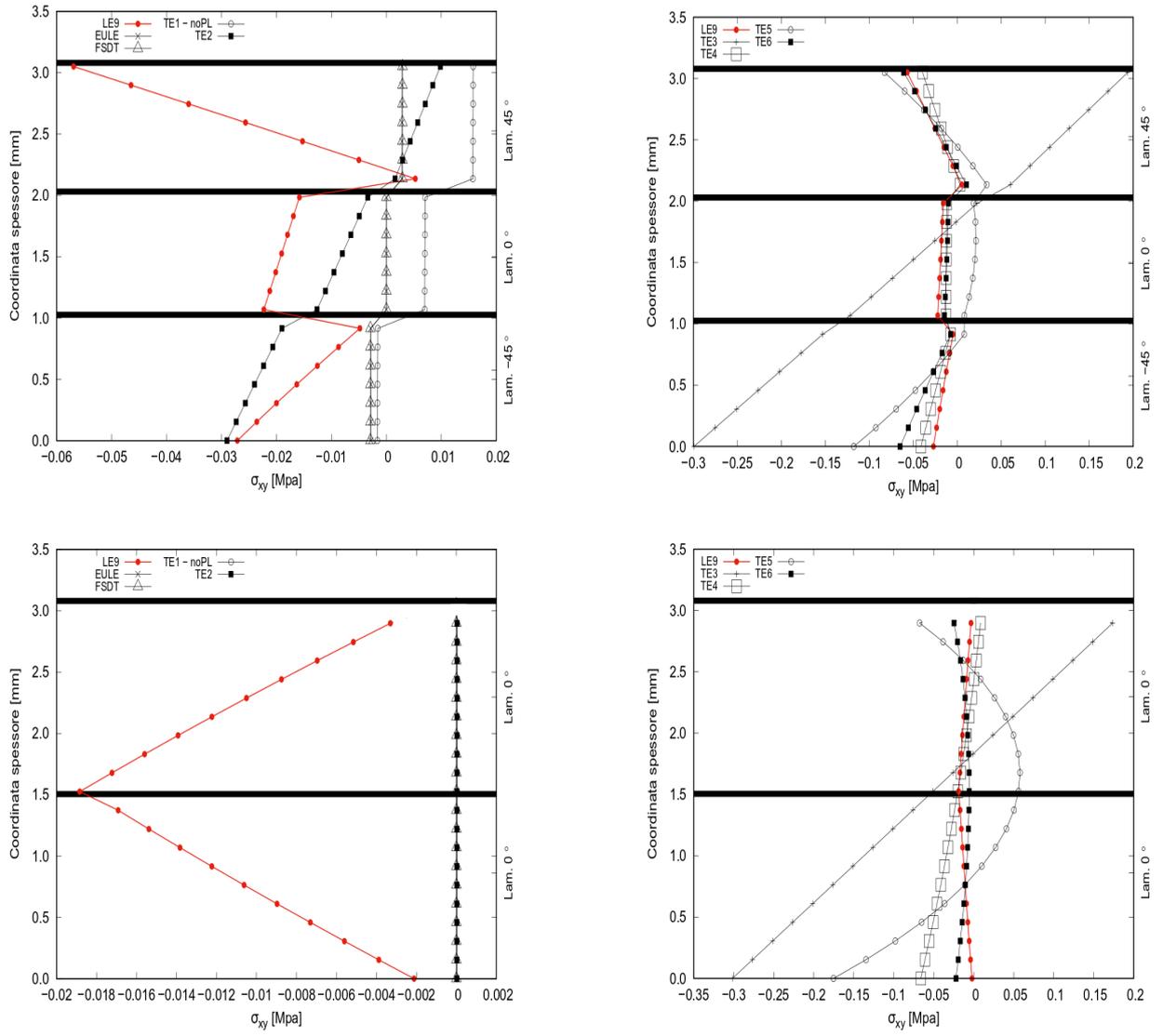


Figura 10.2: σ_{xy} al variare delle laminazioni

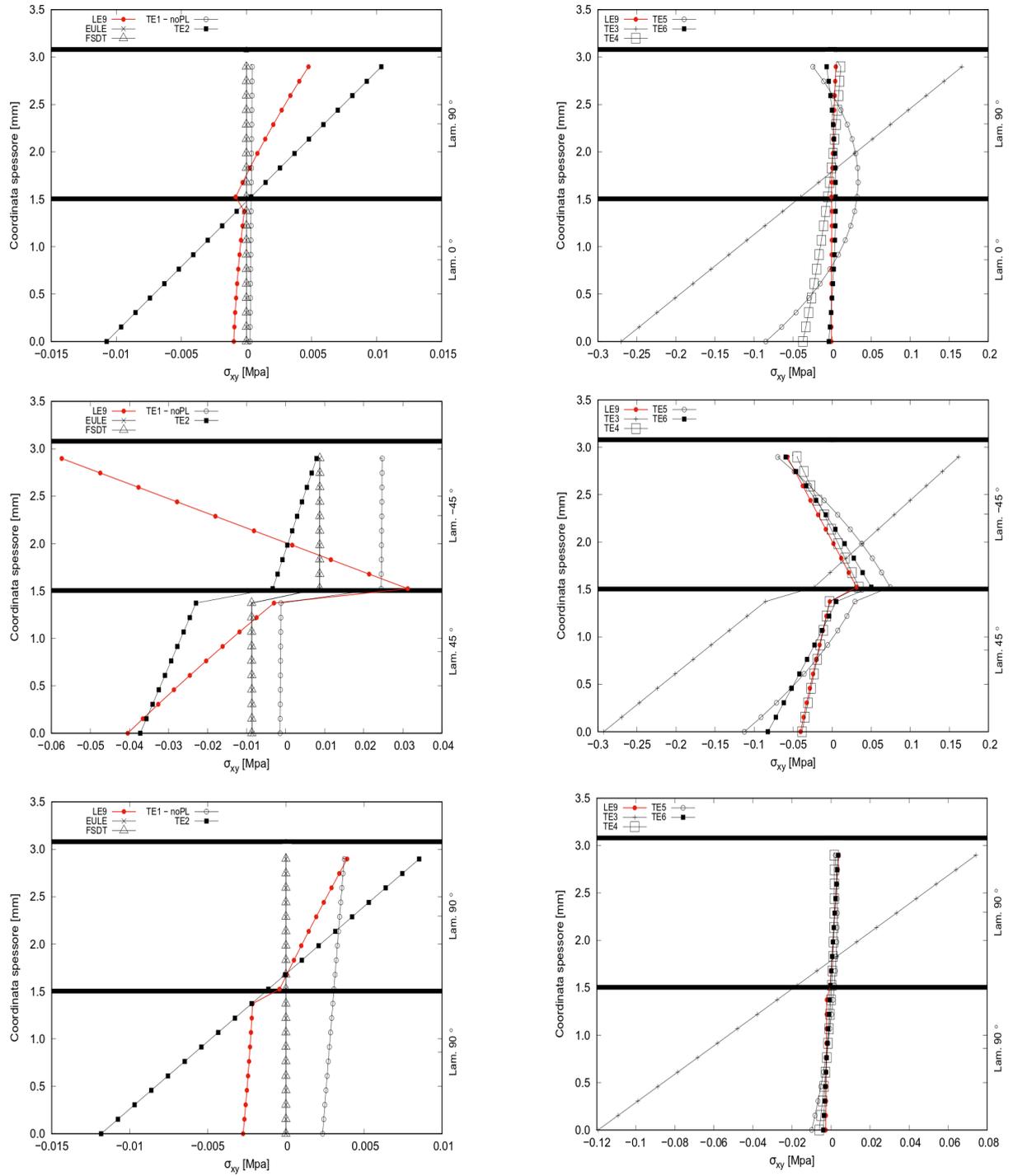


Figura 10.3: σ_{xy} al variare delle laminazioni

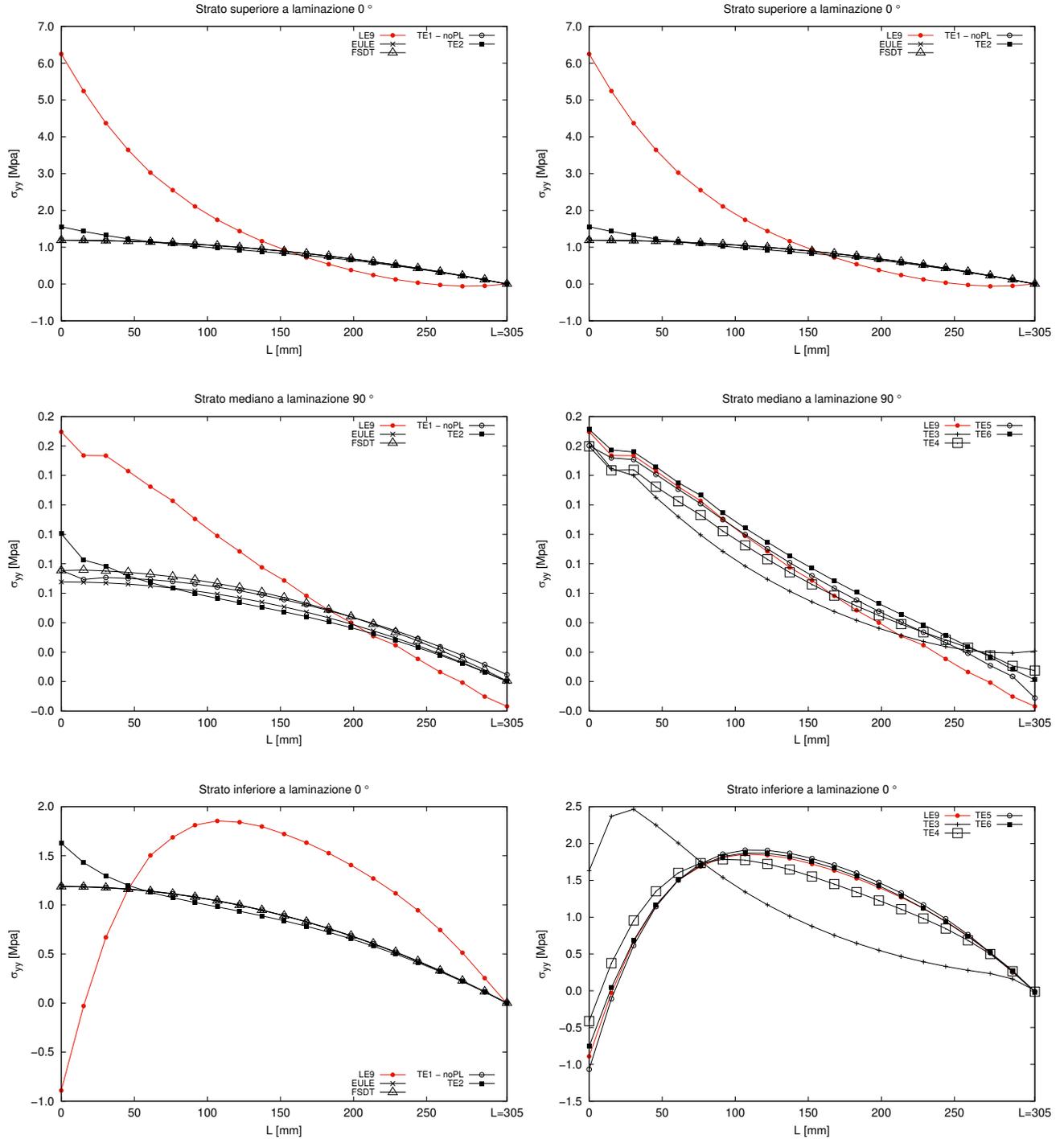


Figura 10.4: σ_{yy} per la configurazione $0^\circ/90^\circ/0^\circ$

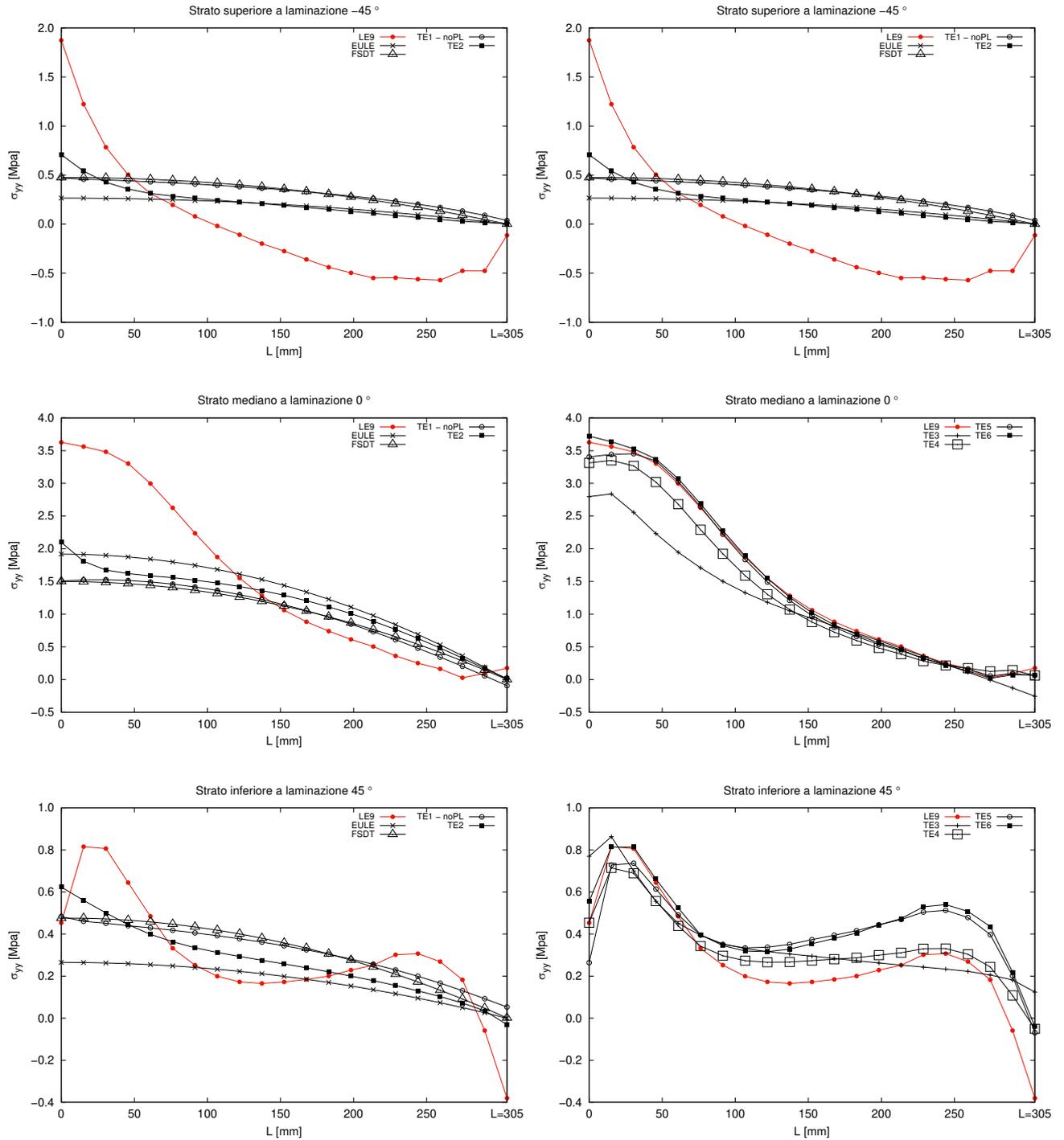


Figura 10.5: σ_{yy} per la configurazione 45°/0°/-45°

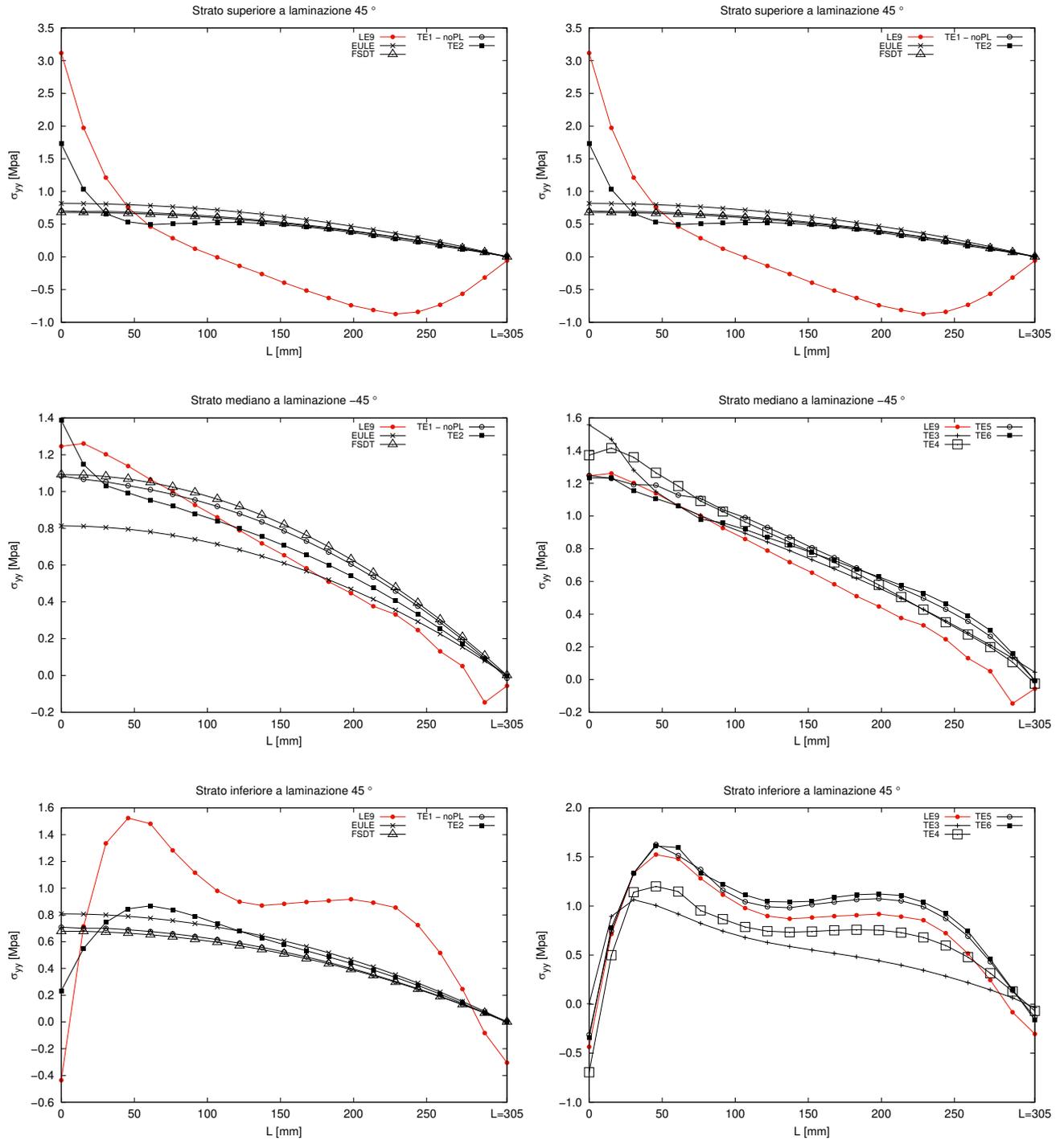


Figura 10.6: σ_{yy} per la configurazione $45^\circ / -45^\circ / 45^\circ$

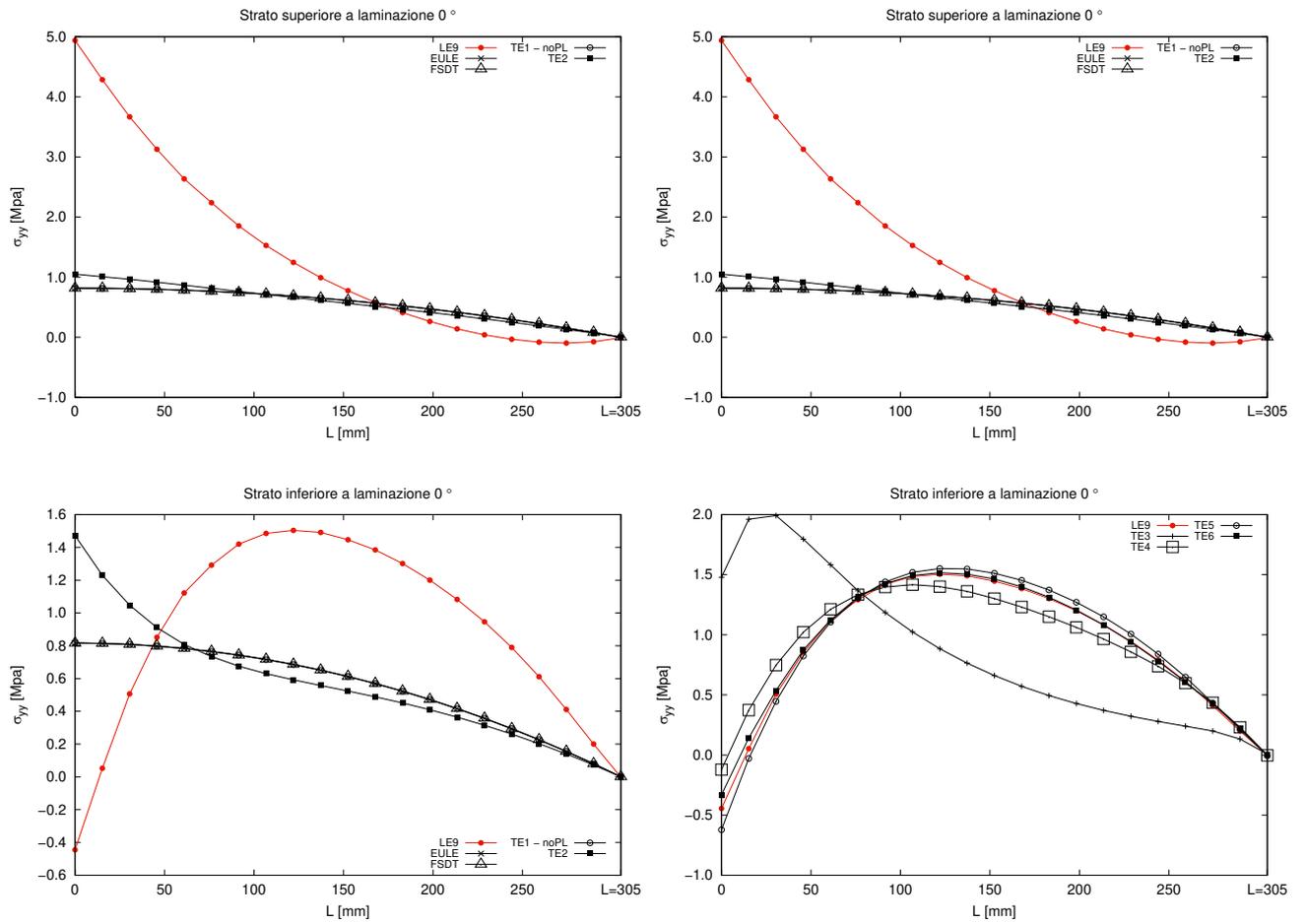


Figura 10.7: σ_{yy} per la configurazione $0^\circ/0^\circ$

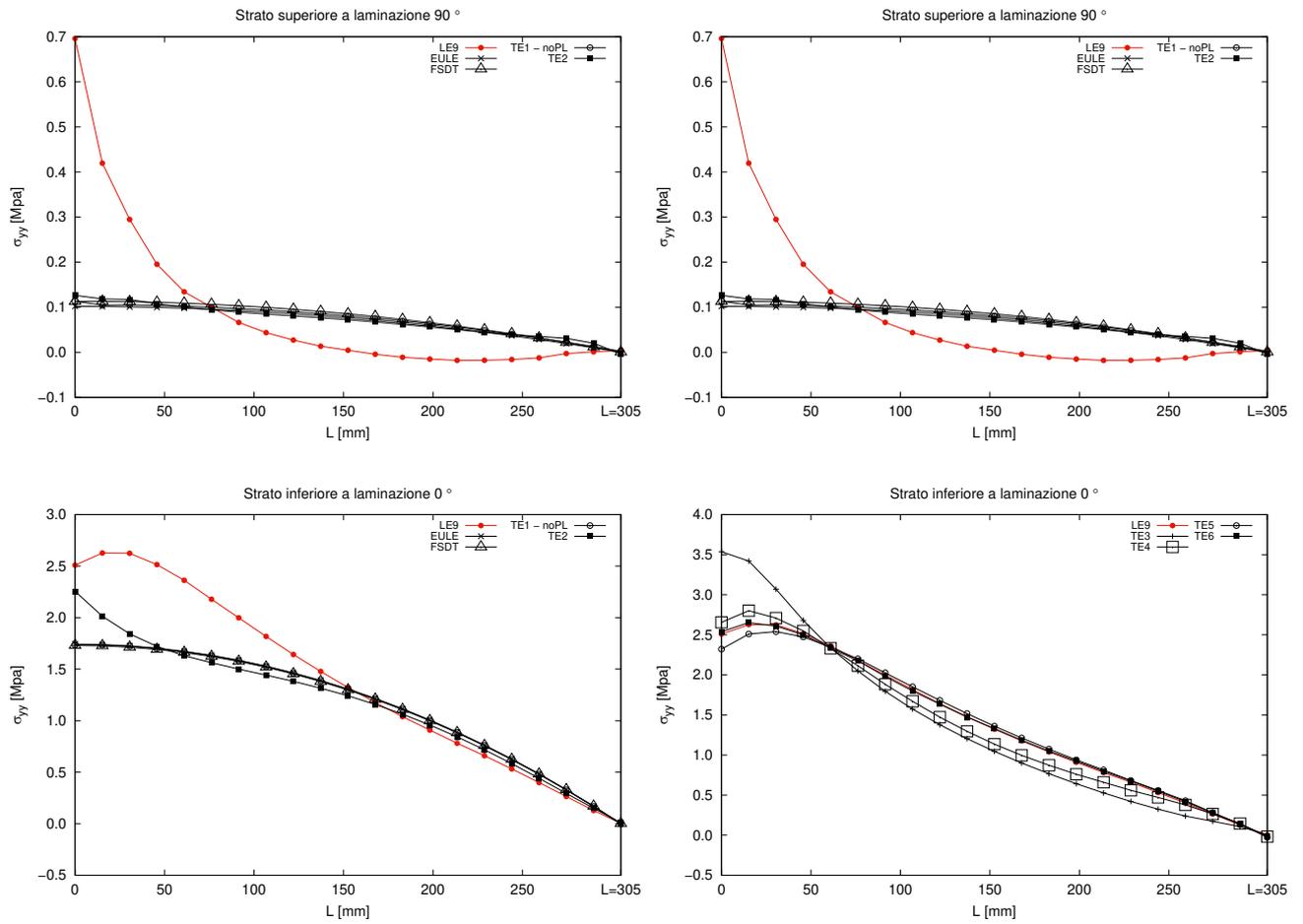


Figura 10.8: σ_{yy} per la configurazione $0^\circ/0^\circ$

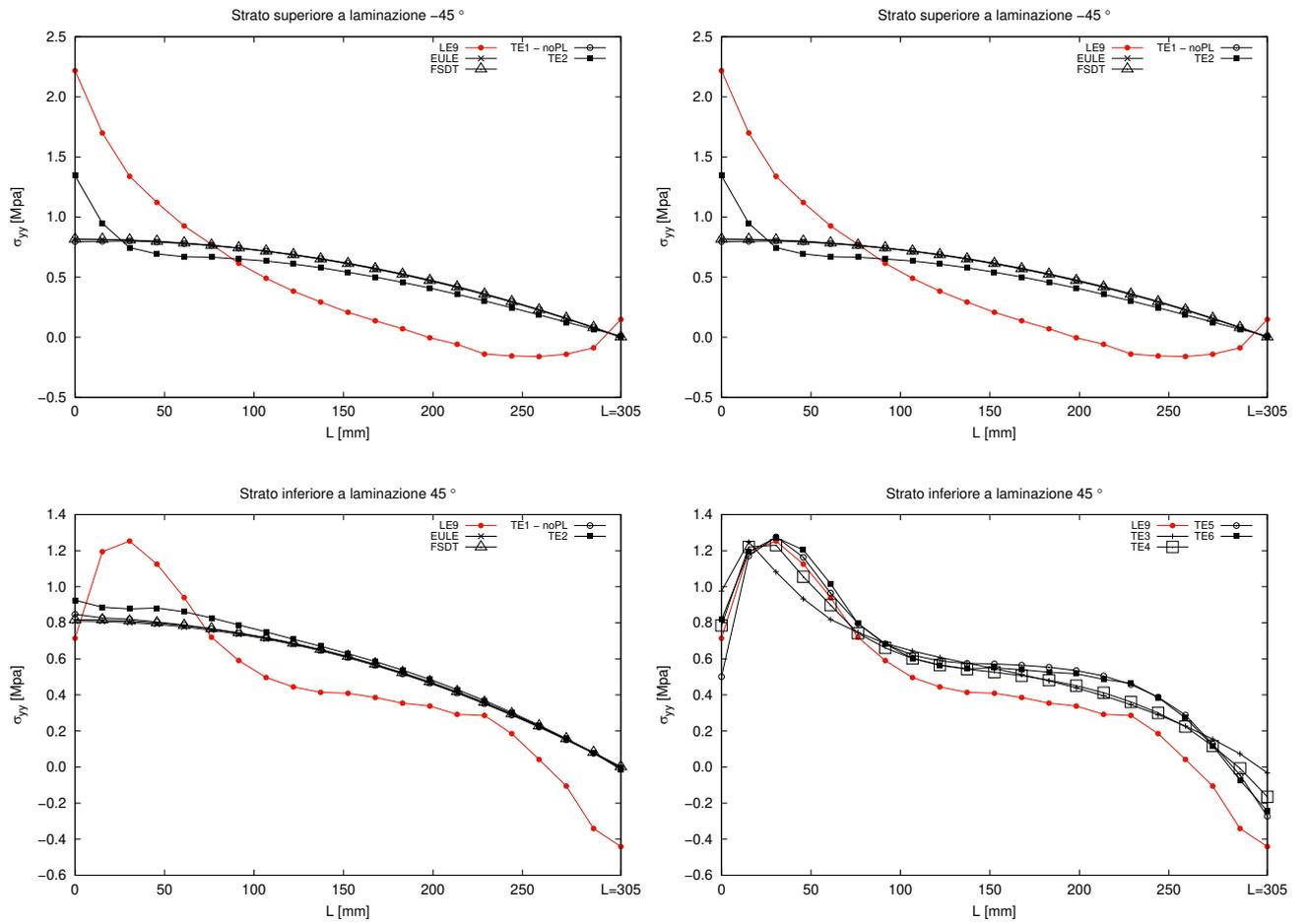


Figura 10.9: σ_{yy} per la configurazione $45^\circ/45^\circ$

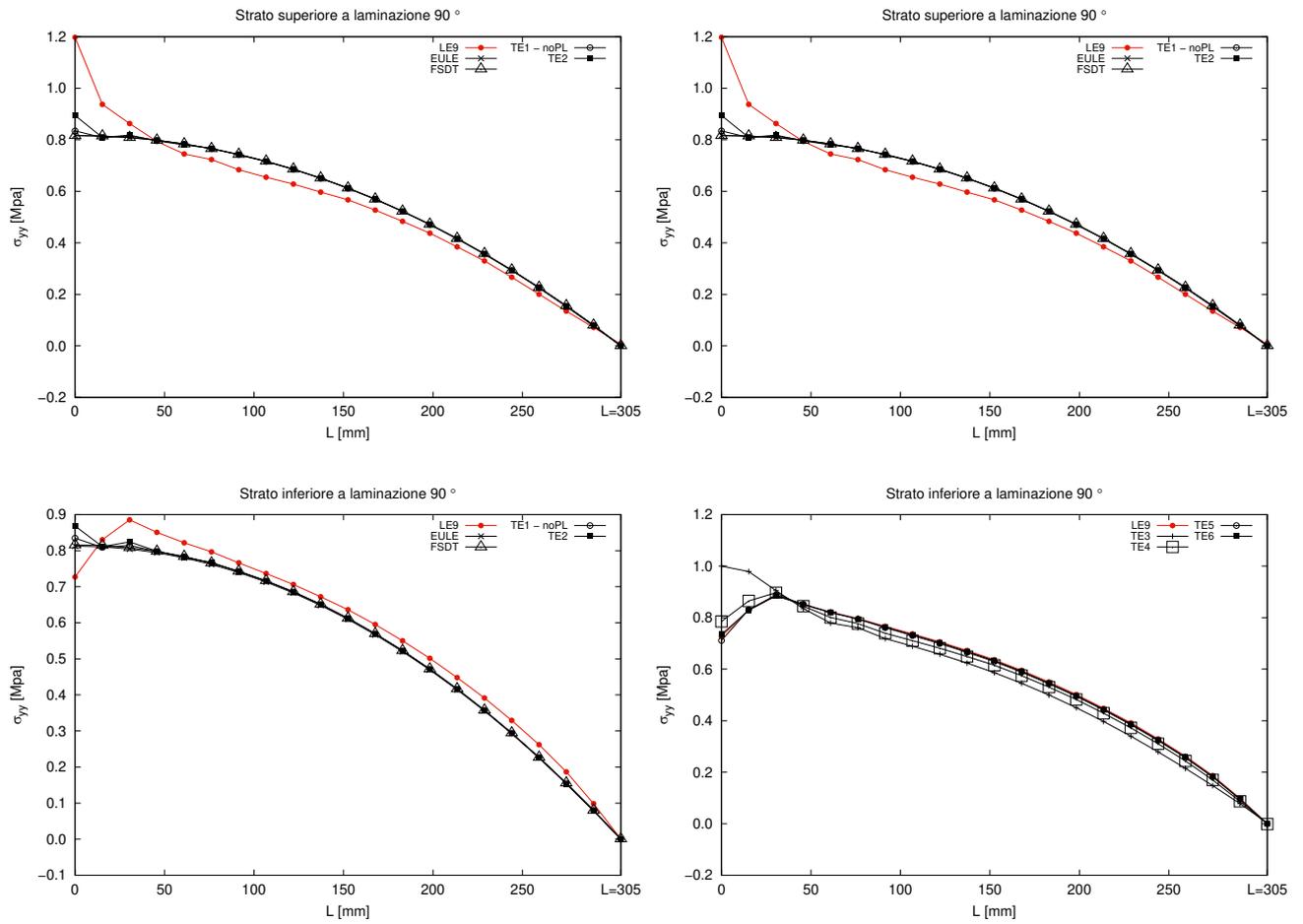


Figura 10.10: σ_{yy} per la configurazione $90^\circ/90^\circ$

Capitolo 11

Conclusioni

Attraverso questo lavoro di tesi si è potuto studiare il comportamento di varie strutture, con diverse caratteristiche geometriche, al variare dei modelli utilizzati per l'analisi e del materiale. I risultati più interessanti, in base alla struttura considerata, si possono riassumere come di seguito.

- **Piastra curva (shell) in composito:** l'analisi delle frequenze naturali ha portato alla conclusione che possono essere ottenuti risultati accettabili con modelli di Taylor ad $N \geq 3$, in casi meno rifiniti gli errori sono molto elevati e i modi di vibrare risultano essere profondamente diversi da quelli reali. Anche se in maniera minima, la laminazione incide sull'accuratezza dei calcoli; infatti si nota, a parità di laminazione, una maggiore discrepanza tra le frequenze computate con modelli TE rispetto a quelle ricavate con modelli LE9 nel caso in cui le fibre siano disposte a $\pm 45^\circ$. Si è evidenziato, confrontando le diverse configurazioni di laminazione (a parità di modello utilizzato), che l'orientamento angolare delle fibre incide profondamente sia sui valori delle frequenze naturali sia sui modi di vibrare, infatti variando questo parametro le differenze tra i vari casi si sono dimostrati molto evidenti, eloquente è il confronto dei modi attraverso il Modal Assurance Criterion e i diagrammi di Campbell. Quest'ultimi hanno mostrato una differenza netta di comportamento anche in un caso in cui sia imposta una velocità di rotazione alla struttura, con fenomeni di instabilità dovuta al veering tra due modi che si presentano a diverse velocità in base al tipo di configurazione. Dal punto di vista statico si è dimostrato che i modelli TE3 siano mediamente attendibili, per una prima analisi dinamica, forniscono invece risultati poco attendibili per il calcolo delle tensioni. Infine analizzando lo stato tensionale della struttura sia lungo i vari strati sia lungo l'apertura, si è ulteriormente confermata la profonda differenza tra le varie configurazioni, facendo concludere che variando l'orientamento delle fibre devono essere fatte dell'analisi specifiche per ogni caso.
- **Pala di elicottero con profilo rettangolare in composito:** la particolarità di questa struttura risiede nel fatto di essere discretizzata contemporaneamente da elementi unidimensionali e tridimensionali, quindi uno degli obiettivi era anche quello di studiare il comportamento della struttura nel caso si fossero usati modelli diversi in modo simultaneo. Attraverso un particolare metodo di collegamento tra le beam ed il 3D, spiegato in dettaglio nel capitolo in questione, si sono ricavati risultati molto vicini a quelli di riferimento anche utilizzando modelli ridotti. Questo risultato è molto soddisfacente perché conferma l'utilità del metodo che presenta benefici evidenti, in primo luogo per quanto riguarda il costo computazionale che risulta, ovviamente, molto più ridotto utilizzando modelli più semplici. Le similitudini dei risultati non si hanno solo nel confronto tra i valori delle frequenze naturali, ma anche nel confronto dei modi di vibrare (dimostrato sia graficamente sia attraverso il MAC). Il

confronto tra le varie laminazione ha invece evidenziato una marcata differenza tra certe coppie di laminazione inducendo, anche in questo caso, a concludere che ogni caso a diverso orientamento delle fibre deve essere analizzato separatamente da altri tipi di configurazione.

- **Pala realistica in composito:** analizzando questa struttura si è evidenziato che anche utilizzando modelli ridotti, sia spostamenti sia tensioni assiali sono descritti con un grado di affidabilità soddisfacente, questi risultati sono dovuti dalla geometria lineare lungo l'asse y della pala che non induce particolari accoppiamenti flessione-torsionali. Invece, come atteso, nel caso delle torsioni si nota che modelli semplificati inducono errori maggiori. Modificando le laminazioni di alcuni strati del composito di cui è formata la struttura, si evidenzia, anche in questo caso la grande dipendenza che esiste tra i risultati ottenuti (spostamenti al tip, tensioni assiali e trasversali) e il grado di angolazione delle fibre in composito. Quindi anche in questo caso risulta evidente come in fase di progetto l'angolo di laminazione debba essere considerato come un parametro altamente significativo. Da un punto di vista dinamico i modelli ridotti si sono dimostrati molto attendibili, questo risultato è evidenziato sia dai valori delle frequenze naturali sia dall'analisi del MAC effettuata confrontando i vari modelli.
- **Pala *Blue Edge*:** questo tipo di pala è stata la struttura più complessa analizzata. Nonostante l'evidente complessità geometriche le analisi, al variare dei modelli strutturali, hanno prodotto risultati comunque molto soddisfacenti. Infatti anche con modelli ridotti, la differenza tra le frequenze naturali ricavate con modelli più rifiniti è minima. Queste marcate similitudine si trasferiscono anche nei modi di vibrare, sia graficamente che attraverso l'analisi del MAC risulta evidente la somiglianza tra i vari casi. Infine è possibile concludere che anche in questo tipo di struttura, come prevedibile, l'angolo di laminazione delle fibre incide sulla dinamica della pala.

Bibliografia

- [1] In: (). URL: <https://www.airbus.com/helicopters/civil-helicopters/medium/h160.html>.
- [2] Philippe Beaumier et al. «From ERATO Basic Research to the Blue Edge™ Rotor Blade: an Example of Virtual Engineering ?» In: *Rotorcraft Virtual Engineering Conference*. LIVERPOOL, United Kingdom, nov. 2016.
- [3] V.L. Berdichevskii. «Variational-asymptotic method of constructing a theory of shells. PMM vol. 43, no.4, 1979, pp. 664-687». In: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 43.4 (1979). cited By 141, pp. 711–736. DOI: 10.1016/0021-8928(79)90157-6.
- [4] M. Borri e T. Merlini. «A large displacement formulation for anisotropic beam analysis». In: *Meccanica* 21.1 (1986). cited By 100, pp. 30–37. DOI: 10.1007/BF01556314.
- [5] E. Carrera e E. Zappino. «Carrera unified formulation for free-vibration analysis of aircraft structures». In: *AIAA Journal* 54.1 (2016). cited By 17, pp. 280–292. DOI: 10.2514/1.J054265.
- [6] E Carrera, E Zappino e M Petrolo. «Advanced elements for the static analysis of beams with compact and bridge-like sections». In: *Journal of structural engineering* 56 (2012), pp. 49–61.
- [7] E. Carrera et al. «Refined beam elements with arbitrary cross-section geometries». In: *Computers and Structures* 88.5-6 (2010). cited By 164, pp. 283–293. DOI: 10.1016/j.compstruc.2009.11.002.
- [8] Erasmo Carrera e Marco Petrolo. «Refined beam elements with only displacement variables and plate/shell capabilities». In: *Meccanica* 47.3 (2012), pp. 537–556.
- [9] Erasmo Carrera et al. «Effective static and dynamic finite element modeling of a double swept composite rotor blade». In: *Journal of the american helicopter society* (2019).
- [10] Erasmo Carrera et al. *Finite element analysis of structures through unified formulation*. John Wiley & Sons, 2014.
- [11] *DYNOMORE: User's Manual and Theory Manual*.
- [12] M Filippi, A Pagani e E Carrera. «Accurate nonlinear dynamics and mode aberration of rotating blades». In: *Journal of Applied Mechanics* 85.11 (2018), p. 111004.
- [13] Matteo Filippi, Alfonso Pagani e Erasmo Carrera. «Accurate Nonlinear Dynamics and Mode Aberration of Rotating Blades». In: *Journal of Applied Mechanics* (2018).
- [14] M. Gervais e V. Garetton. «Analysis of main rotor noise reduction due to novel planform design - The blue edge™ blade». In: cited By 10. 2011, pp. 612–620.
- [15] et al. Giavotto Vittorio. «Anisotropic beam theory and applications». In: *Computers & Structures* 16 (1983).

- [16] Giorgio Guglieri, Massimiliano Porta e Quinci Andra. *Meccanica del Volo dell'Elicottero: Appunti delle Lezioni*. Società editrice Esculapio, 2018.
- [17] Dewey H Hodges et al. «On a simplified strain energy function for geometrically nonlinear behaviour of anisotropic beams». In: *Composites Engineering* 2.5-7 (1992), pp. 513–526.
- [18] D.H. Hodges. «A mixed variational formulation based on exact intrinsic equations for dynamics of moving beams». In: *International Journal of Solids and Structures* 26.11 (1990). cited By 405, pp. 1253–1273. DOI: 10.1016/0020-7683(90)90060-9.
- [19] D.H. Hodges. *Nonlinear composite beam theory*. Progress in astronautics and aeronautics, 2006.
- [20] D.H. Hodges. «Unified approach for accurate and efficient modeling of composite rotor blade dynamics: The Alexander A. Nikolsky honorary lecture». In: *Journal of the American Helicopter Society* 60.1 (2015). cited By 13, p. 011001. DOI: 10.4050/JAHS.60.011001.
- [21] D.H. Hodges, H. Saberi e R.A. Ormiston. «Development of nonlinear beam elements for rotorcraft comprehensive analyses». In: *Journal of the American Helicopter Society* 52.1 (2007). cited By 31, pp. 36–48. DOI: 10.4050/JAHS.52.36.
- [22] Wayne Johnson. «Rotorcraft dynamics models for a comprehensive analysis». In: vol. 1. cited By 88. 1998, pp. 452–471.
- [23] Hao Kang et al. «Assessment of beam and shell elements for modeling rotorcraft blades». In: *Journal of Aircraft* 51.2 (2014), pp. 520–531.
- [24] Young-Jung Kee e Sang-Joon Shin. «Structural dynamic modeling for rotating blades using three dimensional finite elements». In: *Journal of Mechanical Science and Technology* 29.4 (2015), pp. 1607–1618.
- [25] J.G. Leishman. *The Helicopter: Thinking Forward, Looking Back*. College Park Press, 2007.
- [26] AW Leissa, JK Lee e AJ Wang. «Rotating blade vibration analysis using shells». In: *Journal of Engineering for Power* 104.2 (1982), pp. 296–302.
- [27] L. Librescu e O. Song. «Thin-walled composite beams: Theory and application». In: *Solid Mechanics and its Applications* 131 (2006). cited By 7, pp. 1–633.
- [28] Filippi Matteo, Zappino Enrico e Carrera Erasmo. «Computational Models for Double-Swept Helicopter Blades». In: ().
- [29] Jean Prieur e Wolf Splettstoesser. «ERATO - An ONERA-DLR Cooperative Programme on Aeroacoustic Rotor Optimisation». In: (1999).
- [30] P Rauch et al. «Blue edge: The design, development and testing of a new blade concept». In: *Proceedings of the 67th Annual Forum of the American Helicopter Society*. American Helicopter Soc. International Fairfax, VA. 2011, pp. 542–555.
- [31] O. Song e L. Librescu. «Structural modeling and free vibration analysis of rotating composite thin-walled beams». In: *Journal of the American Helicopter Society* 42.4 (1997). cited By 79, pp. 358–369.
- [32] K.-V. Truong, H. Yeo e R.A. Ormiston. «Structural dynamics modeling of rectangular rotor blades». In: *Aerospace Science and Technology* 30.1 (2013). cited By 15, pp. 293–305. DOI: 10.1016/j.ast.2013.08.014.
- [33] W. Yu et al. «Validation of the variational asymptotic beam sectional analysis». In: *AIAA Journal* 40.10 (2002). cited By 204, pp. 2105–2112. DOI: 10.2514/2.1545.
- [34] E. Zappino e E. Carrera. «Multidimensional model for the stress analysis of reinforced shell structures». In: *AIAA Journal* 56.4 (2018). cited By 9, pp. 1647–1661. DOI: 10.2514/1.J056384.