

POLITECNICO DI TORINO

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

Identificazione delle rigidità di contatto all'attacco pala



Relatore:
Daneiele Botto

Candidato:
Saverio Pinna

Luglio 2019

Indice

Indice	i
Introduzione	1
1 Indagine dello stato dell'arte	3
1.1 Analisi strutturale non lineare	3
1.2 Meccanica del contatto	7
2 Banco prova	13
2.1 Struttura vibrante	15
2.2 Slot e traverse	16
2.3 Sistema di applicazione del carico	17
3 Fondamenti di analisi modale	19
3.1 Sistemi a singolo grado di libertà	20
3.1.1 Caso di oscillazioni libere	20
3.1.2 Caso ad oscillazioni forzate	21
3.2 sistemi a molteplici gradi di libertà	23
4 Modello matematico	27
4.1 Descizione del problema	27
4.2 Problema non lineare	28
4.3 implementazione della matrice di rigidezza geometrica	31
4.4 validazione del modello	33
5 Modello del contatto	39
5.1 Problema del contatto	39
5.2 Calcolo della rigidezza	41
5.3 Implementazione della rigidezza di contatto	43
5.3.1 Rigidezza di contatto normale	44
5.3.2 Rigidezza di contatto tangenziale	53
6 Predizione della risposta	59
6.1 previsione degli autovalori	59
6.1.1 Caso a più parametri di progetto	63

6.2	Procedimento iterativo a singolo parametro di progetto	63
6.3	Procedimento iterativo a due parametri di progetto	66
7	Evidenza sperimentale	69
7.1	Raccolta dati	70
7.1.1	Caso $F_c = 10 \text{ MPa}$ (3500 N)	70
7.1.2	Caso $F_c = 50 \text{ MPa}$ (17500 N)	73
7.1.3	Caso $F_c = 100 \text{ MPa}$ (35000 N)	75
7.2	Elaborazione dati	77
7.2.1	Caso $F_c = 10 \text{ MPa}$ (3500 N)	79
7.2.2	Caso $F_c = 50 \text{ MPa}$ (17500 N)	81
7.2.3	Caso $F_c = 100 \text{ MPa}$ (35000 N)	84
8	Conclusioni	91
	Bibliografia	93

Introduzione

Con la presente opera si vuole determinare l'influenza della rigidità di contatto sulla risposta in frequenza di un sistema meccanico tale da approssimare un giunto alla radice della pala di turbina, incastrata al relativo slot del disco. In particolare ci si pone l'obbiettivo di determinare con buona approssimazione la rigidità di contatto sulla base della sola funzione di risposta in frequenza del sistema e dalla conoscenza delle sole caratteristiche geometriche e meccaniche del pezzo oggetto di interesse.

La presente riflette quello che è stato il lavoro necessario all'ottenimento dei risultati, ovvero una ricerca multidisciplinare iniziale atta ad acquisire le nozioni necessarie per poi proporre una formulazione derivante da tali conoscenze pregresse.

In un primo capitolo si raccoglie e si descrive in maniera superficiale quanto la letteratura ha prodotto nel corso dei decenni circa due principali problemi correlati alla tesi in corso d'opera. Si riportano infatti, seguendo un ordine cronologico ma ponendo enfasi sui risultati attuali, le teorie riguardanti l'analisi strutturale non lineare e il problema del contatto.

Nel secondo capitolo si descrive la struttura nella quale si intende testare la validità della formulazione proposta. La descrizione del banco di prova non ha solo scopo di verifica, in essa sono contenuti i limiti geometrici e di carico a cui ci si atterrà per poter in seguito definire un modello valido e verificabile.

Nel terzo capitolo si pongono le basi per le successive analisi e si ripropongono le soluzioni attualmente in uso per la determinazione della risposta in frequenza di un sistema a mezzo analisi modale. Nel dettaglio si descrivono le principali formulazioni nei casi di analisi modale a singolo e a molteplici gradi di libertà.

Nel quarto capitolo inizia la costruzione vera e propria del modello matematico utilizzato in seguito. L'analisi scelta è di tipo non lineare, al fine di includere termini che con analisi di altro tipo sarebbero trascurati. Si vuole infatti ricavare una risposta sotto l'azione di un determinato carico rappresentante la forza centrifuga agente in una paletta di turbina e le deformazioni introdotte da tale componente sono affrontabili solo con un'analisi di tipo non lineare. Si costruisce inoltre un modello a mezzo software FE commerciale per validare la soluzione ricavata dal modello matematico.

Nel quinto capitolo si affronta il problema del contatto e della sua implementazione. Data la ricerca svolta circa le maggiori teorie che permettono di ricavare la deformazione a seguito dell'applicazione di un carico se ne seleziona una secondo criteri di facilità di implementazione e validità della soluzione. La soluzione scelta viene ora implementata nel modello inserendola come informazione contenuta in un elemento spring, nell'ottica

di un'analisi a mezzo metodi agli elementi finiti. La costruzione della matrice di rigidezza del modello matematico è adesso completa e si può passare ad affrontare il problema della predizione del comportamento della struttura descritta.

Nel sesto capitolo si applica al modello definito nei precedenti capitoli una formulazione preesistente atta a definire l'evoluzione degli autovalori del sistema. Lo scopo è, dato il parallelismo tra autovalori, frequenze proprie e forme modali nell'analisi dinamica, di ricavare una relazione che permetta, a partire dalla risposta, di ottenere un determinato parametro di progetto. Definito il rateo di variazione degli autovalori è stato implementato un processo iterativo con il quale si è soddisfatta la richiesta nel caso di uno o di due parametri di progetto differenti.

Infine, nel settimo capitolo si riportano alcune sperimentazioni ricavate sottoponendo il modello a differenti rigidezze di partenza atte a validare il modello costruito e a verificare la convergenza del processo iterativo definito. I dati ricavati da tali sperimentazioni vengono successivamente elaborati e si producono dei grafici atti a quantificare la bontà della soluzione ottenuta e la velocità con la quale è stata ricavata.

Nel capitolo conclusivo si ripercorrono brevemente quelli che sono gli obiettivi preposti e si confrontano con i risultati ottenuti analizzando punti di forza e debolezze del modello ideato in tal senso. Si valutano le motivazioni alla base degli obiettivi non soddisfatti e si propongono possibili futuri miglioramenti.

Capitolo 1

Indagine dello stato dell'arte

La creazione di modelli che ben si prestano all'approssimazione del problema fisico è da sempre oggetto di studio. Nel corso dei secoli numerosi approcci ai medesimi quesiti si sono avvicinati di pari passo col progresso scientifico e con il migliorarsi delle tecniche per la validazione degli stessi. L'esigenza di nuove tecniche di validazione e di modelli sempre meglio approssimanti la realtà si è fatta via via più pressante e con l'avvento dei primi calcolatori si è palesata la necessità di sviluppare tecniche ad hoc per implementare quanto precedentemente teorizzato. Approcci sempre più sofisticati e modelli sempre più complessi si sono susseguiti arrivando a includere e a definire nella loro stesura un numero via via maggiore di fenomeni. In particolare lo studio del collegamento tra disco e pala di turbina contempla la coesistenza di numerose concause che concorrono a definirne il comportamento. Tale moltitudine di cause ed il loro concatenarsi ha come conseguenza la necessità di semplificare e suddividere il problema di partenza arrivando a definire dei modelli che pongono in risalto determinati tratti trascurandone inevitabilmente altri. Nel corso dei precedenti decenni particolare enfasi è stata posta nell'analisi della meccanica del contatto e nella modellazione di problemi strutturali a mezzo metodo degli elementi finiti FEM. Tali studi, pur non avendo come principale ragion d'essere l'applicazione diretta al collegamento disco di turbina/pala ben si prestano ad approssimarne le dinamiche. Del materiale prodotto in tutti gli studi effettuati nei passati decenni due macro temi si sono rivelati essere di particolare importanza nella stesura della seguente tesi, l'analisi strutturale non lineare e la teoria del contatto.

1.1 Analisi strutturale non lineare

L'analisi strutturale non lineare trova interesse applicativo laddove la proporzionalità tra azioni e stato di sollecitazione non è più garantito per via di effetti del second'ordine non più trascurabili.

Due sono le principali tipologie di non linearità presenti in una struttura ed ad ognuna di queste è attribuito un comportamento della stessa. Un primo tipo di non linearità, definita come non-linearità materiale è legata ai comportamenti elastici e viscoelastici

del materiale della struttura, un secondo tipo, definito non-linearità geometrica si presenta qualora le deformazioni siano sufficientemente grandi da causare variazioni significative nella geometria della struttura, di conseguenza le equazioni d'equilibrio devono necessariamente essere riformulate per la configurazione deformata.

Molteplici sono le teorie proposte per la soluzione di tale particolare problema le più note delle quali sfruttano formulazioni energetiche, incrementali o agli elementi finiti. I problemi relativi ad una configurazione deformata differente da quella per la quale si son definite le equazioni di equilibrio, risiedono nella variazione del punto di applicazione dei carichi agenti o nella variazione della direzione degli stessi. Inoltre, più in generale, lo stato di deformazione alterato introduce un effetto di irrigidimento nella struttura andandone a modificare, aumentandone o riducendone, la rigidezza flessionale.

I primi approcci matematici all'analisi strutturale non lineare applicata al metodo degli spostamenti vengono da Turner et al [1] che per primo introdusse il concetto di step incrementale nel trattare strutture affette da grandi deformazioni e teorizzò la possibilità di estendere i metodi di analisi matriciale sviluppati per strutture lineari anche per strutture non lineari.

Per tener conto della variazione di geometria all'aumentare del carico applicato Turner et al [1] tratta difatto il problema non lineare come una sequenza di problemi lineari. A partire da una prima configurazione, caratterizzata da una determinata rigidità ed un determinato carico, il metodo degli step incrementali richiede di calcolare nuovamente la rigidità relativa all'incremento di carico dello step precedente e ottenere il nuovo incremento di carico relativo alla forza incrementata come mostrato in tabella 1.1.

Tabella 1.1: Procedimento degli step incrementali per il metodo degli spostamenti [2]

Step	Rigidezza	Spostamento incrementale	Forze
1	$K_E(0) + K_G(0)$	ΔU_1	S_1
2	$K_E(U_1) + K_G(U_1)$	ΔU_2	S_2
3	$K_E(U_2) + K_G(U_2)$	ΔU_3	S_3
...	.	.	.
n	$K_E(U_{n-1}) + K_G(U_{n-1})$	ΔU_n	S_n
spostamento totale		$U_n = \sum_{i=1}^n \Delta_i$	

La matrice di rigidità k relativa all'elemento, a seguito della presenza di termini non lineari viene quindi scissa in due contributi mostrati nell'equazione 1.1.1

$$k = k_E + k_G \quad (1.1.1)$$

dove k_E è la matrice di rigidità elastica calcolata per l'elemento all'inizio di ogni step e k_G è la matrice di rigidità incrementale o geometrica che dipende non solo dalla geometria ma anche dalle forze interne presenti all'inizio di ogni step.

Lo spostamento totale ricavato a fine processo risulterà quindi la sommatoria degli spostamenti incrementali valutati alle differenti quote di carico. Il livello di accuratezza

della soluzione, essendo somma di un definito numero contributi, dipende direttamente dal numero di quest'ultimi, anche se, buone approssimazioni a problemi semplici possono essere ottenute con pochi step.

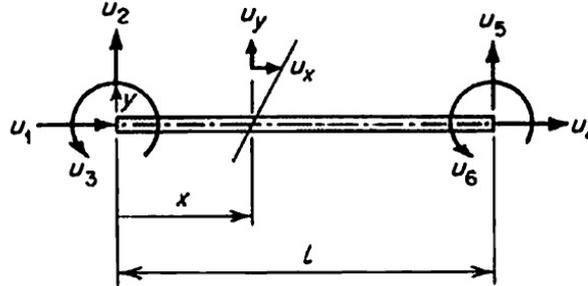


Figura 1.1: Spostamenti positivi nell'elemento beam

Successivamente Martin [3] affronta il problema nel dettaglio trovando una soluzione analitica nei casi di corpi aventi alcune dimensioni trascurabili rispetto ad altre quali, aste, gusci sottili e piastre. Dagli studi da lui effettuati risulta dunque evidente come le classiche equazioni dell'elasticità, basate sulla legge di Hooke e che trascurano i termini non lineari non siano più sufficienti ad ottenere la soluzione al problema. Come afferma infatti Martin [3] tali equazioni conducono ad un'unica soluzione di equilibrio elastico, in contrasto con quanto risulta dalla fisica del problema dato, poichè sotto l'azione di differenti carichi e vincoli possono esistere numerose e differenti condizioni d'equilibrio.

Il metodo risolutivo proposto da Martin permette di ricavare la matrice di rigidezza elastica e la matrice di rigidezza incrementale previa conoscenza dell'equazione dell'energia di deformazione, dalla derivazione di quest'ultima rispetto ai gradi di libertà nodali è infatti possibile ricavare i termini componenti la matrice di rigidezza dell'elemento. Nel caso di elemento beam, in riferimento alla figura 1.1, l'equazione riportante la relazione forza spostamento relativa all'elemento risulterà 1.1.2

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & & & & & \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & & & & \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & & & \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & & \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \quad (1.1.2)$$

$$+F \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & \frac{6L}{5} & & & & \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & -\frac{6L}{5} & -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{6L}{5} & \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{L}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2L}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$$

Le medesime nozioni vengono successivamente rielaborate da Argyris [4] [5] che sviluppa ulteriormente il concetto di matrice di rigidezza geometrica, ne esplicita una formulazione analitica generale e la applica a strutture a guscio e a piastre sottili.

Ulteriori studi portano J.S.Przemieniecki [2] a sviluppare un metodo generale per la determinazione della matrice di rigidezza incrementale per una struttura di arbitraria geometria. Tale metodo, pur conducendo alla medesima formulazione riportata in 1.1.2 permette di inserire differenti termini non lineari provenienti dalle equazioni di compatibilità senza necessitare della determinazione dell'equazione del lavoro di deformazione.

Una differente e più recente formulazione della matrice di rigidezza geometrica, pur non essendo l'oggetto principale della ricerca in opera, arriva da Amati N., Tonoli A. e Zenerino E. [6]. Nella pubblicazione viene proposto un metodo per l'applicazione di tecniche agli elementi finiti FE a strutture in moto quali nastri trasportatori o cinghie in tensione secondo lo schema mostrato in figura 1.2.

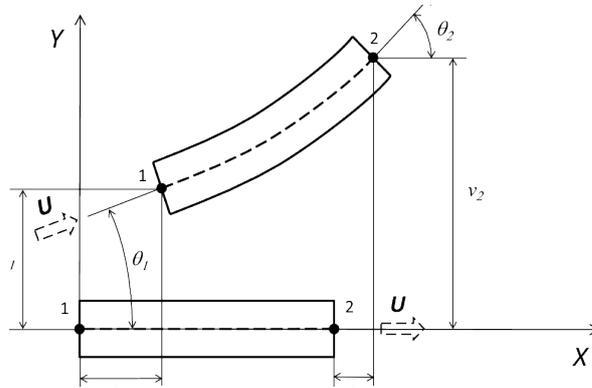


Figura 1.2: Schema della campata nel sistema di riferimento inerziale XY con i gradi di libertà del singolo elemento indicati

È possibile ricavare l'espressione dell'energia potenziale e dell'energia cinetica di un singolo elemento beam soggetto a deformazione assiale e flessionale ed evidenziando i contributi relativi alla forza assiale e alla rotazione relativa alla flessione. La successiva discretizzazione a mezzo tecniche agli elementi finiti, la sostituzione delle equazioni così ottenute nella lagrangiana e la conseguente derivazione permettono di ottenere la configurazione nello spazio degli stati relativa al problema.

$$M\ddot{q} + UG\dot{q} + (K_E - U^2K_U + F_aK_F)q = F \quad (1.1.3)$$

Dove M,G,K sono rispettivamente le matrici contenenti i contributi legati a termini di massa, giroscopici e di rigidezza. In particolare la matrice di rigidezza è scissa nei suoi termini costituenti descrivendo così il contributo inerziale K_E e quello geometrico K_F oltre ai contributi oggetto di ricerca.

1.2 Meccanica del contatto

Per meccanica del contatto si intende il comportamento assunto da due corpi posti in contatto e sottoposti all'azione di un carico di compressione. Numerose teorie si sono avvicinate dalla prima soluzione al problema ad opera di Hertz. La generalità del problema ne ha fatto argomento di largo interesse nella letteratura nel corso degli anni, svariate sono infatti le applicazioni di tali tesi in quanto la quasi totalità dei problemi meccanici odierni prevede contatti tra corpi nelle modalità previste dalla teoria. Tuttavia la natura fortemente empirica delle soluzioni conosciute lega irrimediabilmente le stesse al particolare problema per le quali sono state formulate.

Il primo a proporre un modello matematico che definisse il comportamento di due corpi elastici adiacenti e sottoposti ad una pressione è stato Hertz [7]. In tale ricerca, nata inizialmente come studio delle proprietà ottiche dei materiali sottoposti a carichi variabili, vengono messe in luce alcune importanti caratteristiche relative al problema e vengono descritte le ipotesi sotto le quali un problema di contatto può esser definito Hertziano:

- Deformazioni contenute entro i limiti di proporzionalità
- Area di contatto trascurabile rispetto alle dimensioni caratteristiche
- Superfici continue e non conformi
- Attrito trascurabile

l'area di contatto descritta e la sua dimensione risulta inoltre esser fortemente legata alla geometria dei corpi in contatto, nel caso di sfera su sfera questa risulterà esser un cerchio, diversamente, nel caso cilindro su piano quest'ultima prenderà forma rettangolare. Inoltre, la distribuzione di pressione che si realizza nella quasi totalità delle casistiche è ellittica.

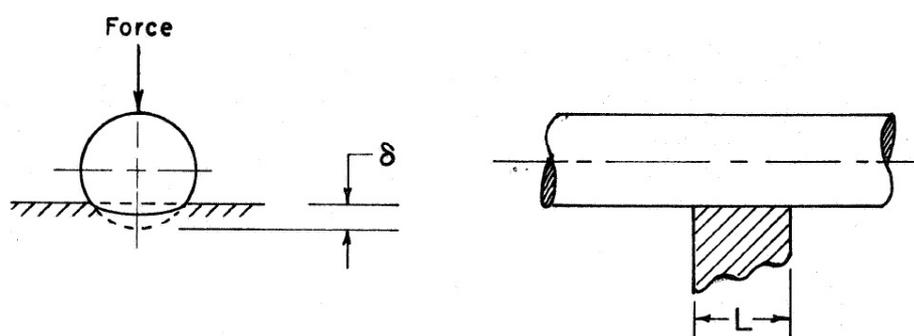


Figura 1.3: Profilo del contatto

Partendo dall'assunto che la validità di un metodo matematico è fortemente correlata alle condizioni e alla sensibilità degli strumenti usati per ottenere la sua validazione Norden [8] nel suo report riprende quanto precedentemente fatto da Hertz, estende il

campo di applicazione e propone una sua formulazione 1.2.1 in riferimento allo schema in figura 1.3.

$$\delta = \frac{P}{L}(\lambda_1 + \lambda_2) \left[1.00 + \ln \frac{L^3}{(\lambda_1 + \lambda_2)PR} \right] \quad (1.2.1)$$

Nell'esperimento svolto da Norden un cilindro viene posto a contatto con due superfici piane e successivamente posto in compressione. Nel suo lavoro egli sfrutta quanto precedentemente esplicitato da Thomas e Hoersch [9] circa la distribuzione di pressione relativa al caso di contatto tra cilindro cilindro ad assi paralleli.

Tale particolare distribuzione viene infatti ottenuta facendo tendere il semiasse maggiore della soluzione del contatto puntuale ad infinito ottenendo difatto una conformazione rettangolare e non più ellittica. L'estensione della formulazione relativa al contatto di linea tra cilindri al caso di contatto tra cilindro e piano viene infine ricavata facendo tendere ad infinito il raggio di uno dei due corpi in contatto.

Norden riprende dunque quella che è la letteratura in merito al problema e formula una propria relazione empirica ottenendo difatto buon riscontro di quanto affermato con la sua formulazione nei dati sperimentali.

Nella letteratura fino ad ora oggetto di analisi viene ipotizzato che nel contatto non vi sia deformazione degli oggetti posti in compressione. Come afferma O.I.Kosarev [10] le formulazioni attualmente esistenti non distinguono la variazione di interasse tra i corpi dovuta alle meccaniche di deformazione del contatto e quella relativa alla compressione pura.

La sua analisi si basa sull'assunto che fino a che la dimensione dell'impronta del contatto non raggiunge un certo valore la teoria che governa il problema è quella del contatto, successivamente, superato questo valore limite il carico si distribuisce sull'intero volume ed il corpo risulta compresso.

Kosarev propone tre formulazioni, correlate a tre differenti casi mostrati in figura 1.4 nelle quali cerca di porre in evidenza i termini di deformazione relativi ai fenomeni in gioco.

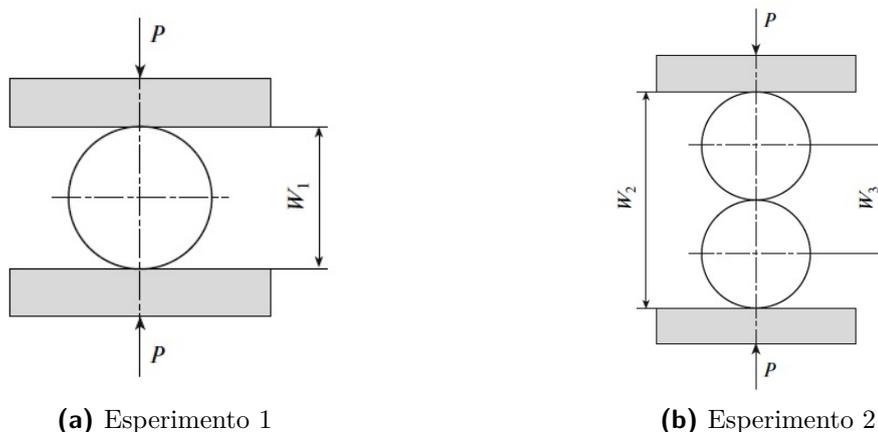


Figura 1.4: Schema delle sperimentazioni di O.I.Kosarev

Nello schema 1.4a viene considerata una configurazione il cui modello matematico di deformazione w_1 proposto da Kosarev 1.2.2 non prevede la separazione dei termini relativi alla compressione da quelli relativi al contatto, diversamente dal modello relativo allo schema 1.4b dove i termini vengono invece separati.

$$w_1 = 2\lambda q \left[\ln\left(\frac{2R}{b_1}\right) + 2\ln\left(\frac{2z}{b_1}\right) + 0.407 \right] \quad (1.2.2)$$

La validazione del metodo proposto da Kosarev viene dal confronto con i dati sperimentali relativi agli esperimenti di A.V.Orlov [11] e Dinnik [12], i risultati ricavati a mezzo formulazione di Kosarev infatti giacciono su due rette che comprendono al loro interno i dati sperimentali come mostrato in figura 1.5.

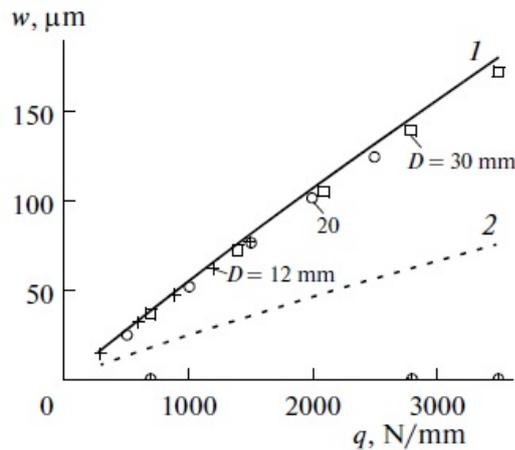


Figura 1.5: comparazione tra i risultati di Kosarev e i dati di Orlov

In particolare è possibile osservare come la curva 1, facente riferimento ai valori ricavati con la formulazione contenente i termini relativi al contatto, sia superiore ai dati ottenuti sperimentalmente e la curva 2, che distingue i termini relativi al contatto da quelli di pura compressione, sia invece inferiore.

Data la natura del problema, fortemente legata alla fisica e alle condizioni con le quali si effettuano le sperimentazioni, una formulazione unificata e comprensiva di più casistiche non è ancora stata ottenuta. Numerose sono infatti le formulazioni su base empirica, nelle quali equazioni, fattori correttivi più o meno giustificati sono necessari per far convergere la soluzione teorica ai dati sperimentali.

Si manifesta dunque l'esigenza di raccogliere in specifici compendi o testi, casistiche e relative formulazioni. Essendo infatti il problema del contatto di notevole interesse per quanto concerne la costruzione di cuscinetti a sfera o a rulli questo risulta un tema quanto mai attuale. Uno di questi è opera di Warren C. Young e Richard G. Budynas [13], in tale scritto, riformulando pregresse equazioni a opera di svariati autori, si riportano non solo i casi canonici maggiormente trattati nella letteratura quali sfere o cilindri in contatto con differenti superfici ma, anche casi meno trattati o ancor più specifici quali oggetti sottoposti a carichi eccentrici, dinamici o corpi di inusuali

geometrie (per le trattazioni classiche) quali chiavi, denti di ingranaggi o corpi filettati. Nel dettaglio, in riferimento alla figura 1.6 per il caso di cilindro compresso tra due piani una formulazione proposta risulta essere 1.2.3

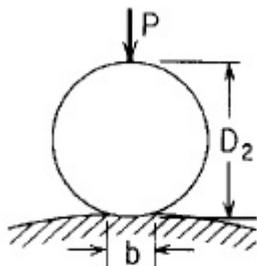


Figura 1.6: Schema del contatto piano cilindro e grandezze caratteristiche

$$\Delta D_2 = \frac{4p(1 - \nu^2)}{\pi E} \left(\frac{1}{3} + \ln \frac{2D}{b} \right) \quad (1.2.3)$$

Il merito di tali autori tuttavia non risiede tanto nell'implementazione di nuove tecniche risolutive quanto nell'opera di perfezionamento di teorie e formulazioni già esistenti e nell'aver reso maggiormente fruibile un argomento sì vasto.

Enorme contributo alla formulazione di nuove espressioni relative al contatto arriva, come precedentemente affermato, dallo studio dei cuscinetti, notevole è infatti la spinta economica in tal senso data la loro vasta applicazione. Nella vastità di argomenti trattati nel libro *Ball and Roller Bearings: Theory, Design and Application* scritto da Brändlein J. Eschmann P. Ludwig H. e Weigand K. [14] ampio spazio trova infatti l'argomento d'interesse. In tale opera, sotto le note assunzioni di Hertz [7] e rispettando quanto da lui generalmente affermato ma applicato alle peculiari superfici di contatto relative ai cuscinetti, si indaga approfonditamente il caso in esame. Per quanto concerne il contatto puntuale i risultati delle formulazioni empiriche ottenute di non molto si discostano dalla teoria Hertziana e anche nei casi in cui le assunzioni non vengano rispettate nella loro interezza si ottengono delle buone approssimazioni. Differente è il caso relativo al contatto di linea mostrato in figura 1.7, data la nota fallacità della teoria Hertziana, nell'opera citata, Brändlein J. e coautori prediligono differenti formulazioni.

La deformazione relativa al contatto di linea secondo quanto empiricamente formulato da Bochmann [15] è esprimibile come potenza del carico applicato, tuttavia, successive ricerche [16] [17] affinano tale formulazione ricavando la deformazione elastica per il contatto di linea 1.2.4.

$$\delta_k = \frac{4.05}{10^5} \left(\frac{Q^{0.925}}{l_{eff}^{0.85}} \right) \quad (1.2.4)$$

In riferimento allo schema in figura 1.7 la deformazione totale relativa al contatto risulterà due volte quella ottenuta con l'equazione 1.2.4.

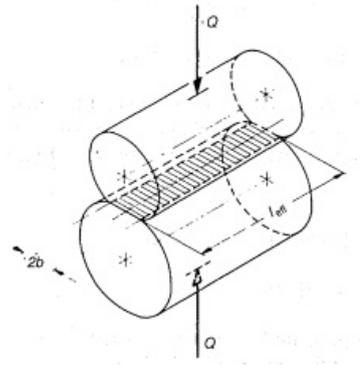


Figura 1.7: Schema del contatto di linea

Recentemente infine l'interesse della ricerca circa la meccanica del contatto ha deviato da quella che è la fenomenologia classica della teoria Hertziana al fine di investigare l'importanza della rugosità nel calcolo della superficie in contatto.

Capitolo 2

Banco prova

La necessità di creare un sistema dinamico semplificato per le misurazioni relative ad un corpo rotante giace nella difficoltà di ricavare materialmente quest'ultime. Questo è il caso delle pale di turbina dove la forza che le pone in trazione è direttamente derivante dalla loro rotazione. Il sistema nel quale si prevede di effettuare le prove è stato progettato ponendo enfasi in quattro aspetti cruciali:

- La necessità di porre in vibrazione un sistema dinamico quanto più simile possibile a quello relativo ad una pala fissata al disco tramite giunzione a coda di rondine o a "fir-tree" con l'accortezza di rispettare la geometria del collegamento reale.
- L'esigenza di ricreare condizioni similari al vero, nei sensi di tensioni e deformazioni, nella zona limitrofa all'interfaccia tra le superfici in contatto
- La possibilità di variare le condizioni di carico e di porre il provino sotto differenti ampiezze vibrazionali così da ottenere dati circa il comportamento dinamico del sistema all'interfaccia. Il sistema sviluppato è inoltre in grado di produrre carichi di intensità paragonabile a quella che si potrebbe sviluppare in una paletta di turbina posta in rotazione e sottoposta di conseguenza all'azione di forza centrifuga.
- Si è infine cercato di evitare per quanto possibile di introdurre fonti di smorzamento esterne oltre a quelle relative al materiale, alla viscosità dell'aria e allo smorzamento proprio del collegamento .

Nella progettazione del banco prova numerose soluzioni sono state prese in esame per poi esser scartate. Per quanto riguarda l'applicazione del carico centrifugo, venne presa in considerazione la possibilità di simularlo applicandolo direttamente alla pala, tuttavia, tale soluzione presenta l'inconveniente dell'introduzione di ulteriore smorzamento. La soluzione adottata da Srinivasan et al. [18] che, prevede l'applicazione del carico alla radice comprimendo la pala, viene anch'essa giudicata poco conveniente per via della possibile dissipazione di energia relativa all'introduzione di un ulteriore punto di contatto nel punto di applicazione della forza. L'idea adottata, similmente a quanto fatto da Rao

et al. [19] prevede di simulare il sistema come due pale connesse alle rispettive punte e collegate alla macchina alle rispettive radici. Ne risulta dunque un singolo corpo, come mostrato in figura 2.1 che verrà posto in trazione tramite collegamento con due masse inerziali.

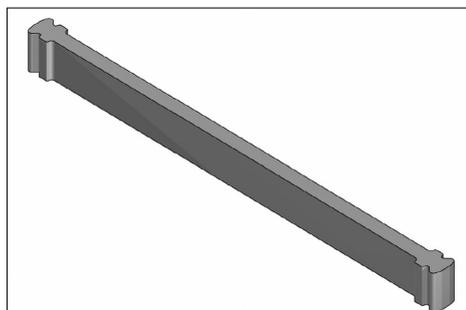


Figura 2.1: Schema del provino adottato

Per sua natura il sistema adottato presenta alcune differenze sostanziali rispetto al sistema reale che si vuole simulare:

- La forma modale propria del provino risulta assimilabile a quella relativa ad un'asta incastrata ad entrambi gli estremi mentre, quella relativa ad una pala di turbina è simile ad un'asta incastrata ad un solo estremo.
- La forza centrifuga agente sulla sezione di una pala posta in rotazione diminuisce all'allontanarsi dalla radice. Diversamente, nel sistema adottato, la forza risulta costante lungo l'asse principale.

Nonostante le numerose differenze la validità del provino adottato giace nel fatto che l'energia dissipata nella giunzione dipende dalle forze agenti nella sezione in prossimità della stessa, è quindi una dipendenza locale. L'asta adottata nonostante una forma modale differente dissipa la stessa energia di una pala nelle medesime condizioni di forze agenti localmente.

Nel complesso, il banco prova si occupa di fornire al provino un surrogato della forza centrifuga che sarebbe altrimenti assente, secondo lo schema operativo mostrato in figura 2.2. Si compone di tre parti principali:

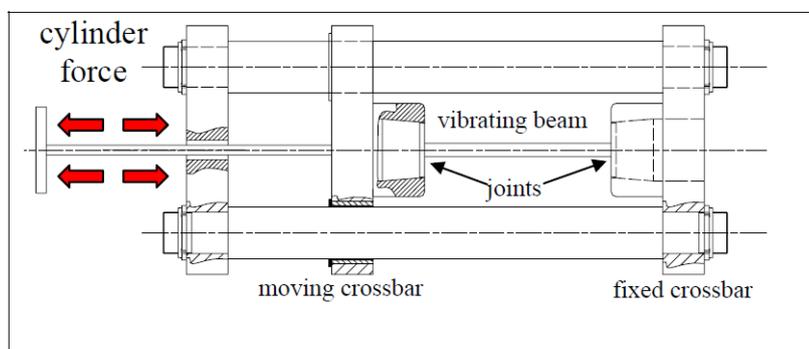


Figura 2.2: Schema di funzionamento del banco prova

- Le due traverse, connesse ai corpi atti a collegare il banco con il provino. Queste possono traslare così da porre in trazione il sistema e permettere l'analisi del comportamento dinamico per differenti carichi.
- Il sistema atto a porre in moto le traverse e ad applicare il carico.
- Il sistema operante l'impulso vibrazionale necessario alle analisi successive.
- Infine il provino stesso.

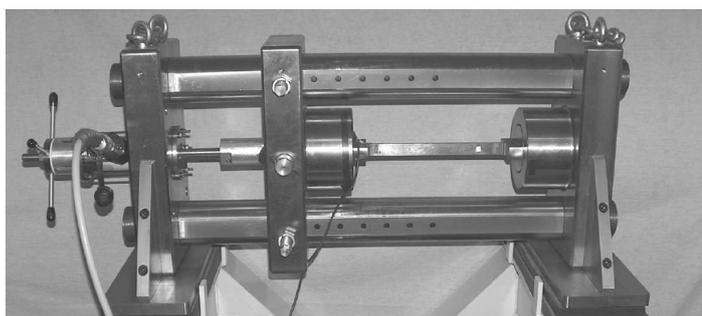


Figura 2.3: Banco di prova

2.1 Struttura vibrante

Pur non disponendo del provino specifico all'analisi in opera, alcuni criteri coincidono con quanto precedentemente fatto da (qua citerei allara e il suo lavoro) . Particolare enfasi si pone infatti sul comportamento dinamico del provino localizzato nella giunzione con la traversa. Il corpo vibrante dovrà disporre di una geometria sufficientemente semplice per evitare insorgenza di fenomeni legati alla forma e presentare una conformazione alla giunzione quanto più simile a quella relativa ad una paletta di turbina.

L'asta presa a modello, rimanenza di precedenti sperimentazioni, è stata ricavata per asportazione di truciolo a mezzo elettroerosione da un pezzo di acciaio temprato SAE 1040. Le dimensioni longitudinali (lunghezza 300 mm) e trasversali (spessore 10 mm) sono tali da avere frequenze naturali quanto più simili possibile a quelle che si avrebbero in una pala reale. Le prime 4 frequenze di risonanza risultano tutte giacere in un range che va da 400 Hz a 4500 Hz. La base del provino infine (35 mm) è anch'essa scelta secondo criteri di similitudine.

Il banco prova inoltre permette di poter facilmente sostituire provini con differenti configurazioni geometriche quali ad esempio sezioni differenti o particolari collegamenti alla radice e consente lunghezze dell'asta comprese tra 100 e 450mm così da consentire analisi per differenti strutture vibranti.

La struttura presa in esame nella presente opera è quella relativa ad una pala con giunto a coda di rondine in riferimento alla figura 2.4.

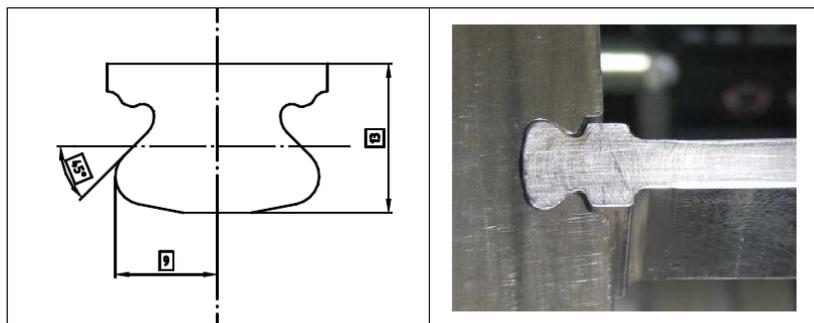


Figura 2.4: Giunto a coda di rondine

2.2 Slot e traverse

Le traverse devono adempiere a due principali funzioni, la prima, prevede che presentino una conformazione tale da permettere il collegamento con il provino a mezzo appositi slot. La seconda invece riguarda la trasmissione del carico necessario a simulare la forza centrifuga agente sulla paletta reale posta in rotazione e quindi alla creazione, nella zona limitrofa al contatto, delle condizioni di tensione e deformazione adatte a simulare il problema oggetto di analisi. Inoltre, alle due traverse è connesso un blocco a forma di tronco di cono come mostrato in figura 2.5 il cui comportamento rispecchia quello di una massa inerziale. Al fine di soddisfare il requisito concernente la trasmissione del carico una delle due traverse è collegata a due aste e bloccata in una determinata posizione mentre, la seconda è libera di scorrere lungo la direzione imposta dalle medesime aste.

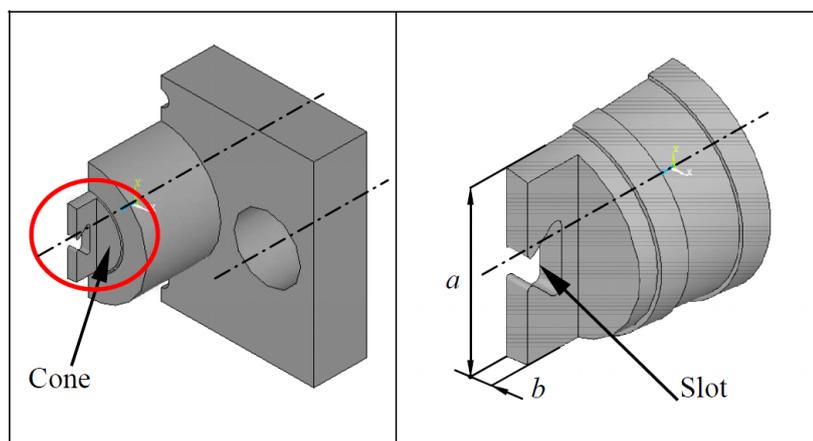


Figura 2.5: Dettaglio traversa e tronco di cono

Nella traversa è ricavato lo scompartimento atto a permettere l'incastro del tronco di cono, tale scelta è effettuata in previsione di future analisi così da poter adottare differenti geometrie per il collegamento con il provino, inoltre, questa configurazione ad incastro permette che il tronco di cono sia tenuto in posizione dalla semplice trazione

durante l'applicazione del carico. La presenza di due anelli alla fine del cono nasce dall'esigenza di aumentare la pressione di contatto così da evitare per quanto possibile eventuali micro slittamenti sorgenti di smorzamenti non desiderati.

Lo slot atto a permettere il collegamento del provino con il tronco di cono è ricavato estrudendo un blocco dalla superficie di quest'ultimo come in figura 2.6 (b). Lo spessore è lo stesso della radice dell'elemento vibrante così da permettere l'aderenza delle superfici in contatto.

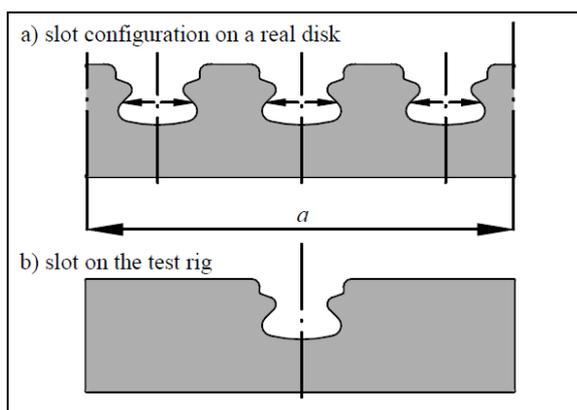


Figura 2.6: Dettaglio slot per la pala in caso reale (a) e nel tronco di cono (b)

Considerando che nel caso di un disco di turbina reale la componente circonferenziale delle forze di contatto alla radice della pala è in equilibrio con quelle delle pale adiacenti, nel caso relativo all'esperimento la presenza di una singola pala potrebbe portare a variazioni non desiderate della geometria dovute all'azione flettente della forza circonferenziale non più in equilibrio. Le parti in contatto dello slot potrebbero, sotto l'azione di determinati carichi tendere ad aprirsi. Per ridurre tale effetto la dimensione laterale dell'estrusione contenente lo slot per la pala è circa tre volte quella che si avrebbe in un disco reale.

2.3 Sistema di applicazione del carico

Per quanto concerne la trasmissione della forza necessaria a trazionare la traversa mobile, la soluzione adottata prevede l'utilizzo di un attuatore idraulico a singolo effetto. All'attuatore è connesso un disco a sua volta avvitato ad un asta. Tale asta si connette al cilindro ed è incastrata alla traversa mobile. Un incremento di pressione nel cilindro causa un aumento di tensione nell'asta che, trasmettendo il moto alla traversa pone in trazione la paletta. L'attuatore idraulico è in grado di applicare una forza massima pari a 125kN e permette una corsa di 40 mm. Nel caso che siano necessarie corse di dimensione superiore a quella prevista è possibile riposizionare l'asta rispetto alla base del cilindro alla quale è avvitata. Il sistema prevede che la pressione nel sistema venga somministrata attraverso una pompa a mano ed una valvola a spillo mantiene tale pressione costante durante la prova e ne permette la graduale riduzione in fase di scarico.

Capitolo 3

Fondamenti di analisi modale

La semplificazione di componenti meccaniche di geometrie complesse a mezzo rappresentazione con elementi monodimensionali o con grandezze trascurabili rispetto ad altre gioca un ruolo importante nella gran parte dei problemi meccanici. Nell'ambito dell'ingegneria aerospaziale innumerevoli elementi costituenti il propulsore possono godere di tale semplificazione. In particolare le palette di turbina rispondono particolarmente bene ad una discretizzazione che le vede presentare una risposta dinamica paragonabile a quella ricavabile da un asta. Uno dei sistemi atto a identificare il comportamento dinamico di un determinato modello meccanico si basa sulla determinazione delle matrici di massa $[M]$, di rigidità $[K]$ e smorzamento $[C]$ derivanti dall'equazione di equilibrio dinamico eq. 3.0.1.

$$[M]\ddot{x} + [C]\dot{x} + [K]x = f \quad (3.0.1)$$

Matematicamente l'integrale dell'equazione differenziale deriverà dalla somma dell'integrale generale dell'omogenea associata e di un integrale particolare dell'equazione completa alla quale andranno applicate le condizioni iniziali. Risolvendo inoltre il problema agli autovalori insito nell'equazione omogenea associata è possibile definire le frequenze proprie e le relative forme modali del sistema.

Ai fini della presente tesi l'interesse è posto perlopiù nella definizione del modello di risposta atto ad individuare il comportamento dinamico della palette nei termini di risposta dinamica per unità di carico applicato, nel dominio delle frequenze.

Si parla in questo caso di Funzione di Risposta in Frequenza eq. 3.0.2 che descrive la funzione di trasferimento tra il punto di applicazione di una forzante armonica ed il punto nel quale se ne rileva la risposta. Data inoltre la normalizzazione rispetto alla forzante la funzione di risposta in frequenza non dipende dall'intensità del carico.

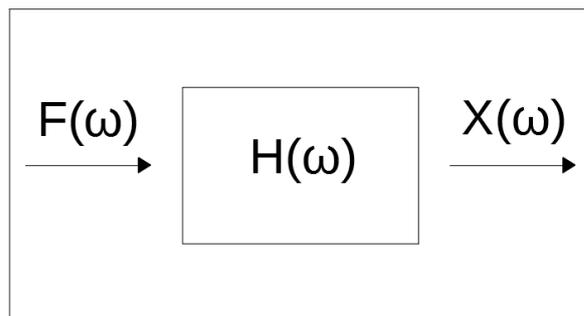


Figura 3.1: Schema modello FRF

$$H_{ij}(\omega) = \frac{X_i(\omega)}{F_j(\omega)} \quad (3.0.2)$$

Dal punto di vista fisico la FRF è definita dal rapporto tra gli spettri di uscita e gli spettri di ingresso, dal punto di vista di un modello agli elementi finiti è ricavabile come il rapporto tra lo spostamento del punto e la forza applicata. In entrambi i casi tale grandezza è funzione della frequenza.

3.1 Sistemi a singolo grado di libertà

3.1.1 Caso di oscillazioni libere

Il comportamento dinamico di un sistema lineare a singolo grado di libertà nel caso di sistema privo di forzante risponde all'equazione 3.1.1.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (3.1.1)$$

A tale equazione differenziale è associata una soluzione generale nella forma 3.1.2

$$x(t) = X e^{\lambda t} \quad (3.1.2)$$

Sostituendo la 3.1.2 nella 3.1.1 con l'accortezza di escludere la soluzione banale, la soluzione dell'equazione caratteristica assume la forma riportata nella 3.1.3

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (3.1.3)$$

La soluzione dell'omogenea prende dunque la forma

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (3.1.4)$$

Si definiscono ora le quantità ξ come il rapporto tra lo smorzamento e lo smorzamento critico ovvero quel valore di smorzamento per il quale il sistema esegue una sola oscillazione, che si smorza e si completa in un tempo infinito.

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (3.1.5)$$

e ω_n frequenza naturale data dalla radice del rapporto tra rigidità e massa.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.1.6)$$

In ultimo, la soluzione del sistema può esser scritta come riportato nella 3.1.7

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left[x(0)\cos(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t) + \frac{\dot{x}(0) + \xi\omega_n x(0)}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t) \right] \quad (3.1.7)$$

3.1.2 Caso ad oscillazioni forzate

L'equazione dinamica per un sistema a singolo grado di libertà assume l'espressione 3.1.8 ed è in questa condizione non omogenea.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (3.1.8)$$

l'equazione differisce da quanto precedentemente affrontato infatti per via dell'introduzione della forzante $f(t)$ che per semplicità esplicativa verrà considerata armonica.

$$f(t) = Fe^{i\omega t} \quad (3.1.9)$$

Si consideri un integrale particolare composto da parte reale e parte immaginaria del tipo:

$$x(t) = Xe^{i(\omega t + \varphi)} \quad (3.1.10)$$

che sostituito nella 3.1.8 restituisce una soluzione particolare nella forma:

$$x(t) = \frac{F}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}} e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (3.1.11)$$

$$\tan\varphi = \frac{-\omega c}{k - \omega^2 m} \quad (3.1.12)$$

In tale soluzione particolare sono contenute due informazioni una, rappresenta la risposta specifica generata dalla sollecitazione esterna mentre la soluzione complementare rappresenta la risposta di vibrazione libera del sistema. La soluzione generale si ottiene infine sovrapponendo i vari effetti.

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left[x(0)\cos(\omega_d t) + \frac{\dot{x}(0) + \xi\omega_n x(0)}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t) \right] + \frac{F}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2) + (2\xi\beta)^2}} e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (3.1.13)$$

con

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} \quad , \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.1.14)$$

La forma dell'equazione generale evidenzia un particolare comportamento: esaurito un transitorio governato dalla parte relativa alle oscillazioni libere smorzate il fenomeno risponde a regime secondo la parte stazionaria che, derivando dalla forzante descriverà un'oscillazione armonica di costante ampiezza e sfasata rispetto alla forzante di una fase φ . Come precedentemente accennato la FRF è ricavabile come rapporto tra risposta e forzante, in questo caso, trascurando il transitorio l'espressione sarà quella mostrata nella 3.1.15

$$H(\omega) = \frac{x(t)}{f(t)} = \frac{X}{F} = \frac{1}{(k - \omega^2 m) + i\omega c} \quad (3.1.15)$$

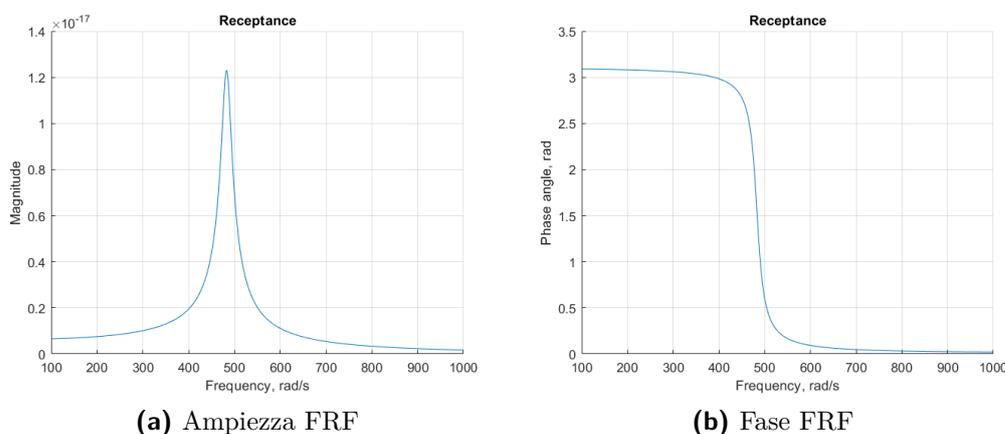


Figura 3.2: Rappresentazione della FRF

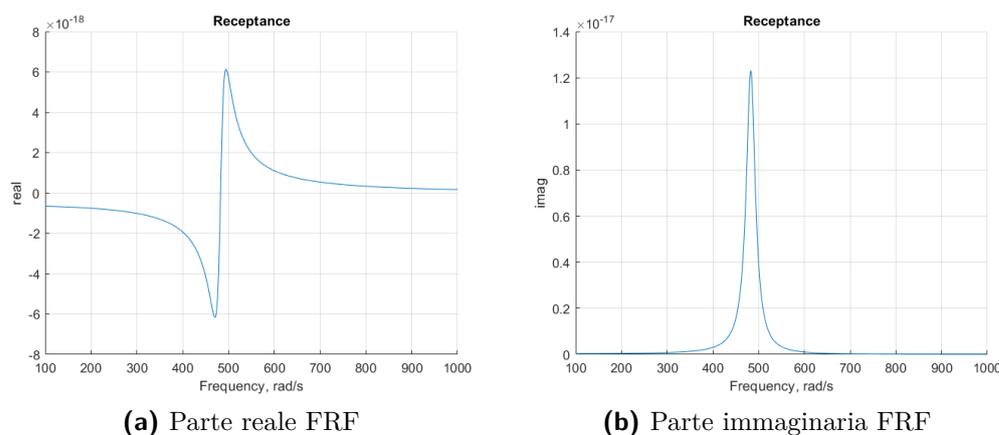


Figura 3.3: Rappresentazione della FRF

3.2 sistemi a molteplici gradi di libertà

Consideriamo ora un sistema dinamico a n gradi di libertà definito dal sistema di equazioni differenziali scritto in forma matriciale nella 3.2.1

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (3.2.1)$$

il sistema si presenta particolarmente ostico se confrontato con il corrispondente sistema ad un singolo grado di libertà. Supponiamo che esista una trasformazione lineare tale da rendere il sistema 3.2.1 disaccoppiato

$$\{x\} = [\Phi]\{q\} \quad (3.2.2)$$

Tale trasformazione Φ permette di determinare gli spostamenti relativi ai gradi di libertà partendo dalla conoscenza degli spostamenti q fittizi. Sostituendo la 3.2.2 nella 3.2.1 e ipotizzando di trascurare lo smorzamento, ipotesi particolarmente valida in campo meccanico, si ricava la 3.2.3.

$$[\Phi]^{-1}[M][\Phi]\{\ddot{q}\} + [\Phi]^{-1}[K][\Phi]\{q\} = [\Phi]^{-1}\{f\} = \{t\} \quad (3.2.3)$$

il sistema così scritto corrisponderebbe a quello iniziale, note le forze f sono altresì note le forze fittizie e risolvendo il sistema sarebbe possibile ricavare gli spostamenti fittizi prima e quelli fisici poi a mezzo trasformazione lineare.

Il problema si riduce quindi alla ricerca di una matrice Φ di trasformazione lineare e di una matrice diagonale $[D]$ tali che sia possibile risolvere il problema 3.2.4 che confermerebbe la possibilità di diagonalizzare le matrici di massa e di rigidità.

$$[K][\Phi] = [M][\Phi][D] \quad (3.2.4)$$

Il sistema di partenza può essere scritto nel dominio di Laplace eq. 3.2.5

$$[[M]s^2 + [C]s + [K]]\{X(s)\} = [B(s)]\{X(s)\} = \{F(s)\} \quad (3.2.5)$$

con

$$\{X(s)\} = [B(s)]^{-1}\{F(s)\} = [H(s)]\{F(s)\} \quad (3.2.6)$$

da cui, trascurando la matrice dello smorzamento e con forze esterne nulle è possibile scrivere l'equazione 3.2.7 che permette di ricavare il vettore degli spostamenti trasformati per il sistema omogeneo, questo tuttavia limitato ai valori di s^2 tali da annullare il determinante della matrice dei coefficienti.

$$[[M]s^2 + [K]]\{X(s)\} = 0 \quad (3.2.7)$$

Confrontando l'espressione 3.2.7 con la 3.2.4 è possibile notarne la formale analogia. Il vettore X corrisponde ad una colonna della matrice Φ e ad ogni $-s^2$ corrisponde un termine della matrice D .

Il sistema omogeneo ha quindi soluzione non banale per n valori di $-s^2$ ognuno dei quali è un autovalore contenuto nella diagonale della matrice $[D]$ e per ogni autovalore

il vettore X , definito a meno di una costante, è la colonna corrispondente della matrice $[\Phi]$.

Ad ogni autovalore così trovato, a cui viene assegnata la definizione di pulsazione propria non smorzata del sistema (ω_o^2), corrisponde un autovettore rappresentante l'ampiezza della deformata del sistema eq. 3.2.8 quando quest'ultima è posta in vibrazione alla frequenza della pulsazione propria.

$$\{x(t)\} = \{\varphi\}_k \sin(\omega_{o(k)}^2 t) \quad (3.2.8)$$

Dato che l'ampiezza di φ e quindi gli autovalori sono definiti a meno di una costante arbitraria questa viene imposta tale che la matrice di massa diagonale fittizia coincida con la matrice identità. Di conseguenza la 3.2.4 previa premoltiplicazione per la trasposta della matrice di trasformazione $[\Phi]$ è presto determinata.

$$[\Phi]^{-1}[k][\Phi] = [K_{fittizia}] = [D] = [\omega_o^2] \quad (3.2.9)$$

Per quanto riguarda la matrice dello smorzamento, quest'ultima non gode della diagonalizzazione data dagli autovettori alle matrici di massa e rigidezza a meno di non considerarla proporzionale a quest'ultime.

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (3.2.10)$$

$$[\Phi]^{-1}[C][\Phi] = [C_{fittizia}] = [2\xi\omega_o] \quad (3.2.11)$$

dove il k -esimo termine della matrice diagonale $[2\xi\omega_o]$ di smorzamento è espresso dalla 3.2.12

$$2\xi_k\omega_{o(k)} \quad \text{con} \quad \xi_r = \frac{\alpha + \beta\omega_{o(k)}^2}{\omega_{o(k)}} \quad (3.2.12)$$

L'aver determinato la matrice degli autovettori Φ e la conoscenza degli autovalori diagonali della matrice $[D]$ ha fatto le veci dell'analisi modale del sistema. La matrice degli autovettori viene ora chiamata matrice modale e contiene in ogni colonna l'autovettore che viene chiamato forma modale scalata a matrice modale unitaria. Si può quindi scrivere il sistema di partenza 3.2.1 in forma disaccoppiata

$$[I]\{\ddot{q}\} + [2\xi\omega_o]\{\dot{q}\} + [\omega_o^2][q] = [\varphi]^T f = t \quad (3.2.13)$$

$$\{x\} = [\varphi]\{q\} \quad (3.2.14)$$

La 3.2.13 corrisponde al sistema di equazioni differenziali espresso nelle coordinate fittizie mentre la 3.2.14 trasforma le coordinate fittizie nelle coordinate fisiche del problema.

Ogni equazione differenziale, ordinata in modo da posizionare gli autovalori in ordine decrescente, assume la forma riportata nell'eq. 3.2.15

$$\ddot{q}_k + 2\xi_k\omega_{o(k)}\dot{q}_k + \omega_{o(k)} = \{\varphi\}_k^T \{f\} = t_k \quad \text{con} \quad k = 1, 2, 3 \dots n \quad (3.2.15)$$

L'espressione 3.2.15 corrisponde all'equazione relativa ad un sistema con un solo grado di libertà e valori di massa rigidità e smorzamento facilmente reperibili. Ognuna di queste equazioni può essere risolta singolarmente ed è possibile ricavare la i -esima coordinata fisica con la relazione 3.2.16.

$$x_i = \sum_{k=1}^n \varphi_{ik} q_k \quad \text{con } i = 1, 2 \dots n \quad (3.2.16)$$

La funzione di trasferimento relativa al k -esimo sistema della 3.2.15 è definita dalla 3.2.17

$$H_k(s) = \frac{Q_k(s)}{T(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\xi_k \omega_{o(k)} s + \omega_{o(k)}^2} \quad (3.2.17)$$

L'analisi modale effettuata sfruttando le trasformate permette infine di definire il termine della matrice H della funzione di trasferimento 3.2.6 descrivente il rapporto tra le trasformate della risposta al grado di libertà i -esimo se al sistema viene applicata una forza al medesimo grado di libertà.

Il termine è ora di facile determinazione e la formulazione generica risponde all' eq. 3.2.18

$$H_{ij}(s) = \frac{X_i(s)}{F_j(s)} = \sum_{k=1}^n \varphi_{ik} \varphi_{jk} H_k(s) \quad (3.2.18)$$

Capitolo 4

Modello matematico

Nella sua vita operativa un propulsore è sottoposto a numerosi e differenti carichi. Nel dettaglio particolare interesse è riservato alle pale di turbina essendo oggetto di stringenti vincoli progettuali legati a dimensioni e condizioni operative. In turbina sotto l'azione di elevate temperature ed elevate velocità di rotazione la singola pala è soggetta a carichi di elevata intensità e variabili nel tempo. Tuttavia non solo il comportamento statico necessita particolare cura ma anche quello dinamico, al fine di evitare frequenze di risonanza prossime a quelle proprie dell'intero sistema che potrebbero portare a conseguenze catastrofiche. La formulazione di un modello matematico atto dunque a descrivere il comportamento dinamico di una struttura sottoposta a differenti sollecitazioni ha da sempre trovato ampio spazio nella letteratura. Nel caso oggetto di analisi l'obbiettivo principe risiede nella ricerca e nella definizione delle rigidità di contatto al giunto tra disco e pala disponendo della sola frequenza propria del sistema paletta di turbina e di un carico di trazione, surrogato della forza centrifuga agente nella stessa. Numerosi sono dunque i fattori in gioco che sovrapponendo la loro influenza concorrono a descrivere la fenomenologia del problema. L'approccio al macroproblema è difatto possibile suddividendo quest'ultimo in problemi più semplici e successivamente, in fase di calcolo sommare i differenti contributi e definirne quindi l'influenza globale.

4.1 Descrizione del problema

Dei fenomeni in gioco agenti sulla paletta di turbina posta in rotazione e sul suo collegamento con il disco, quelli aventi una definita influenza sulle frequenze proprie sono molteplici. Nell'analisi in oggetto si riducono i termini aventi influenza ai soli contributi di massa e rigidità complessiva del sistema e particolare enfasi è posta nella determinazione della rigidità e della sua variazione conseguentemente all'applicazione di una forza assiale. Una precedente semplificazione del problema vero ha permesso la concezione di un provino ben approssimante il comportamento dinamico, tuttavia, ai fini dello sviluppo di un modello matematico è richiesta un'ulteriore discretizzazione. Nell'ottica di una successiva implementazione a mezzo metodi agli elementi finiti l'intera struttura del provino è approssimata con una successione di elementi beam. Per quanto

concerne la giunzione tra i due estremi del provino, vero oggetto di interesse, il fenomeno è ridotto all'introduzione di un ulteriore elemento beam contenente l'informazione relativa alla rigidità di contatto come mostrato in figura 4.1.

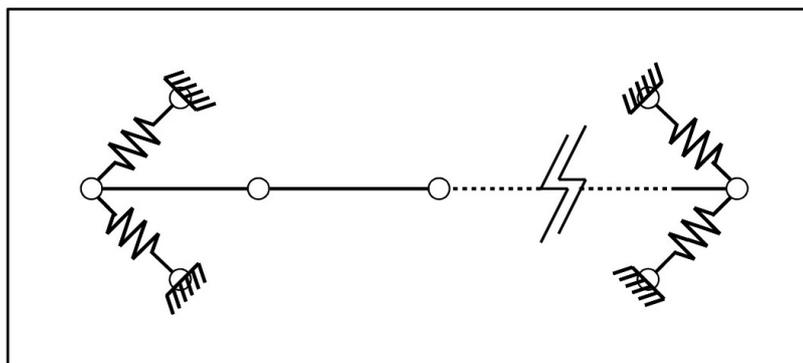


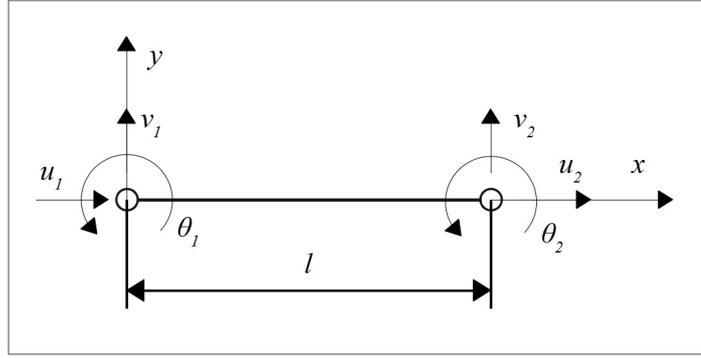
Figura 4.1: Schema modello FE

L'introduzione di nuovi termini dipendenti dal carico applicato all'estremo del provino e rappresentante la forza centrifuga all'interno del modello ha evidenziato la necessità di distinguere il contributo alla variazione della rigidità del sistema apportato dai singoli termini. Nel particolare l'incremento di forza traente le due superfici al contatto si presume che provochi, in accordo con le teorie sviluppate circa il contatto Hertziano tra solidi non conformi, un proporzionale incremento di rigidità. Tuttavia, in presenza di carichi assiali di entità non trascurabile, non solo la rigidità dovuta al contatto concorre a determinare la variazione nelle frequenze modali proprie del sistema al variare di tale sollecitazione.

Il problema viene dunque affrontato come sovrapposizione di differenti contributi e gran parte del lavoro consta nell'identificazione dei coefficienti causa di variazioni di rigidità e del loro effetto nella stessa al variare di alcuni parametri.

4.2 Problema non lineare

Qualora la struttura sia sottoposta a carichi tali da deformare la stessa le equazioni di equilibrio formulate per la configurazione indeformata non sono più in grado di fornire una soluzione corretta e tali equazioni devono necessariamente essere riformulate per la configurazione deformata. Lo scopo prefissato è quello di effettuare un'opportuna analisi atta a contemplare l'azione dei termini non lineari derivanti dalla somministrazione del carico. Questo si traduce nella necessità di introdurre nelle equazioni termini che in analisi lineare potevano essere trascurati. Delle numerose metodologie atte a ricavare quanto cercato nella presente si è optato per quello teorizzato da Przemieniecki.J.S [2]. In riferimento all'elemento beam mostrato in figura 4.2


Figura 4.2: Schema elemento beam

La distribuzione degli spostamenti nell'elemento è data dal prodotto degli spostamenti nodali per le funzioni di forma come riportato nell'equazione 4.2.1

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \xi & 0 & 0 \\ 6(\xi - \xi^2)\eta & 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & 0 \\ 6(\xi - \xi^2)\zeta & 0 & 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ 0 & -(1 - \xi)l\zeta & -(1 - \xi)l\eta \\ (1 - 4\xi + 3\xi^2)l\zeta & 0 & -(-\xi + 2\xi^2 - \xi^3)l \\ (1 - 4\xi + 3\xi^2)l\eta & (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)l & 0 \\ \xi & 0 & 0 \\ 6(-\xi + \xi^2)\eta & 3\xi^2 - 2\xi^3 & 0 \\ 6(-\xi + \xi^2)\zeta & 0 & 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ 0 & -l\xi\zeta & -l\xi\eta \\ (-2\xi + 3\xi^3)l\zeta & 0 & (\xi^2 - \xi^3)l \\ (2\xi - 3\xi^2)l\eta & (-\xi^2 + \xi^3)l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

dove u_i, v_i, θ_i sono i gradi di libertà associati al nodo i -esimo dell'elemento e i termini adimensionali ξ, η e ζ sono i rapporti tra le coordinate x, y, z e la lunghezza l del singolo elemento. Per quanto concerne il calcolo dell'energia di deformazione il procedimento scelto prevede di trascurare i contributi legati alle deformazioni di scorrimento. Di conseguenza le sole equazioni di compatibilità necessarie al calcolo sono quelle legate alle tensioni normali e data la natura non lineare del problema dovuta alle deformazioni di entità non più trascurabile, la forma di tale espressione risulta essere quella mostrata nell'equazione 4.2.2

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \quad (4.2.2)$$

dove con il termine u_0 si definisce lo spostamento dell'elemento dall'asse di riferimento per $y = 0$. Il passo successivo prevede di sostituire nell'equazione 4.2.3 dell'energia di deformazione i termini derivanti dalla compatibilità riportati nell'equazione 4.2.2.

$$\begin{aligned}
 U_i &= \frac{E}{2} \int_v \varepsilon_{xx}^2 dV \\
 &= \frac{E}{2} \int_v \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \right]^2 dV \\
 &= \frac{E}{2} \int_{x=0}^l \int_A \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right)^2 y^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^4 - 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} y + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 y + \frac{\partial u_0}{\partial x} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \right] dx dA
 \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Trascurando infine i termini di ordine superiore e notando che l'integrale di y lungo la sezione trasversale dell'elemento altro non è che il momento d'inerzia I dello stesso si pervenire all'espressione 4.2.4.

$$U_i = \frac{EA}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{EA}{2} \int_0^l \frac{\partial u_0}{\partial x} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 dx \tag{4.2.4}$$

I primi due termini dell'equazione coincidono con quelli ricavabili da un'analisi lineare mentre, il terzo termine contiene le informazioni relative alla deformazione non più trascurabile. Dall'equazione 4.2.1 riportante la correlazione tra funzioni di forma e spostamenti nodali si ricavano i termini relativi agli spostamenti dell'elemento, successivamente, derivando rispetto alla coordinata di interesse si ottengono i termini necessari al calcolo dell'energia di deformazione.

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{1}{l} (-u_1 + u_2) \tag{4.2.5}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{1}{l} [6(-\xi + \xi^2)v_1 + (1 - 4\xi + 3\xi^2)l\theta_1 + 6(\xi - \xi^2)v_2 + (-2\xi + 3\xi^2)l\theta_2] \tag{4.2.6}$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \frac{1}{l^2} [6(-1 + 2\xi)v_1 + 2(-2 + 3\xi)l\theta_1 + 6(1 - 2\xi)v_2 + 2(-1 + 3\xi)l\theta_2] \tag{4.2.7}$$

Sostituendo le equazioni 4.2.5, 4.2.6 e 4.2.7 nella 4.2.4 e integrando si ottiene l'espressione 4.2.8

$$\begin{aligned}
 U_i &= \frac{EA}{2l} (u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2) + \\
 &+ \frac{2EI}{l^3} (3v_1^2 + l^2\theta_1^2 + 3v_2^2 + l^2\theta_2^2 + 3lv_1\theta_1 - 6v_1v_2 + 3lv_1\theta_2 - 3l\theta_1v_2 + l^2\theta_1\theta_2 - 3lv_2\theta_2) + \\
 &+ \frac{EA}{l^2} (u_2 - u_1) \left(\frac{3}{5}v_1^2 + \frac{1}{15}l^2\theta_1^2 + \frac{3}{5}v_2^2 + \frac{1}{15}l^2\theta_2^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{10}lv_1\theta_1 - \frac{6}{5}v_1v_2 + \frac{1}{10}lv_1\theta_2 - \frac{1}{10}l\theta_1v_2 - \frac{1}{30}l^2\theta_1\theta_2 - \frac{1}{10}lv_2\theta_2 \right)
 \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Nel caso di asta incastrata, data la natura del problema è possibile fare l'assunzione:

$$F_c = \frac{EA}{l}(u_2 - u_1) \simeq cost \quad (4.2.9)$$

Applicando infine il teorema di castigliano (parte I) all'espressione dell'energia di deformazione 4.2.8 è possibile ricavare l'equazione di equilibrio forze-spostamenti che, scritta in notazione matriciale assume la forma 4.2.10.

$$\begin{bmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ M_1 \\ F_{x_2} \\ F_{y_2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{l} & & & & & & \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & & & & & \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & & & & \\ -\frac{AE}{l} & 0 & 0 & \frac{AE}{l} & & & \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & & \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (4.2.10)$$

$$+ F_c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 & \frac{6}{l^5} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5l} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{l}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2}{15}l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Che può essere espressa simbolicamente come:

$$F = (K_E + K_G)u \quad (4.2.11)$$

dove K_E è la matrice di rigidezza elastica mentre K_G è la matrice di rigidezza incrementale o geometrica e contiene al suo interno i contributi non lineari origine della variazione della frequenza del sistema studiato all'aumentare della componente centrifuga della forza.

4.3 implementazione della matrice di rigidezza geometrica

Il modello agli elementi finiti da adottare per includere gli effetti relativi alla trazione della paletta a mezzo carico centrifugo risulta quindi completamente definito. Con riferimento alla figura 4.3 il singolo elemento contribuirà alla variazione della matrice di rigidezza locale introducendo il proprio termine incrementale.

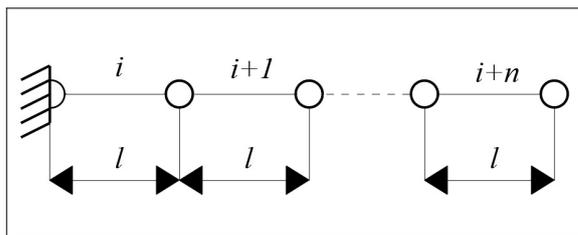


Figura 4.3: Schema struttura e numerazione nodi ed elementi

Tale contributo viene quindi trattato come se il principio di sovrapposizione degli effetti mantenesse la sua valenza, a dispetto di quanto normalmente possa derivare da un'analisi di tipo non lineare. La nuova matrice di rigidità locale, somma del contributo elastico e del contributo geometrico viene dunque, come di consueto avviene, posta nel sistema di riferimento globale a mezzo matrice di rotazione e successivamente assemblata come riportato in figura 4.4.

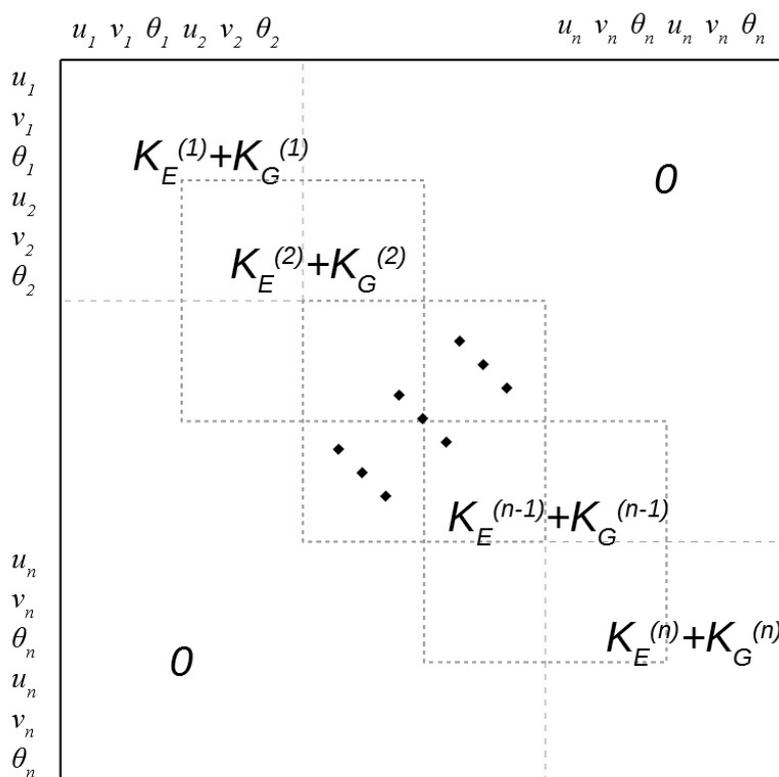


Figura 4.4: Matrice di rigidità globale

Il termine centrifugo, è contenuto all'interno della matrice di rigidità incrementale ed è immediato osservare come l'influenza di tale carico assuma rilevanza solo per valori elevati. Supponendo un carico centrifugo unitario le grandezze costituenti gli elementi della matrice di rigidità elastica rendono infatti tali valori di svariati ordini di grandezza superiori agli stessi ricavabili a mezzo matrice di rigidità incrementale. Altrettanto

intuitivo e prova della corretta implementazione del modello sarà la corrispondenza dei risultati in termini di frequenze modali nei casi di modello derivante da analisi lineare e di modello derivante da analisi non lineare non sottoposto ad alcun carico centrifugo.

4.4 validazione del modello

A seguito dell'implementazione del modello non lineare nasce l'esigenza di validare i risultati derivanti da tale analisi. Vertendo l'interesse dell'opera in corso circa il comportamento dinamico del sistema e dunque circa la determinazione delle frequenze e delle forme modali la validazione riguarderà l'andamento di tali grandezze.

Tramite l'utilizzo del software FE commerciale (ANSYS) si è generata una macro capace di fornire risultati nei sensi di comportamento dinamico della struttura oggetto di test. La scelta della struttura è ricaduta, per motivi di semplicità e di similitudine con quanto ricavabile dal provino, su un'asta a forma rettangolare di dimensioni uguali al provino stesso (base 35 mm spessore 10 mm lunghezza 330 mm) ed incastrata ad un suo estremo figura 4.5a. Per quanto riguarda la discretizzazione del modello matematico e la sua implementazione in un foglio di calcolo si è optato per un'asta incastrata all'estremo avente medesime dimensioni longitudinali del provino e suddivisa in 20 elementi beam come mostrato in figura 4.5b.

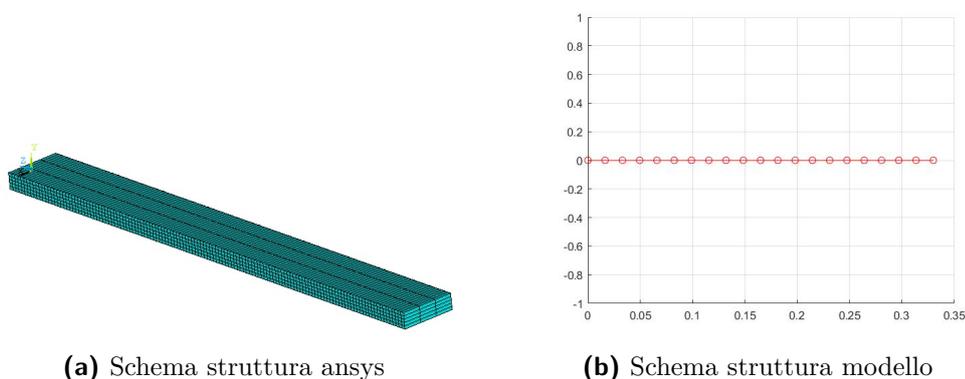


Figura 4.5: Modello FE

Le prove a mezzo software sono state svolte incrementando il carico assiale a cui è sottoposta la struttura in maniera analoga a quanto fatto con il modello matematico per poi memorizzare i risultati delle prime 4 frequenze modali. La forza centrifuga, unico carico agente nella struttura per la prova in atto viene incrementata a step di 1000 N portando la struttura da una configurazione scarica ad una sottoposta a 30000N. Al fine di mantenere una coerenza di condizioni operative tra i due modelli oltre all'equivalenza di carichi e dimensioni longitudinali si sono utilizzati medesimi parametri dimensionali trasversali, nel dettaglio trattasi di base ed altezza per il modello utilizzato nel software FE commerciale la cui equivalenza è espressa nel modello matematico adottato nei termini di momento di inerzia e sezione della trave.

le forme modali osservate sono le prime 4 flessionali riportate, per un carico longitudinale pari a 30000 N, nelle figure 4.6a, 4.7a, 4.8a, 4.9a per quanto riguarda i risultati relativi al software commerciale e nelle figure 4.6b, 4.7b, 4.8b, 4.9b per quanto riguarda i risultati relativi al modello matematico oggetto di validazione.

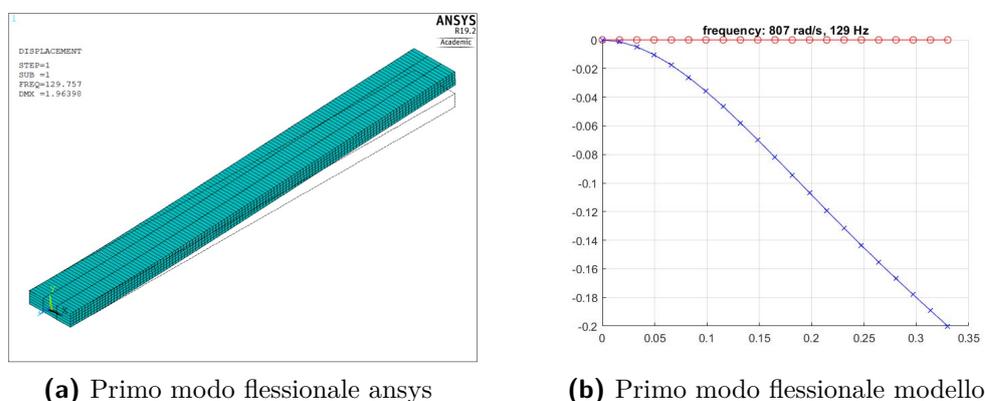


Figura 4.6: Primo modo flessionale

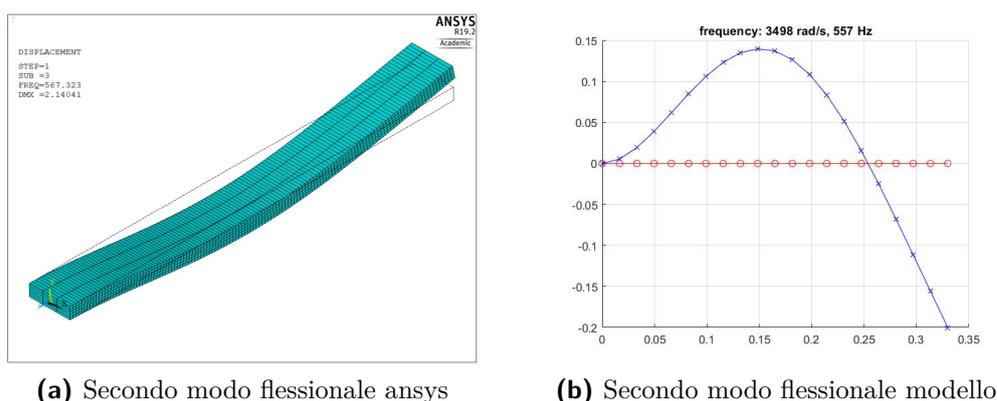
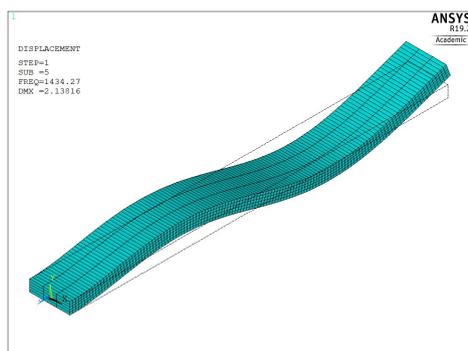


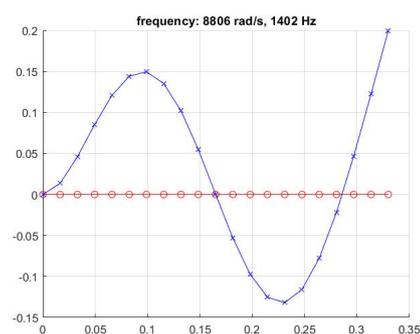
Figura 4.7: Secondo modo flessionale

Il modello matematico commerciale, data la natura tridimensionale della sua discretizzazione è in grado di fornire tutte le forme modali della struttura soggetta a determinati vincoli e determinate condizioni di carico, siano esse flessionali, torsionali o miste. Di queste solo quelle relative ai modi flessionali rispetto all'asse delle ascisse sono state prese in considerazione in quanto la natura bidimensionale della soluzione proposta dal modello matematico implementato permette di ricavare solo quest'ultime.

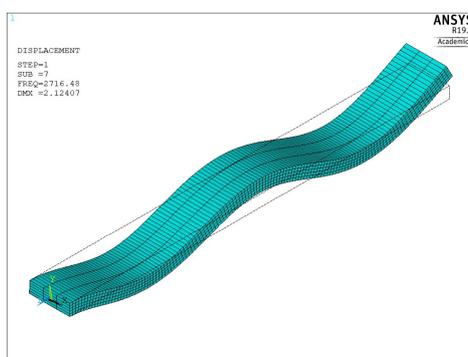
I dati ricavati hanno mostrato come, ai sensi di un'analisi dinamica, il modello matematico proposto ben approssimi la configurazione di prova come riportato in figura 4.10. All'aumentare del carico i risultati manifestano una tendenza a convergere e come prevedibile, l'aumento di rigidità dovuto alla matrice incrementale, derivante dall'analisi non lineare, influenza le frequenze incrementandone l'intensità. Dall'osservazione delle 4 frequenze modali si evince inoltre come, al variare del modo flessionale osservato il



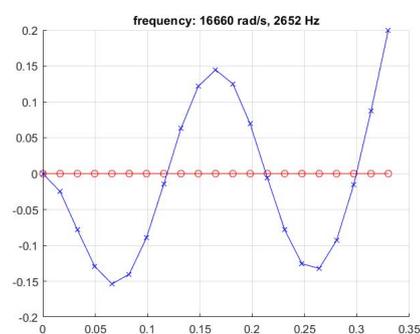
(a) Terzo modo flessionale ansys



(b) Terzo modo flessionale modello

Figura 4.8: Terzo modo flessionale

(a) Quarto modo flessionale ansys



(b) Quarto modo flessionale modello

Figura 4.9: Quarto modo flessionale

dislivello tra le frequenze rilevate vada aumentando allo spostarsi verso forme modali superiori. Le prime forme modali presentano infatti valori relativamente prossimi a quelli ottenuti dall'analisi a mezzo software FE commerciale anche per intensità di carico modeste. Diversamente per forme modali distanti dalle prime due è possibile infatti notare una tendenza globale dei dati a convergere al valore esatto, ma si rileva la necessità di sottoporre la struttura a carichi superiori affinché l'errore decresca. Questo in accordo con quanto precedentemente affermato circa il comportamento della matrice di rigidezza geometrica nel caso di analisi non lineare. L'influenza della rigidezza incrementale, data la natura fortemente legata alle non linearità geometriche, dipendenti dall'intensità del carico applicato, ha un andamento proporzionale a quello di quest'ultimo. Dall'osservazione dei termini costituenti le matrici di rigidezza elastica e geometrica è possibile osservare, infatti, come i valori della prima presentino ordini di grandezza dipendenti direttamente dal modulo di elasticità o dal prodotto dello stesso per il coefficiente di inerzia. Nel caso in esame, dati i parametri utilizzati tali coefficienti arrivano sino a $10^9 \frac{N}{mm}$ mentre, per quanto concerne i termini additivi relativi alla matrice geometrica l'ordine di grandezza è direttamente proporzionale al carico applicato.

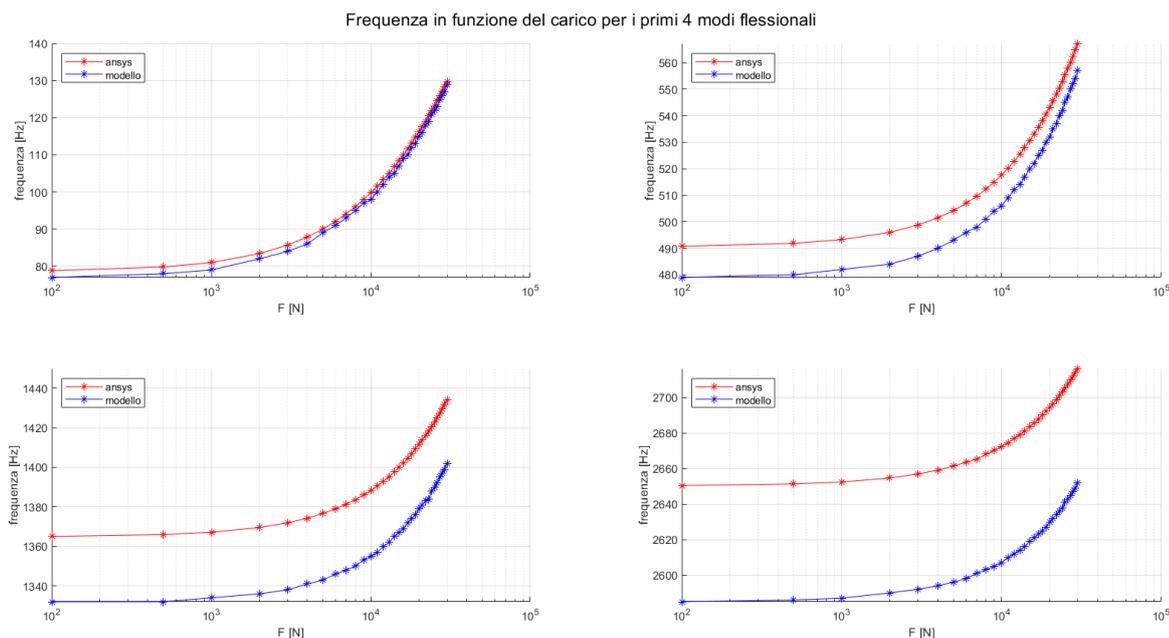


Figura 4.10: Rappresentazione risultati simulazioni in scala logaritmica

Per meglio comprendere il comportamento relativo delle coppie di dati osservati si è preferito rappresentare la differenza tra i due valori di frequenza rilevati per le differenti forme modali così da riportare lo scostamento dal valore ideale del modello da validare come mostrato in figura 4.11. Data la natura sparsa, ma regolare delle coppie di dati è stata tracciata una linea di tendenza atta a rappresentare l'andamento degli stessi al variare del carico applicato.

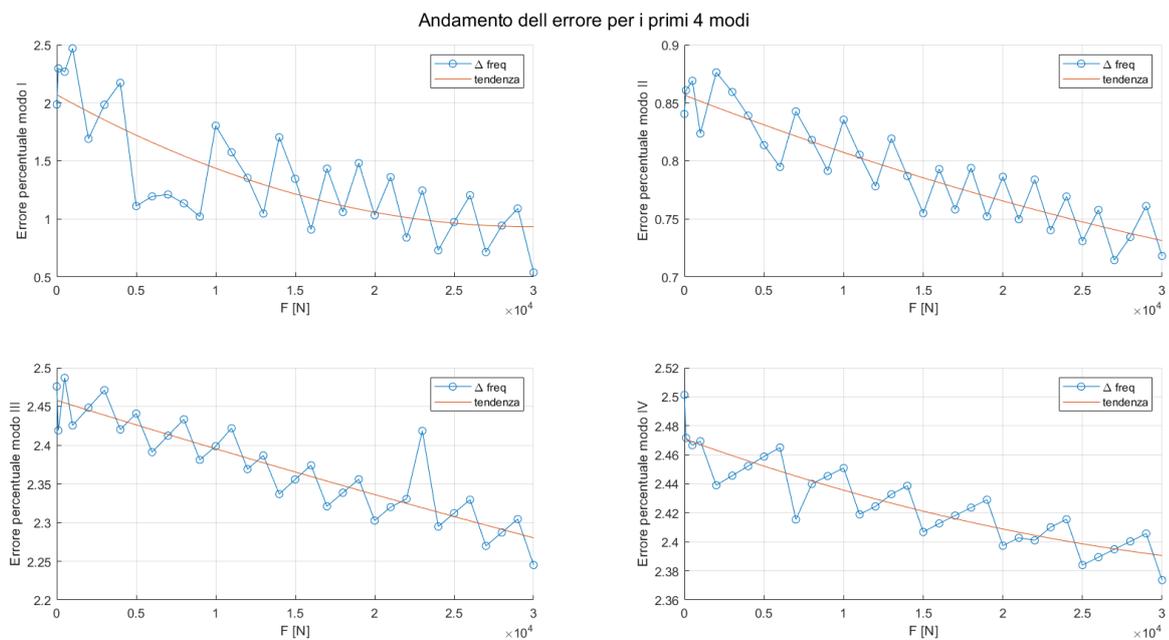


Figura 4.11: Andamento dell'errore di approssimazione

In tutti i casi osservati, l'errore percentuale, va da un massimo di 2.5% del valore vero a carico longitudinale nullo, fino a valori prossimi all'unità, nel caso del primo modo flessionale o comunque presenta un andamento decrescente. Il metodo è quindi in grado di fornire una buona approssimazione qualitativa del comportamento delle frequenze modali e accettando un certo errore dipendente dal modo osservato e dal carico applicato anche un'accettabile approssimazione dell'andamento quantitativo.

Infine la necessità di un modello di analisi non lineare ha trovato conferma nei dati rilevati. La frequenza modale al variare del carico applicato non presentava andamenti di sorta rimanendo, difatto, costante non manifestando dipendenze di sorta.

Capitolo 5

Modello del contatto

5.1 Problema del contatto

La comprensione delle forze e delle deformazioni agenti al contatto tra due corpi non conformi ha ampiamente interessato la letteratura sin da quando Hertz nel 1881 ha per primo identificato il fenomeno. Numerose sono le teorie che descrivono il comportamento di corpi non conformi posti in contatto e sottoposti all'azione di un carico. Tale problema ha infatti trovato ampio spazio nella ricerca, data la frequenza con la quale è possibile ritrovare le fenomenologie che gli appartengono in innumerevoli collegamenti meccanici. Il contatto tra due o più solidi è infatti attualmente il più comune metodo di trasmissione dei carichi sia esso desiderato, come nel caso di collegamenti meccanici atti a trasmettere potenze, o semplicemente derivante dal posizionamento reciproco di due superfici. A dispetto, tuttavia, della sua così ampia diffusione e degli sforzi in materia di ricerca, una soluzione analitica esatta non è ancora stata trovata. Sono presenti infatti disparate teorie e formulazioni riferite a determinate e precise geometrie che con buona approssimazione restituiscono valori accettabili. Le casistiche prese in considerazione in letteratura riguardano principalmente corpi sferici in contatto reciproco o in contatto con superfici planari e corpi cilindrici sempre in contatto reciproco o in contatto con una superficie piana. Tali teorie derivano per grossa parte dall'analisi Hertziana sul contatto elastico [7] e ne conservano le principali ipotesi:

- Le deformazioni presenti sono contenute entro il limite elastico.
- Le superfici in contatto sono da considerarsi continue e non conformi.
- L'attrito tra le due superfici è trascurabile.
- L'area di contatto dev'essere piccola rispetto alle dimensioni del corpo.

In particolare, l'ipotesi concernente le dimensioni dell'area di contatto rispetto al corpo permette l'estensione della teoria ad un numero elevato di configurazioni. Nel caso oggetto di esame infatti sarà possibile applicare la teoria al problema in virtù delle

piccole deformazioni dovute alla compressione dei corpi in relazione alla dimensione degli stessi.

Dell'ampia letteratura a disposizione sono stati posti a confronto i metodi proposti da differenti autori al fine di selezionare quello meglio approssimante il problema reale. Nel dettaglio, si sono implementate le formulazioni proposte da B.N. Norden [8], O.I.Kosarev [10], Young et al. nel libro "Roark's Formulas for Stress and Strain" [13] e J.Brändlein[14] ed è stato ricavato il grafico dell'accostamento in funzione del carico applicato per ognuno dei metodi riportato in figura 5.1.

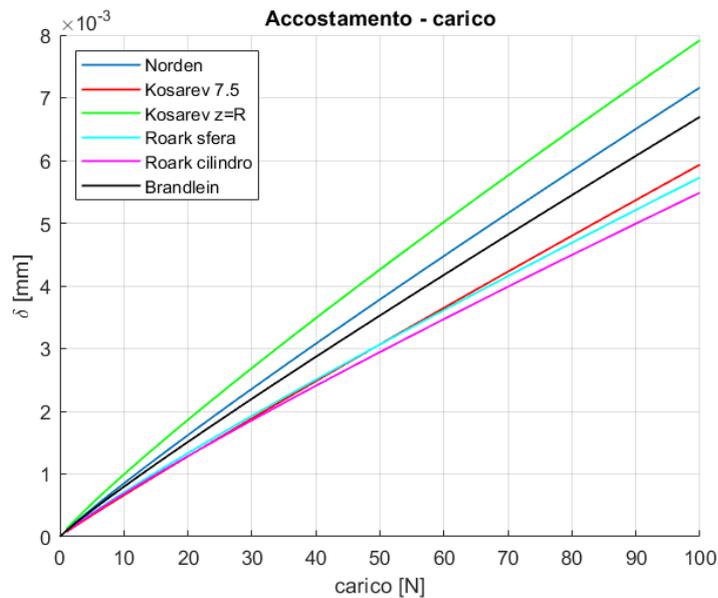


Figura 5.1: Comparazione differenti metodologie di calcolo della deformazione al contatto

Le formulazioni, a dispetto delle scelte fatte in fase di definizione della rispettiva teoria, presentano valori comparabili e compresi nello stesso ordine di grandezza. La scelta del metodo da adottare può prescindere dalla eventuale miglior approssimazione del problema fisico e vertere su altri aspetti. Nel caso delle analisi successive la teoria adottata nella presente opera è quella formulata da J.Brändlein. Tale preferenza deriva principalmente da due considerazioni: La prima, riguarda i risultati ottenuti nei sensi di andamento carico-accostamento, i valori ottenuti da Brändlein giacciono in posizione quasi intermedia rispetto ai valori ricavabili dall'applicazione delle altre teorie. La seconda, di gran lunga più importante, è legata al fatto che la formulazione scelta non dipende, nella sua espressione, da considerazioni geometriche circa diametri dei corpi in contatto ma soltanto dalla dimensione longitudinale del cilindro considerato. Tale dimensione è, nel caso ipotizzato, di facile reperibilità, risulta infatti coincidente con la dimensione inferiore tra lo spessore del provino e il blocco atto a simulare lo slot del disco presente nel banco prova.

5.2 Calcolo della rigidezza

La trasmissione di un determinato carico, da una superficie conforme ad un'altra ad essa adiacente, genera nella zona di superficie adiacente al contatto una deformazione proporzionale alla forza applicata. Ai fini del calcolo della rigidezza il comportamento del contatto al giunto tra radice della paletta e disco di turbina necessita di un'astrazione e viene considerato come fosse un semplice contatto superficie-cilindro secondo lo schema mostrato in figura 5.2 così da poter applicare le formulazioni note.

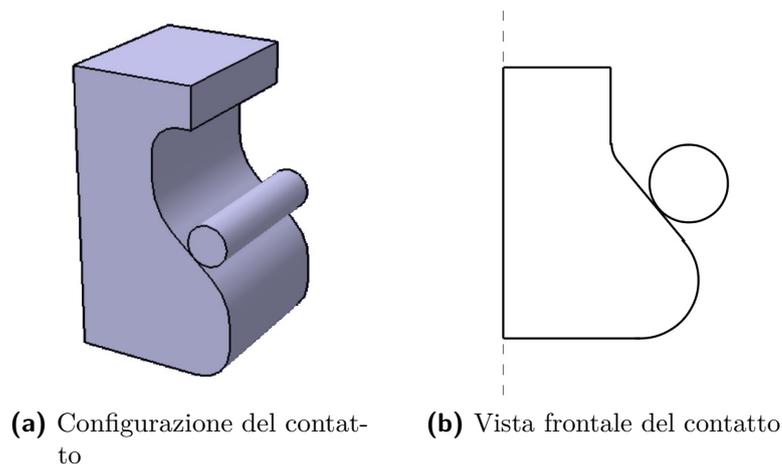


Figura 5.2: Schema dovetail-contatto

Per motivi legati a facilità di implementazione e correttezza di risultati la scelta dell'equazione atta a descrivere la fenomenologia del collegamento è ricaduta su quanto formulato da Brändlein [14]. La configurazione adottata necessita di un'ulteriore semplificazione per meglio approssimare la casistica da noi selezionata. Il cilindro in contatto con la radice della paletta viene infatti completamente sostituito dalla seconda superficie in gioco e a definire le caratteristiche dinamiche del collegamento, resta soltanto l'informazione della rigidezza come mostrato in dettaglio nello schema esemplificativo riportato in figura 5.3

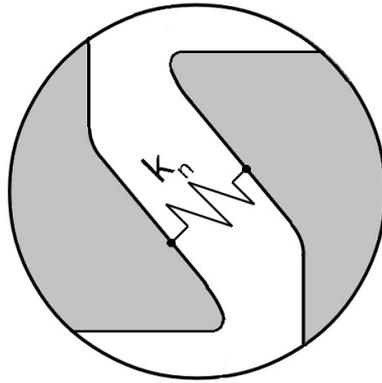


Figura 5.3: Dettaglio del collegamento tra radice di pala e slot disco di turbina

Tale parametro è determinabile data la corrispondenza della pendenza della curva accostamento carico con la cedevolezza del contatto. In riferimento allo schema in figura 5.4 l'accostamento δ relativo al collegamento con singolo contatto tra due superfici è espresso descritto secondo Brändlein dall'equazione 5.2.1

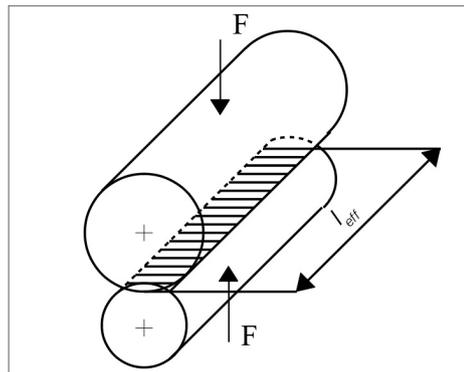


Figura 5.4: Rigidezza di contatto normale. Formulazione di Brändlein

$$\delta_n = 8.10 \cdot 10^{-5} \frac{F^{0.9}}{L^{0.8}} \quad (5.2.1)$$

Dove L è la lunghezza dei cilindri previa esclusione di possibili recessi e nel caso da noi preso in esame corrisponde con lo spessore del provino ed il carico corrisponde alla forza centrifuga agente sulla paletta. Dalla derivazione dell'accostamento così ricavato per il carico applicato è possibile determinare la cedevolezza C secondo la 5.2.2

$$C = \frac{1}{K_n(F)} = \frac{d\delta_n}{dF} \quad (5.2.2)$$

ed infine, invertendo quest'ultima, la rigidezza k_n del sistema in funzione della forza, come riportato nell'equazione e 5.2.3.

$$K_n(F) = \frac{1}{0.925} \frac{L^{0.85}}{8.10 \cdot 10^{-5}} F^{0.075} \quad (5.2.3)$$

Nella tesi in oggetto la rigidità così determinata avrà lo scopo di validare i risultati ottenuti in successive analisi e l'andamento della stessa per un cilindro avente dimensione longitudinale pari a 10 mm e sottoposto ad un carico di intensità crescente da 0 a 500 N presenta la forma mostrata in figura in accordo con quanto ricavato in letteratura.

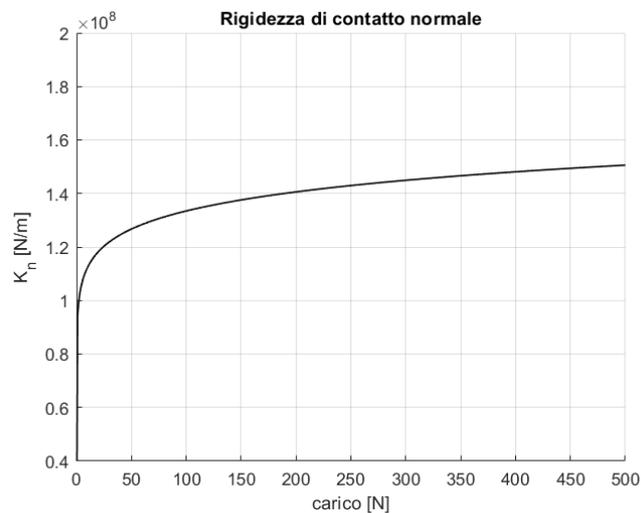


Figura 5.5: Rigidità di contatto normale. Formulazione di Brändlein

5.3 Implementazione della rigidità di contatto

Una volta selezionata una formulazione necessaria alla definizione della rigidità di contatto si procede alla definizione di una discretizzazione atta ad implementare quanto ricavato in merito al contatto nel modello agli elementi finiti. Si è optato per la schematizzazione mostrata in figura 5.6.

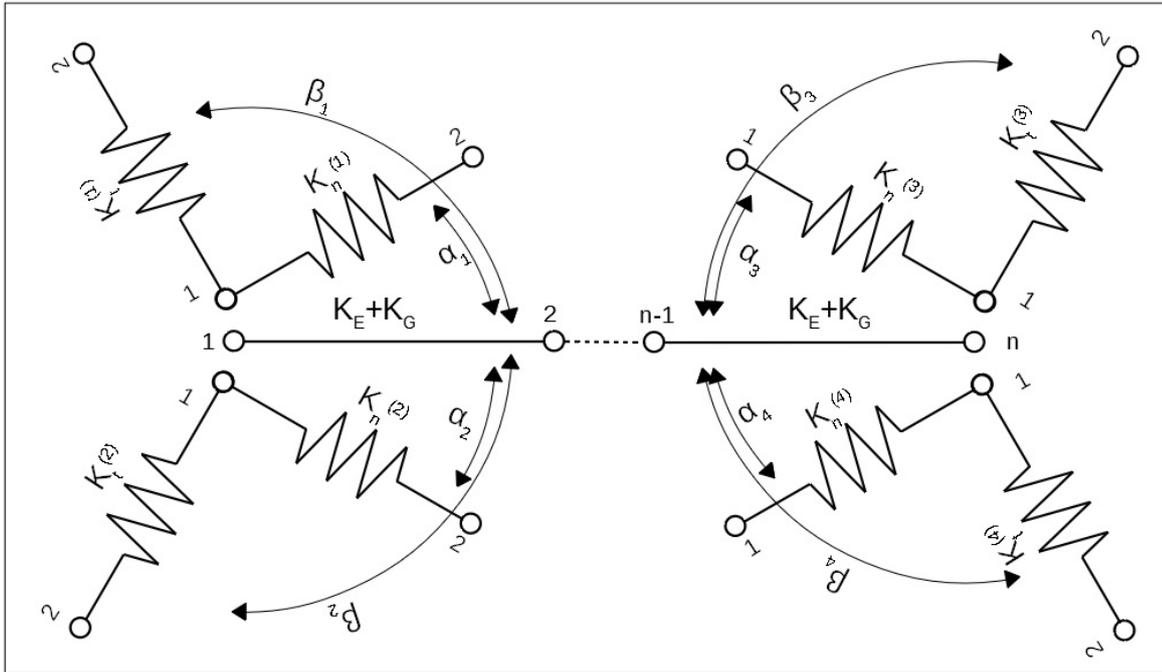
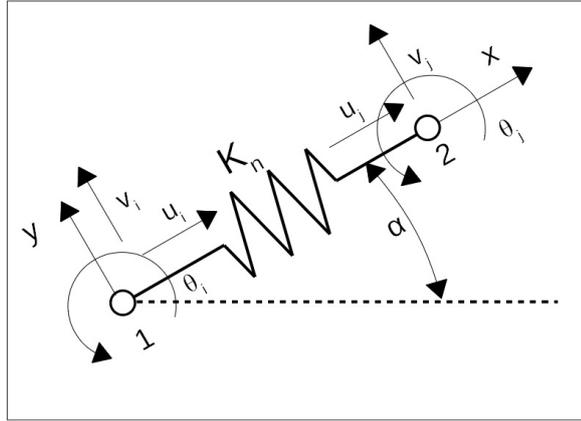


Figura 5.6: Schema struttura con introduzione degli elementi spring

Il corpo principale della paletta è rappresentato da un'asta discretizzata con n elementi beam. Ad essa vengono connessi 4 elementi spring inclinati di un angolo α rispetto alla direzione longitudinale della paletta, rappresentanti la rigidezza di contatto normale. La rigidezza di contatto tangenziale è rappresentata anch'essa da 4 elementi spring connessi alla struttura principale ed inclinati di un angolo β rispetto alla direzione longitudinale della paletta. Gli 8 elementi spring presentano a due a due 1 nodo in comune, ovvero, gli elementi spring rappresentanti il contatto tra le medesime superfici presentano 1 nodo in comune e il loro orientamento relativo è di $\pi/2$

5.3.1 Rigidezza di contatto normale

Il modello adottato prevede di considerare il contributo del contatto come fosse parte di un ipotetico elemento spring additivo mostrato in figura 5.7 da applicare alla discretizzazione della paletta a mezzo metodi FE. Un'estremità dell'elemento risulta connessa alla struttura principale e l'altra invece si suppone possa essere vincolata in qualche modo. Tale particolare elemento contribuirà alla determinazione del comportamento dinamico della struttura influenzando la rigidezza globale del sistema.


Figura 5.7: Schema dell'elemento spring

Tale elemento consente di riprodurre il comportamento di molle lineari, nel senso della determinazione della forza assiale, a partire dalla conoscenza della rigidità e dello spostamento, assiali anch'essi. L'equazione 5.3.1 descrive ampiamente il fenomeno ed è quella canonicamente applicata.

$$F = ku \quad (5.3.1)$$

Un'ulteriore elaborazione è necessaria per discretizzare l'espressione in modo da riferire le variazioni delle grandezze ai nodi dell'elemento. Sempre in riferimento allo schema mostrato in figura 5.7 infatti, le forze nodali dell'elemento, funzione a loro volta degli spostamenti nodali, sono ricavabili a partire dall'equilibrio, ovvero come prodotto degli spostamenti nodali e della rigidità, secondo quanto riportato nell'equazione 5.3.2.

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & -k_{ij} \\ -k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (5.3.2)$$

L'equazione d'equilibrio lungo l'asse della molla può essere dunque espressa in notazione compatta eq. 5.3.3 evidenziando quella che è la matrice di rigidità locale.

$$\bar{F}_i = [K_n^{(loc)}] \bar{u}_i \quad (5.3.3)$$

L'elemento spring in questione deve tuttavia essere reso compatibile con la struttura principale i cui nodi godono di 3 gradi di libertà, di conseguenza la matrice di rigidità locale K_n^{loc} è espressa come fosse facente parte di un elemento beam e assume la forma riportata nella 5.3.4.

$$[K_n^{(loc)}] = \begin{bmatrix} k_n & 0 & 0 & -k_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_n & 0 & 0 & k_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3.4)$$

La rigidità così ricavata ha tuttavia ancora validità in un sistema di riferimento locale e per poter essere assemblata con la matrice di rigidità globale del modello agli elementi finiti della paletta, dev'essere ruotata a mezzo opportuna matrice di rotazione $[T]$ avente validità generale, definita nella 5.3.5.

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3.5)$$

Per la definizione della matrice di rotazione specifica per ogni singolo elemento spring considerato, si faccia riferimento allo schema in figura 5.8 con evidenziati i soli contributi derivanti dal contatto normale.

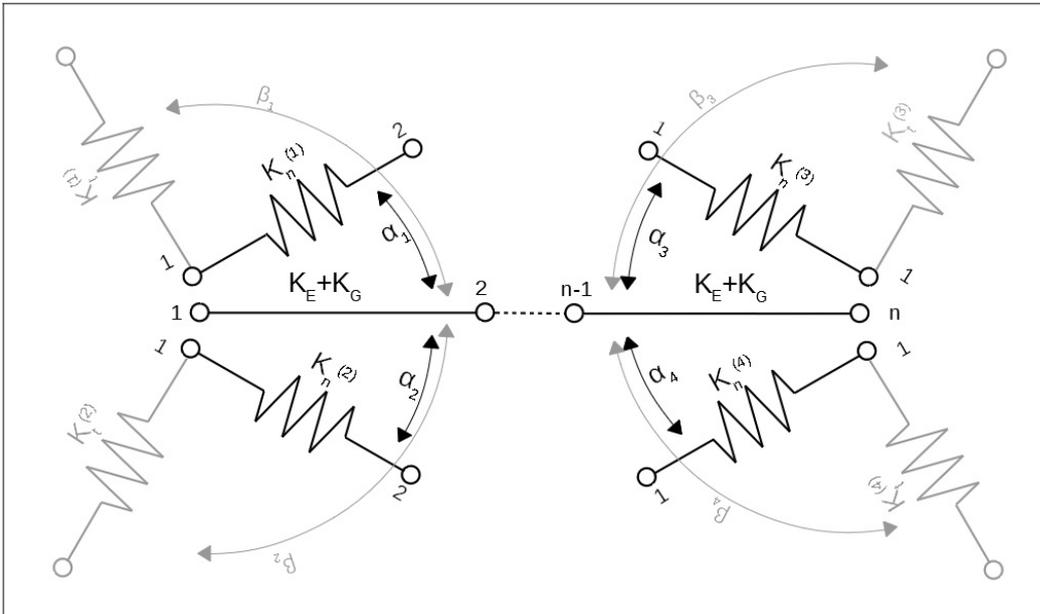


Figura 5.8: Configurazione del solo contatto normale

La matrice di rigidità del singolo elemento spring $[K_n^{(i)}]$ è dunque assoggettata a quella che è la sua posizione relativa e deve essere riportata nel sistema di coordinate globali dalla sua matrice di rotazione $[T^{(i)}]$ arrivando infine a ricavare la formulazione relativa all'elemento i-esimo eq.5.3.6.

$$[K_n^{(i)}] = [T^{(i)}]'[K_n^{(loc(i))}] [T^{(i)}] \quad (5.3.6)$$

La forma risultante della matrice rigidità relativa all'elemento spring riferita all'elemento beam costituente lo schema della paletta e riportata nel sistema di riferimento globale è quella espressa nell'equazione 5.3.7.

$$[K_n^{(i)}] = \begin{bmatrix} k_n^{(i)} \cos^2 \alpha_i & k_n \cos \alpha_i \sin \alpha_i & 0 & -k_n^{(i)} \cos^2 \alpha_i & -k_n^{(i)} \cos \alpha_i \sin \alpha_i & 0 \\ k_n^{(i)} \cos \alpha_i \sin \alpha_i & k_n^{(i)} \sin^2 \alpha_i & 0 & -k_n^{(i)} \cos \alpha_i \sin \alpha_i & -k_n^{(i)} \sin^2 \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_n^{(i)} \cos^2 \alpha_i & -k_n^{(i)} \cos \alpha_i \sin \alpha_i & 0 & k_n^{(i)} \cos^2 \alpha_i & k_n^{(i)} \cos \alpha_i \sin \alpha_i & 0 \\ -k_n^{(i)} \cos \alpha_i \sin \alpha_i & -k_n^{(i)} \sin^2 \alpha_i & 0 & k_n^{(i)} \cos \alpha_i \sin \alpha_i & k_n^{(i)} \sin^2 \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3.7)$$

Tale matrice deve essere calcolata per ogni singolo elemento spring da connettere alla struttura principale. Nel caso del modello da noi ideato 4 sono gli elementi in questione e sono posti a due a due in maniera simmetrica rispetto all'asse longitudinale della discretizzazione della paletta. Una volta ricavata la loro particolare espressione si può procedere alla fase di assemblaggio e all'introduzione del loro contributo nella matrice di rigidità globale.

Tuttavia, la fase di assemblaggio del contributo derivante dalle matrici di rigidità degli elementi spring con la matrice di rigidità globale necessita di particolare attenzione. Tale elemento addizionale, infatti, non viene considerato nella sua interezza ma, viene preso in considerazione soltanto un contributo parziale.

In riferimento allo schema complessivo riportato nella figura 5.6, ma avendo ben chiaro il contributo da considerare facendo riferimento alla figura 5.8 si procede all'assemblaggio della matrice di rigidità locale propria dei singoli elementi con la matrice di rigidità globale.

Ai fini dell'analisi dinamica il comportamento modale che si vuole osservare è quello relativo alla sola discretizzazione della paletta, si vuole quindi evitare l'introduzione di elementi non desiderati nella matrice di rigidità globale che ne modificherebbero la risposta. Ovvero, si vuole evitare di inserire la parte di contributo dell'elemento spring che rappresenterebbe il collegamento con lo slot del disco atto ad incastrare la paletta, riportato nella schematizzazione da noi ideata proprio come un vincolo, dato che nella prova questo risulterebbe in un collegamento con delle masse inerziali.

Dell'elemento spring addizionale vengono quindi inseriti nella matrice di rigidità globale i soli termini aventi posizioni nodali in comune con la struttura oggetto d'analisi trascurando difatto i contributi aventi posizioni nodali differenti secondo quanto mostrato in figura 5.9.

Questo permette di includere nel modello l'influenza della rigidità di contatto come facente parte dell'asta studiata senza modificarne la forma e senza l'introduzione di vincoli che potrebbero portare alla variazione delle forme modali flessionali cercate o che più in generale potrebbero restituire dei risultati non corretti.

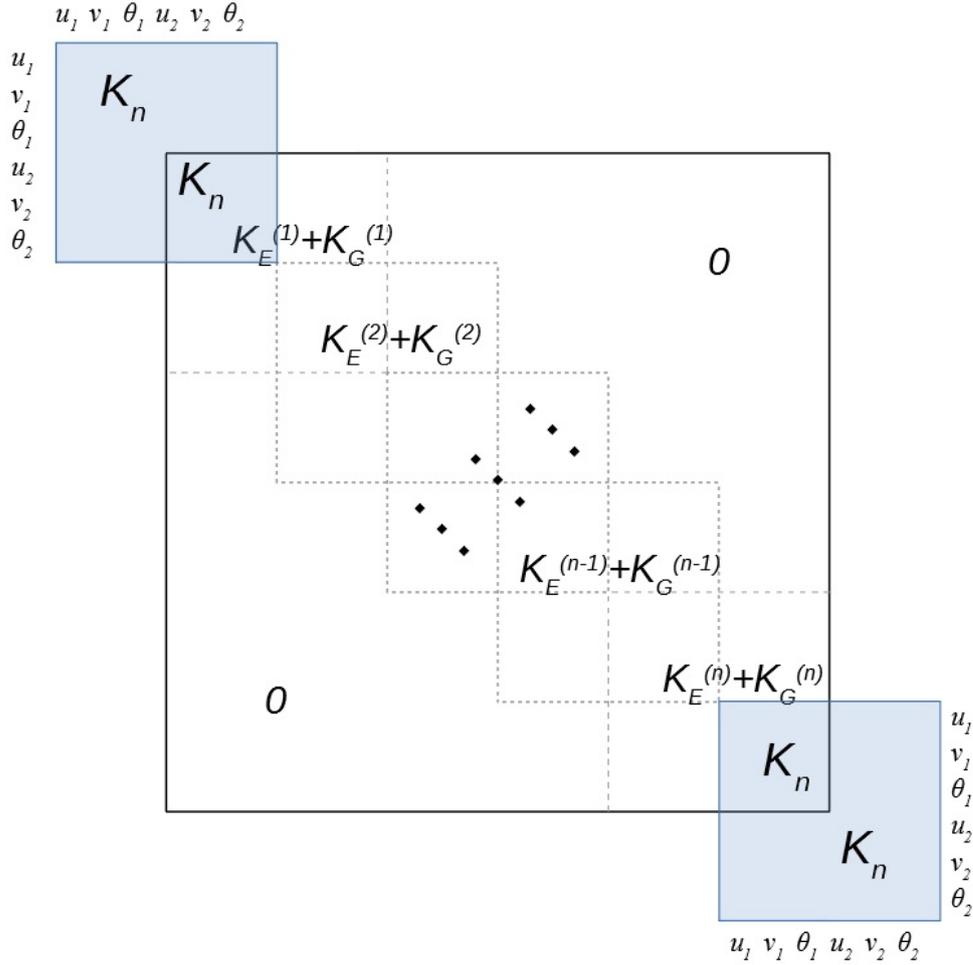


Figura 5.9: Configurazione del contatto

Per semplicità descrittiva si divide la matrice di rigidezza globale, comprensiva di contributo relativo alla rigidezza di contatto, in tre sottomatrici, [A], [B] e [C] come mostrato nella relazione 5.3.13

$$[K] = \begin{bmatrix} [A] & & \\ & [B] & \\ & & [C] \end{bmatrix} \quad (5.3.8)$$

La sottomatrice A (eq. 5.3.9) contiene al suo interno i coefficienti legati ai primi 6 gradi di libertà nodali ed è dunque composta dalle prime 6 righe e 6 colonne della matrice globale, la sottomatrice C (eq. 5.3.10) riporta i coefficienti relativi agli ultimi 6 gradi di libertà e risulta dunque comprendere le ultime 6 righe e 6 colonne della matrice di rigidezza globale. Infine, nella sottomatrice B sono contenuti i restanti n-coefficienti della matrice di rigidezza globale, avendo dunque dimensione n-12 x n-12.

$$\begin{aligned}
 & K_{E(n-5,n-5)} + K_G \\
 & 0 \quad K_{E+G(n-4,n-4)} \quad \text{Sym.} \\
 & 0 \quad K_{E+G(n-3,n-4)} \quad K_{E+G(n-3,n-3)} \\
 & K_{E(n-2,n-5)} \quad 0 \quad 0 \quad K_{E(n-2,n-2)} + K_{n(1,1)}^{(3)} + K_{n(1,1)}^{(4)} \\
 & 0 \quad K_{E+G(n-1,n-4)} \quad K_{E+G(n-1,n-3)} \quad K_{n(2,1)}^{(3)} + K_{n(2,1)}^{(4)} \quad K_{E+G(n-1,n-1)} + K_{n(2,2)}^{(3)} + K_{n(2,2)}^{(4)} \\
 & 0 \quad K_{E+G(n,4)} \quad K_{E+G(n,n-3)} \quad 0 \quad K_{E+G(n,n-1)} \quad K_{E+G(n,n)} \\
 & \hspace{15em} (5.3.10)
 \end{aligned}$$

$[C] =$

Il contributo della matrice K_n si limita tuttavia difatto solamente ai primi e ultimi due elementi della diagonale della matrice di rigidità globale assemblata. Data infatti la configurazione adottata i termini fuori diagonale della matrice k_n relativa agli elementi spring (1) e (2), (3) e (4) contenenti le informazioni circa il contatto, risultano posti simmetricamente rispetto all'asse della trave e una volta assemblati a mezzo matrice di rotazione sono eguali in modulo ma differenti in segno.

$$K_{n(i,j)}^{(1)} = -K_{n(i,j)}^{(2)} \quad (5.3.11)$$

Il modello della struttura ipotizzato prevede l'introduzione di 4 elementi spring simmetrici rispetto all'asse della struttura, corrispondenti alle superfici della radice della paletta, poste in contatto con il disco della turbina.

Le forme modali derivanti da tale configurazione corrispondono a quelle ricavabili dall'analisi dinamica di una trave libera o incastrata agli estremi, eccitata da un carico esploratore (figura 5.10) .

Una volta definito il modello, numerose simulazioni sono state effettuate al fine di correlare l'intensità della rigidità alle forme modali e alle frequenze naturali del sistema (validi come prima approssimazione delle frequenze di risonanza per smorzamenti trascurabili).

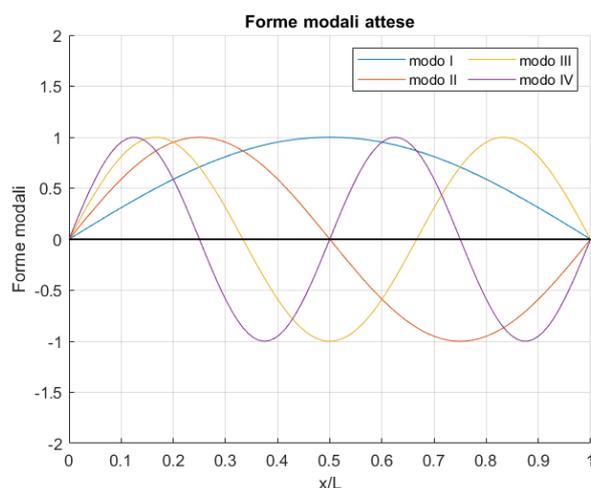


Figura 5.10: Forme modali asta incastrata agli estremi

Sono state prese in esame 2 differenti configurazioni: una trave incastrata ad un estremo ed una trave libera e per ognuna di queste sono stati valutati gli andamenti delle frequenze modali al variare della rigidità di contatto ed il comportamento dei primi due modi propri del sistema fig.5.11.

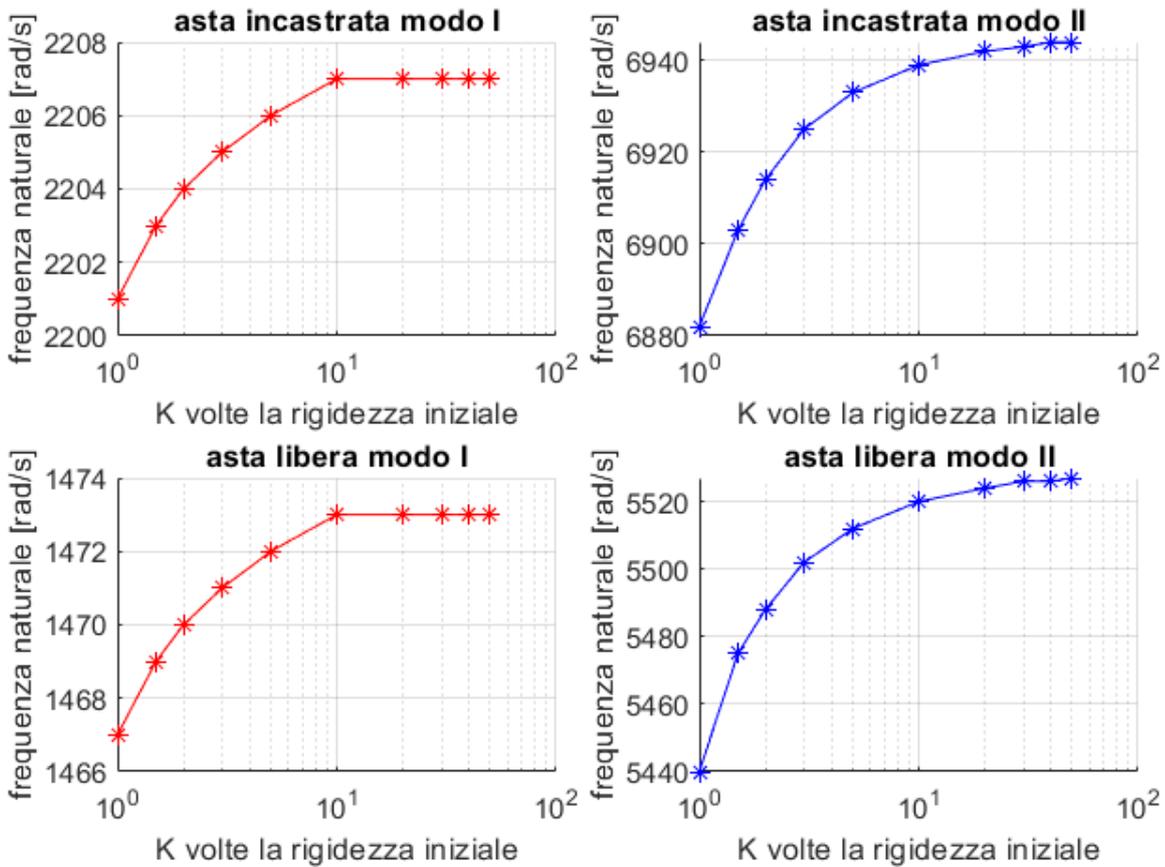


Figura 5.11: Andamento della frequenza naturale in funzione della rigidità di contatto

Le prove sono state effettuate partendo da una rigidità locale iniziale di $1.88 \cdot 10^9 \frac{N}{m}$ corrispondente ad un contatto relativo a due corpi con lunghezza pari a 10 mm e sottoposti ad un carico corrispondente a 10000 N. Successivamente mantenendo il carico centrifugo equivalente costante tale valore di rigidità è incrementato di n-volte fino ad un valore pari a 50 volte quello iniziale.

Le forme e le frequenze modali rilevate hanno mostrato come l'introduzione della rigidità di contatto agisca nella struttura ai sensi di un'analisi dinamica, comportandosi, difatto, come un ulteriore vincolo. Tale evidenza si osserva dal confronto delle forme modali relative all'asta libera priva di termini relativi al contatto e le forme modali relative all'asta libera con l'introduzione della rigidità di contatto.

La forma modale della trave libera per il primo fig. 5.12 e per il secondo fig. 5.13 in seguito all'introduzione della rigidità di contatto presenta infatti un andamento compatibile con quello di una trave incastrata agli estremi.

Resta tuttavia da valutare quantitativamente l'influenza della rigidità di contatto ai sensi di un'analisi dinamica si vuole quindi ricavare un'informazione relativa ad una data risposta del sistema prescindendo dalla conoscenza dei fattori scatenanti la stessa.

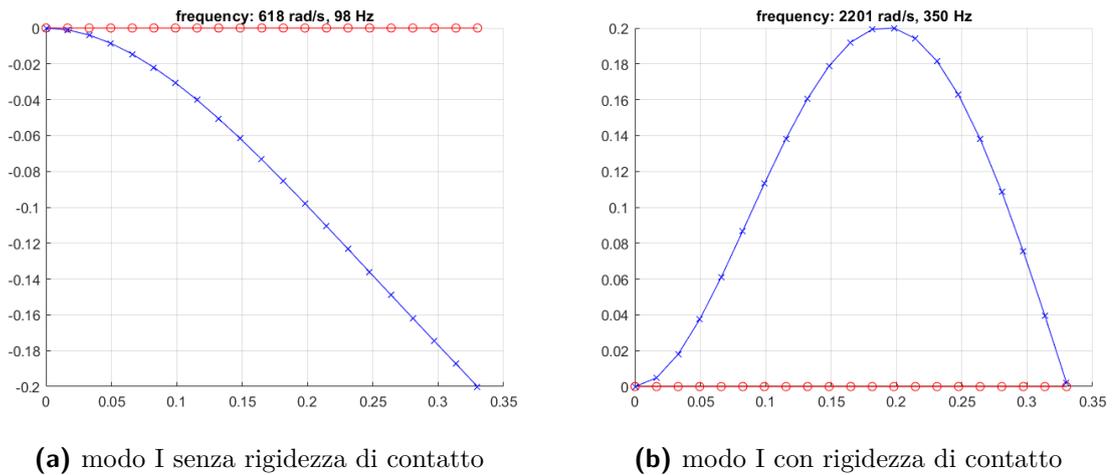


Figura 5.12: modo I trave incastrata

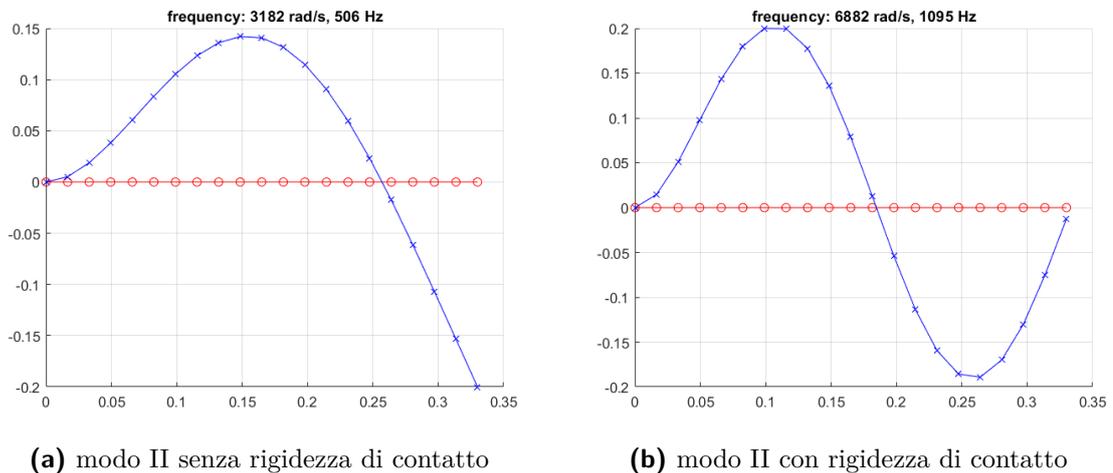
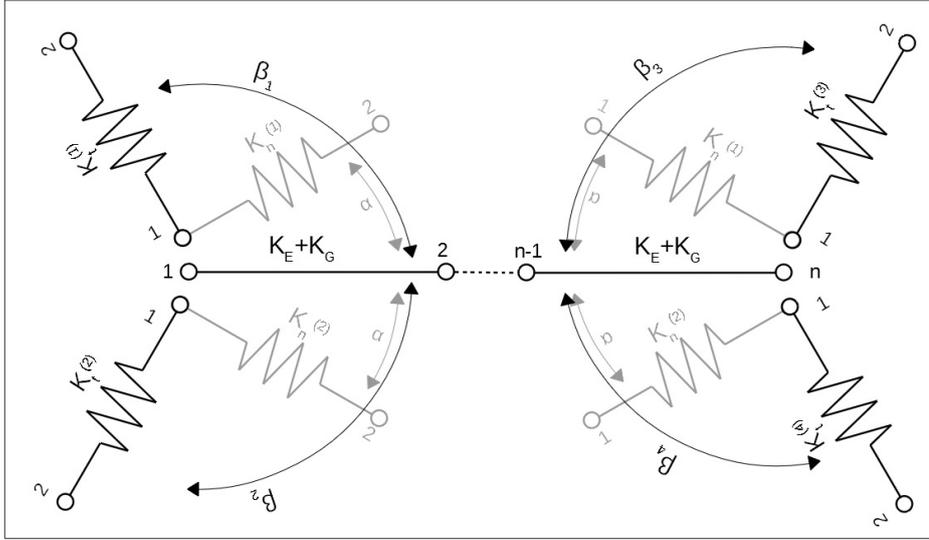


Figura 5.13: modo II trave incastrata

5.3.2 Rigidità di contatto tangenziale

Il contributo alla matrice di rigidità globale del sistema, relativo alla rigidità di contatto tangenziale, è stato aggiunto in un secondo momento. Pur presentando numerose formali similitudini, data la discretizzazione scelta per la rappresentazione delle rigidità di contatto si è optato per un progressivo inserimento dei contributi previo consolidamento della soluzione precedentemente ottenuta. La discretizzazione utilizzata per rappresentare la rigidità di contatto tangenziale è la stessa usata in precedenza per il contatto normale. L'elemento spring rappresentante il contatto sarà ora inclinato di un angolo β rispetto alla direzione longitudinale del modello dell'asta e inclinato di $\pi/2$ rispetto all'elemento spring relativo al contatto normale come evidenziato nello schema 5.14.


Figura 5.14: Configurazione del solo contatto tangenziale

Il procedimento relativo alla definizione dell'elemento spring relativo al contatto tangenziale segue quanto ricavato per l'elemento spring del contatto normale nel capitolo 5.3.1. La differenza formale tra le due è dunque nel solo passaggio dal sistema di riferimento locale al sistema di riferimento globale a mezzo matrice di rotazione. La matrice di rigidezza del contatto tangenziale nel sistema di riferimento globale derivante dal procedimento assume la forma riportata nell'eq. β eq 5.3.12.

$$[K_t^{(i)}] = \begin{bmatrix} k_t^{(i)} \cos^2 \beta_i & k_t \cos \beta_i \sin \beta_i & 0 & -k_t^{(i)} \cos^2 \beta_i & -k_t^{(i)} \cos \beta_i \sin \beta_i & 0 \\ k_t^{(i)} \cos \beta_i \sin \beta_i & k_t^{(i)} \sin^2 \beta_i & 0 & -k_t^{(i)} \cos \beta_i \sin \beta_i & -k_t^{(i)} \sin^2 \beta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_t^{(i)} \cos^2 \beta_i & -k_t^{(i)} \cos \beta_i \sin \beta_i & 0 & k_t^{(i)} \cos^2 \beta_i & k_t^{(i)} \cos \beta_i \sin \beta_i & 0 \\ -k_t^{(i)} \cos \beta_i \sin \beta_i & -k_t^{(i)} \sin^2 \beta_i & 0 & k_t^{(i)} \cos \beta_i \sin \beta_i & k_t^{(i)} \sin^2 \beta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3.12)$$

Considerando ora la matrice di rigidezza globale comprensiva del contatto normale si aggiunge il contributo relativo alla rigidezza tangenziale e si divide nuovamente tale matrice in tre sottomatrici $[D]$, $[E]$, $[F]$.

$$[K] = \begin{bmatrix} [D] & & \\ & [E] & \\ & & [F] \end{bmatrix} \quad (5.3.13)$$

Per semplicità esplicativa nelle sottomatrici 5.3.14, 5.3.15, non è riportato separatamente il contributo geometrico ed elastico ma si faccia riferimento alla 5.3.9 e alla 5.3.10 per una sua descrizione esaustiva.

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccc}
 K_{(n-5,n-5)} & & & \\
 0 & K_{(n-4,n-4)} & & \\
 0 & K_{(n-3,n-4)} & K_{(n-3,n-3)} & \\
 K_{(n-2,n-5)} & 0 & 0 & K_{(n-2,n-2)} + K_{n(1,1)}^{(3)} + K_n^{(4)} + K_{t(1,1)}^{(3)} + K_{t(1,1)}^{(4)} \\
 0 & K_{(n-1,n-4)} & K_{(n-1,n-3)} & K_{n(2,1)}^{(3)} + K_{n(2,1)}^{(4)} + K_{t(2,1)}^{(3)} + K_{t(2,1)}^{(4)} \\
 0 & K_{(n,4)} & K_{(n,n-3)} & K_{(n-1,n-1)} + K_{n(2,2)}^{(3)} + K_{n(2,2)}^{(4)} + K_{t(2,2)}^{(3)} + K_{t(2,2)}^{(4)}
 \end{array} \right] \text{Sym.} \\
 & [F] = \left[\begin{array}{ccc}
 & & K_{(n,n)} \\
 & K_{(n,n-1)} & \\
 & & K_{(n,n)}
 \end{array} \right] \quad (5.3.15)
 \end{aligned}$$

Anche nel caso relativo alla rigidità di contatto tangenziale i coefficienti della matrice K_t si limitano a influenzare solamente i primi e ultimi due elementi della diagonale della matrice di rigidità globale assemblata. Data infatti la configurazione adottata i termini fuori diagonale della matrice k_t relativa agli elementi spring (1) e (2), (3) e (4) contenenti le informazioni circa il contatto tangenziale, risultano posti simmetricamente rispetto all'asse della trave e una volta assemblati a mezzo matrice di rotazione sono eguali in modulo ma differenti in segno.

$$K_{t(i,j)}^{(i)} = -K_{t(i,j)}^{(i+1)} \quad (5.3.16)$$

Capitolo 6

Predizione della risposta

La conoscenza dei parametri influenzanti la risposta dinamica del sistema, nello specifico le matrici di massa, rigidezza e la discretizzazione del problema del contatto ha permesso una buona approssimazione del fenomeno. Il passo successivo consta nel ricavare il parametro oggetto di interesse nella presente, la rigidezza di contatto, a partire dalla sola risposta del sistema ad una sollecitazione data. Il banco prova, per sua costruzione, prevede l'applicazione al provino inserito di un tiraggio, facente funzione della forza centrifuga e rileva il comportamento dinamico in risposta ad una determinata eccitazione. Nel presente capitolo si cerca di determinare l'andamento della frequenza di risonanza del sistema alla variazione della rigidezza di contatto a cui è sottoposta e data l'introduzione di un processo iterativo, si attende un risultato approssimante quanto la teoria ha fino ad ora descritto.

6.1 previsione degli autovalori

Il processo di calcolo adottato nella presente opera segue quanto affermato da R.L. Fox e M.P.Kapoor [20] al fine di ricavare la variazione degli autovalori di un determinato sistema. I concetti generali da loro espressi vengono tuttavia limitati alle sole variabili oggetto di interesse semplificando difatto il costo computazionale dell'analisi che si vuole svolgere. Lo studio del comportamento modale di un sistema ha dunque inizio con la soluzione del ben noto problema agli autovalori eq.6.1.1.

$$[K]\bar{X} = \lambda[M] \quad (6.1.1)$$

Come precedentemente accennato gli autovalori e gli autovettori in questione sono derivanti dal calcolo della funzione di risposta in frequenza e coincidono con le frequenze naturali e la forma modale correlata.

$$[K]\bar{X} = \omega[M] \quad (6.1.2)$$

Ai fini di una successiva analisi nella presente si assume che le frequenze naturali del sistema, ovvero gli autovalori, corrispondenti ad una forma modale, contenuta negli autovettori, possano essere in prima approssimazione confusi con le frequenze di risonanza. Tale assunzione assume validità nell'ottica dell'analisi di una struttura meccanica, in tale categoria di problemi infatti il coefficiente di smorzamento è solitamente molto basso e le frequenze proprie di oscillazione risultano molto vicine a quelle di un sistema senza smorzamento. Non si confonda tuttavia il significato fisico dell'una e dell'altra grandezza. Si introducono a questo punto i carichi modali, funzioni degli autovalori del sistema e delle variabili di progetto δ e si esprime il problema nella sua forma completa.

$$[F_i] = [F(\lambda_i, \delta)] \equiv [K - \lambda_i M] \quad (6.1.3)$$

Dalla 6.1.3 appare evidente che, affinché il problema agli autovalori ammetta soluzioni che non siano quella banale deve valere la seguente

$$[F_i] \bar{X}_i = 0 \quad (6.1.4)$$

nulla cambia all'equazione premoltiplicandola per il vettore degli autovettori trasposti.

$$\bar{X}_i^T [F_i] \bar{X}_i = 0 \quad (6.1.5)$$

ed infine, derivando l'equazione 6.1.5 rispetto alla grandezza di progetto δ scelta si ottiene

$$\bar{X}_{i,j}^T [F_i] \bar{X}_i + \bar{X}_i^T \left[\frac{\partial F_i}{\partial \delta_j} \right] \bar{X}_i + \bar{X}_i^T [F_i] \bar{X}_{i,j} = 0 \quad (6.1.6)$$

In particolare la variazione degli autovalori cercata nella presente è limitata a quella correlata alla prima forma modale ed è ulteriormente circoscritta alla sola rigidezza di contatto, il termine progettuale al quale riferire l'intera analisi è dunque questo parametro. Alla luce di quanto deciso l'equazione 6.1.6 di carattere generale è ora espressa come

$$\frac{\partial \bar{X}_1^T}{\partial K_n} [F_1] \bar{X}_1 + \bar{X}_1^T \left[\frac{\partial F_1}{\partial K_n} \right] \bar{X}_1 + \bar{X}_1^T [F_1] \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial K_n} = 0 \quad (6.1.7)$$

In virtù di quanto precedentemente affermato con l'eq 6.1.4 circa la condizione necessaria all'ottenimento di soluzioni non banali il primo ed il terzo termine della 6.1.7 sono nulli. La 6.1.7 viene di conseguenza semplificata

$$\bar{X}_1^T \left[\frac{\partial F_1}{\partial K_n} \right] \bar{X}_1 = 0 \quad (6.1.8)$$

Dalla differenziazione della 6.1.3 si ottiene

$$\frac{\partial F_1}{\partial K_n} = \left[\frac{\partial [K]}{\partial K_n} - \omega_1 \frac{\partial [M]}{\partial K_n} - \frac{\partial \omega_1}{\partial K_n} [M] \right] \quad (6.1.9)$$

Se gli autovettori sono selezionati in maniera tale da risultare M-ortonormali ovvero tali che valga la 6.1.11

$$\bar{X}_i^T [M] \bar{X}_i = 1 \quad (6.1.10)$$

Si perviene all'equazione cercata, descrivente la variazione degli autovalori in funzione della rigidezza di contatto a partire dalla sola conoscenza degli autovettori e del problema analizzato.

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial K_n} = \bar{X}_1^T \left[\frac{\partial [K]}{\partial K_n} - \omega_1 \frac{\partial [M]}{\partial K_n} \right] \bar{X}_1 \quad (6.1.11)$$

In merito alle matrici ricavate a mezzo differenziazione rispetto alla rigidezza di contatto sono necessarie alcune considerazioni. Per quanto concerne la matrice contenente i coefficienti delle masse nodali degli elementi questa non presenta al suo interno termine alcuno dipendente dal parametro di progetto cercato, ne risulta dunque una matrice derivata contenente soli elementi nulli. Risulta dunque possibile trascurare ogni termine ad essa moltiplicato riscrivendo la 6.1.11 come:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial K_n} = \bar{X}_1^T \left[\frac{\partial [K]}{\partial K_n} \right] \bar{X}_1 \quad (6.1.12)$$

Diverso è il discorso per la matrice di rigidezza globale. Quest'ultima è infatti costruita come somma di singoli contributi tra i quali compaiono anche quelli relativi al contatto.

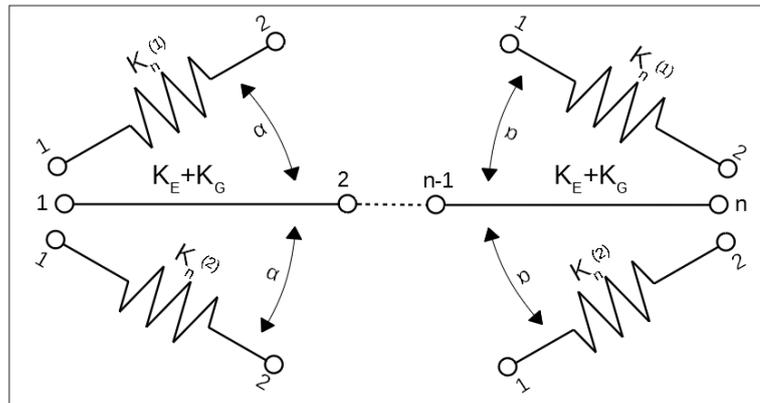


Figura 6.1: Schema struttura assemblata

Per semplicità descrittiva si consideri una discretizzazione della matrice di rigidezza globale, relativa alla struttura meccanica schematizzata in figura 6.1 si fatta:

$$[K] = \begin{bmatrix} [A] & & \\ & [B] & \\ & & [C] \end{bmatrix} \quad (6.1.13)$$

quelle che sono le formulazioni attualmente usate per la determinazione della rigidità d'interesse, ma tuttavia fornire un valore che sia concorde con quanto affermato dalle teorie in uso. In nessuna iterazione infatti K_n è calcolata canonicamente. il suo valore è dedotto a mezzo considerazioni di carattere modale.

Si supponga di disporre, a seguito di una prova, della frequenza di risonanza di un determinato sistema. Tale frequenza è il valore del quale si cerca la corrispondente rigidità di contatto, di conseguenza è il valore a cui la soluzione approssimata deve tendere. La frequenza così rilevata viene definita come esatta e le si assegna il nome di frequenza target ω^* .

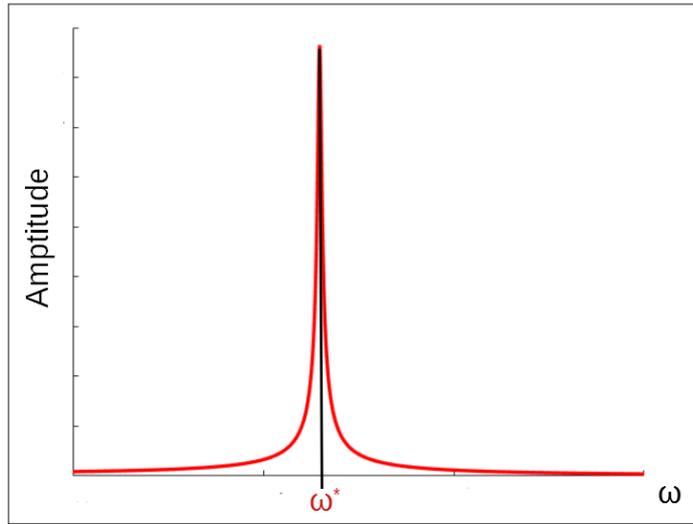


Figura 6.2: FRF della soluzione esatta

Dalla differenziazione della frequenza del sistema rispetto alla rigidità di contatto si ricava il parametro che ne descrive il rateo di variazione C . Tale derivata è stata precedentemente definita ed il suo valore è funzione degli autovettori del sistema e della matrice di rigidità dello stesso.

$$\left| \frac{\partial \omega}{\partial K_n} \right| = C = \bar{X}_1^T \left[\frac{\partial [K]}{\partial K_n} \right] \bar{X}_1 \quad (6.2.1)$$

Passando ad una notazione discreta il coefficiente di variazione della frequenza espresso nella 6.2.1 assume una forma che meglio si presta al calcolo iterativo.

$$\frac{\Delta \omega}{\Delta K_n} = C \quad (6.2.2)$$

Con un semplice passaggio matematico dalla 6.2.3 si ricava l'espressione che dal Δ della frequenza permette di ricavare il Δ della rigidità. Dove con *Delta* si intende la differenza tra il valore esatto ed il valore ricavato dal calcolo iterativo.

$$\Delta K_n = \frac{\Delta \omega}{C} \quad (6.2.3)$$

Non conoscendo la rigidezza di contatto se ne introduce un valore arbitrario di tentativo, si supponga di ricavare dall'analisi modale una funzione di risposta in frequenza avente una data frequenza di risonanza $\omega^{(1)}$ che differisce da quella esatta di una certa quantità $\Delta\omega^{(1)}$ come mostrato in figura 6.3

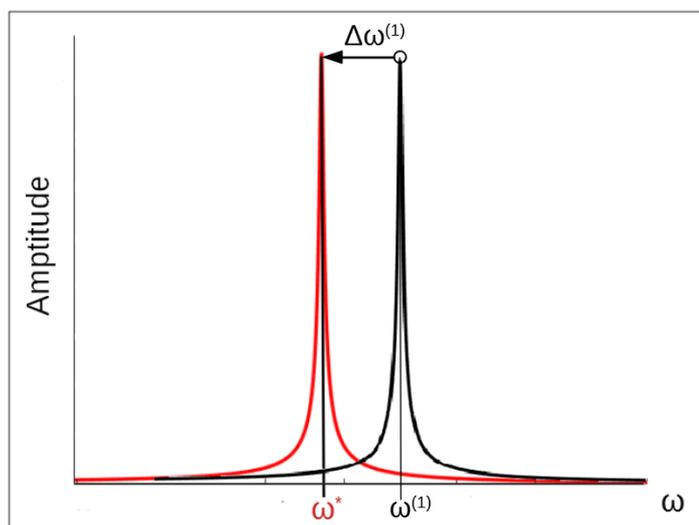


Figura 6.3: FRF della soluzione iterata di primo tentativo

$$\Delta\omega^{(1)} = \omega^* - \omega^{(1)} \quad (6.2.4)$$

Dalla nuova analisi modale oltre alla frequenza di risonanza si ricavano anche gli autovalori che, inseriti nella 6.2.1 permettono di ricavare un Δ di tentativo per la rigidezza di contatto.

$$\Delta K_n^{(1)} = \frac{\Delta\omega^{(1)}}{C^{(1)}} \quad (6.2.5)$$

Tale valore, sommato (o sottratto, a seconda che la frequenza di tentativo sia superiore e inferiore a quella esatta) alla rigidezza di tentativo si suppone possa fornire il valore di rigidezza per la quale la risposta del sistema è quella data dalla soluzione esatta.

$$K_n^{(2)} = K_n^{(1)} \pm \Delta K_n^{(1)} \quad (6.2.6)$$

Il valore ricavato dal calcolo viene ora utilizzato come valore di tentativo

$$K_n^{(2)} = K_n^{(1)} \quad (6.2.7)$$

E da una nuova analisi modale si ottiene una nuova frequenza di risonanza $\omega^{(2)}$ e nuovi autovettori. Si supponga di ricavare dall'analisi una FRF simile a quella riportata in figura 6.4

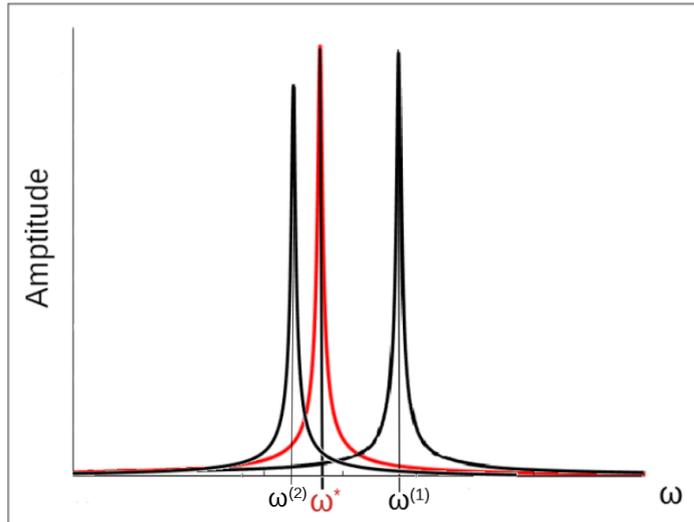


Figura 6.4: FRF della soluzione iterata di secondo tentativo

In tal caso si procede iterando nuovamente. Quando la frequenza di risonanza del sistema ad una data iterazione coincide con la frequenza del sistema reale, ovvero, quando il problema è giunto a convergenza il valore della rigidezza di contatto sarà quello relativo alla condizione cercata.

6.3 Procedimento iterativo a due parametri di progetto

Il contatto tra due corpi è tuttavia un fenomeno tridimensionale. La sua schematizzazione prevede due rigidezze nelle direzioni ortogonali, che prendono il nome di rigidezze tangenziali e una rigidezza in direzione normale. Ampio spazio ha trovato nella letteratura la descrizione completa del problema, tuttavia, nella presente non si analizzano nel dettaglio le formulazioni esistenti ma si cerca di ottenere il suo valore numerico a prescindere da eventuali conoscenze pregresse.

Il valore iniziale di tentativo per quanto riguarda la rigidezza di contatto tangenziale sarà posto in funzione della rigidezza normale, come già accennato tuttavia tale valore ha solo valenza di parametro di confronto ai fini di validare la soluzione ottenuta.

$$K_t = 0.8K_n \quad (6.3.1)$$

Anche in questo caso l'analisi parte dall'imposizione di un parametro di tentativo, tuttavia, a differenza del caso a singolo parametro di progetto stavolta sono necessarie due rigidezze di tentativo. Lo scopo è di far convergere le soluzioni iterate ad una condizione definita esatta. I parametri da confrontare tra le due soluzioni, quella esatta e quella di tentativo sono le frequenze di risonanza ω^* della soluzione esatta e $\omega^{(n)}$ dell'iterata come mostrato in figura 6.5.

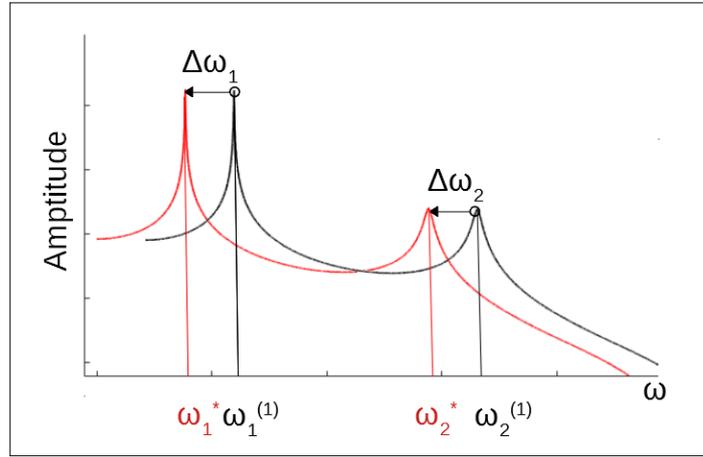


Figura 6.5: FRF della soluzione iterata con 2 parametri di progetto

Le due frequenze di risonanza ω_1 e ω_2 sono correlate rispettivamente alla rigidezza di contatto normale K_n e alla rigidezza di contatto tangenziale K_t .

Dalla definizione di differenziale è possibile esprimere le variazioni della frequenza in funzione delle rigidzze e dei rispettivi incrementi delle stesse.

$$\begin{cases} \Delta\omega_1 = \frac{\partial\omega_1}{\partial K_n} \Delta K_n + \frac{\partial\omega_1}{\partial K_t} \Delta K_t \\ \Delta\omega_2 = \frac{\partial\omega_2}{\partial K_n} \Delta K_n + \frac{\partial\omega_2}{\partial K_t} \Delta K_t \end{cases} \quad (6.3.2)$$

La 6.3.2 è esprimibile per comodità di calcolo in forma matriciale

$$\begin{Bmatrix} \Delta\omega_1 \\ \Delta\omega_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\omega_1}{\partial K_n} & \frac{\partial\omega_1}{\partial K_t} \\ \frac{\partial\omega_2}{\partial K_n} & \frac{\partial\omega_2}{\partial K_t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta K_n \\ \Delta K_t \end{Bmatrix} \quad (6.3.3)$$

Il sistema è ulteriormente schematizzabile ricordando la definizione di Jacobiano $[J]$

$$\{\Delta\omega\} = [J]\{\Delta K\} \quad (6.3.4)$$

Riconducendo difatto il sistema alla ben nota forma:

$$Ax = b \quad (6.3.5)$$

le cui soluzioni, se esistono, sono facilmente ricavabili.

Per quanto riguarda i coefficienti dello Jacobiano questi sono determinabili richiamando la formula generale per la derivazione degli autovalori riportata nella 6.3.6

$$\lambda_{i,j} = \bar{X}_i^T [K_{,j} - \lambda_i M_{,j}] \bar{X}_i \quad (6.3.6)$$

Per quanto riguarda i termini in diagonale 6.3.7 e 6.3.8 nulla cambia rispetto a quanto ricavato nell'analisi a singolo parametro di progetto.

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial K_n} = \bar{X}_1^T \frac{\partial[K]}{\partial K_n} X_1 \quad (6.3.7)$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial K_t} = \bar{X}_2^T \frac{\partial [K]}{\partial K_t} X_2 \quad (6.3.8)$$

Il discorso necessita di una particolare attenzione nel caso delle derivate miste 6.3.9 e 6.3.10, il parametro di progetto ha influenza diretta nei sensi di coefficiente rispetto al quale derivare la matrice di rigidezza ma, gli autovettori sono comunque correlati alla forma modale di cui ricavare l'andamento e quindi alla frequenza ad essa associata.

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial K_t} = \bar{X}_1^T \frac{\partial [K]}{\partial K_t} X_1 \quad (6.3.9)$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial K_n} = \bar{X}_2^T \frac{\partial [K]}{\partial K_n} X_2 \quad (6.3.10)$$

Il procedimento iterativo è il medesimo già affrontato con l'accortezza di considerare le due frequenze come facenti parte di un'unica soluzione. Tali frequenze, in virtù dei coefficienti misti della matrice jacobiana hanno ora una mutua influenza e l'andamento dell'uno condiziona la risposta dell'altro.

Capitolo 7

Evidenza sperimentale

Le prove effettuate hanno lo scopo di dimostrare la validità del modello matematico implementato anche al variare delle condizioni di implementazione dello stesso. Si cerca inoltre una coerenza di comportamento e si vuole dimostrare la possibilità di ricavare informazioni relative alla rigidezza di contatto anche in strutture nelle quali una effettiva variazione della rigidezza, a mezzo prova sperimentale o con l'applicazione di una delle numerose formulazioni esistenti, non sia una soluzione viabile. Le informazioni di cui si ipotizza disporre sono i parametri progettuali relativi alla geometria del pezzo in esame, le caratteristiche del materiale di cui esso è composto e la funzione di risposta in frequenza dello stesso opportunamente eccitato.

Il pezzo meccanico di riferimento ha dimensioni compatibili con quelle relative al provino da inserire nel banco prova. Trattasi di un blocco unico di lunghezza l pari a 330 mm ed una sezione di 35 (altezza h) x 10 (base b) mm avente caratteristiche del materiale coincidenti con quelle di un acciaio temprato, tale struttura è infine discretizzata a mezzo metodi FE in 20 elementi beam.

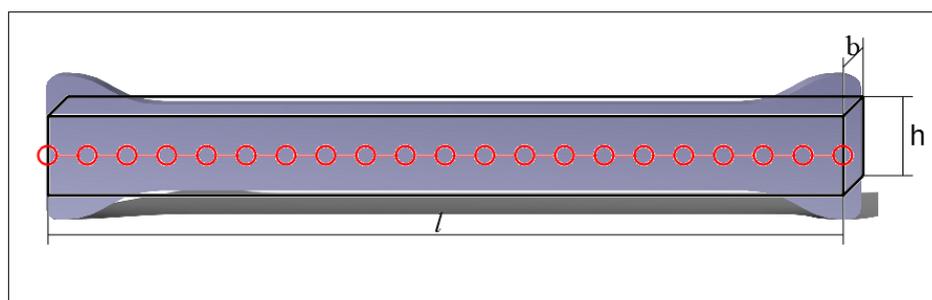


Figura 7.1: Sovrapposizione dei modelli

Il processo iterativo è stato implementato in un software di calcolo FE, al fine di ricavare autovettori e autovalori della soluzione iterata, ricavare una rigidezza corrispondente, sostituirla alla rigidezza di tentativo e nuovamente risolvere il problema agli autovalori. La prova necessita dunque per la sua esecuzione della determinazione di

una rigidezza di tentativo ed è questo parametro e la risposta ottenuta a seconda della distanza della soluzione vera che verrà di seguito riportato.

7.1 Raccolta dati

I dati risultanti si divideranno quindi in una componente numerica, nella quale è riportato il valore della rigidezza di contatto ricavato a fine calcolo e una grafica nella quale sono riportate le Funzioni di Risposta in Frequenza per ogni passo del ciclo iterativo a partire da quella relativa alla rigidezza di tentativo.

Tabella 7.1: Rigidezze di contatto ricavate

F_c [N]	3500	17500	35000
$K_{trial} = 0.001K_n$	174065646.0	196365791.7	206907851.4
$K_{trial} = 0.01k_n$	174026928.2	196373103.6	206973772.8
$K_{trial} = 0.1k_n$	174080983.7	196513611.4	206893440.9
$K_{trial} = 1.2k_n$	174331022.3	196740421.3	207254064.3
$K_{trial} = 1.5k_n$	174019594.6	196431021	207316080.9
$K_{n-target}$ [N/m]	174252232.8	196607962.3	207099166.8

Si rimandano le considerazioni concernenti la validità della soluzione ottenuta ad una successiva analisi.

7.1.1 Caso $F_c = 10 MPa$ (3500 N)

$$k_{trial} = 0.001k_n$$

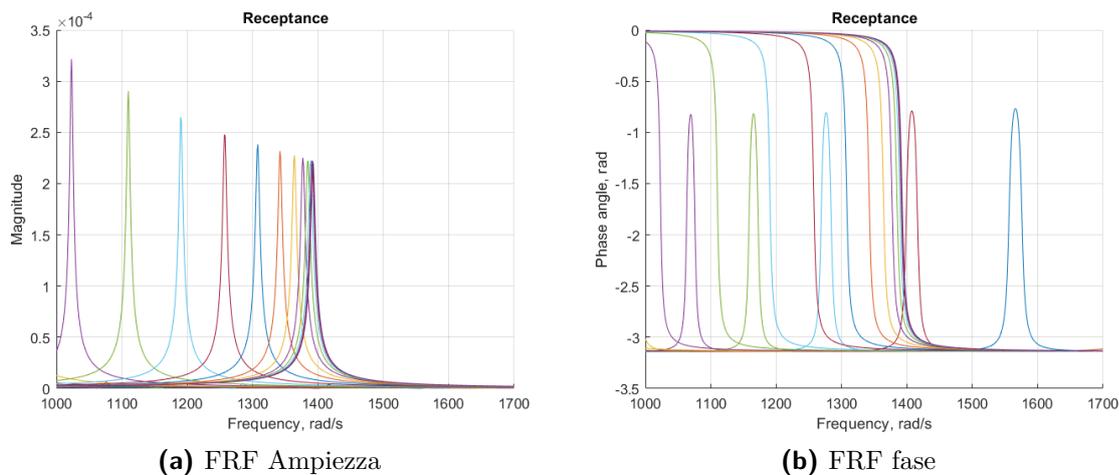


Figura 7.2: Funzione Risposta in Frequenza

$$k_{trial} = 0.01k_n$$

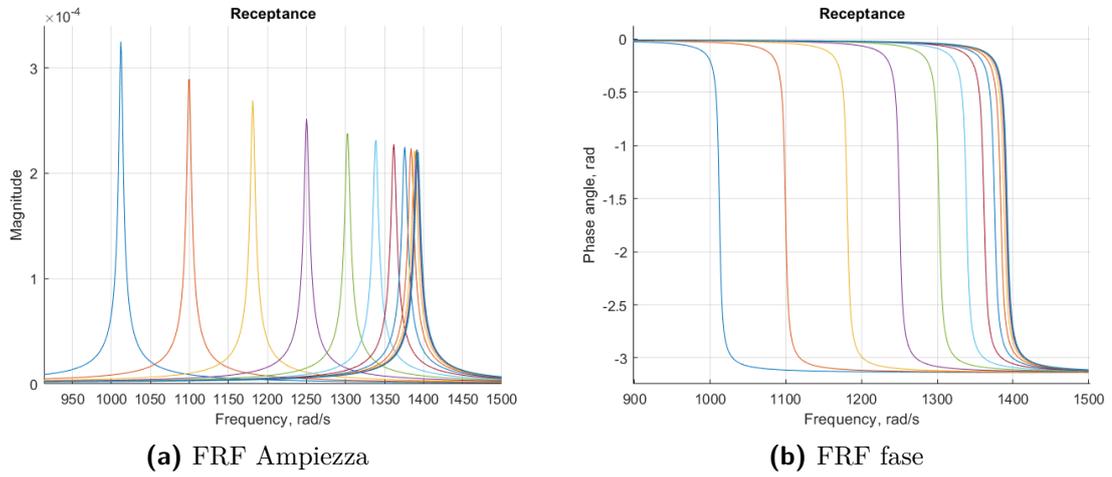


Figura 7.3: Funzione Risposta in Frequenza

$$k_{trial} = 0.1k_n$$

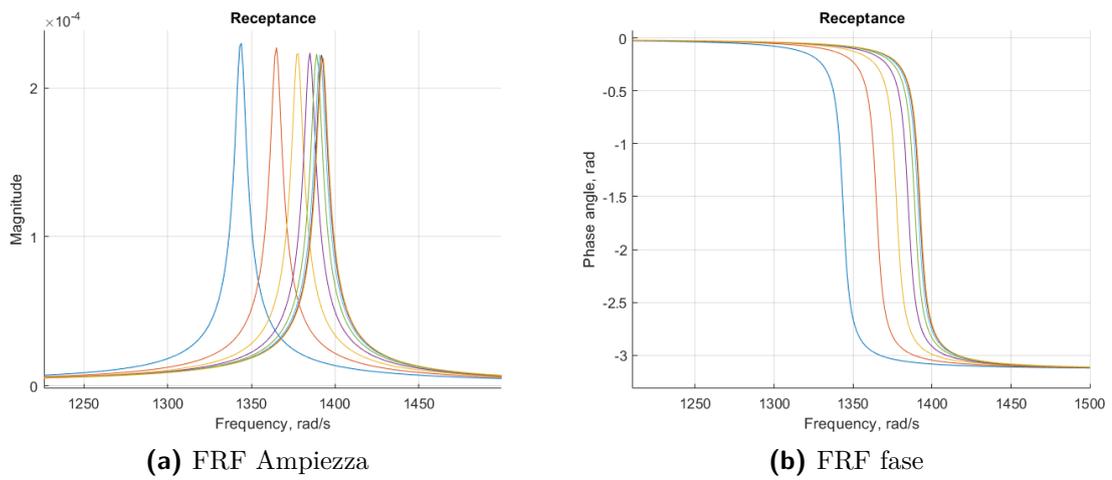
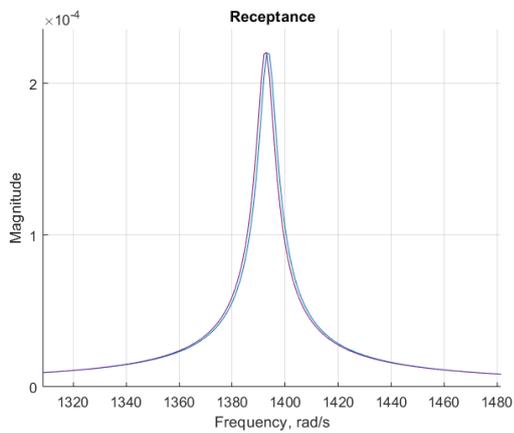
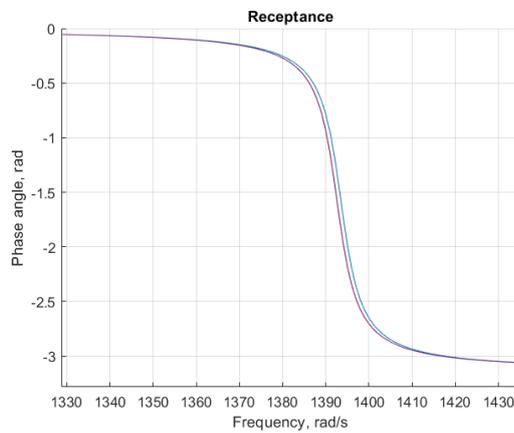


Figura 7.4: Funzione Risposta in Frequenza

$$k_{trial} = 1.2k_n$$



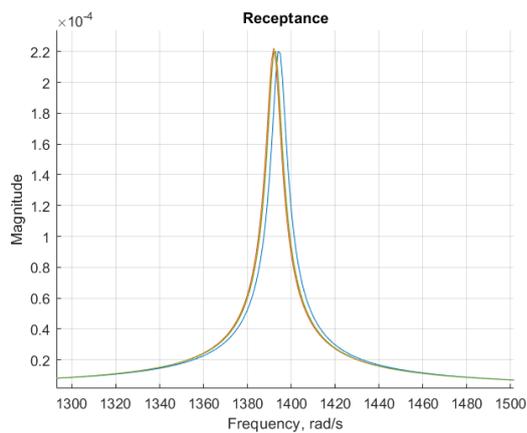
(a) FRF Ampiezza



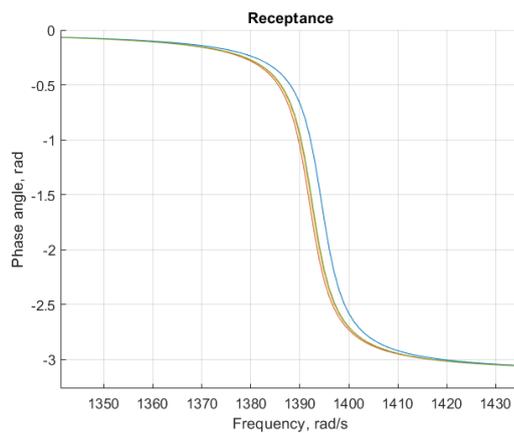
(b) FRF fase

Figura 7.5: Funzione Risposta in Frequenza

$$k_{trial} = 1.5k_n$$



(a) FRF Ampiezza



(b) FRF fase

Figura 7.6: Funzione Risposta in Frequenza

7.1.2 Caso $F_c = 50 \text{ MPa}$ (17500 N)

$$k_{trial} = 0.001k_n$$

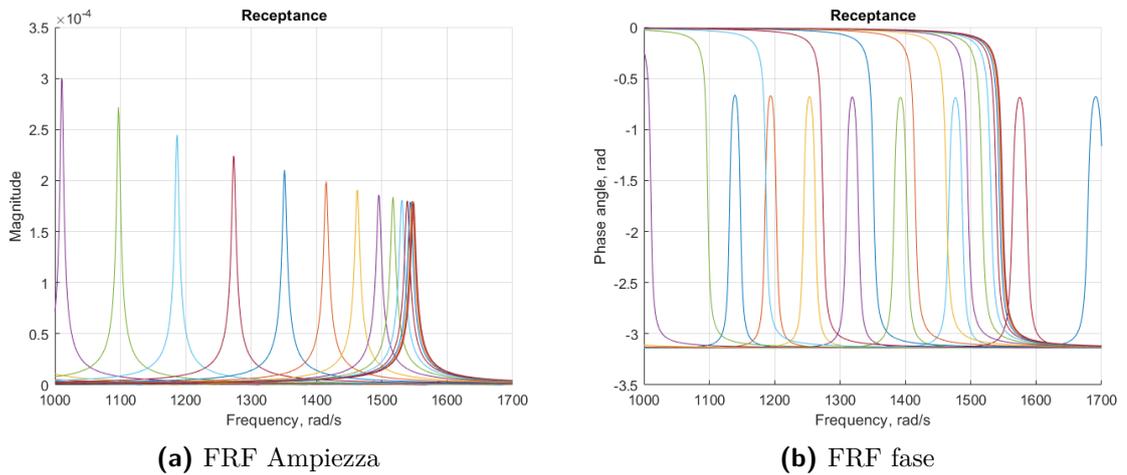


Figura 7.7: Funzione Risposta in Frequenza

$$k_{trial} = 0.01k_n$$

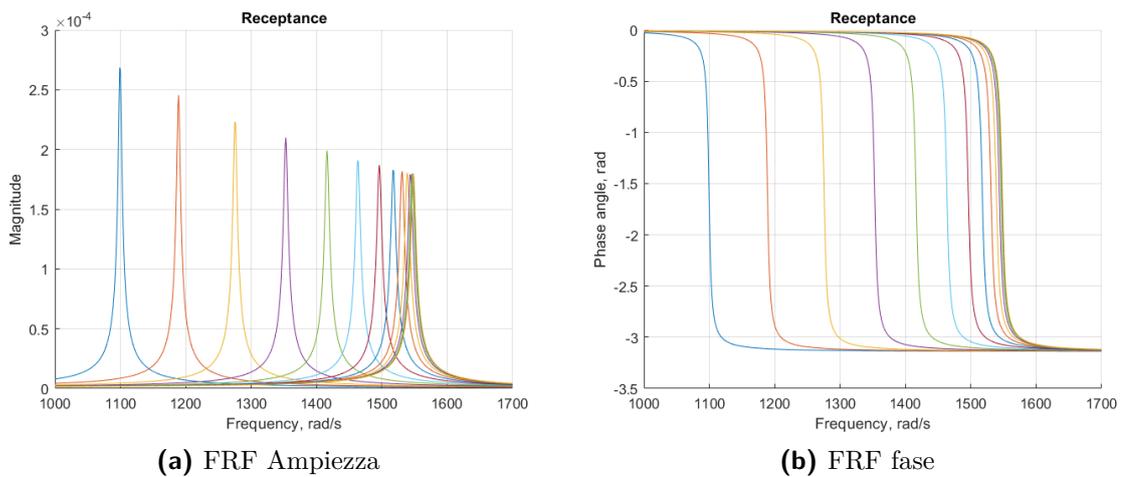


Figura 7.8: Funzione Risposta in Frequenza

$$k_{trial} = 0.1k_n$$

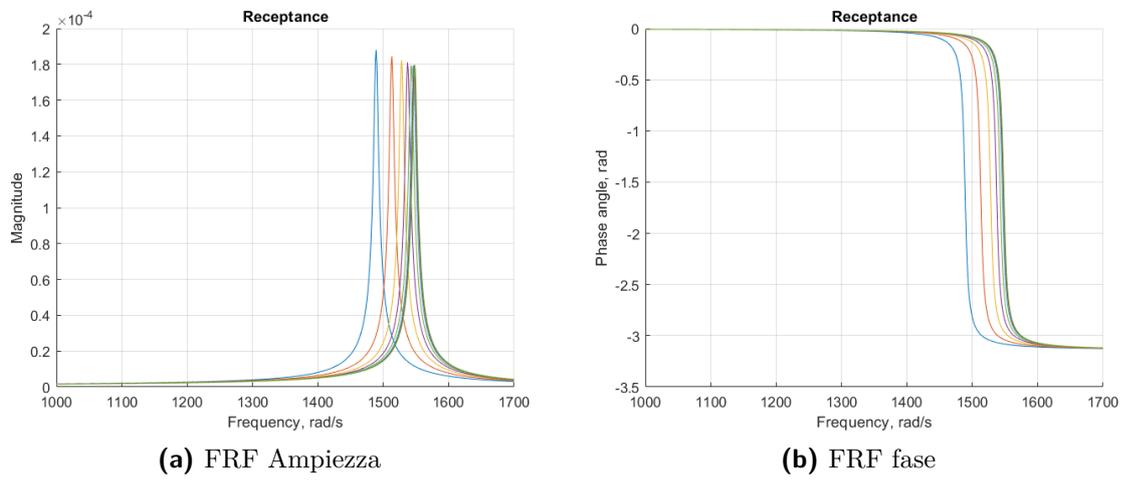


Figura 7.9: Funzione Risposta in Frequenza

$$k_{trial} = 1.2k_n$$

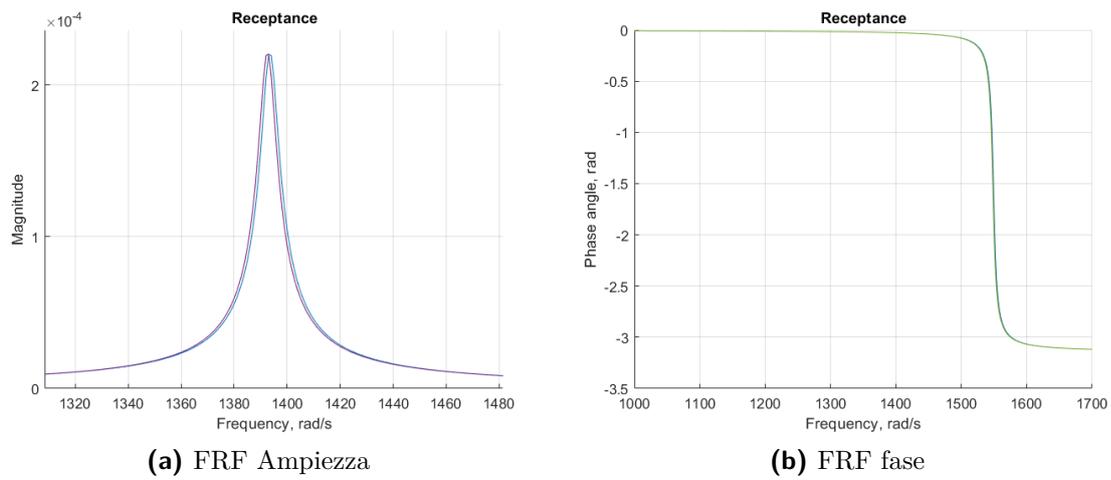


Figura 7.10: Funzione Risposta in Frequenza

$$k_{trial} = 1.5k_n$$

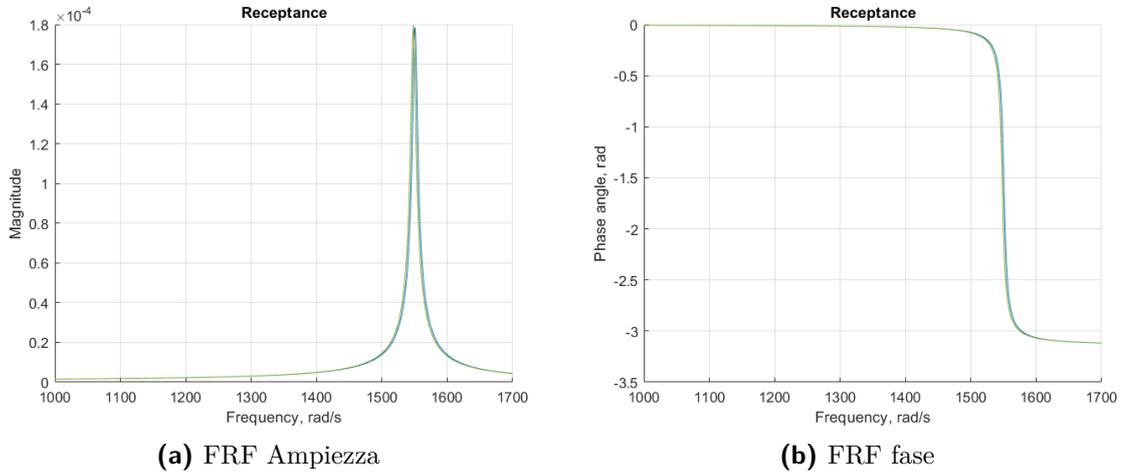


Figura 7.11: Funzione Risposta in Frequenza

7.1.3 Caso $F_c = 100 MPa$ (35000 N)

$$k_{trial} = 0.001k_n$$

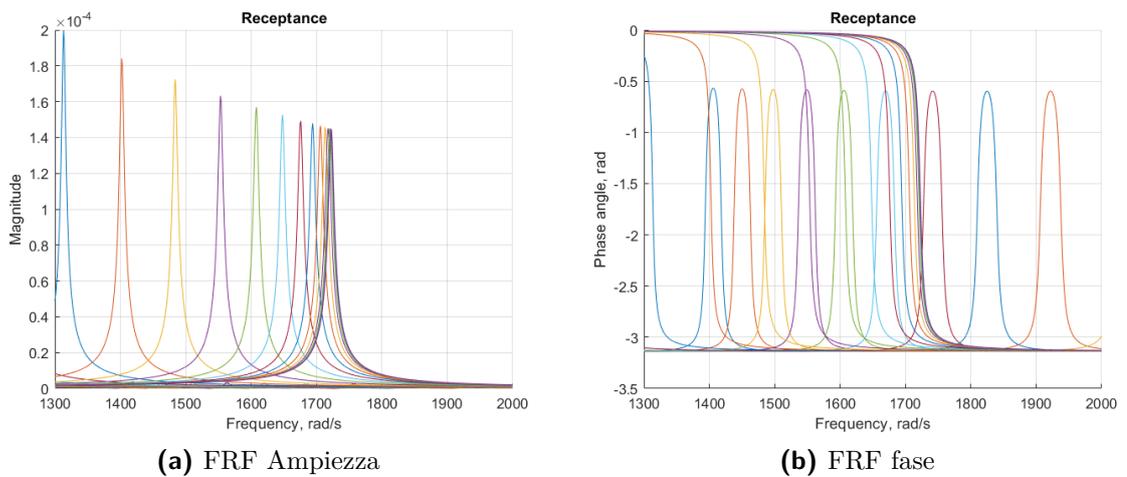


Figura 7.12: Funzione Risposta in Frequenza

$$k_{trial} = 0.01k_n$$

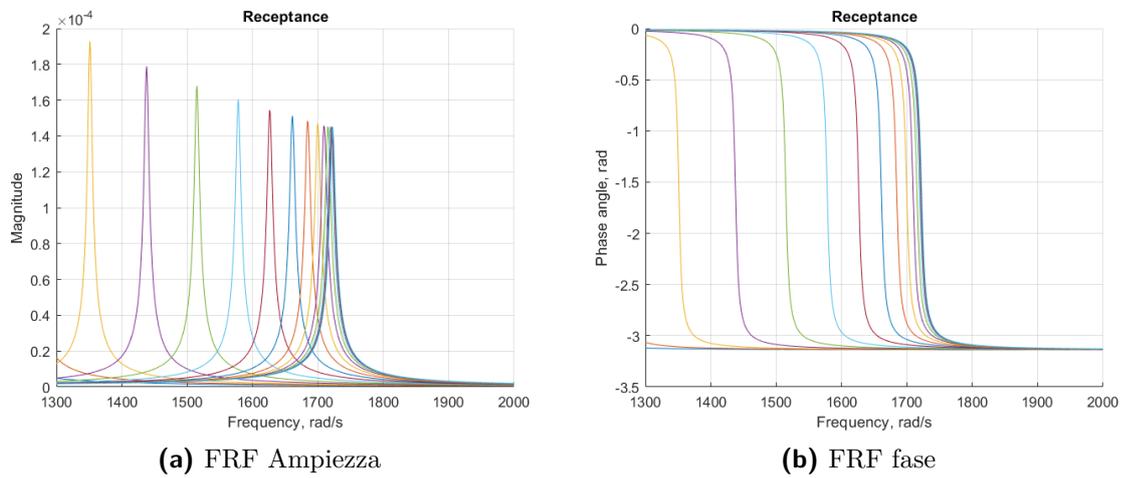


Figura 7.13: Funzione Risposta in Frequenza

$$k_{trial} = 0.1k_n$$

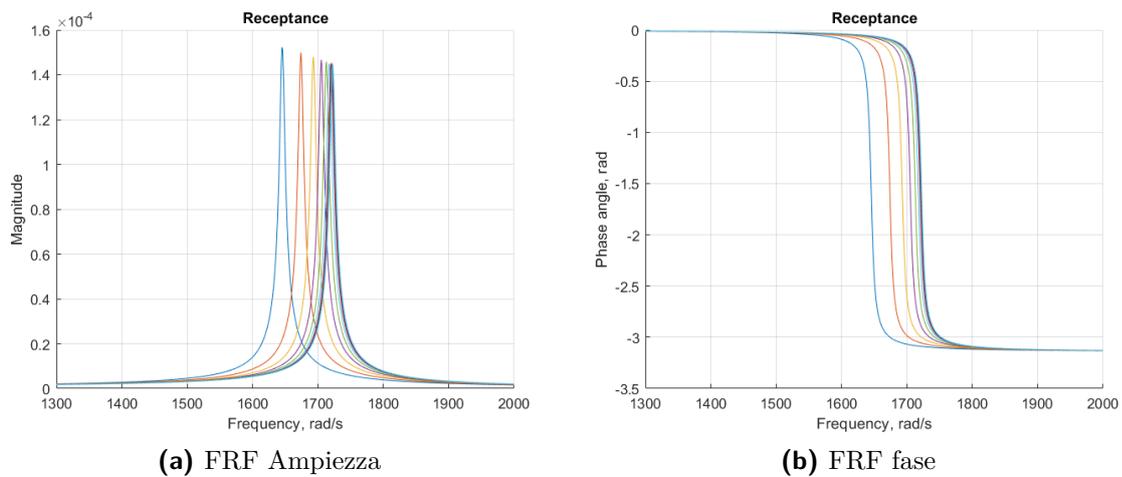


Figura 7.14: Funzione Risposta in Frequenza

$$k_{trial} = 1.2k_n$$

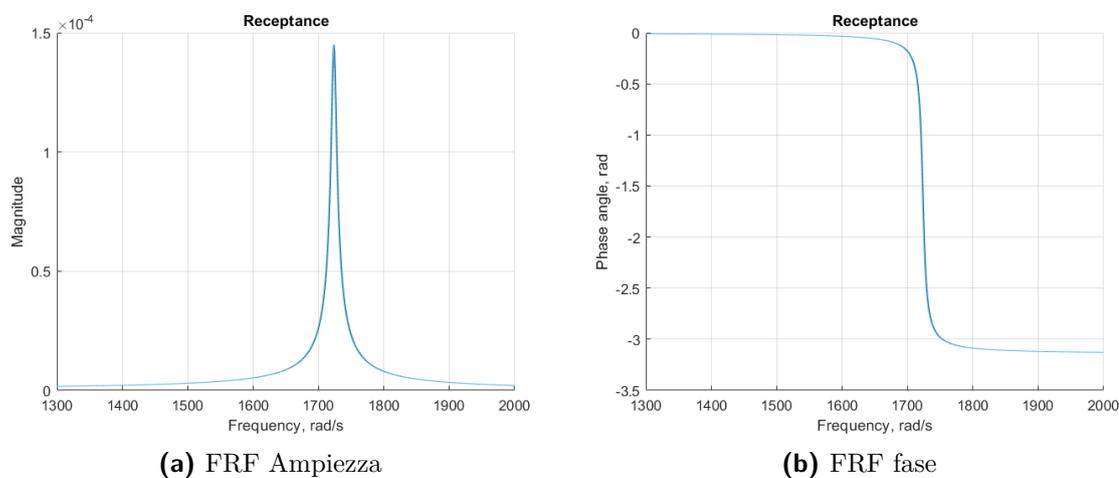


Figura 7.15: Funzione Risposta in Frequenza

$$k_{trial} = 1.5k_n$$

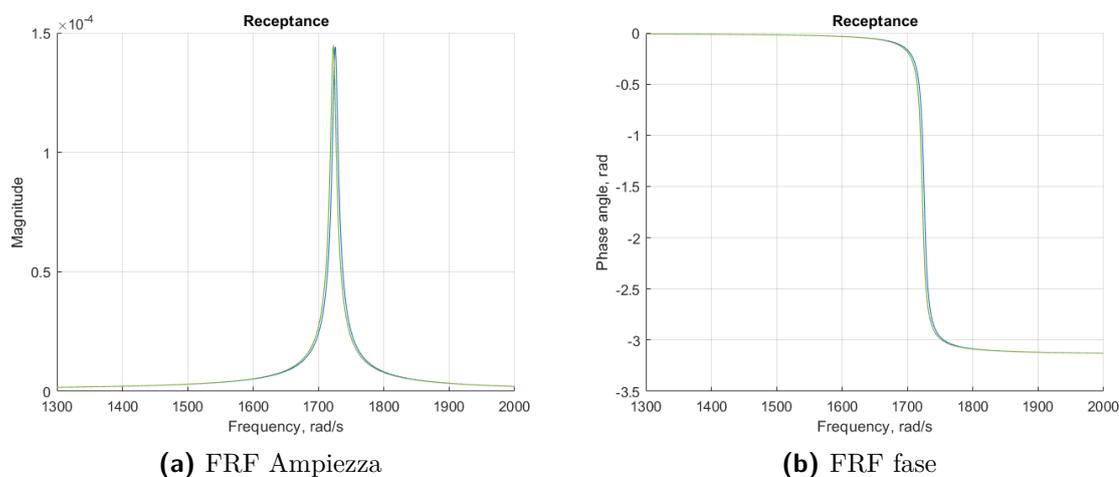


Figura 7.16: Funzione Risposta in Frequenza

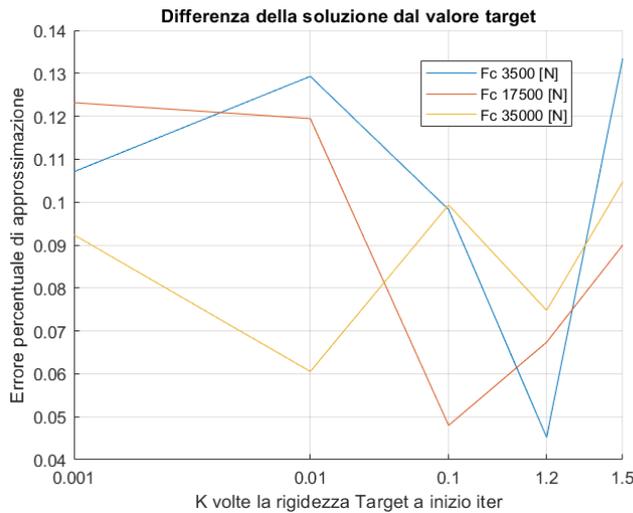
7.2 Elaborazione dati

Si procede ora all'analisi di quanto ricavato e all'elaborazione dei dati grezzi. Ad una prima osservazione è possibile notare come il valore ricavato dal modello matematico definito sia prossimo a quello ritenuto essere il valore vero. La conferma della buona approssimazione ricavabile dall'analisi effettuata riceve definitiva conferma dal calcolo dell'errore percentuale per le singole casistiche esaminate riportato nella tabella 7.2.

Tabella 7.2: Errore percentuale

Errore Percentuale			
Fc [N]	3500	17500	35000
$K_{trial} = 0.001K_n$	0.11	0.12	0.09
$K_{trial} = 0.01K_n$	0.13	0.12	0.06
$K_{trial} = 0.1K_n$	0.10	0.05	0.10
$K_{trial} = 1.2K_n$	0.05	0.07	0.07
$K_{trial} = 1.5K_n$	0.13	0.09	0.10

L'errore percentuale rilevato presenta valori che oscillano tra lo 0.05% e lo 0.13%, il valore ricavato a mezzo modello ben approssima la soluzione reale. Tale valore presenta inoltre il vantaggio di derivare da un'analisi che richiede la conoscenza di pochi parametri per poter essere effettuata. Ulteriori informazioni circa l'andamento della soluzione si ricavano dal grafico 7.17 nel quale sono riportati gli scostamenti della soluzione iterata dalla soluzione vera in percentuale per ciascuno dei tre 3 livelli di carico e per i 5 possibili valori di inizio iterazione.

**Figura 7.17:** Errore percentuale per i tre gruppi di carico

L'andamento dell'errore non sembra presentare relazione alcuna con il carico centrifugo applicato e con il valore di partenza deciso per la rigidezza di contatto normale. Tale comportamento può essere dovuto ad una scelta errata della tolleranza imposta per terminare il ciclo iterativo o ad un sommarsi di errori dovuti ad approssimazioni.

Al fine di comprendere come la soluzione si comporti durante le iterazioni si è riportato nei grafici seguenti il valore ottenuto per frequenza e rigidezza di contatto ad una determinata iterata.

7.2.1 Caso $F_c = 10 \text{ MPa}$ (3500 N)

$$k_{trial} = 0.001k_n$$

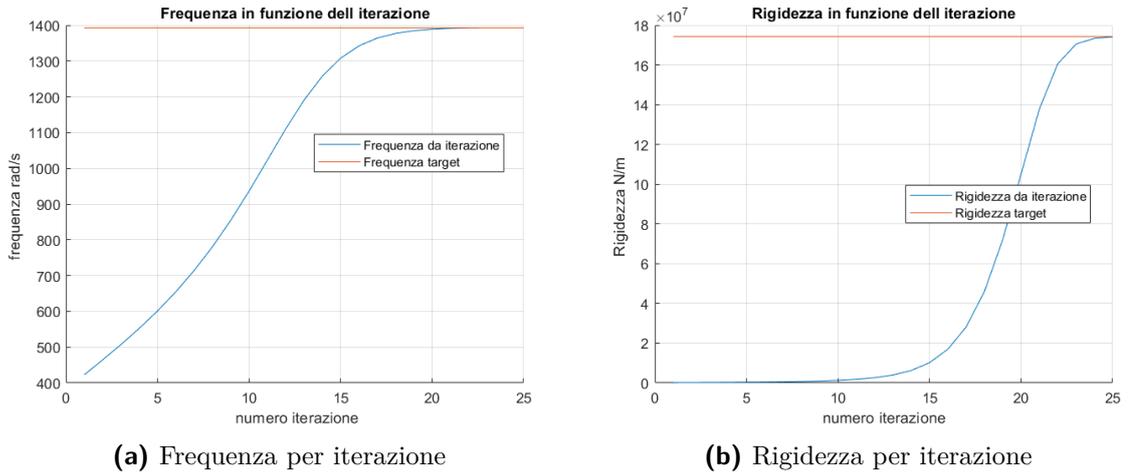


Figura 7.18: Comportamento dell'iterata

$$k_{trial} = 0.01k_n$$

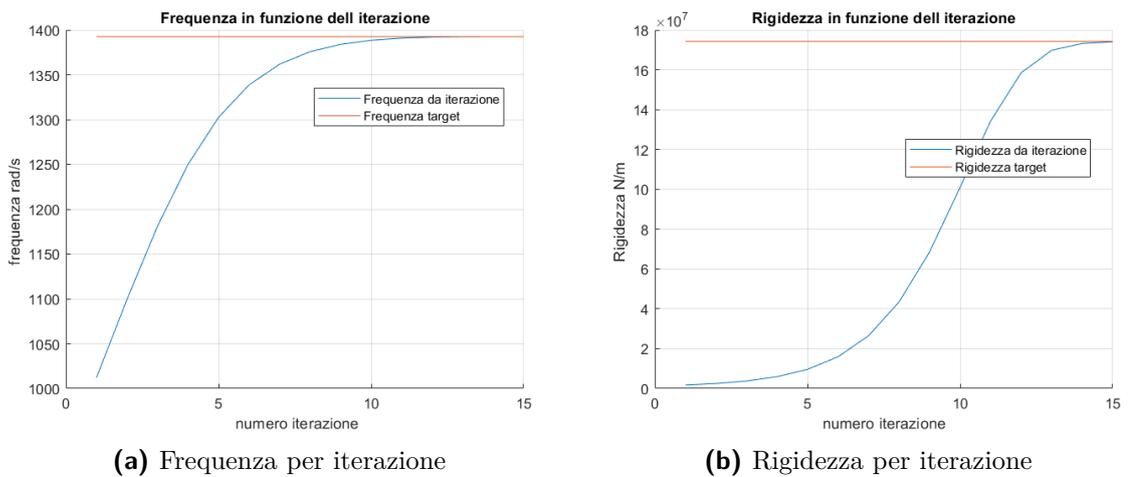


Figura 7.19: Comportamento dell'iterata

$$k_{trial} = 0.1k_n$$

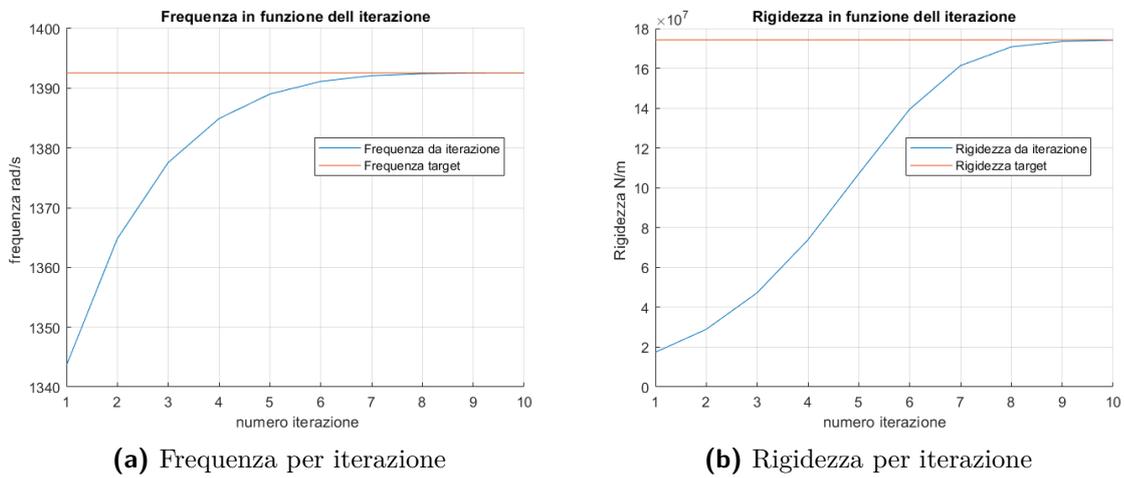


Figura 7.20: Comportamento dell'iterata

$$k_{trial} = 1.2k_n$$

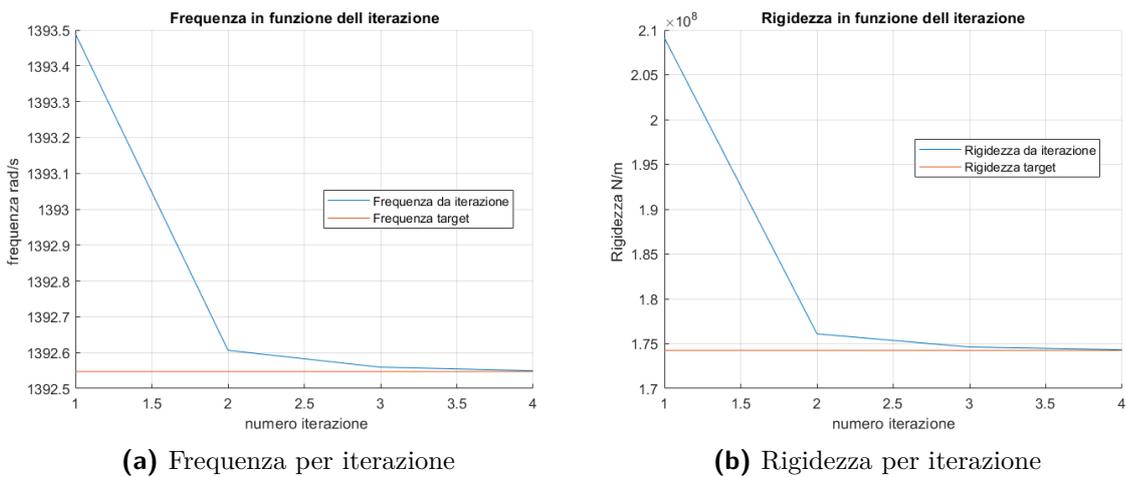


Figura 7.21: Comportamento dell'iterata

$$k_{trial} = 1.5k_n$$

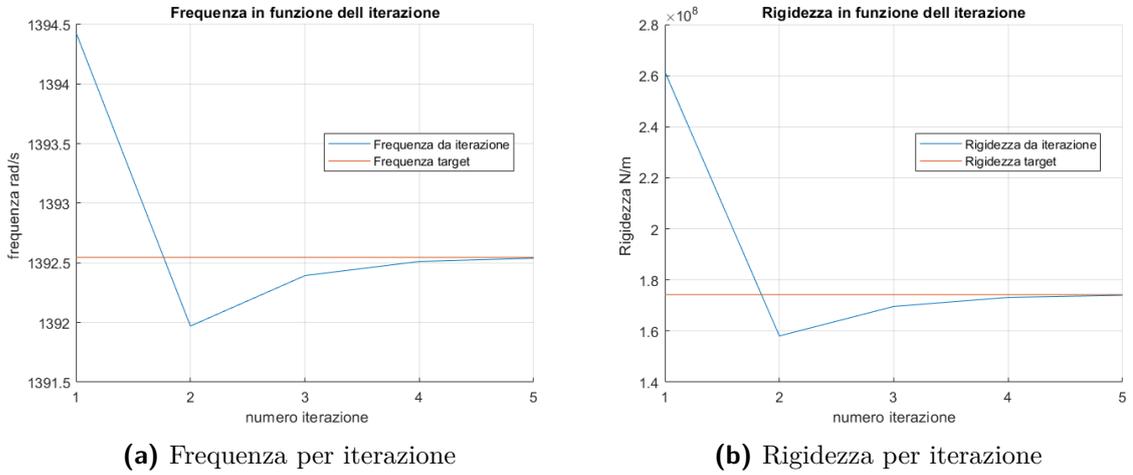


Figura 7.22: Comportamento dell'iterata

7.2.2 Caso $F_c = 50 MPa$ (17500 N)

$$k_{trial} = 0.001k_n$$

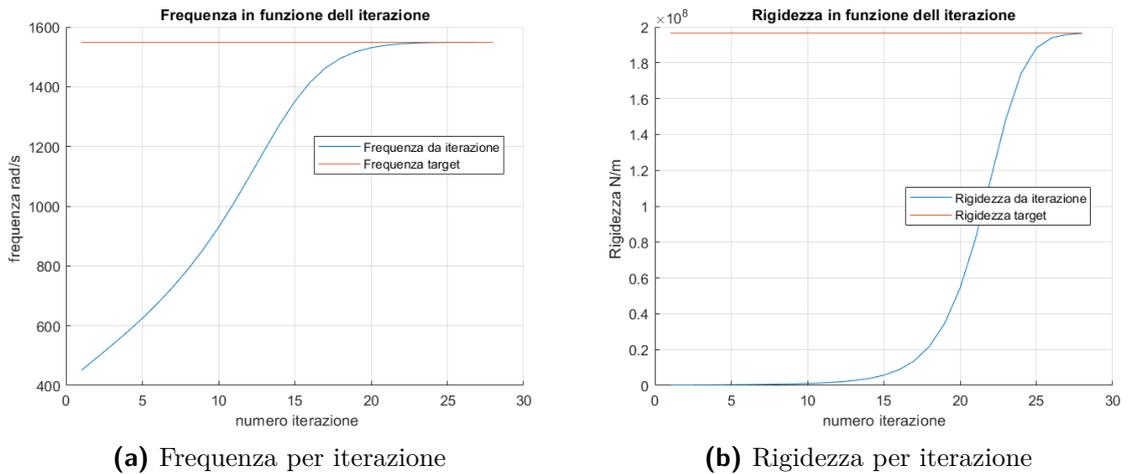
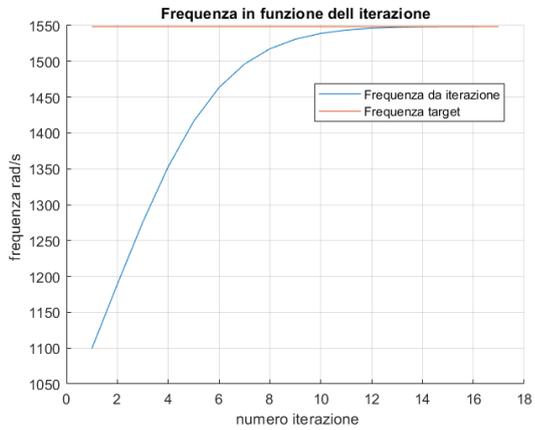
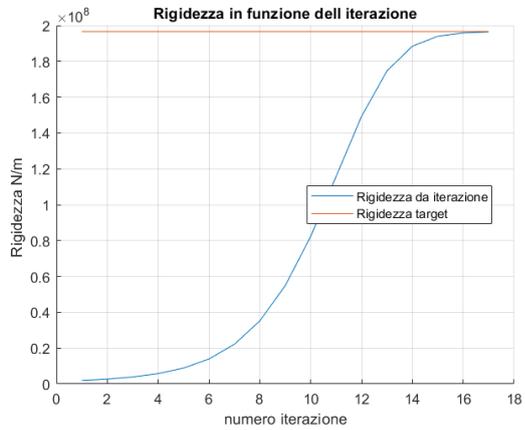


Figura 7.23: Comportamento dell'iterata

$$k_{trial} = 0.01k_n$$



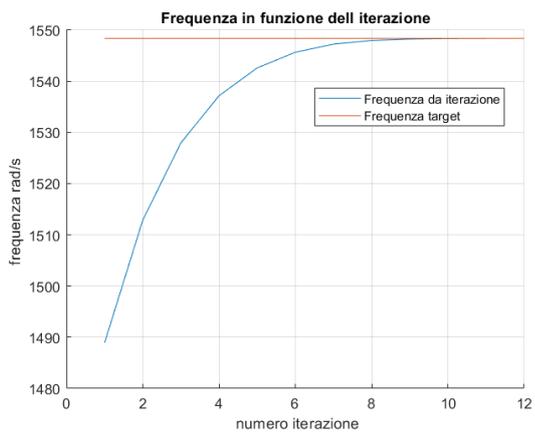
(a) Frequenza per iterazione



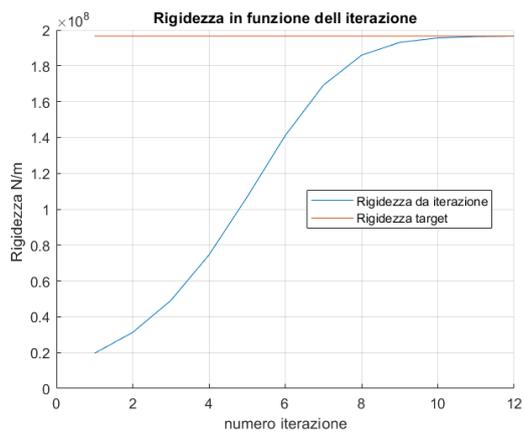
(b) Rigidezza per iterazione

Figura 7.24: Comportamento dell'iterata

$$k_{trial} = 0.1k_n$$



(a) Frequenza per iterazione



(b) Rigidezza per iterazione

Figura 7.25: Comportamento dell'iterata

$$k_{trial} = 1.2k_n$$

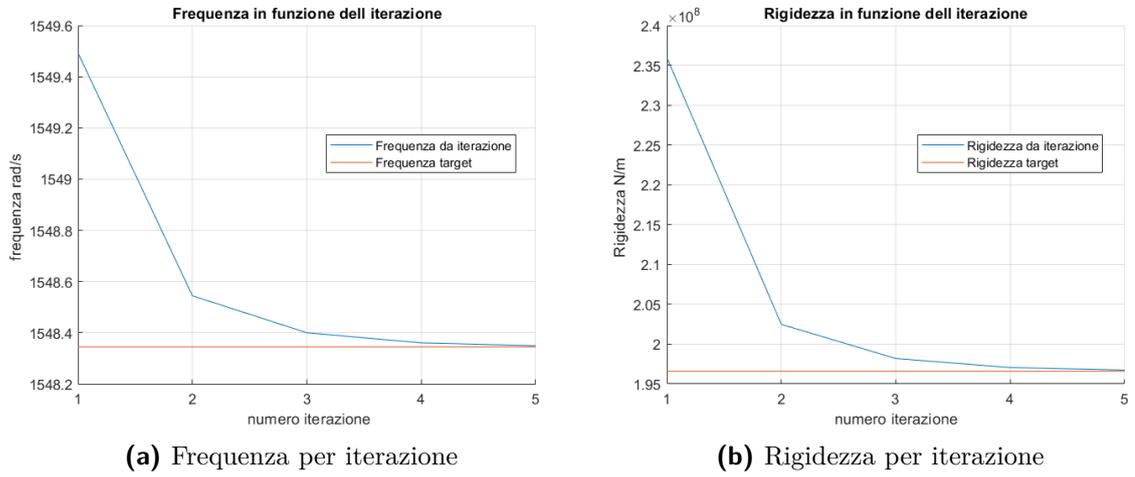


Figura 7.26: Comportamento dell'iterata

$$k_{trial} = 1.5k_n$$

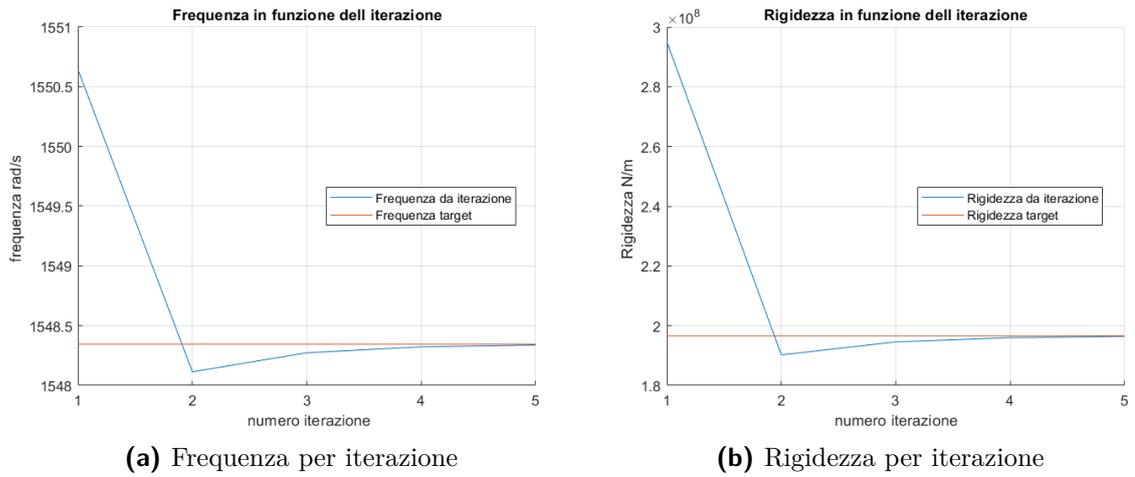


Figura 7.27: Comportamento dell'iterata

7.2.3 Caso $F_c = 100 \text{ MPa}$ (35000 N)

$$k_{trial} = 0.001k_n$$

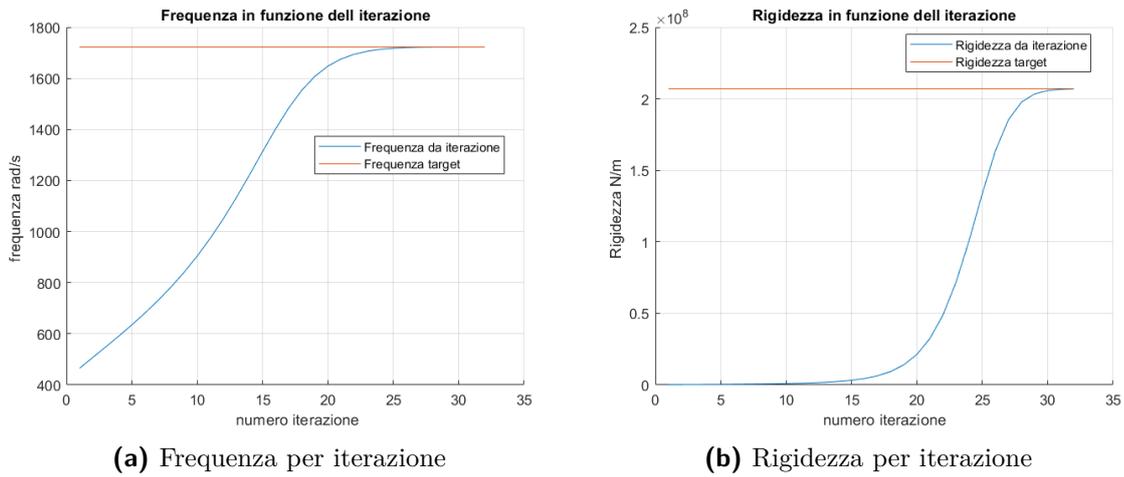


Figura 7.28: Comportamento dell'iterata

$$k_{trial} = 0.01k_n$$

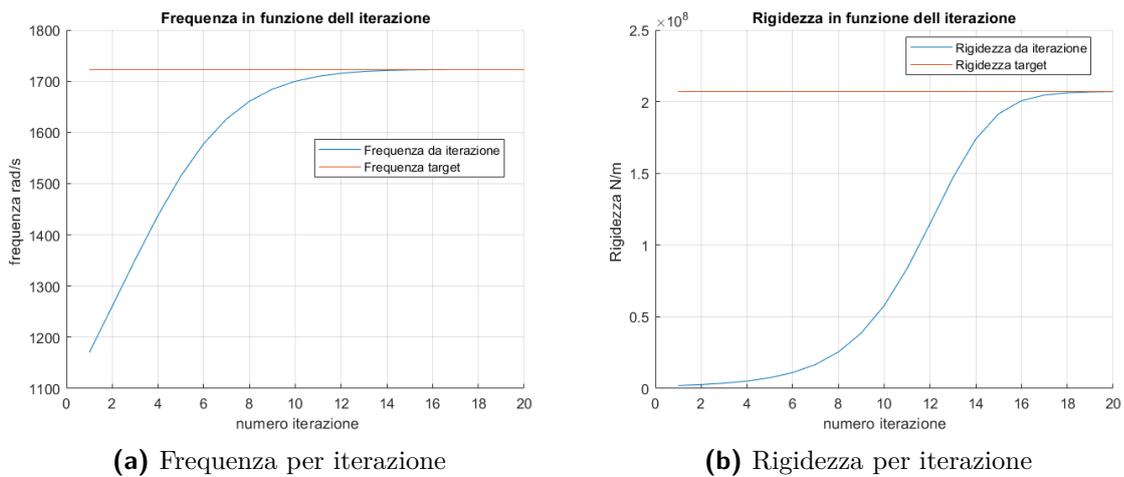
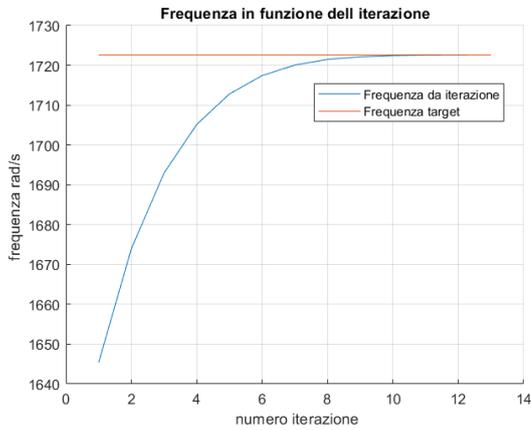
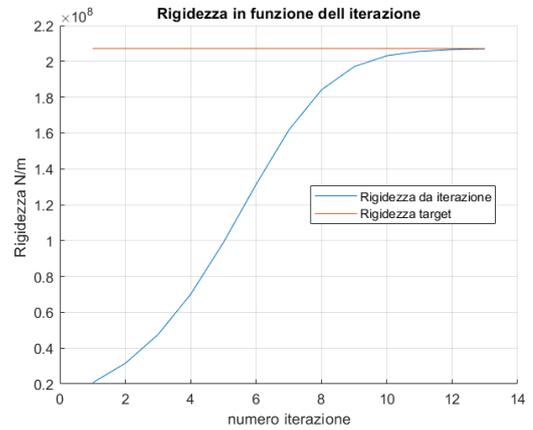


Figura 7.29: Comportamento dell'iterata

$$k_{trial} = 0.1k_n$$



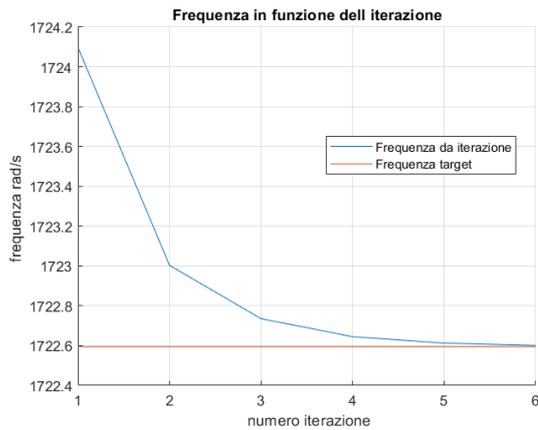
(a) Frequenza per iterazione



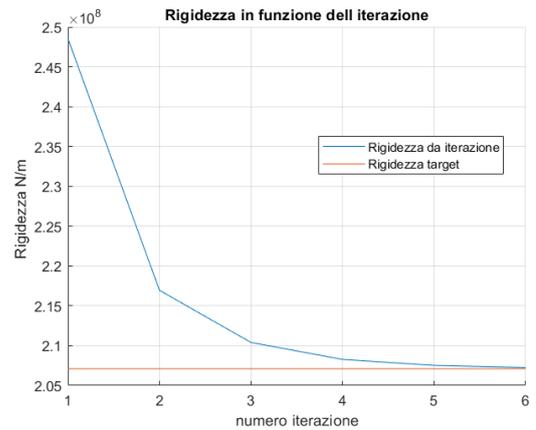
(b) Rigidezza per iterazione

Figura 7.30: Comportamento dell'iterata

$$k_{trial} = 1.2k_n$$



(a) Frequenza per iterazione



(b) Rigidezza per iterazione

Figura 7.31: Comportamento dell'iterata

$$k_{trial} = 1.5k_n$$

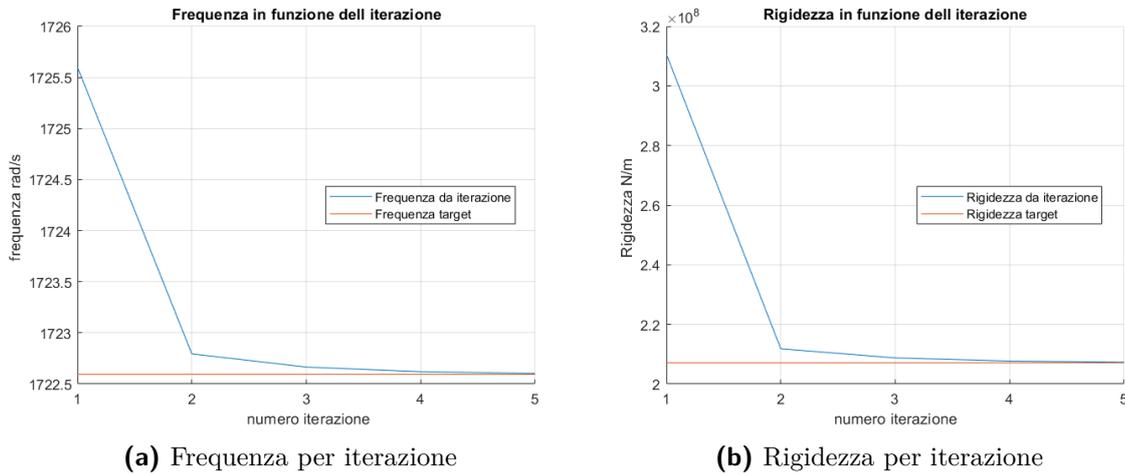


Figura 7.32: Comportamento dell'iterata

Dai grafici riportati è possibile valutare la velocità con la quale il modello matematico definito giunga a convergenza, è possibile infatti ottenere approssimazioni accettabili della rigidezza di contatto già dopo pochi cicli ed una buona parte del costo computazionale dell'operazione è da imputarsi al solo affinarsi della soluzione. Il numero di iterazioni ovviamente, dato il procedimento utilizzato per ottenere la convergenza, basato sulla progressiva addizione di incrementi, cresce all'aumentare della distanza della soluzione di tentativo dalla soluzione vera.

Il modello matematico adottato presenta tuttavia poca tolleranza nei confronti di rigidezze di contatto di tentativo superiori a 1.5 volte la rigidezza di contatto vera, in tal caso infatti il metodo non arriva a convergenza e la soluzione ricavata nel corso delle iterazioni tende ad esplodere. Il motivo di tale comportamento risiede nell'andamento della frequenza naturale all'aumentare della rigidezza del sistema, per valori di rigidezza eccedenti un certo valore limite, funzione, nel modello matematico da noi ideato del carico assiale applicato, la frequenza naturale presenta un andamento costante, non variando ulteriormente come possibile osservare nel grafico 5.11.

Di seguito si riporta infine l'andamento della derivata dell'autovalore per le varie casistiche di carico centrifugo applicato e rigidezza di contatto normale di tentativo.

$$F_c = 10 \text{ MPa} (3500 \text{ N})$$

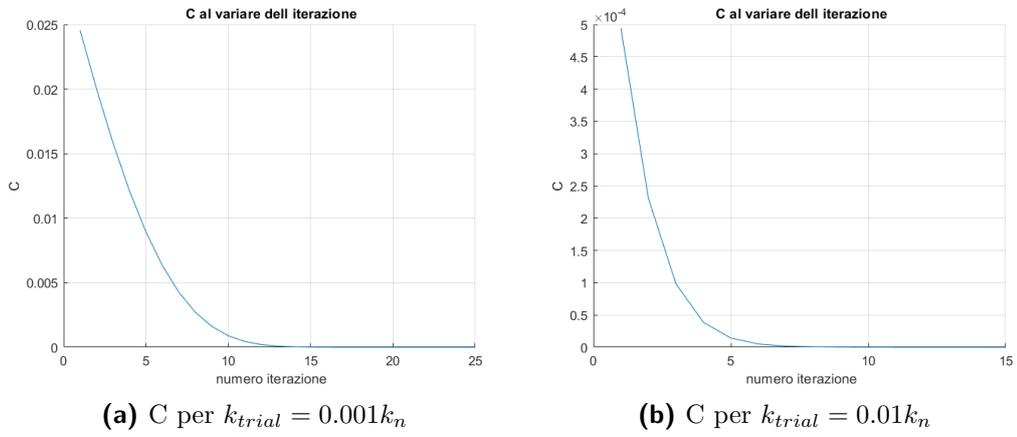


Figura 7.33: Derivata dell'autovalore

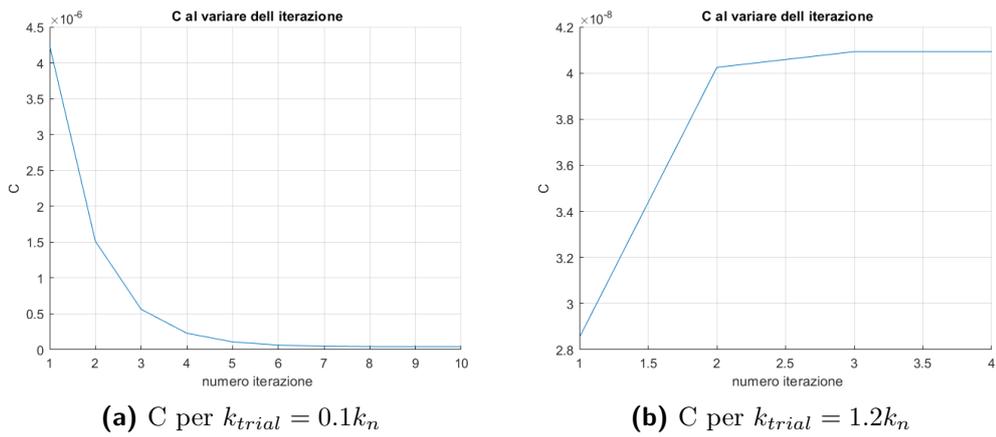


Figura 7.34: Derivata dell'autovalore

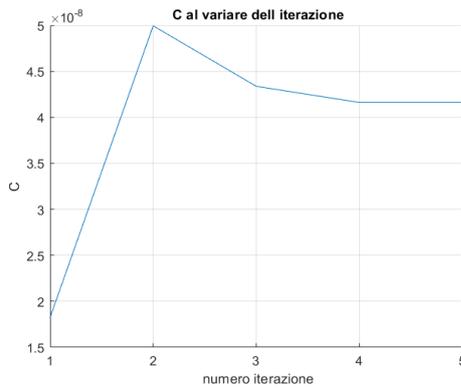


Figura 7.35: Derivata dell'autovalore per $k_{trial} = 1.5k_n$

$$F_c = 50 \text{ MPa} (17500 \text{ N})$$

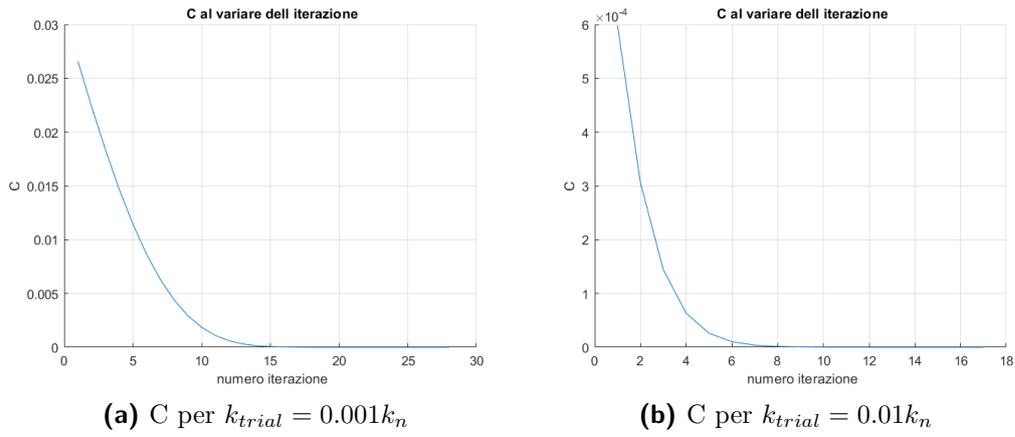


Figura 7.36: Derivata dell'autovalore

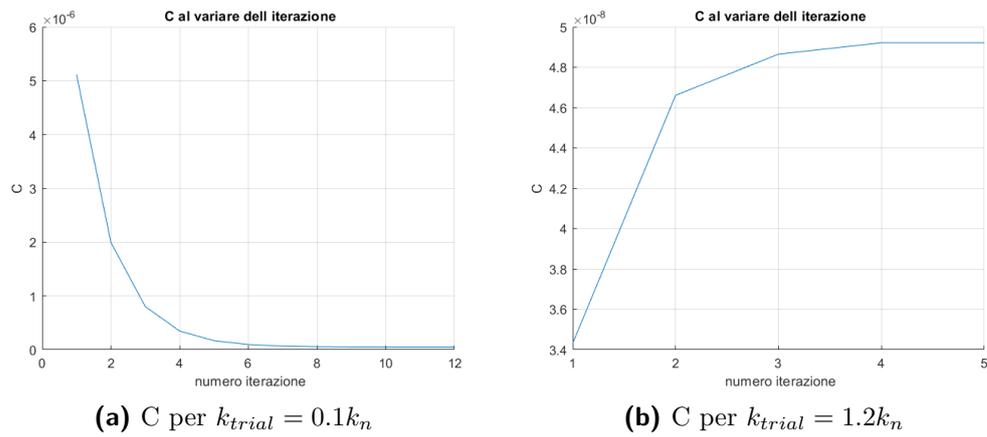


Figura 7.37: Derivata dell'autovalore

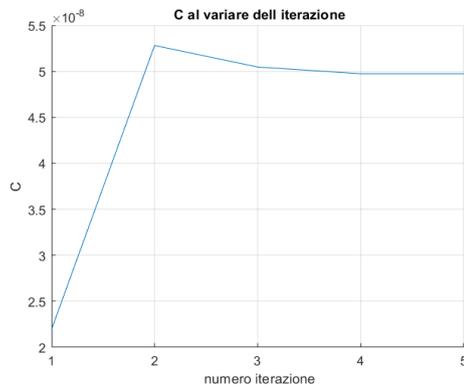


Figura 7.38: Derivata dell'autovalore per $k_{trial} = 1.5k_n$

$$F_c = 100 \text{ MPa} (35000 \text{ N})$$

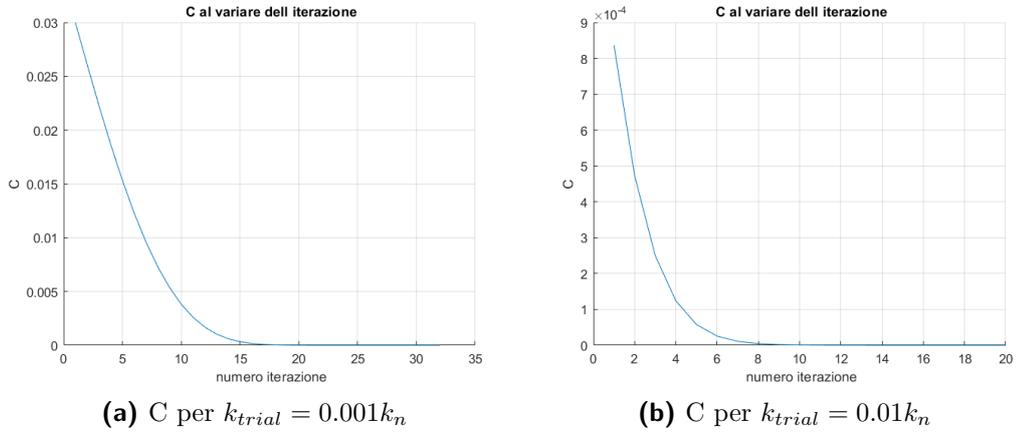


Figura 7.39: Derivata dell'autovalore

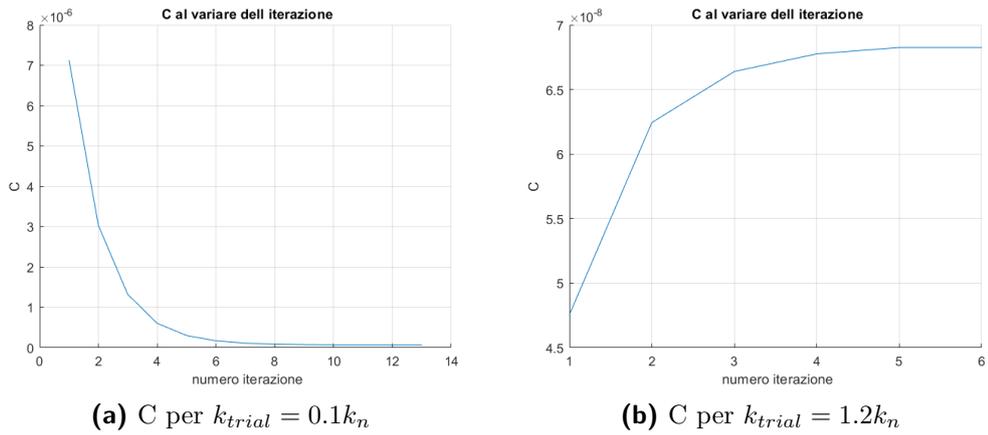


Figura 7.40: Derivata dell'autovalore

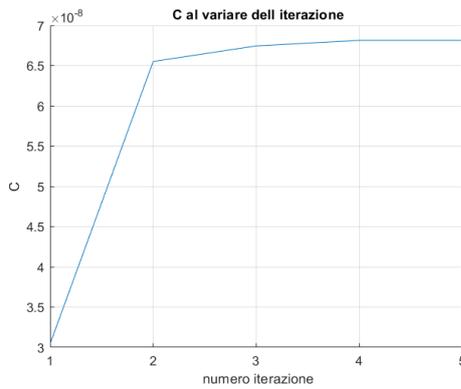


Figura 7.41: Derivata dell'autovalore per $k_{trial} = 1.5k_n$

Nel modello proposto l'autovalore è il parametro che maggiormente influenza la velocità di convergenza della soluzione, ad esso è difatto imputabile la dimensione dell'incremento di rigidità applicato alla soluzione di tentativo dell'iterata precedente necessario per poter ricavare i nuovi autovalori ed autovettori. Anche in questo caso è possibile quindi osservare come ad un certo numero di iterazioni la soluzione sia affinata al punto che l'incremento necessario per giungere ad un nuovo valore di tentativo è di lieve entità, conferma che da una certa iterata in poi il calcolo sia solo di perfezionamento della soluzione.

Capitolo 8

Conclusioni

Nel corso della presente ci si è preposti di identificare le rigidzze di contatto alla radice dell'attacco pala di valutare la loro influenza nella risposta modale del sistema e se possibile di ricavarne il valore a partire dalla sola conoscenza della risposta in frequenza. Come prevedibile l'introduzione in un sistema di fonti di rigidzza aggiuntive ne incrementa la rigidzza globale e di conseguenza modifica la forma modale, in particolare la frequenza tende ad aumentare tanto più il pezzo diventa rigido.

Il modello matematico proposto è in grado di fornire la risposta in frequenza relativa ad un pezzo sollecitato da un carico assiale e sfruttando formulazioni preesistenti, tale risposta è funzione della rigidzza di contatto. Tuttavia lo scopo ultimo è l'identificazione e la determinazione di tali rigidzze senza disporre di formulazione alcuna e a partire dalla sola conoscenza della risposta dinamica del sistema eccitato.

Il metodo risolutivo descritto nella presente fornisce risultati che ben approssimano il valore della rigidzza di contatto definita come vera, l'errore percentuale derivante dal confronto con tale parametro conferma la validità del metodo ed infine, la velocità di convergenza dello stesso porta la soluzione di tentativo, nel giro di poche iterazioni, ad un valore prossimo a quello vero.

Il metodo risente della scelta del parametro di tentativo iniziale solo nel senso della direzionalità della convergenza, ovvero, supponendo un valore di partenza inferiore a quello da approssimare la soluzione non sembra manifestare influenza alcuna, viceversa, supponendo un valore superiore la soluzione iterata non converge se non per piccoli scostamenti.

Per quanto riguarda il contributo relativo alla rigidzza di contatto tangenziale il metodo è in grado di fornire la risposta dinamica del sistema derivante dalla presenza contemporanea del contatto tangenziale e normale, tuttavia la formulazione differenziale usata per descrivere la mutua variazione degli autovalori del sistema lineare risultante la definizione del nuovo problema non sembra presentare soluzione.

Sono dunque necessari ulteriori studi per poter arrivare ad una formulazione capace di descrivere correttamente la variazione degli autovalori, quanto in presenza di più parametri.

Sarebbe inoltre necessario produrre un'opportuna prova meccanica atta a validare il modello comprensivo di rigidzze di contatto descritto nella presente opera. Si è infatti preso come valore vero quanto ricavato da uno studio puramente analitico pur confrontando i risultati ottenuti con esperimenti svolti da altri autori. La validazione a mezzo prova fisica permetterebbe infine di valutare l'effettiva bontà del metodo proposto e di ottenere anche informazioni relative alle rigidzze di contatto ancora da determinare con precisione.

Bibliografia

- [1] Turner, M.J., Dill, E.H., Martin, H.C., and Melosh R.J. Large deflections of structures subjected to heating and external loads. *J. Aerospace Sci.*, 27:97–102,127, 1960.
- [2] Przemieniecki.J.S. *Theory of matrix structural analysis*. McGraw-Hill, 1968.
- [3] H.C. MARTIN. Large deflection and stability analysis by the direct stiffness method. Technical report, NASA Tech. Rept 32-931, 1966.
- [4] J.H. ARGYRIS. *Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis. Progress in Aeronautical Sciences*, volume IV. The Macmillan Company, New York, 1964.
- [5] AGARDograph 72. *Matrix Methods of Structural Analysis*. B. Fraeijs de Veubeke, 72:1-164, 1964.
- [6] Andrea Tonoli, Enrico Zenerino, and N Amati. Modeling the flexural dynamic behavior of axially moving continua by using the finite element method. *Journal of vibration and acoustics*, 136:011012, 02 2014.
- [7] Heinrich Rudolf Hertz. Über die berührung fester elastischer körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik 92*, pages 156 – 171, 1881.
- [8] B Nelson Norden. On the compression of a cylinder in contact with a plane surface. 07 1973.
- [9] H.R. Thomas, V.A. Hoersch, University of Illinois (Urbana-Champaign campus). Engineering Experiment Station, and Ill.) Utilities Research Commission (Chicago. *Stresses Due to the Pressure of One Elastic Solid Upon Another: A Report of an Investigation Conducted by the Engineering Experiment Station, University of Illinois in Cooperation with the Utilities Research Commission*. Bulletin (University of Illinois (Urbana-Champaign campus). Engineering Experiment Station)). University of Illinois, 1930.
- [10] O. I. Kosarev. Contact deformation and compression of cylinders. *Russian Engineering Research*, 31(2):107–112, Feb 2011.
- [11] A.V. Orlov. Elastic strain and stress in linear contact. *Probl. Mashinostr. Nadezhn. Mash.*, (6):31–36, 2006.
- [12] Dinnik A.N. Impact and compression of elastic bodies. *Izbrannye Trudy (Selected Works)*, 1:13–114, 1952.
- [13] W.C. Young, Budynas, and R.G. *Roark's Formulas for Stress and Strain*. MacGraw-Hill international edition. McGraw-Hill Education, 2001.
- [14] P. Eschmann, Ludwig Hasbargen, Weigand, J. Brändlein, and FAG Kugelfischer Georg Schäfer KGaA. *Ball and roller bearings: theory, design, and application*. R. Oldenbourg, 1985.

- [15] H. Bochmann. *Die Ablattung von Stahlkugeln und Zylindern durch den Meßdruck*. Deutsche Zeitschriften-Gesellschaft, 1927.
- [16] K. Kunert. Spannungsverteilung im halbraum bei elliptischer flächenpressungsverteilung über einer rechteckigen druckfläche. *Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A*, 27(6):165–174, Nov 1961.
- [17] G. Lundberg. Elastische berührung zweier halbräume. *Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A*, 10(5):201–211, Sep 1939.
- [18] Srinivasan A. V. Cutts D. G. Sridhar S. Turbojet engine blade damping. Contractor Report 165406, NASA, 1981.
- [19] J.S. Rao M.A.W. Usmani C.V. Ramakrishnan. Interfacial damping in blade attachment region. Lyon France, 1990. Third International Conference on Rotor Dynamics.
- [20] R L. Fox and M P. Kapoor. Rate of change of eigenvalues and eigenvectors. *AIAA Journal*, 6, 01 1969.

Alla mia famiglia senza il cui supporto non avrei potuto arrivare dove sono ora. A lei il merito di aver creduto in me sempre, anche nei momenti in cui nemmeno io riponevo in me fiducia alcuna.

Alla mia compagna Vittoria per aver sopportato per così tanto tempo il peso delle mie scelte.

Ai miei amici per aver alleggerito le giornate pesanti

Ai miei ex colleghi oramai amici per aver condiviso le notti sui progetti e le giornate di sui libri.

A voi vanno i miei ringraziamenti.