

POLITECNICO DI TORINO



**CORSO DI LAUREA MAGISTRALE
IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE**

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

**Analisi agli elementi finiti del danneggiamento progressivo di
strutture in composito**

RELATORE

PROF. MARCO GHERLONE

CANDIDATO

CLEMENTE MIRKO SAGGESE

MARZO 2019

SOMMARIO

La tesi ha come scopo primario l'analisi progressiva del danno di laminati in composito, nella quale, partendo da criteri di cedimento reperiti facendo riferimento alla bibliografia sull'argomento, si vanno ad implementare meccanismi di danneggiamento per predire quelli che saranno i carichi critici della struttura. In particolare, i requisiti primari per una struttura di questo genere sono rappresentati dal First Ply Failure Load e dal Ultimate Failure Load.

L'analisi in questione è stata svolta partendo dai risultati sperimentali relativi al lavoro di Chang e Chang [1] nel quale la struttura scelta è una piastra in laminato composta da una matrice rinforza da fibre di carbonio (T300/1034-C), che presenta un foro centrale e che è stata sottoposta ad un carico di trazione fino a rottura.

Lo studio ha richiesto utilizzo del software per l'implementazione agli elementi finiti, MSC Nastran, che viene adoperato con l'ausilio del pre e post processore MSC Patran.

Nella prima parte di questa tesi si andranno ad investigare le potenzialità del software su citato, per determinare l'affidabilità dello stesso in caso di analisi progressiva di danneggiamento, facendo uso dei criteri e dei modelli di danneggiamento implementati di default.

Successivamente, una volta rilevati i limiti e le caratteristiche dell'analisi attraverso un software commerciale, si è proceduto all'implementazione di un programma in linguaggio MATLAB, che a differenza del precedente permetta una calibrazione gestita dall'utente relativa ai parametri di cedimento. Nel programma MATLAB sono presenti alcuni fra i criteri che meglio identificano il cedimento del materiale (individuati dopo uno studio bibliografico) e due modelli di danneggiamento utili a predire il comportamento del materiale dopo l'avvenuto cedimento.

ABSTRACT

The main aim of this thesis is the progressive failure analysis of composite laminates, in which, starting from the yield criteria found referring to the bibliography about this specific topic, damage mechanisms are implemented to predict critical loads of the structure. More in detail, the First Ply Failure Load and the Ultimate Failure Load represent the primary requirements for such a structure.

The analysis was carried out starting from the experimental results related to the work of Chang and Chang [1], in which the chosen structure is a laminate plate composed of a carbon fibers reinforced matrix (T300 / 1034-C), that has a central hole and has undergone a tensile load until it fails.

The study required the use of a finite element software, MSC Nastran, used with the help of the pre and post processor MSC Patran.

In the first part of this thesis, the potentialities of the above-mentioned software are investigated, to determine its reliability in case of progressive failure analysis, using the default criteria and damage models.

Subsequently, once the limits and the characteristics of the analysis were detected through commercial software, a program written in MATLAB code was implemented, which, unlike the previous one, allows a user-defined calibration related to the failure parameters. In the MATLAB program, there are criteria that better identify the yielding of the material (identified after a bibliographic study) and two models of damage useful to predict the behavior of the material after the failure.

INDICE DEI CONTENUTI

SOMMARIO	iii
ABSTRACT	iv
INDICE DEI CONTENUTI	v
INDICE DELLE FIGURE	vii
INTRODUZIONE	1
ANALISI PROGRESSIVA DEL DANNEGGIAMENTO	4
2.1 Panoramica del metodo	4
2.2 Analisi non lineare	6
2.3 Rilevamento degli stress	7
2.4 Criteri di rottura	8
2.4.1 Criteri di rottura non-interattivi.....	9
2.4.1.1 Criterio del massimo stress	9
2.4.1.2 Criterio della massima deformazione	10
2.4.2 Criteri di rottura interattivi.....	10
2.4.2.1 Criterio di Tsai-Wu	10
2.4.2.2 Criterio di Hashin.....	13
2.4.2.3 Criteio di Puck	14
2.5 Meccanismi di degradazione del materiale.....	15
2.5.1 Matherial property degradation method.....	15
2.5.1.1 Modello di danneggiamento secondo MPDM	18
2.5.2 Internal state variable method	20
2.5.3 Element Failure Method (EFM).....	21
ANALISI PROGRESSIVA DEL DANNO IN AMBIENTE MSC	
NASTRAN	24
3.1 Overview delle caratteristiche di modellazione del software commerciale	24
3.1.1 Degradazione graduale selettiva	24
3.1.2 Degradazione istantanea	25
3.2 Modello bibliografico di riferimento	25

3.3 Modello in Patran e tipologia di analisi implementata	28
3.4 Criteri di rottura ed implementazione	30
3.4.1 Analisi con criterio del massimo stress	30
3.4.2 Analisi con criterio di Hashin	38
3.4.2 Analisi con criterio di Tsai-Wu	43
3.4.4 Analisi con criterio di Hoffman	47
IMPLEMENTAZIONE CODICE IN LINGUAGGIO MATLAB	50
4.1 Introduzione al codice	50
4.2 Assunzioni e modello agli elementi finiti	51
4.3 Rilevamento del cedimento e modellazione del danneggiamento	58
4.4 Esecuzione del programma	60
4.5 Post Processing e verifica dei risultati	65
4.5.1 Risultati per il criterio del Massimo Stress	65
4.5.2 Risultati per il criterio di Hashin	71
4.5.2 Risultati per il criterio di Tsai-Wu	76
4.5.3 Risultati per il criterio di Hoffman	81
CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI	84
BIBLIOGRAFIA	89
RINGRAZIAMENTI	91

INDICE DELLE FIGURE

Figura 1 Sequenza carichi analisi progressiva del danno	2
Figura 2 Flow Chart metodologia analisi progressiva del danneggiamento	5
Figura 3 Andamento degli stress del criterio del Massimo Stress e Massimo Strain	9
Figura 4 Andamento degli stress nei criteri polinomiali	11
Figura 5 Modelli di degradazione basati sulla teoria MPDM	16
Figura 6 Effetto del parametro SRC sul carico di rottura finale	18
Figura 7 Degradazione prevista dalla teoria di Gunel e Kayran	20
Figura 8 Processo di danneggiamento con EFM	22
Figura 9 Flow Chart EFM	23
Figura 10 Modello di piastra relativa all'analisi PFA	27
Figura 11 Risultati sperimentali della piastra in esame	28
Figura 12 Modello agli elementi finiti per l'analisi in Nastran	29
Figura 13 Condizioni di carico del modello	29
Figura 14 Curva Forza/Spostamento per il caso di Massimo stress con degradazione istantanea	31
Figura 15 Indici di danneggiamento totale attraverso lo spessore del laminato al momento del First Ply Failure per il caso di Massimo stress con degradazione istantanea	32
Figura 16 Propagazione della rottura attraverso il laminato definita attraverso il valore minimo di Total Damage	33
Figura 17 Indici di Failure al momento del FPF nel laminato per il caso di Massimo stress con degradazione istantanea	34
Figura 18 Indice di "Total Damage" al momento dell'Ultimate Failure Load nel laminato per il caso di Massimo stress con degradazione istantanea	34
Figura 19 Curva Forza/Spostamento per il caso di Massimo stress con degradazione graduale	35
Figura 20 Evoluzione del danneggiamento attraverso l'indice di "Total Damage" per il caso di Massimo stress con degradazione graduale	36
Figura 21 Particolare dell'evoluzione del danneggiamento sul foro centrale attraverso l'indice di "Total Damage" per il caso di Massimo stress con degradazione graduale	36
Figura 22 Indice di "Total Damage" per il First Ply Failure per il caso di Massimo stress con degradazione graduale	37
Figura 23 Indici di Failure al momento del First Ply Failure per il caso di Massimo Stress con degradazione graduale	38
Figura 24 Curva Forza/Spostamento per il caso di Hashin con degradazione istantanea	38
Figura 25 Indici di "Total Damage" al verificarsi del First Ply Failure per il caso di Hashin con degradazione istantanea	39
Figura 26 Comparazione indici di danneggiamento per fibre e matrice nella zona del foro centrale	40
Figura 27 Curva Forza/Spostamento per il caso di Hashin con degradazione graduale	41
Figura 28 Indice di danneggiamento nel momento del First Ply Failure per il caso di Hashin con degradazione graduale	41

Figura 29 Indice di failure nel momento del First Ply Failure per il caso di Hashin con degradazione graduale.....	42
Figura 30 Indice di danneggiamento "Total Damage" per il criterio di Hashin con danneggiamento graduale.....	42
Figura 31 Particolare dell'evoluzione del danneggiamento sul foro centrale attraverso l'indice di "Total Damage" per il caso di Hashin con degradazione graduale.....	43
Figura 32 Curva Forza/Spostamento per il caso di Tsai Wu con degradazione istantanea	43
Figura 33 Indici di danneggiamento "Total Damage" al momento del First Ply Failure per il caso di Tsai Wu con degradazione istantanea.....	45
Figura 34 Indici di Failure al momento del First Ply Failure per il caso di Tsai Wu con degradazione istantanea.....	45
Figura 35 Indici di danneggiamento nel momento dell'Ultimate Failure Load per il caso Tsai Wu con degradazione istantanea	46
Figura 36 Curva Forza/Spostamento per il caso di Tsai Wu con degradazione graduale	46
Figura 37 Indici di danneggiamento "Total Damage" per il criterio di Tsai-Wu con degradazione graduale.....	47
Figura 38 Curva Forza/Spostamento per il caso di Hoffman con degradazione istantanea	48
Figura 39 First Ply Failure per il caso di Hoffman con danneggiamento istantaneo.....	48
Figura 40 Indici di danneggiamento nel momento dell'Ultimate Failure Load per il caso di Hoffman con degradazione istantanea.....	49
Figura 41 Flow-Chart relativo al programma in Codice MATLAB con analisi in controllo di spostamento.....	63
Figura 42 Flow-Chart per il calcolo delle matrici di rigidità secante e tangente.....	64
Figura 43 Curva Forza/Spostamento per il caso di Massimo stress con degradazione istantanea ottenuto con simulazione in MATLAB	66
Figura 44 Rappresentazione degli elementi soggetti a First Ply Failure per il criterio del Massimo Stress con degradazione istantanea	67
Figura 45 Numero di strati soggetti a cedimento della matrice per il caso di Massimo Stress con degradazione istantanea	68
Figura 46 Numero di strati soggetti a cedimento delle fibre per il caso di Massimo Stress con degradazione istantanea	68
Figura 47 Numero di strati soggetti a cedimento della matrice per il caso di Massimo Stress con degradazione istantanea - Visualizzazione estesa.....	69
Figura 48 Cedimento complessivo per il caso di Massimo Stress con degradazione istantanea.....	69
Figura 49 Curva Forza/Spostamento per il caso di Massimo stress con degradazione graduale ottenuto con simulazione in MATLAB.....	69
Figura 50 Numero massimo di degradazioni avvenute in ogni elemento per il caso di Massimo Stress con danneggiamento graduale.....	70
Figura 51 Curva Forza/Spostamento per il caso di Hashin con degradazione istantanea ottenuto con simulazione in MATLAB	71
Figura 52 Rappresentazione degli elementi soggetti a First Ply Failure per il criterio di Hashin con degradazione istantanea	72

Figura 53 Numero di strati soggetti a cedimento della matrice per il caso di Hashin con degradazione istantanea.....	72
Figura 54 Numero di strati soggetti a cedimento delle fibre per il caso di Hashin con degradazione istantanea.....	73
Figura 55 Cedimento complessivo per il caso di Hashin con degradazione istantanea.....	73
Figura 56 Curva Forza/Spostamento per il caso di Hashin con degradazione graduale ottenuto con simulazione in MATLAB	74
Figura 57 Numero massimo di degradazioni delle proprietà della matrice avvenute in ogni elemento nello strato 8 per il caso di Hashin con danneggiamento graduale.....	75
Figura 58 Numero massimo di degradazioni delle proprietà delle fibre avvenute in ogni elemento nello strato 8 per il caso di Hashin con danneggiamento graduale.....	75
Figura 59 Numero massimo di degradazioni avvenute in ogni elemento per tutti gli strati per il caso di Hashin con danneggiamento graduale	76
Figura 60 Curva Forza/Spostamento per il caso di Tsai-Wu con degradazione istantanea ottenuto con simulazione in MATLAB	77
Figura 61 Rappresentazione degli elementi soggetti a First Ply Failure per il criterio di Tsai-Wu con degradazione istantanea	78
Figura 62 Numero di strati soggetti a cedimento della matrice per il caso di Tsai-Wu con degradazione istantanea.....	78
Figura 63 Numero di strati soggetti a cedimento delle fibre per il caso di Tsai-Wu con degradazione istantanea.....	79
Figura 64 Curva Forza/Spostamento per il caso di Tsai-Wu con degradazione graduale ottenuto con simulazione in MATLAB	80
Figura 65 Numero massimo di degradazioni avvenute in ogni elemento per tutti gli strati per il caso di Tsai-Wu con danneggiamento graduale.....	80
Figura 66 Curva Forza/Spostamento per il caso di Hoffman con degradazione istantanea ottenuto con simulazione in MATLAB	81
Figura 67 Numero di strati soggetti a cedimento della matrice per il caso di Hoffman con degradazione istantanea.....	82
Figura 68 Cedimento complessivo per il caso di Hoffman con degradazione istantanea.....	83

CAPITOLO 1

INTRODUZIONE

Con la continua evoluzione dell'industria aeronautica, particolare attenzione è stata rivolta ai materiali in composito. Di fatti, una delle più importanti sfide al giorno d'oggi è quella di poter usare questa tipologia di materiali nella costruzione di strutture aeronautiche primarie, garantendo sicurezza, affidabilità, riduzione di peso e costi, tutti fattori quindi di fondamentale importanza in questo settore.

L'attenzione nel corso degli anni è stata rivolta soprattutto a comprendere meglio e a poter predire i meccanismi attraverso i quali questi materiali arrivano a rottura. Sono così stati sviluppati diversi criteri e teorie per il danneggiamento progressivo. Ad esempio, i laminati in composito rinforzati con fibre in carbonio possono presentare danni locali dovuti ad un cedimento della matrice, alla rottura delle fibre stesse o alla delaminazione tra i vari strati. Tuttavia, la particolarità di questi materiali sta nel fatto che essi, a differenza delle classiche leghe metalliche, prima di giungere a definitiva rottura, possono continuare a sostenere carichi operativi pur presentando danneggiamenti locali. In particolare tutti i cedimenti a livello intra laminare possono essere tollerati dalle strutture di questo genere in maniera molto più consistente rispetto alle rotture inter laminari (come ad esempio le delaminazioni). Proprio dietro questo comportamento, tuttavia, risiedono le principali problematiche relative all'utilizzo dei materiali in composito, in quanto non esiste un metodo che garantisca l'assoluta convergenza tra i risultati sperimentali ed analitici.

Negli ultimi tre decenni sono stati numerosi gli studi effettuati sull'analisi progressiva del danno, ed in particolar modo si è cercato di comprendere quale dei criteri di rottura sia il più affidabile e come la propagazione del danno vada ad influire sul carico di rottura finale della struttura. Infatti, se, per ragioni di sicurezza, precedentemente si tendeva a fissare quest'ultimo al di sotto del "First Ply Failure" (FPF), ovvero quel carico al raggiungimento del cui si verificava il cedimento del primo strato del laminato in composito, con un'analisi progressiva del danno si può riuscire ad individuare un carico ultimo ammissibile che sia al di sopra del FPF, in modo da ridurre pesi e costi, mantenendo inalterati gli standard di sicurezza. Si potrebbe così passare da un design "First Ply Oriented" ad uno "Progressive Failure Oriented", la cui schematizzazione concettuale è illustrata nella seguente figura.

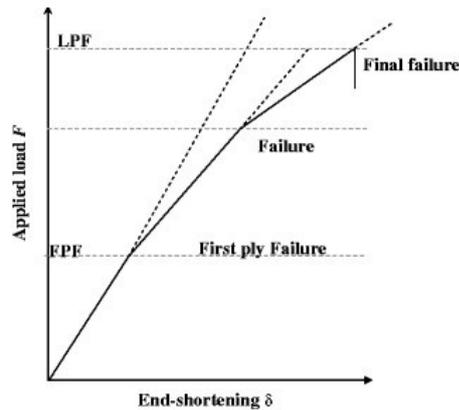


Figura 1 Sequenza carichi analisi progressiva del danno [3]

Nell'ambito di questo lavoro di tesi si andranno a considerare alcuni tra i più diffusi criteri per la determinazione di cedimento all'interno dei laminati in composito, e successivamente si passerà ad abbinarli ad appropriati modelli di danneggiamento. I riferimenti in letteratura relativi a questo particolare tipo di analisi sono numerosi, e in continuo aggiornamento; pertanto in questo lavoro si andranno a considerare solo i risultati più rilevanti, che sono anche considerati capisaldi per l'analisi progressiva del danno [2]. La ragione dietro la vastità di prove sperimentali disponibili è legata al fatto che, nonostante gli sforzi, non è stato ancora possibile determinare un criterio e un modello di danneggiamento univoci, che possano essere utilizzati su una vasta gamma di tipologia di strutture.

Per quanto riguarda i criteri di danneggiamento, alcuni di essi sono basati sugli aspetti macro meccanici della struttura, mentre altri si focalizzano sulle rotture a livello micromeccanico. La principale differenza tra questi due approcci è che, in quest'ultimo bisogna fare riferimento a parametri derivati da variabili interne del materiale, a loro volta ricavati dall'energia interna dello stesso. In questo caso si vanno a considerare interazioni tra i costituenti a livello microscopico. Se invece si considera un approccio macromeccanico, la determinazione del cedimento si baserà sull'investigazione a livello del singolo strato del laminato: a questo livello il materiale si assume omogeneo, e le proprietà meccaniche dello stesso sono rappresentate da un valore che è la media fra i costituenti del materiale. Quest'ultimo approccio produce risultati soddisfacenti se si vanno ad analizzare individualmente gli strati di laminato, ma non permette di avere una predizione degli stress accurata a livello microscopico.

Il livello successivo dell'analisi di laminati in composito consiste nel mettere insieme i risultati ottenuti a livello macroscopico per ogni singolo strato, con lo scopo di produrre uno studio d'insieme sull'intero spessore del laminato.

Nel corso di questa tesi, si trascurerà l'approccio microscopico, in quanto ciò che sarà di maggiore interesse saranno i valori dei carichi critici dell'intera struttura.

Relativamente ai modelli di danneggiamento, nella maggior parte dei casi, si utilizzano delle strategie che prevedono la graduale riduzione delle proprietà meccaniche del materiale, in modo da simulare il cedimento in un particolare strato del laminato. [4] In questo modo dovrà essere prevista una ridefinizione della matrice di rigidità del sistema, che dopo il danneggiamento dovrà simulare la ridotta capacità di carico nel materiale.

Nell'ultimo decennio, nuovi modelli di danneggiamento hanno preso piede, in quanto, sebbene il meccanismo precedentemente descritto, porti a risultati accettabili ed in linea con le prove sperimentali, esso è particolarmente soggetto a produrre dei risultati non convergenti, a causa dell'elevata possibilità di ottenere matrici di rigidezza singolari. Tra queste nuove teorie, la più accreditata e significativa sembra essere quella proposta da Tay et al [4], denominata "Element Failure Method". Essa prevede che il danneggiamento si ottenga non riducendo le proprietà del materiale, bensì simulandolo attraverso l'aggiunta di forze nodali applicate sui nodi degli elementi adiacenti a quello danneggiato.

Per quanto riguarda il lavoro svolto, è stato necessario partire con uno studio bibliografico dello stato dell'arte dell'analisi progressiva del danneggiamento, selezionando dei casi studio che potessero essere facilmente riprodotti ed analizzati in un comune software commerciale per l'analisi agli elementi finiti, MSC Nastran, ma anche implementati in un codice in linguaggio MATLAB, che permettesse all'utente di selezionare liberamente le caratteristiche utili al danneggiamento del materiale.

Questa tesi nasce come uno studio sulle potenzialità dell'analisi PFA implementata di default in MSC Nastran, per comprendere se i risultati siano in linea con quelli ricavati sperimentalmente. Una volta svolte le dovute analisi e simulazioni, è stato riscontrato un limite nell'implementazione built-in del software, legata all'impossibilità di gestire i vari parametri dell'analisi sulla base di specifici requisiti. Come si vedrà in seguito, infatti, all'utente non è concesso di selezionare qualsivoglia modello di danneggiamento si desideri, in quanto il software ne prevede uno preimpostato e non modificabile. Per questo motivo, è nata l'esigenza di poter verificare se, attraverso la ridefinizione del modello di danneggiamento stesso, fosse possibile ottenere risultati conformi alle prove sperimentali, reperite in letteratura. Per poter raggiungere questo scopo è stato implementato un codice in linguaggio MATLAB, che, attraverso l'esecuzione di un'analisi di tipo non lineare, fosse in grado di gestire alcuni tra i più utilizzati e diffusi criteri di rottura, unitamente ad un modello di danneggiamento progressivo basato sulla riduzione delle proprietà meccaniche del materiale.

In particolare, la struttura scelta per questa tesi è una piastra multistrato con un foro centrale, le cui caratteristiche meccaniche e geometriche sono state riprese dal lavoro di Chang e Chang [1].

CAPITOLO 2

ANALISI PROGRESSIVA DEL DANNEGGIAMENTO

2.1 Panoramica del metodo

Sebbene i materiali in composito rivestano un ruolo sempre più rilevante nell'industria aeronautica, non esiste un metodo che riesca a prevederne con assoluta accuratezza le performance. Ad esempio i laminati in composito possono sviluppare rotture localizzate o anche solo dei danneggiamenti, che però possono assumere diverse forme: rotture delle fibre, crack della matrice, scollamento tra fibre e matrice, delaminazione.

Saper predire con certezza il verificarsi di queste condizioni è un requisito fondamentale per poter sfruttare al meglio ed in sicurezza le caratteristiche dei compositi, rendendoli del tutto affidabili. Nasce da questo l'esigenza di utilizzare un metodo, l'analisi progressiva di danneggiamento appunto (PFA), che sia in grado di individuare l'inizio della rottura (FPF) e come essa si propaga nella struttura, fino ad arrivare al completo cedimento, o "Ultimate Failure Load" (UFL), passando attraverso continui stati di equilibrio nel sistema.

In figura 2 si può osservare la tipica metodologia usata per l'analisi PFA.

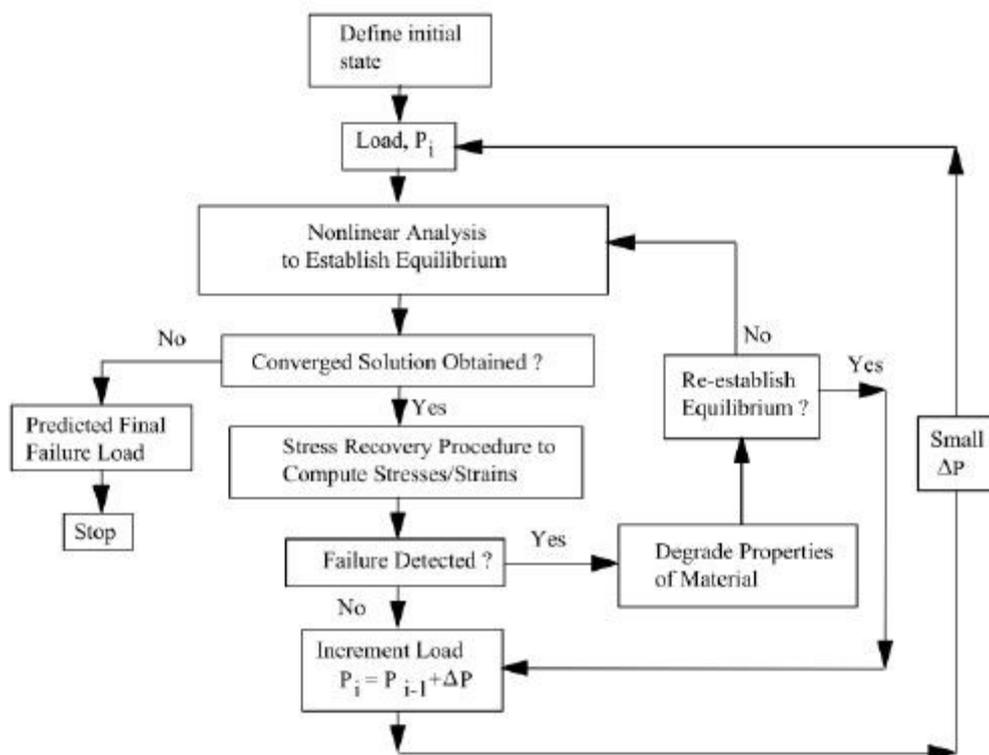


Figura 2 Flow Chart metodologia analisi progressiva del danneggiamento [5]

Questa tipologia di problemi è risolta in modo incrementale: ad ogni aumento di carico corrisponde un'analisi non lineare, per far sì che si arrivi ad una soluzione convergente.

Usando lo stato di equilibrio rilevato in seguito all'applicazione di una frazione del carico totale, possono essere determinati gli stress interni alla struttura, che comparati con i limiti ammissibili, vanno a rilevare un'eventuale rottura, sulla base di un determinato criterio.

Se questa condizione non viene soddisfatta, si procede con un incremento del carico, altrimenti, se si riscontra una rottura nella lamina, si procede all'applicazione del modello di danneggiamento prescelto. A questo punto, il precedente stato di equilibrio, non essendo più valido, viene sostituito, utilizzando le nuove caratteristiche ricavate precedentemente. È importante sottolineare come questo particolare passaggio possa essere omesso se gli incrementi di carico sono sufficientemente piccoli, e quindi ad ogni step di integrazione non si riscontrano delle linearità troppo elevate.

Questo processo continua finché non vengono più rilevate rotture, e quindi si è raggiunto il completo cedimento della struttura. La condizione appena descritta è individuata da una soluzione non convergente dell'intero sistema.

Nel seguito di questo capito si andranno a discutere in particolar modo quattro dei cinque step basilari che costituiscono una PFA: analisi non lineare, rilevamento degli stress, analisi di rottura, modello di danneggiamento. L'ulteriore step è rappresentato dal ristabilire una condizione di equilibrio nella struttura, dopo l'avvenuto danneggiamento.

2.2 Analisi non lineare

Nell'analisi progressiva del danno, uno degli elementi principali da considerare è la non linearità della stessa. Ci possono essere non linearità del materiale, dovute all'accumulo del danno, e non linearità geometriche, date dall'insorgenza di grandi spostamenti. In un problema non lineare, la rigidezza della struttura dipende degli spostamenti a cui essa è soggetta, e non può più essere considerata costante.

I laminati in composito, tipicamente, si comportano in modo elastico lineare finché non si manifesta una frattura. Al verificarsi di quest'ultima, cambiano la propria matrice di rigidezza globale, che diverrà funzione del danneggiamento del materiale e dello spostamento.

In un'analisi agli elementi finiti non lineare, l'equazione costituente è data da:

$$[K(D)]\{D\} = \{F\}$$

Dove $\{D\}$ è il vettore degli spostamenti nodali, $\{F\}$ è il vettore dei carichi e $[K(D)]$ è la matrice di rigidezza, che in questo caso dipende dagli spostamenti.

Nell'analisi progressiva del danneggiamento si ricorre ad un'analisi non lineare al fine di raggiungere una soluzione convergente per un insieme costante di proprietà del materiale. Per un dato incremento di carico, bisognerà quindi ricorrere a successive iterazioni, risolvendo un sistema per ogni k-esima iterazione.

Per un sistema non lineare l'equazione di equilibrio può essere scritta come [6]

$$\{R\} = [K_S]\{D\} - \{F\}$$

Dove $\{R\}$ rappresenta il vettore dello squilibrio di forze, o residuo, $[K_S]\{D\}$ rappresenta le forze interne, mentre $\{F\}$ rappresenta il vettore delle forze esterne.

Basandosi sul metodo di Newton-Raphson per i sistemi non lineari, occorrerà linearizzare le equazioni del sistema intorno ad un punto di equilibrio (e quindi ad ogni load step, indicato con l'apice n) e la soluzione viene calcolata attraverso un processo iterativo:

$$R(D_{n+1}^{k+1}) \approx R(D_{n+1}^k) + K_T^k \Delta D_{n+1}^k = 0$$

La grandezza K_T è detta matrice di rigidezza tangente e può essere definita come la variazione del residuo rispetto all'incremento di spostamento

$$K_T = \frac{\partial R}{\partial D}$$

Dalle precedenti espressioni si ricava quindi che

$$K_T^k dD_{n+1}^k = -R_{n+1}^k$$
$$dD_{n+1}^k = -(K_T^k)^{-1} R_{n+1}^k$$

Con una serie di successive approssimazioni di arriva quindi ad avere:

$$D_{n+1}^{k+1} = D_{n+1}^k + dD_{n+1}^k$$

Che espresso in forma matriciale diventa:

$$\{D\}^{(k+1)} = \{D\}^k + \{\Delta D\}$$

Dopo aver calcolato quindi gli spostamenti aggiornati alla successiva iterazione, il procedimento appena descritto si ripete, senza incremento di carico, finché il valore della norma del residuo non è pari a zero (o ad una tolleranza adeguatamente piccola).

Attraverso questo schema, ad ogni step di carico corrispondono dei particolari livelli di sforzo (calcolati attraverso un opportuno stress recovery, del quale si discuterà in seguito), che vengono esaminati attraverso un particolare criterio di rottura. Se esso non rivela alcun cedimento locale, il carico viene aumentato, altrimenti la matrice di rigidezza viene aggiornata, a seconda del meccanismo di danneggiamento, per tenere conto delle non linearità del materiale. In questa fase, l'intervallo degli step di carico è fondamentale, in quanto, se troppo ampio, l'equilibrio deve essere ristabilito ripetendo l'analisi non lineare con il valore di carico attuale e con la matrice di rigidezza aggiornata, finché non vengono rilevate ulteriori rotture; se l'intervallo è sufficientemente piccolo, il costo computazionale è più alto ma si può evitare di effettuare un riequilibrio del sistema. Il processo iterativo è eseguito fino a che non si verifica una mancanza di convergenza nella soluzione non lineare.

È bene notare che questa mancanza di convergenza si verifica solo nel caso in cui l'analisi viene svolta in controllo di carico. Se essa viene invece eseguita in controllo di spostamento, al verificarsi della rottura finale del composito, ci sarà una riduzione più o meno istantanea delle ragioni vincolari rilevate, seppur lo spostamento possa continuare ad aumentare. Questa situazione sarà ampiamente descritta successivamente.

Relativamente al metodo Newton-Raphson, esso assicura una rapida convergenza. Tuttavia, richiede un costo computazionale abbastanza elevato per valutare, assemblare e decomporre la matrice di rigidezza tangente ad ogni iterazione.

Per ovviare a questo problema è stato proposto un metodo Newton-Raphson modificato, che prevede un aggiornamento della matrice di rigidezza non ad ogni iterazione, ma periodicamente, ad esempio all'inizio di un nuovo livello di carico.

2.3 Rilevamento degli stress

Dopo aver ottenuto i valori degli spostamenti generalizzati attraverso l'analisi non lineare per un dato incremento di carico, si possono ottenere le deformazioni, andando a derivare i risultati appena ricavati, e conseguentemente i valori delle componenti di stress.

Sia le deformazioni che gli stress, possono essere valutati in diversi punti dell'elemento finito scelto: di solito si opta per rilevarli nel centro dell'elemento (soluzione usata anche da MSC Nastran nel caso di elementi finiti 2D) o nei punti di Gauss (MSC Nastran non consente quest'ultima estrapolazione per elementi *shell* o *membranali*).

In particolare, in questa tesi, relativamente al codice in linguaggio MATLAB, sarà rilevato un valore di stress nel punto centrale di ogni singolo strato. Dalle simulazioni è infatti emerso che, dato lo spessore ridotto degli strati analizzati, i valori di stress lungo lo spessore del singolo strato tendono ad essere simili tra loro. Questo consente quindi di rilevare un solo valore di stress nel punto centrale, che sia rappresentativo dello stato di tensione interna dello strato.

Un ulteriore fattore da tenere in considerazione è che gli spostamenti ricavati dall'analisi agli elementi finiti sono in coordinate globali, ma i criteri di cedimento richiedono l'uso di coordinate locali, ovvero le coordinate del singolo materiale per ogni strato, per confrontare i valori ammissibili di stress.

Per ottenere gli stress nelle coordinate del materiale, considerando uno stato di tensione piano, è necessario effettuare la trasformazione descritta dalla seguente equazione:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Dove θ rappresenta l'angolo tra le fibre dello strato considerato e l'asse x geometrico.

È importante sottolineare come questa fase di stress recovery sia fondamentale per l'accuratezza dei risultati, in quanto, considerando gli stress nel centro dell'elemento o nei punti di Gauss, i valori rilevati avranno delle oscillazioni, che possono produrre discrepanze nei valori del First Ply Failure e dell'Ultimate Load.

Nell'analisi progressiva del danneggiamento possono essere previsti anche dei modelli in cui il valore degli stress rilevati in ogni punto influisce sul fattore di degradazione. Ad esempio, se si sceglie di rilevare gli stress nei punti di Gauss, si potrebbe modellare il fattore di degradazione in base al numero di punti di Gauss nei quali il valore di stress eccede quello previsto dal criterio di rottura scelto. Questa particolare scelta è stata adottata da Tolson e Zabaraz [7, 8], che usando elementi finiti 2D con quattro punti di Gauss, imposero un fattore di degradazione pari a 0.0 se tutti i punti avessero superato il limite di rottura, e di 0.75 se invece solo uno di essi avesse raggiunto questa condizione.

2.4 Criteri di rottura

In letteratura sono presenti numerosi criteri di rottura utilizzati per i laminati in composito. Idealmente, questi metodi sono progettati per essere accurati in modelli tridimensionali, ma, considerando l'elevato costo computazionale degli stessi, spesso si tende ad applicarli in modelli 2D, utilizzando elementi finiti di tipo *shell* o *membrane*. Il principio su cui questi metodi si basano è quello di predire rotture macroscopiche all'interno del laminato, basandosi sulle resistenze a tensione, compressione o di scorrimento di ogni singola lamina. Se i valori di stress all'interno di un dato strato del laminato eccedono quelli ammissibili, e quindi si raggiungono i limiti di rottura imposti dal criterio scelto, si verifica un danneggiamento

progressivo della lamina stessa, che va ad influire sull'intera struttura. Dei vari meccanismi di danneggiamento si discuterà in seguito.

Generalmente i criteri di rottura possono essere suddivisi in due tipologie: non-interattivi ed interattivi. Di seguito si vanno ad elencare i principali criteri per ciascuna delle due categorie, considerando solo stati di tensione piani.

2.4.1 Criteri di rottura non-interattivi

Sono quei criteri che non prevedono interazioni tra le varie componenti di stress o deformazione. In particolar modo essi vanno a comparare pedissequamente il singolo stress (o la singola deformazione) con il corrispondente limite del materiale, e se quest'ultimo è stato superato, si registra il cedimento.

Appartengono a questa categoria i criteri *maximum stress* e *maximum strain*. Entrambi consentono di rilevare il modo di cedimento, e la loro superficie di failure ha una forma rettangolare.

Sebbene non permettano di avere un quadro completo del meccanismo di rottura, questi criteri sono ancora largamente utilizzati, vista la loro semplicità di applicazione.

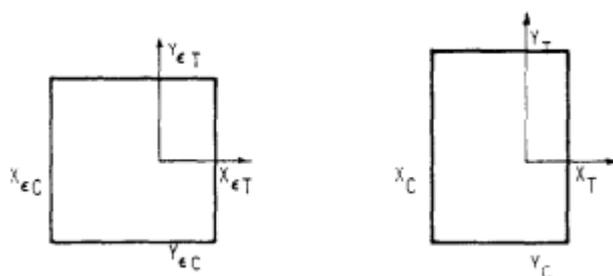


Figura 3 Andamento degli stress del criterio del Massimo Stress e Massimo Strain [9]

2.4.1.1 Criterio del massimo stress

Questo criterio compara ogni componente di stress con il limite ammissibile del dato materiale e la rottura avviene quando almeno una di queste condizioni è soddisfatta:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &\geq X_T \text{ oppure } \sigma_{11} \leq -X_C \\ \sigma_{22} &\geq Y_T \text{ oppure } \sigma_{22} \leq -Y_C \\ \tau_{12} &\geq S_{12} \end{aligned}$$

Dove σ_{11} e σ_{22} sono le componenti normali di stress nel piano, τ_{12} è lo sforzo di taglio nel piano, X_T e X_C rappresentano rispettivamente le componenti di resistenza a tensione e compressione del materiale nella direzione delle fibre, Y_T e Y_C sono i limiti in direzione normale alle fibre, e S_{12} la resistenza a taglio longitudinale.

2.4.1.2 Criterio della massima deformazione

A differenza del precedente, in questo caso vengono comparate le componenti di deformazione della struttura con gli ammissibili del materiale. In questo caso le condizioni che determinano cedimento sono:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &\geq \varepsilon_T \text{ oppure } \varepsilon_{11} \leq -\varepsilon_C \\ \varepsilon_{22} &\geq \varepsilon_T \text{ oppure } \varepsilon_{22} \leq -\varepsilon_C \\ \gamma_{12} &\geq \gamma_L\end{aligned}$$

Dove ε_{11} e ε_{22} sono le componenti normali di deformazione nel piano, γ_{12} è la deformazione a nel piano, ε_T e ε_C rappresentano rispettivamente i limiti a tensione e compressione del materiale nella direzione delle fibre, ε_T e ε_C sono i limiti in direzione normale alle fibre, e γ_{12} è il limite di scorrimento a taglio.

2.4.2 Criteri di rottura interattivi

Sono tutti quei criteri che prevedono un'interazione tra le componenti di stress e deformazione. Essi possono essere suddivisi in tre ulteriori categorie:

- Teorie polinomiali, che usano equazioni polinomiali del secondo ordine (o superiori) per definire i limiti di rottura. Generalmente sono espressioni matematiche basate su curve ottenute sperimentalmente dalle prove di rottura dei materiali.
- Teorie che dipendono dal modo di rottura, che usano equazioni separate per descrivere la tipologia di rottura, e in particolare se essa sia avvenuta a livello delle fibre o della matrice, basandosi sull'assunzione che la non omogeneità dei materiali in composito porti a differenti modalità di rottura nei costituenti.
- Teorie che si basano sull'energia di deformazione, che basano i loro risultati sui valori locali di energia di deformazione ottenuti da un'analisi non lineare.

2.4.2.1 Criterio di Tsai-Wu

È il più generale criterio di rottura interattivo di tipo polinomiale, che tuttavia non tiene in considerazione i differenti modi di rottura. La formulazione generale è la seguente

$$\begin{aligned}F_1\sigma_{11} + F_2\sigma_{22} + F_3\sigma_{33} + F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{22}\sigma_{22}^2 + F_{33}\sigma_{33}^2 \\ + 2F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} + 2F_{23}\sigma_{33}\sigma_{22} + 2F_{13}\sigma_{11}\sigma_{33} \\ + F_{44}\tau_{13}^2 + F_{55}\tau_{23}^2 + F_{66}\tau_{12}^2 \geq 1\end{aligned}$$

Che nel caso di stato di tensione piano diventa:

$$F_1\sigma_{11} + F_2\sigma_{22} + F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{22}\sigma_{22}^2 + 2F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} + F_{66}\tau_{12}^2 \geq 1$$

In questa espressione, i termini lineari F_i stabiliscono la direzione dello stress, mentre quelli quadratici F_{ij} definiscono la forma ellissoidale della curva caratteristica dello stato tensionale. È importante notare che i termini F_{12} , F_{23} e F_{13} sono termini che generalmente vengono ottenuti sperimentalmente, e richiedono dei carichi biassiali per essere determinati, ma esistono in letteratura delle particolari formule che ne approssimano il valore. Inoltre essi devono rispettare la seguente disuguaglianza:

$$F_{ii}F_{jj} - F_{ij}^2 \geq 0$$

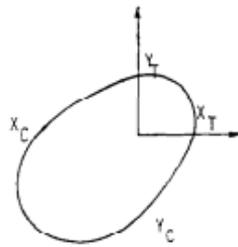


Figura 4 Andamento degli stress nei criteri polinomiali [9]

Il criterio di Tsai-Wu è solo uno dei criteri polinomiali che possono essere utilizzati, ma partendo dalla sua formulazione, si possono derivare criteri simili, in quanto essi differiscono solo per il modo in cui le componenti tensoriali di stress e i corrispondenti coefficienti sono determinati. Tra questi troviamo i criteri di Tsai-Hill, Azzi-Tsai, Hoffman e Chamis.

In Tabella 1 sono riportati i valori dei coefficienti dei suddetti criteri.

Tabella 1 Coefficienti per diversi criteri di rottura polinomiali

	Tsai-Wu	Tsai-Hill	Azzi-Tsai	Hoffman
F_1	$\frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}$	0	0	$\frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}$
F_2	$\frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}$	0	0	$\frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}$
F_3	$\frac{1}{Z_T} - \frac{1}{Z_C}$	0	0	$\frac{1}{Z_T} - \frac{1}{Z_C}$
F_{12}	$-\frac{1}{2\sqrt{X_T X_C Y_T Y_C}}$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right)$	$-\frac{1}{X^2}$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{X_T X_C} + \frac{1}{Y_T Y_C} - \frac{1}{Z_T Z_C}\right)$
F_{13}	$-\frac{1}{2\sqrt{X_T X_C Z_T Z_C}}$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{Z^2} + \frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2}\right)$	0	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{X_T X_C} + \frac{1}{Z_T Z_C} - \frac{1}{Y_T Y_C}\right)$
F_{23}	$-\frac{1}{2\sqrt{Z_T Z_C Y_T Y_C}}$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{Z^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{X^2}\right)$	0	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{Z_T Z_C} + \frac{1}{Y_T Y_C} - \frac{1}{X_T X_C}\right)$
F_{11}	$\frac{1}{X_T X_C}$	$\frac{1}{X^2}$	$\frac{1}{X^2}$	$\frac{1}{X_T X_C}$
F_{22}	$\frac{1}{Y_T Y_C}$	$\frac{1}{Y^2}$	$\frac{1}{Y^2}$	$\frac{1}{Y_T Y_C}$
F_{33}	$\frac{1}{Z_T Z_C}$	$\frac{1}{Z^2}$	0	$\frac{1}{Z_T Z_C}$
F_{44}	$\frac{1}{S_{23}^2}$	$\frac{1}{S_{23}^2}$	0	$\frac{1}{S_{23}^2}$
F_{55}	$\frac{1}{S_{13}^2}$	$\frac{1}{S_{13}^2}$	0	$\frac{1}{S_{13}^2}$
F_{66}	$\frac{1}{S_{12}^2}$	$\frac{1}{S_{12}^2}$	$\frac{1}{S_{12}^2}$	$\frac{1}{S_{12}^2}$

Come già detto, i criteri di tipo polinomiale non consentono di distinguere tra rottura delle fibre o della matrice, ma siccome questa informazione potrebbe essere necessaria in caso di analisi progressiva del danneggiamento, Reddy e Reddy [8] hanno proposto di usare il contributo relativo di ogni stress per definire questa caratteristica. In particolare, scrivendo il polinomio come somma di sei componenti, nel caso di stress tridimensionale, o tre, nel caso di stress 2D, si riesce ad identificare da dove provenga il contributo dominante che origina la rottura. La precedente espressione per il criterio polinomiale diventa quindi

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 + \phi_6$$

Se la somma di questi termini è superiore o uguale a 1, avviene rottura, ed in base a quale di questi ha il valore maggiore, se ne può determinare il modo. Essi possono essere definiti come

$$\begin{aligned}\phi_1 &= F_1 \sigma_{11} + F_{11} \sigma_{11}^2 + F_{12} \sigma_{11} \sigma_{22} + F_{13} \sigma_{11} \sigma_{33} \\ \phi_2 &= F_2 \sigma_{22} + F_{22} \sigma_{22}^2 + F_{12} \sigma_{11} \sigma_{22} + F_{23} \sigma_{22} \sigma_{33}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_3 &= F_{33}\sigma_{33} + F_{33}\sigma_{33}^2 + F_{13}\sigma_{11}\sigma_{33} + F_{23}\sigma_{22}\sigma_{33} \\ \phi_4 &= F_{66}\tau_{12}^2 \\ \phi_5 &= F_{55}\tau_{23}^2 \\ \phi_6 &= F_{44}\tau_{13}^2\end{aligned}$$

In caso di stato di tensione piano, le componenti che andranno prese in esame saranno ϕ_1 , ϕ_2 (private dei termini relativi allo stress normale al piano) e ϕ_6 .

2.4.2.2 Criterio di Hashin

Il criterio di rottura di Hashin è un criterio interattivo che rientra tra quelle teorie che permettono di determinare il modo di rottura del laminato. Di fatti Hashin, nei suoi studi, constata che la teoria di Tsai-Wu, ha un problema intrinseco, in quanto, in sé per sé, non permette di distinguere direttamente tra rottura delle fibre o della matrice. Per questo propose un criterio quadratico basato sulle resistenze del materiale, che individuasse particolari limiti dettati anche dalle modalità con cui la struttura arriva a cedimento. Nei composti unidirezionali, ad esempio, ci possono essere due modi primari, rottura delle fibre e rottura della matrice, che a loro volta distinguono tra cedimento a compressione e a trazione. È importante sottolineare come in questo caso, nella rottura delle fibre, sia tenuto in considerazione anche il contributo che lo sforzo di taglio esercita sulla struttura. Di seguito sono elencati i limiti di rottura per caso bidimensionale.

Rottura a compressione delle fibre

$$-\frac{\sigma_{11}}{X_C} \geq 1 \quad \sigma_{11} < 0$$

Rottura a trazione delle fibre

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{X_T}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 \geq 1 \quad \sigma_{11} > 0$$

Rottura a compressione della matrice

$$\left(\frac{\sigma_{22}}{S_{23}}\right)^2 + \left[\left(\frac{Y_C}{2S_{23}}\right)^2 - 1\right] \frac{\sigma_{22}}{Y_C} + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 \geq 1 \quad \sigma_{22} < 0$$

Rottura a trazione della matrice

$$\left(\frac{\sigma_{22}}{Y_T}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 \geq 1 \quad \sigma_{22} > 0$$

Nel caso tridimensionale bisognerebbe considerare anche la delaminazione attraverso l'espressione

$$\left(\frac{\sigma_3}{Z}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{13}}{S_{13}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{23}}{S_{23}}\right)^2 \geq 1$$

Nei criteri appena elencati X_C , X_T , Y_C , e Y_T rappresentano i valori di stress ammissibili per compressione e tensione nelle direzioni principali della lamina; S_{12} , S_{23} e S_{13} sono i limiti per lo sforzo di taglio nei vari piani di scorrimento; Z è lo stress ammissibile in direzione trasversale al piano principale.

2.4.2.3 Criteio di Puck

Due decenni dopo che Hashin formulò la sua teoria, Puck e Schurmann vi apportarono dei miglioramenti. Innanzitutto il cedimento delle fibre era determinato basandosi sulle caratteristiche della fibra a sé stante, e non su quelle dell'intero strato. Per quanto riguarda la matrice, la sua rottura può avvenire sotto tre diverse condizioni di carico: tensione trasversale (modo A), compressione trasversale moderata (modo B) e compressione trasversale estesa (modo C). Inoltre, il piano della frattura è caratterizzato da angoli ben precisi che diventano delle caratteristiche preponderanti nella determinazione della rottura [11]. Il criterio di rottura di Puck può essere scritto come segue.

Rottura delle fibre a trazione

$$\frac{1}{\varepsilon_{1T}} \left(\varepsilon_1 + \frac{\nu_{f12}}{E_{f1}} m_{\sigma f} \sigma_{22} \right) \geq 1$$

Rottura delle fibre a compressione

$$\frac{1}{\varepsilon_{1C}} \left| \varepsilon_1 + \frac{\nu_{f12}}{E_{f1}} m_{\sigma f} \sigma_{22} \right| + (10\gamma_{21})^2 \geq 1$$

Rottura della matrice con tensione trasversale

$$\sqrt{\left(\frac{\tau_{21}}{S_{21}} \right)^2 + \left(1 - p_{vp}^+ \frac{Y_T}{S_{21}} \right)^2 \left(\frac{\sigma_{22}}{Y_T} \right)^2} + p_{vp}^+ \frac{\sigma_{22}}{S_{21}} + \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11D}} \geq 1$$

Rottura della matrice con compressione trasversale moderata

$$\frac{1}{S_{21}} \left(\sqrt{\tau_{21}^2 + (p_{vp}^- \sigma_{22})^2} + p_{vp}^- \sigma_{22} \right) + \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11D}} \geq 1$$

Rottura della matrice con compressione trasversale estesa

$$\left[\left(\frac{\tau_{21}}{2(1 + p_{vv})S_{21}} \right) + \left(\frac{\sigma_{22}}{Y_C} \right)^2 \right] \frac{Y_C}{(-\sigma_{22})} + \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11D}} \geq 1$$

dove:

- ε_{1T} e ε_{1C} sono le deformazioni di rottura, rispettivamente per tensione e compressione;

- ε_1 è la deformazione normale per uno strato unidirezionale;
- ν_{f12} e E_{f1} sono il rapporto di Poisson e il modulo di Young per le fibre, nella direzione principale;
- $m_{\sigma f}$ è il fattore di ingrandimento medio di stress nella direzione trasversale (magnification factor);
- σ_{11} e σ_{22} sono gli sforzi nelle direzioni principale e trasversale, rispettivamente;
- γ_{21} e τ_{21} rappresentano l'angolo di scorrimento e lo sforzo di taglio;
- σ_{11D} è il valore dello sforzo che si avrebbe in caso di degradazione lineare;
- p_{vp}^+ , p_{vp}^- e p_{vv}^- sono i parametri di inclinazione del piano di frattura.

Questi ultimi parametri sono fondamentali per la definizione della frattura secondo il metodo di Puck, e per ottenerli esistono formule accurate, che tuttavia richiedono numerosi esperimenti per trovare una soluzione esatta. Per questo, lo stesso Puck ha constatato che, nel caso di compositi CFRP, si possono assumere i seguenti valori per approssimarli:

Tabella 2 Parametri di inclinazione del piano di frattura nel criterio di Puck

Parametro	Valore
p_{vp}^+	0.35
p_{vp}^-	0.30
p_{vv}^-	0.25-0.30

2.5 Meccanismi di degradazione del materiale

Il processo di degradazione del materiale rappresenta il cuore dell'analisi per il danneggiamento progressivo, specialmente se lo scopo da raggiungere è la determinazione del carico di rottura finale.

Se viene rilevato un cedimento all'interno di uno strato del materiale, le proprietà di questo stesso strato devono essere modificate in base ad un modello di degradazione del materiale.

I modelli per il cedimento progressivo presenti in letteratura spaziano dal più semplice e intuitivo "Material property degradation method" (MPDM), fino al più complesso ed empirico "Continuum damage mechanics" (CDM).

2.5.1 Material property degradation method

L'idea del metodo MPDM è quella di modellare il materiale con delle rigidità via via ridotte, in base alla presenza di cedimenti all'interno della struttura. L'esempio più comune relativo a questa soluzione è quello proposto da Tan et al [12] che ha elaborato una soluzione per i laminati in composito 2D, ed in particolar modo per quelli contenenti dei fori centrali, caricati con carichi a trazione o a compressione nel piano. Sono tre le proprietà del materiale che vengono ridotte in questo caso per simulare la degradazione della rigidità:

$$E_{11} = D_1 E_{11}^0$$

$$E_{22} = D_2 E_{22}^0$$

$$G_{12} = D_6 G_{12}^0$$

Nelle equazioni precedenti, le grandezze con l'apice "0" sono quelle che rappresentano le proprietà del materiale non danneggiato, mentre le grandezze al primo membro sono quelle ridotte attraverso il fattore di riduzione D_i ($i=1, 2, 6$).

Come si può intuire, la scelta di utilizzare dei fattori di degradazione costanti è spesso quella ottimale vista la loro semplicità, ma d'altra parte i valori di carico ultimo variano sensibilmente con il fattore scelto. Inoltre quest'ultimo deve essere un numero sufficientemente piccolo, ma diverso da 0, in quanto l'annullamento di determinate proprietà causerebbe problemi di convergenza dovuti a matrici mal condizionate.

I vari modelli di degradazione previsti dal MPDM possono essere suddivisi in tre categorie:

- Degradazione istantanea, nella quale le caratteristiche meccaniche del materiale sono istantaneamente ridotte a zero (o perlomeno ad un valore sufficientemente piccolo);
- Degradazione graduale, in cui le proprietà meccaniche vengono moltiplicate per un valore compreso tra "0" e "1" ogni volta che gli indici di cedimento associati ad un determinato criterio superano l'unità. Questa riduzione graduale, appunto, avviene finché la proprietà soggetta a failure non assume un valore pari a zero;
- Stress costante, che consiste nel mantenere il livello di stress nello stato danneggiato costante, in modo che esso non possa sostenere carichi ulteriori.

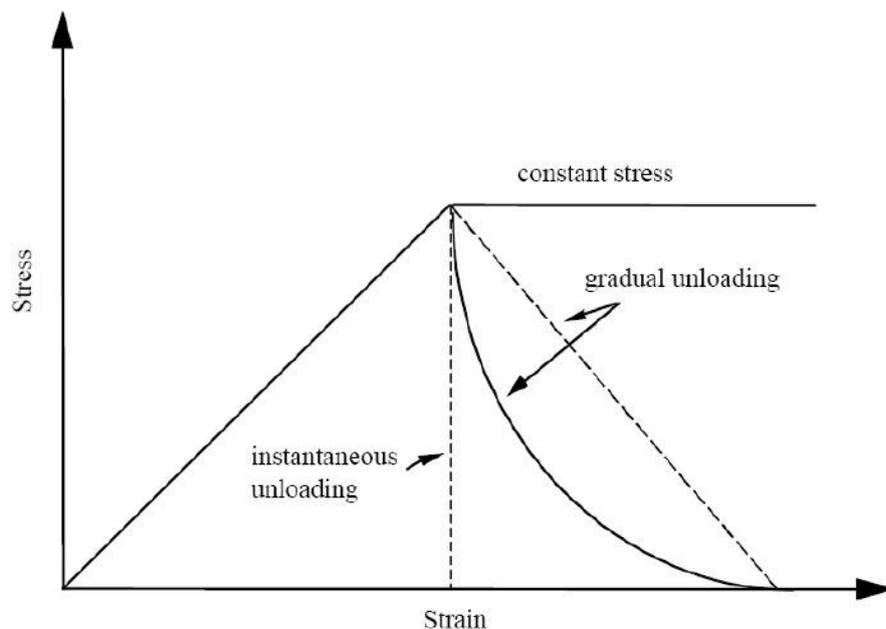


Figura 5 Modelli di degradazione basati sulla teoria MPDM [5]

Per quanto riguarda la degradazione istantanea, una volta che le proprietà del materiale associate all'elemento soggetto a cedimento, esso sopporterà un carico inferiore, ed è per questo che il fattore di degradazione, che da ora in avanti indicheremo come SRC ("Stiffness Reduction Coefficient"), dovrà essere inferiore a 1. Come menzionato precedentemente però, considerare valori troppo piccoli per lo SRC può portare a problemi nella valutazione della nuova matrice di rigidità. Per questo motivo, è sufficiente selezionare un valore tale per cui l'elemento danneggiato, se comparato con quello ancora integro, non supporti carichi considerevoli: tipicamente il range di valori per lo SRC va da 10^{-1} fino a 10^{-20} , ma considerando $SRC=10^{-3}$ si riescono ad ottenere risultati accurati e si riescono ad evitare problemi computazionali.

Nel caso di degradazione graduale, le caratteristiche meccaniche del materiale vengono ridotte più di una volta, in modo che il carico sopportabile dall'elemento non passi istantaneamente dal valore massimo a zero. Questa procedura consente di modellare più accuratamente il processo di cedimento strutturale, ma come è intuibile, il costo computazionale è superiore. Il primo a proporre una soluzione del genere è stato Reddy [13] il quale partì dall'idea che, nel metodo del danneggiamento istantaneo, quando si andava a sostituire l'elemento danneggiato a quello integro, non si teneva conto della dimensione effettiva della frattura e della dimensione della mesh utilizzata. Infatti, la prima potrebbe essere molto inferiore a quest'ultima, e pertanto sarebbe ingiustificato sostituire l'intero elemento, rendendolo non più in grado di sostenere carichi considerevoli. D'altro canto, sarebbe più opportuno che le proprietà dell'elemento danneggiato giacciono tra quelle dell'elemento integro e zero, di modo che questo possa continuare a sostenere dei carichi in base alla sua rigidità residua.

Dopo aver giustificato la tesi del danneggiamento progressivo, resta aperta la questione relativa a quale valore debba assumere lo SRC per far sì che si abbia un buon compromesso tra l'accuratezza dei risultati e il costo computazionale. Infatti, con dei valori prossimi a zero, il costo computazionale sarebbe ridotto, ma significherebbe fondamentalmente annullare la gradualità del danneggiamento; invece con dei valori vicini a uno, si andrebbe ad aumentare considerevolmente il costo computazionale, visto l'elevato numero di iterazioni che sarebbero necessarie per arrivare ad una failure completa dell'elemento.

Per dare una risposta a questo quesito, Reddy, nel suo lavoro, analizzò tre differenti laminati, aventi le stesse dimensioni, ma con orientamenti degli strati differenti, per determinarne il carico critico di rottura. Le varie prove vennero eseguite utilizzando valori SRC compresi tra 10^{-6} e 0,8. Come si può notare in figura 6 per valori molto bassi di SRC, il carico critico va a diminuire consistentemente, in quanto, come ci si aspetterebbe, una completa degradazione dell'elemento comporta una incapacità di sopportare carichi che dovranno essere istantaneamente ridistribuiti sul resto della struttura, portandola a rompersi molto più velocemente. Andando ad aumentare il fattore di degradazione, si ha che il carico ultimo aumenta, e si riescono a raggiungere valori che hanno un errore del 10% rispetto ai risultati sperimentali. In particolare, questi valori si assestano per SRC intorno allo 0,5, che può essere quindi assunto come valore ideale per l'analisi di danneggiamento con degradazione graduale.

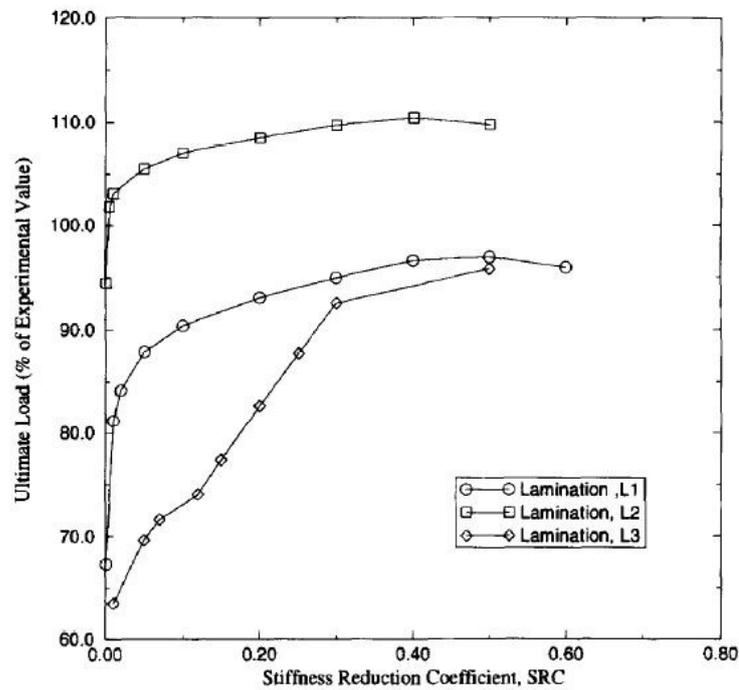


Figura 6 Effetto del parametro SRC sul carico di rottura finale [13]

2.5.1.1 Modello di danneggiamento secondo MPDM

In base al criterio di rottura scelto per l'analisi progressiva, si possono avere strategie di implementazione differenti per quanto riguarda la riduzione di rigidità.

I criteri che sono dipendenti dal modo di rottura, e che quindi identificano se siano state le fibre o la matrice a cedere, prevedono che le caratteristiche meccaniche relative all'una o all'altra componente del composito vengano degradate separatamente. Per un modello bidimensionale si avrà quindi:

- ROTTURA DELLE FIBRE

$$(E_1, G_{12}, G_{13}, \nu_{12}) = SRC \cdot (E_1^0, G_{12}^0, G_{13}^0, \nu_{12}^0)$$

- ROTTURA DELLA MATRICE

$$(E_2, G_{12}, G_{23}, \nu_{12}) = SRC \cdot (E_2^0, G_{12}^0, G_{23}^0, \nu_{12}^0)$$

Come possiamo notare dalle relazioni precedenti anche il rapporto di Poisson viene degradato e ridotto secondo il parametro SRC, e questo avviene per garantire che le matrici costitutive della lamina rimangano simmetriche.

Nel caso di rottura delle fibre, la prima caratteristica meccanica da degradare sarà il modulo elastico nella direzione delle fibre, in quanto nei compositi unidirezionali si assume che le fibre sopportino il carico principale. In questo caso non viene modificato il modulo trasversale. Comportamento opposto si avrà nel caso di rottura della matrice, a causa della quale sarà il modulo elastico trasversale ad essere degradato, mentre E_1 non sarà interessato. Il comportamento appena descritto è un'altra ragione per la quale il Poisson viene degradato dello stesso fattore. Inoltre, si assume che in generale sia la delle fibre che quella della matrice inducano un cedimento di taglio (shear failure), ed è per questo motivo che in entrambi i casi il modulo elastico di taglio subisce degradazione.

Infine ci sono altri due termini che compaiono nelle equazioni precedenti: i moduli di taglio out-of-plane.

Nonostante sia stato specificato che viene considerato uno stato 2D di tensione, la presenza del modulo di taglio nei piani "1-3" e "2-3", è giustificata dal fatto che gli elementi finiti usati per la modellazione includono anche delle deformazioni di taglio. In particolare G_{13} subisce degradazione nel caso di rottura delle fibre, mentre G_{23} solo in caso di rottura della matrice, dato che quest'ultimo è proporzionale a E_2 e ν_{23} .

Se il criterio di rottura scelto è indipendente dal modo in cui essa avviene (*ie.* Tsai-Wu), bisogna determinare se si tratta di cedimento a livello delle fibre o della matrice ricorrendo all'utilizzo delle sei componenti polinomiali ϕ_i ($i=1,2,\dots,6$) precedentemente ricavate. In questo modo posso utilizzare le stesse espressioni usate per i criteri dipendenti dal modo di rottura, e considerando che nel caso in cui la componente predominante sia quella relativa allo sforzo di taglio in piano, si opererà come nel caso di cedimento della matrice.

Tuttavia questa strategia non tiene conto del contributo di tutti gli stress per identificare l'indice di failure, ma di concentra solo su quella relativa al modo identificato. Per ovviare a questo problema Gunel e Kayran [14] hanno sviluppato una strategia di miglioramento nella quale indice di failure per le fibre e per la matrice sono distinti ed ognuno è pesato attraverso il valore dello stress caratteristico per quel modo di frattura. Pertanto i due indici possono essere scritti come:

$$FFI = F_1\sigma_{11} + F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} \cdot \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}\right)$$

$$MFI = F_2\sigma_{22} + F_{22}\sigma_{22}^2 + F_{66}\tau_{12}^2 + F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} \cdot \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\right)$$

In questo modo si ottengono degli indici di cedimento pesati sugli stress effettivi, e di conseguenza anche i fattori SRC saranno differenti per ognuno dei modi di cedimento e calcolati sulla base degli indici appena ricavati:

$$SRC_f = e^{\ln(SRC) \cdot FFI}$$

$$SRC_m = e^{\ln(SRC) \cdot MFI}$$

I fattori SRC_f e SRC_m appena ricavati sono delle funzioni esponenziali che rispettano particolari requisiti, come quello di essere pari a uno nel caso in cui gli indici di rottura siano uguali a zero, o di assumere il valore di SRC se gli indici sono uguali a 1 (rottura completa). Nel caso di $SRC=0,001$, le funzioni esponenziali hanno la forma riportata in figura 7.

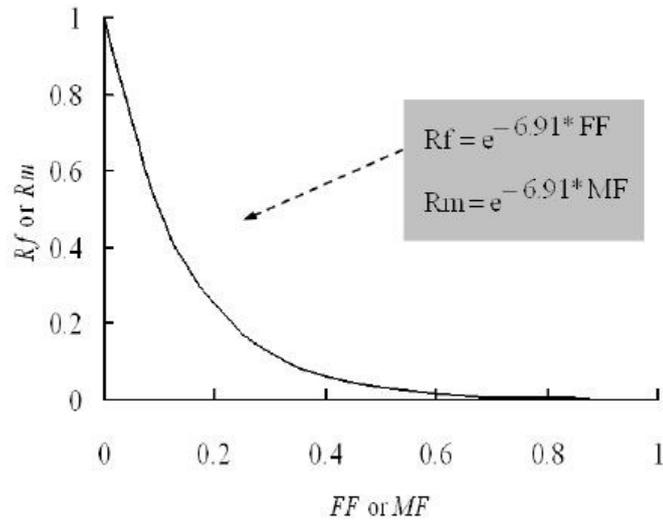


Figura 7 Degradazione prevista dalla teoria di Gunel e Kayran [14]

2.5.2 Internal state variable method

Un metodo più sofisticato per modellare il danneggiamento del laminato è il Continuum-damage-mechanics (CDM), il quale si basa sul rilevamento del danno attraverso la definizione di variabili di stato interne. Questo modello, come ci dice anche il nome, rappresenta il materiale come un “continuo” avente delle equazioni di campo. Di fatto il metodo CDM esprime le relazioni costitutive in maniera simile alle relazioni costitutive elastiche, su cui si basano i modelli descritti precedentemente, ma i coefficienti relativi alle proprietà meccaniche sono funzioni di una o più variabili di stato. Per questo motivo, rispetto al modello euristico sopra descritto, richiede maggior attenzione nella sua formulazione.

Uno dei modelli proposti nell’ambito del CDM è quello elaborato da Matzenmiller, Lubliner, Taylor [15] (per questo chiamato metodo MLT) che si basa sull’uso di una funzione di Weibull per descrivere la natura statistica dei difetti e dei cedimenti all’interno del materiale. Nel modello MLT si identifica un fattore di Weibull, m , che rappresenta un parametro di controllo agente sulla densità di energia di deformazione in un dato punto del materiale, e che quindi incide sull’andamento della variabile di danno d :

$$d_{MLT} = 1 - e^{-\frac{1}{me} \left(\frac{\epsilon_I}{\epsilon_{f,I}} \right)^m}$$

Con ε_I che rappresenta la deformazione nella componente I e $\varepsilon_{f,I}$ la deformazione di rottura per la componente I.

Anche Chang e Chang [1] nel loro lavoro hanno fatto ricorso ad una modellazione del danneggiamento a livello micromeccanico, utilizzando la funzione statistica di Weibull. In questo caso, il parametro utilizzato per determinare di quanto devono essere ridotte le proprietà meccaniche del materiale è la zona di danneggiamento:

$$\frac{E_x^d}{E_x} = \exp \left[- \left(\frac{A}{A_0} \right)^\beta \right]$$

$$\frac{G_{xy}^d}{G_{xy}} = \exp \left[- \left(\frac{A}{A_0} \right)^\beta \right]$$

Nelle precedenti relazioni, le grandezze con apice “d” rappresentano le grandezze ridotte, A è la dimensione della zona di danneggiamento prevista per rottura delle fibre, mentre A_0 è la dimensione della zona di interazione per le fibre associata con la resistenza a tensione in un dato strato. Il parametro di Weibull è rappresentato da β .

2.5.3 Element Failure Method (EFM)

I metodi di danneggiamento precedentemente descritto, sebbene sia stati utilizzati in maniera estensiva in letteratura, possono presentare degli svantaggi dovuti, come già accennato, ad una mancanza di convergenza o alla necessità di avere un costo computazionale elevato, in quanto per ogni iterazione post cedimento, bisogna andare a ricalcolare la matrice di rigidezza del sistema.

Per questo motivo, Tay et al. [4] hanno proposto un metodo alternativo per simulare l’analisi progressiva del danno nelle strutture in composito. Questa nuova soluzione va a manipolare le forze nodali dell’elemento finito danneggiato, lasciando la matrice di rigidezza inalterata. Il metodo EFM ha trovato particolari riscontri positivi nel caso di analisi di impatto in compositi, di laminati in composito sottoposti a flessione in tre punti o di laminati in composito con foro centrale caricati a trazione.

Concettualmente, si parte dalla classica relazione che lega, nell’analisi agli elementi finiti, la matrice di rigidezza K, il vettore degli spostamenti u e il vettore dei carichi nodali f:

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{F}$$

La matrice K può essere definita in generale come

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, d\Omega$$

Nel caso di elementi finiti 2D, C rappresenta la matrice di rigidità del materiale e B è la matrice deformazione-spostamento

$$B = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & \dots & N_{m,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & \dots & 0 & N_{m,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & \dots & N_{m,y} & N_{m,x} \end{bmatrix}$$

Dove m è il numero degli elementi per nodo e gli elementi sono le derivate delle funzioni di forma rispetto ad x e a y.

Con questi valori a disposizione è possibile ricavare le forze nodali nel nodo i-esimo per la componente x e la componente y.

Fate queste premesse, si consideri ora un elemento finito non danneggiato, che presenta un insieme di forze nodali, ottenute dall'analisi di equilibrio svolta sulla struttura, come si può notare in figura 8(a).

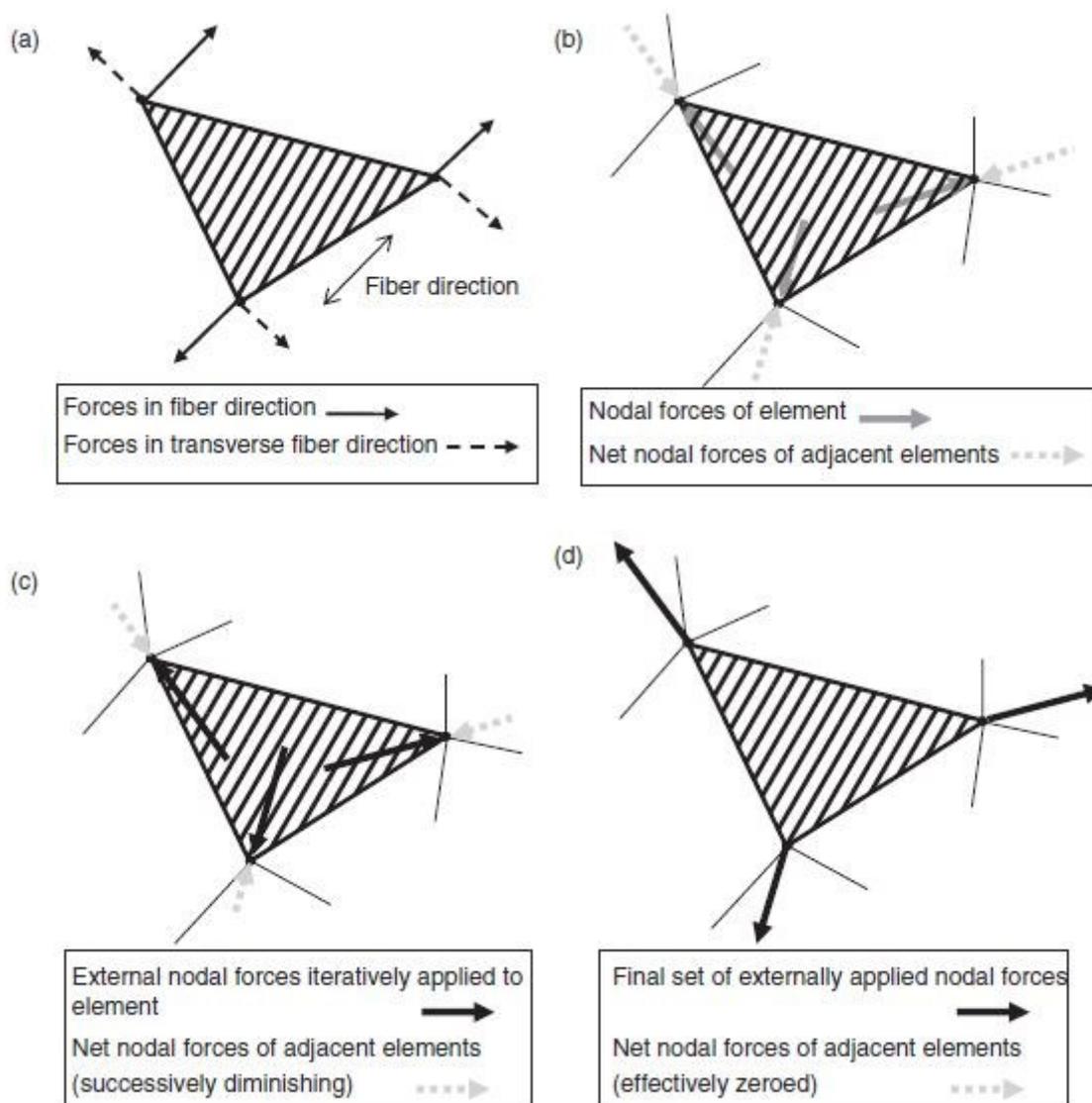


Figura 8 Processo di danneggiamento con EFM [4]

Questo insieme di forze nodali per l'elemento in analisi, sono in equilibrio con le forze nodali degli elementi adiacenti, come rappresentato in figura 8(b). Tuttavia, in un elemento finito il cui materiale è stato danneggiato da un cedimento, le capacità di carico saranno alterate. Ad esempio se è avvenuto un cedimento a livello della matrice, è ragionevole assumere che nella direzione perpendicolare a quella delle fibre, l'elemento avrà una capacità di carico ridotta. Se nel classico approccio di degradazione del materiale questa ridotta capacità di carico è raggiunta attraverso la riduzione delle proprietà meccaniche, nell'approccio EFM lo stesso risultato è ottenuto applicando un insieme di forze nodali.

Quando un elemento cede, delle forze esterne sono applicate ai nodi iterativamente, in maniera tale che la sommatoria delle forze interne dovuta agli elementi adiacenti sia zero. È bene notare che non sono le forze nodali dell'elemento danneggiato ad essere azzerate, ma la sommatoria delle forze nodali dei nodi adiacenti. In pratica è come se l'elemento che ha ceduto fosse stato allungato dalle forze esterne, ma gli stress rilevati non hanno più alcun significato fisico. Tutto questo processo porta a non avere alcun cambiamento nella matrice delle rigidezze, evitando così problemi a livello computazionale. In figura 9 è possibile osservare un tipico flow chart per il metodo EFM.

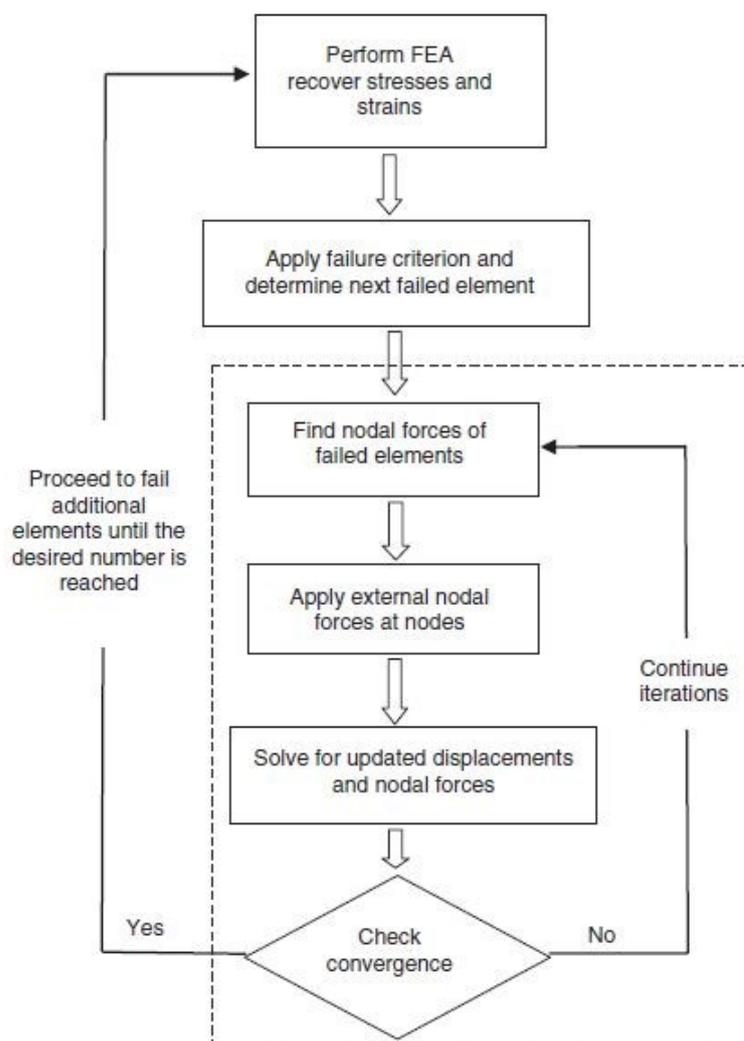


Figura 9 Flow Chart EFM [4]

CAPITOLO 3

ANALISI PROGRESSIVA DEL DANNO IN AMBIENTE MSC NASTRAN

3.1 Overview delle caratteristiche di modellazione del software commerciale

Il software commerciale agli elementi finiti scelto per lo scopo di questa tesi è MSC Patran, integrato con il solutore MSC Nastran. Il primo rappresenta uno strumento di pre e post processing, attraverso il quale è possibile costruire un modello della struttura da analizzare e successivamente andarne a valutare i risultati. MSC Nastran è il solutore integrato nel software su citato, il quale si occupa di svolgere il tipo di analisi richiesta.

Per capire quali fossero le potenzialità che Nastran avesse a disposizione per l'analisi progressiva del danno, è stata necessaria una fase preliminare di ricerca nella quale, attraverso l'utilizzo di manuali specifici per questa tipologia di problemi [16] si è potuto studiare come questo software modellasse ed analizzasse dei laminati in composito fino a rottura.

MSC Nastran offre due metodi differenti per il danneggiamento progressivo dei compositi, in quanto permette di utilizzare una degradazione immediata o graduale delle caratteristiche meccaniche del materiale.

3.1.1 Degradazione graduale selettiva

In questo modello di danneggiamento i moduli delle proprietà elastiche del materiale vengono ridotti sulla base del massimo valore dell'indice di failure (F) rilevato. Infatti, nel momento in cui in qualche strato del materiale questo indice supera il valore unitario, vengono applicati dei fattori di riduzione graduale r_i basati, appunto, su F. La legge esponenziale è la seguente:

$$\Delta r_i = -(1 - e^{1-F}) \quad r_i = (1, 2, \dots, 6)$$

La natura di questi fattori di degradazione fa sì che essi varino continuamente in funzione dell'indice di failure registrato, e ovviamente anche con la tipologia di criterio di cedimento adoperato.

E' importante sottolineare come anche il coefficiente di Poisson vari proporzionalmente ai moduli elastici al quale esso è legato.

Per i criteri di massimo stress o massima deformazione, i fattori di riduzione sono calcolati separatamente per ogni componente di stress o deformazione, in quanto per ognuno di questi ci sarà un indice di failure differente.

Per quanto riguarda invece i criteri polinomiali, i quali possiedono solo un valore di F , i fattori di riduzione sono tutti equivalenti tra loro.

I criteri che invece adoperano una chiara distinzione tra cedimento nella matrice e cedimento nelle fibre, come il criterio di Hashin, assegnano ad ognuno dei fattori di riduzione un particolare tipo di rottura. In particolare, quelli con gli indici 1 e 3 sono legati al cedimento delle fibre, mentre i restanti sono connessi con quello della matrice.

Esistono tuttavia dei parametri che possono essere utilizzati per gestire i valori assunti da r_i . Fondamentalmente essi impongono dei limiti restrittivi sui valori al di sotto dei quali non possono scendere le proprietà meccaniche del materiale. Nel nostro caso, il parametro di maggiore interesse è rappresentato dal "Residual stiffness factor", indicato con a_1 , ovvero un valore che non permette alla rigidità di scendere al di sotto di una determinata soglia.

3.1.2 Degradazione istantanea

Questo modello utilizza dei fattori di degradazione come in quello descritto precedentemente, ma la rigidità è ridotta istantaneamente. Per fare questo si utilizza il "Residual stiffness factor", e si assegna alle varie proprietà meccaniche un valore pari a quello iniziale moltiplicato per a_1 .

Per quanto riguarda le tipologie di degradazione legate ai vari criteri di cedimento, sono le stesse elencate precedentemente.

3.2 Modello bibliografico di riferimento

Nel corrente lavoro di tesi, fondamentale è stato ricercare in letteratura i vari approcci e i vari risultati sperimentali, che potessero fungere da punto di partenza per il confronto dei risultati numerici ottenuti sia con il software commerciale MSC Nastran e sia con il codice elaborato in ambiente MATLAB.

In letteratura si possono trovare i più svariati esempi legati all'analisi progressiva del danno, e molti di essi si concentrano particolarmente su strutture non particolarmente complesse, ma che possono dare l'idea di come avviene il processo di danneggiamento di laminati in composito.

Il punto di riferimento scelto è il lavoro di Chang e Chang [1] nel quale si analizza un laminato simmetrico composto da un numero di strati variabile, con un foro centrale. Per valutare la progressione del danno i due maggiori risultati sui quali ci si concentrerà saranno il “First Ply Failure” (FPF) e lo “Ultimate Failure Load” (UFL).

La prima grandezza può essere definita come il carico superato il quale avviene il primo cedimento all’interno di uno degli strati del laminato. La condizione che determina il raggiungimento del FPF è identificata con un indice di Failure:

$$FI = \frac{\text{carico applicato}}{\text{carico ammissibile}}$$

Nel momento in cui questo indice supera il valore unitario, in un dato strato avviene un cedimento. Il primo di questi cedimenti identifica il First Ply Failure.

Per quanto riguarda invece l’Ultimate Failure Load, ci sono differenti metodologie e definizioni che lo caratterizzano. La più semplice che può essere utilizzata è relativa al raggiungimento di un picco nella curva Forza/Spostamento di una struttura, ma sebbene questa soluzione sia efficiente e intuitiva, può portare a sovrastimare il punto nel quale l’intera struttura non è più in grado di sostenere dei carichi.

Altra strategia applicabile a casi semplici, e relativi a campioni che presentano o più fori centrali, è rappresentata dall’identificare l’UFL con il punto nel quale la cricca che si viene a creare attraversa l’intera sezione del campione.

Nel caso specifico di questa tesi, sarà utilizzato il primo metodo citato, identificando il carico ultimo con il picco nella curva Forza/Spostamento.

Passando al caso bibliografico preso in esame per questa tesi, il campione di materiale scelto è il T300/1034-C, che consiste in una matrice epoxy rinforzata con fibre di carbonio. Lo spessore nominale di ogni strato è di 0.1308 mm, e la sequenza scelta per l’analisi progressiva del danno in questa tesi è $[0 / (\pm 45)_3 / 90_3]_s$.

Nel lavoro di Chang, ogni piastra analizzata ha delle caratteristiche geometriche ben definite, che in questo caso comprendono una lunghezza pari a 203.2 mm, una larghezza di 25.4 mm e il diametro del foro centrale è di 6.35 mm.

Il campione in analisi è rappresentato il figura 10.

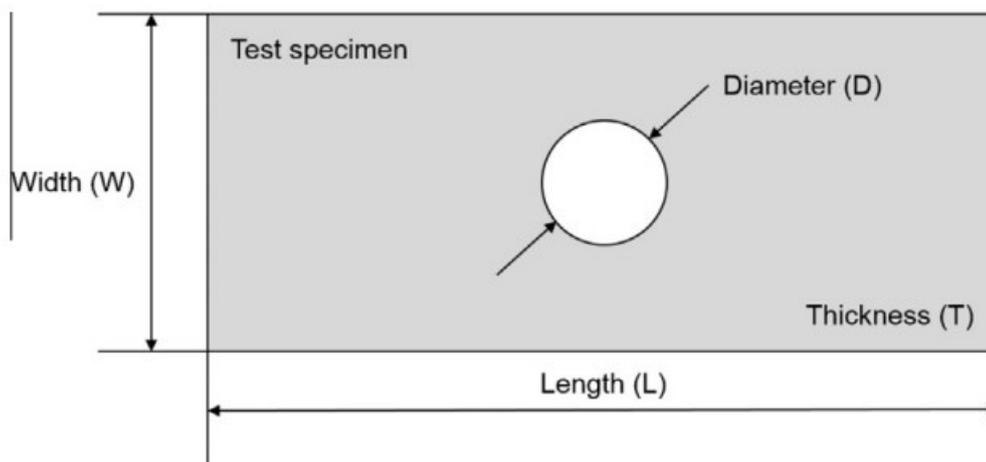


Figura 10 Modello di piastra relativa all'analisi PFA

Per l'esecuzione dei test, la piastra è stata incastrata sul lato sinistro e il carico applicato, che a seconda della tipologia di analisi scelta può essere uno spostamento o un carico controllato, è stato applicato sul lato destro.

Le proprietà meccaniche del materiale sono riportate in Tabella 3.

Tabella 3 Proprietà meccaniche del T300/1034-C

PROPRIETÀ	VALORE
Modulo di Young longitudinale E_{11}	146858 MPa
Modulo di Young trasversale E_{22}	11376 Mpa
Modulo elastico di taglio G_{12}	6185 Mpa
Poisson ν_{12}	0.3
Resistenza a trazione longitudinale X_t	1730.5 Mpa
Resistenza a compressione longitudinale X_c	1379 Mpa
Resistenza a trazione trasversale Y_t	66.5 Mpa
Resistenza a compressione trasversale Y_c	268 Mpa
Resistenza a taglio in piano S	133.7 Mpa

Per quanto riguarda i risultati ottenuti nel lavoro di Chang, come già menzionato in precedenza sono state utilizzate diverse tipologie di laminato, per osservare come variassero le capacità di resistenza del materiale a seconda delle dimensioni del foro, della piastra stessa o della sequenza di strati.

Per quanto riguarda il caso preso in esame per questa tesi, possiamo osservare in figura 11 i risultati ottenuti.

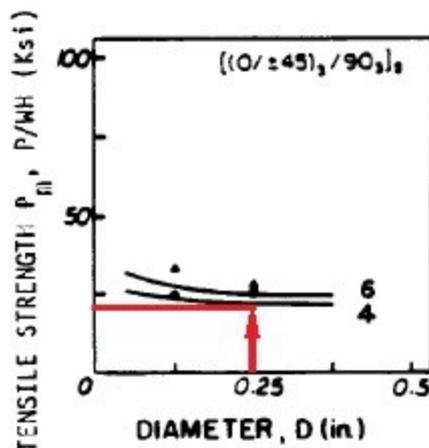


Figura 11 Risultati sperimentali della piastra scelta nell'ambito della tesi [1]

Nel nostro caso la piastra rispecchia le caratteristiche evidenziate in figura e per le quali si ottiene un valore di Ultimate Failure Load pari a circa 15700 N.

Per quanto riguarda il FPF, nel loro lavoro Chang e Chang, non riportano un valore di carico per cui avviene la rottura del primo strato, quindi bisogna fare riferimento al lavoro di Sleight [5] che, analizzando lo stesso tipo di laminato con codice COMET, ha ottenuto un valore per il FPF di 6760 N.

In merito al lavoro di Sleight, è opportuno sottolineare come i risultati siano stati ottenuti utilizzando un rilevamento degli stress attraverso punti di Gauss. Gli stress rilevati in questi punti possono assumere valori maggiori rispetto a quelli rilevati nel centroide dell'elemento, (come avviene in caso di modello bidimensionale in Nastran). Per questo motivo, nel processo di rilevamento degli indici di failure, può accadere che un dato elemento possa cedere prima se gli stress rilevati sono più alti. Di fatto anche il Carico finale di rottura è inferiore rispetto a quello ricavato da Chang, essendo pari a 14300N. Questo conseguentemente porta a una degradazione prematura, che risulta in valori di stress limite inferiori. Come si vedrà nel proseguo, infatti, i valori di FPF rilevati sono maggiori rispetto a quello citato da Sleight.

3.3 Modello in Patran e tipologia di analisi implementata

Per la modellazione in Patran, si è scelto di utilizzare degli elementi di tipo QUAD4, e quindi bidimensionali. Questa particolare scelta è stata dettata fondamentalmente da due motivi: il primo è legato al fatto che il carico che si andrà ad applicare è un carico di tensione nel piano, e sebbene possano essere presenti delle deformazioni in direzione perpendicolare ad esso, queste saranno trascurabili rispetto a quelle nel piano stesso; l'ulteriore motivazione è legata ad un aspetto prettamente computazionale, poiché, come è facile intuire, analizzare degli elementi tridimensionali comportano un maggior tempo nell'esecuzione delle analisi, ma vista la semplicità della geometria, e lo stato di tensione piano, non si otterrebbero differenze apprezzabili.

L'analisi è stata svolta in controllo di spostamento, il che garantisce di poter ottenere una curva stress-deformazione completa per la struttura. Per soddisfare questa condizione è stato previsto l'utilizzo di un nodo MPC di tipo RBE2, il quale permette di connettere tutti i nodi sui cui è applicato il carico tensionale, e di poter visualizzare più intuitivamente la condizione finale di stress. A questo nodo è stato applicato uno spostamento imposto che varia tra 0 e 3 mm nel caso di degradazione istantanea, e tra 0 e 5 mm nel caso di degradazione graduale. L'altro lato della struttura è stato incastrato.

Il modello utilizzato e le condizioni di vincolo possono essere osservati in Figura 12 e 13.

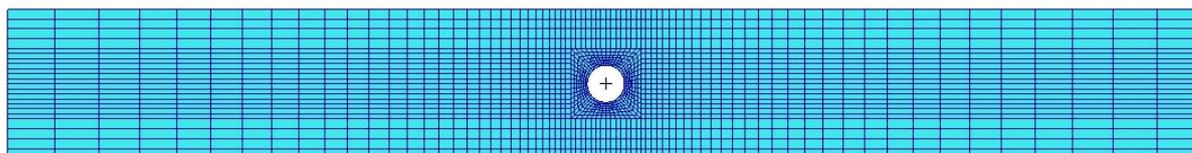


Figura 12 Modello agli elementi finiti per l'analisi in Nastran

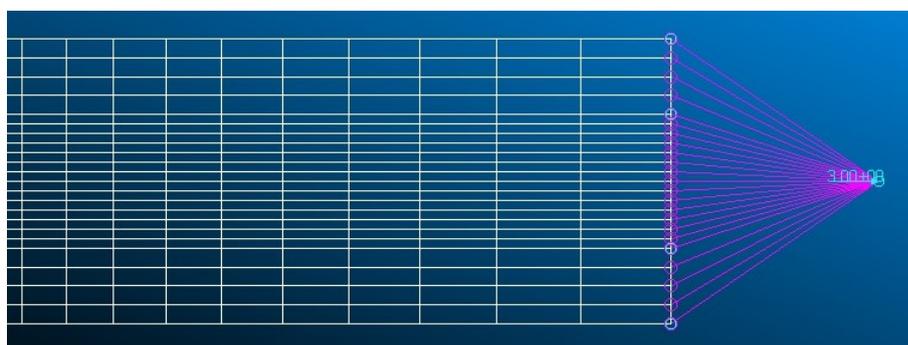


Figura 13 Condizioni di carico del modello

Come già descritto in precedenza, viste le diverse non linearità, sia di tipo geometrico, sia a livello di materiale, l'analisi svolta in Patran, come anche quella implementata nel codice Matlab, sarà di tipo non lineare.

In particolare, in ambiente Nastran, è stata scelta un'analisi SOL400. Questa particolare decisione è stata presa poiché essa consente di considerare un modello valido sia per le grandi deformazioni che per i grandi spostamenti. È possibile scegliere questo tipo di solutore dal menù "Analysis", e selezionando "Implicit Nonlinear Static" sotto la voce "Solution Type". A questo punto, tra i parametri della soluzione bisognerà andare a selezionare "Shell shear correction" e "SOL 400 Run" in maniera tale da confermare la tipologia di analisi e consentire che si tenga conto della distribuzione degli stress di taglio lungo lo spessore del laminato.

Nei parametri del subcase che si intende analizzare possiamo andare a regolare tutto ciò che concerne le caratteristiche non lineari dell'analisi. In particolare essendo questo un problema nel quale potrebbero esser contenuti grandi spostamenti e deformazioni, l'opzione "Large displacement/Large strain" è stata selezionata. Questa consente di poter utilizzare un modello che non debba sottostare alle ipotesi di spostamenti piccoli e contemporaneamente permetta di svolgere l'analisi con delle deformazioni sufficientemente grandi da dover ricostituire anche la matrice di rigidità dell'elemento. Inoltre anche si utilizza anche la caratteristica,

identificata da “Loads follow Deformations”, grazie alla quale i carichi applicati alla struttura seguiranno l’andamento degli spostamenti.

Nel sottomenù “Load Increment Parameter” possiamo invece andare ad impostare tutti quei parametri che caratterizzano gli step di carico. In questo modo si può quindi controllare come sarà incrementato gradualmente il carico sulla struttura. In particolare, il parametro che è stato opportuno modificare per poter ottenere dei risultati più accurati e che potessero rappresentare al meglio gli incrementi di spostamento, è stato il “Total Time”. Questo identifica il tempo totale in secondi da impiegare per analizzare un particolare step. In generale questo valore è settato di default a 1, ma un valore più alto garantisce un maggior numero di step di carico analizzati, e quindi una maggiore precisione dei risultati. In questa analisi il valore di Total Time è impostato a 3s.

3.4 Criteri di rottura ed implementazione

In questa tesi si è scelto di andare a simulare e comparare le prestazioni di differenti criteri di rottura, analizzandone sia il comportamento fino al raggiungimento del FPF, sia l’andamento del danneggiamento progressivo all’interno del materiale stesso. Per quest’ultimo scopo sono stati adoperati sia un danneggiamento istantaneo che uno progressivo, al fine di confrontare anche qui le eventuali differenze.

I criteri che sono stati tenuti in considerazione sono quattro: Criterio del massimo stress, Criterio di Hashin, Criterio di Tsai-Wu e Criterio di Hoffman. La scelta di questi ultimi è stata dettata da due fondamentali motivi. Il primo risiede nel fatto che in letteratura non è sempre possibile reperire tutte le caratteristiche del materiale utili ad una simulazione; caso emblematico è il criterio di Puck, il quale, sebbene si ritenga essere uno dei più affidabili, richiede per la sua formulazione numerosi dati ottenuti solo attraverso prove sperimentali sul materiale, il che lo rende di difficile fruizione.

L’ulteriore motivo è legato alla varietà dei criteri considerati. Infatti, come si può notare, sono presenti criteri che coprono ognuna delle macro-aree presentate precedentemente in questa tesi: Il criterio di massimo stress è un criterio non interattivo, mentre il criterio di Hashin rientra nella categoria dei criteri interattivi; i criteri di Tsai-Wu ed Hoffman, sebbene siano entrambi criteri polinomiali, e che di base non permettono di distinguere tra i modi di rottura, presentano una definizione dei coefficienti diversa, ed è interessante capire in cosa si differenziano i risultati ottenuti da questi ultimi.

3.4.1 Analisi con criterio del massimo stress

Il primo criterio ad essere analizzato è il Criterio di massimo stress.

Essendo questo un criterio non interattivo, la sua formulazione in Nastran prevede che gli indici di cedimento siano calcolati attraverso il rapporto tra lo stress rilevato e il valore ammissibile di resistenza del materiale. Questo criterio, vista la sua semplicità, può essere

considerato come un ottimo punto di partenza per analisi di danneggiamento progressivo nei materiali compositi.

In figura 14 è possibile osservare la curva forza-spostamento per il caso in cui il danneggiamento sia immediato. Nel grafico seguente, così come in tutti quelli di questa tipologia presenti nel corso della tesi, lo spostamento indicato è quello imposto all'estremo libero della struttura, mentre la forza è la risultante delle forze nodali applicate nei nodi dell'estremo libero, prodotta dallo stesso spostamento imposto.

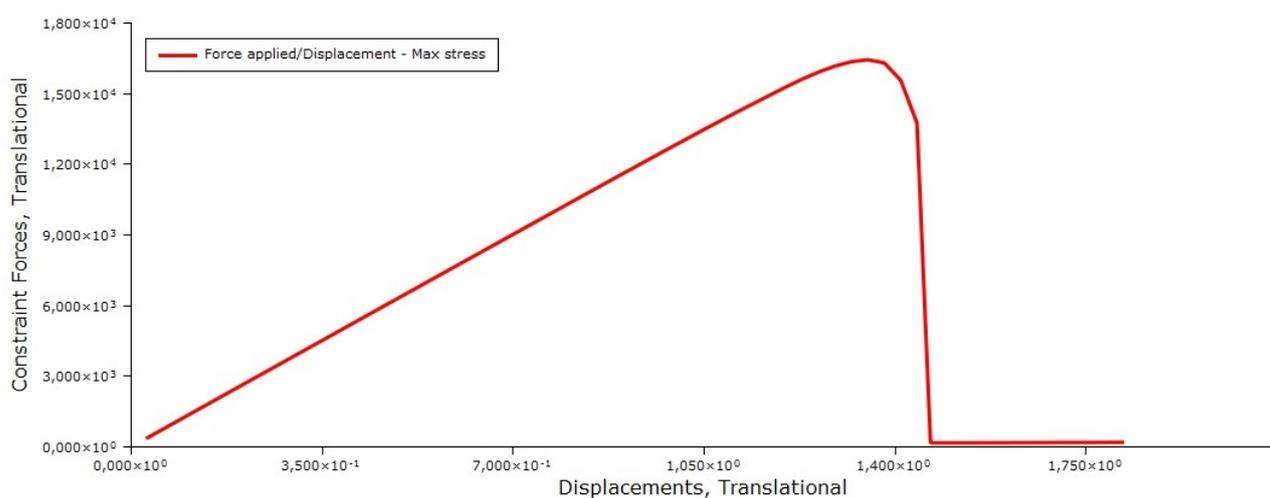


Figura 14 Curva Forza/Spostamento per il caso di Massimo stress con degradazione istantanea

Dal grafico possiamo notare come il laminato segua un andamento praticamente lineare fino al carico finale di rottura. Quest'ultimo è stato individuato intorno ad un valore di 16400 N. Per quanto riguarda il First Ply Failure possiamo vedere nella figura successiva che, come ci si aspetterebbe da una piastra con una geometria di questo tipo, con queste condizioni di vincolo e carico, esso avviene in prossimità del foro. In particolare, gli strati che raggiungono per primi la condizione di First Ply Failure sono quelli posti a 90° rispetto all'asse x, e di conseguenza il loro sarà un cedimento a livello della matrice. Il valore rilevato per il FPF è di circa 8000 N.

In figura 15 possiamo osservare graficamente i valori di danneggiamento forniti da Nastran, definiti come "Total Damage for Progressive Failure". Questi valori indicano il livello di degradazione della matrice di rigidezza in un particolare step di carico, e sono definiti dalla relazione:

$$Total\ damage = 1 - residual\ stiffness$$

Nel caso di modello di degradazione istantanea, il danneggiamento può assumere due valori:

- "0", se all'interno dell'elemento l'indice di failure non ha raggiunto ancora il valore unitario e quindi nell'elemento stesso la matrice di rigidezza resta invariata;
- "1 - SRC", se l'elemento ha raggiunto la condizione di failure e all'interno di esso, in un particolare strato, la rigidezza è stata ridotta ad una frazione della rigidezza iniziale, indicata appunto dal SRC.

Come si può notare, al momento del First Ply Failure, sono gli stati degli elementi sul bordo del foro centrale che arrivano prima di tutti nella condizione di cedimento, e per i quali il danneggiamento ha raggiunto un valore pressoché unitario (in quanto in fase di definizione dell'analisi la rigidità residua al momento della failure è stata impostata al valore di $a_1=0.001$). Nastran, per quanto riguarda il criterio di Massimo Stress, consente solo una visualizzazione del “Total Damage for Progressive Failure”, ovvero un indice che tiene conto sia del danneggiamento della matrice e sia di quello delle fibre, non consentendo una distinzione tra questi.

In particolare, in figura 15 è rappresentato l'indice di danneggiamento attraverso tutti gli stati del laminato, considerando il valore massimo del “Total damage” rilevato attraverso gli strati stessi. La particolare condizione rappresentata ci dice che, nell'istante visualizzato (corrispondente ad uno spostamento dell'estremo libero pari a 0.6mm), alcuni degli strati del laminato, che saranno proprio quelli con le fibre orientate a 90° rispetto agli assi geometrici, hanno raggiunto un indice di failure superiore ad 1, e per questo la loro rigidità è stata ridotta.

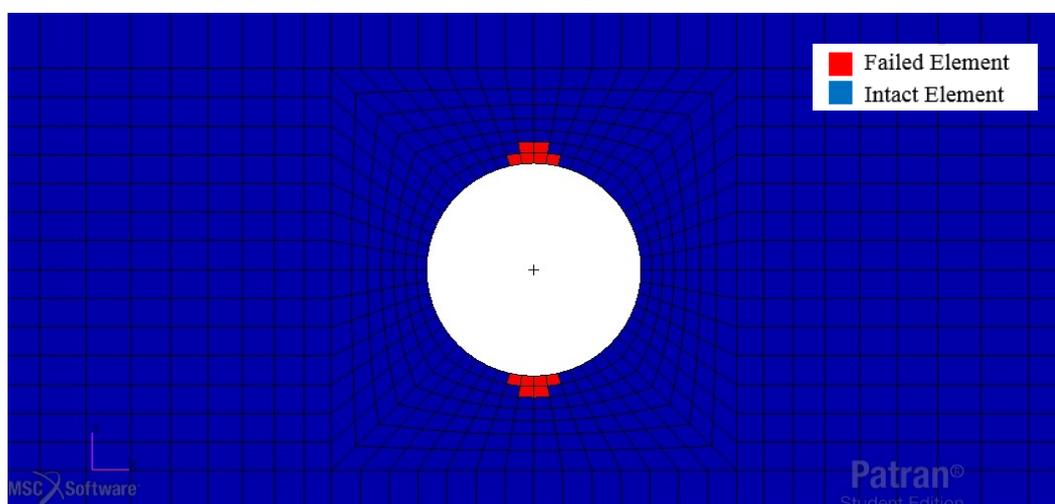


Figura 15 Indici di danneggiamento totale attraverso lo spessore del laminato al momento del First Ply Failure per il caso di Massimo stress con degradazione istantanea

Per permettere una migliore visualizzazione di questa condizione si è scelto di non effettuare un “averaging” tra i valori dei vari elementi, ma di osservare singolarmente le condizioni di ognuno di essi. Di default, Nastran, cerca infatti di assicurare una visualizzazione continua del risultato richiesto, effettuando un processo attraverso il quale i valori richiesti come output vengono mediati tra i vari elementi, al fine di assicurare continuità. In questo caso tuttavia, questa condizione non è utile, in quanto si vuole conoscere esattamente cosa accade in ogni elemento del laminato, che avrà quindi una sua particolare rappresentazione a seconda della condizione rilevata in esso (nel caso del Fringe in Nastran, ogni elemento avrà un colore distintivo). Nella figura precedente, gli elementi contraddistinti dalle zone di colore rosso hanno raggiunto una condizione di completo danneggiamento della matrice di rigidità.

Un'altra condizione interessante da visualizzare è quella relativa al completo danneggiamento dell'elemento attraverso il suo spessore, che avviene nel momento in cui tutti gli strati di questo hanno raggiunto un indice di failure pari a 1. Considerando infatti il minimo valore del “Total Damage” attraverso il laminato è possibile rappresentare la propagazione della rottura

attraverso il laminato: un valore di danneggiamento diverso da zero in tutti gli strati sta ad indicare l'origine di una cricca. In figura 16 possiamo osservare come questa rottura si propaghi perpendicolarmente alla direzione di applicazione del carico. In particolare modo, l'immagine 16(a) rappresenta la nascita della cricca, che avviene sotto l'applicazione di un carico pari a 12000N; nelle immagini 16(b) e 16(c) si osserva come la cricca si propaghi perpendicolarmente alla direzione di applicazione del carico; infine, in 16(d), si nota come la cricca si sia ormai propagata fino al bordo del laminato, sotto un carico praticamente pari all'Ultimate Failure Load (rappresentato da un valore di spostamento pari a 1.40mm).

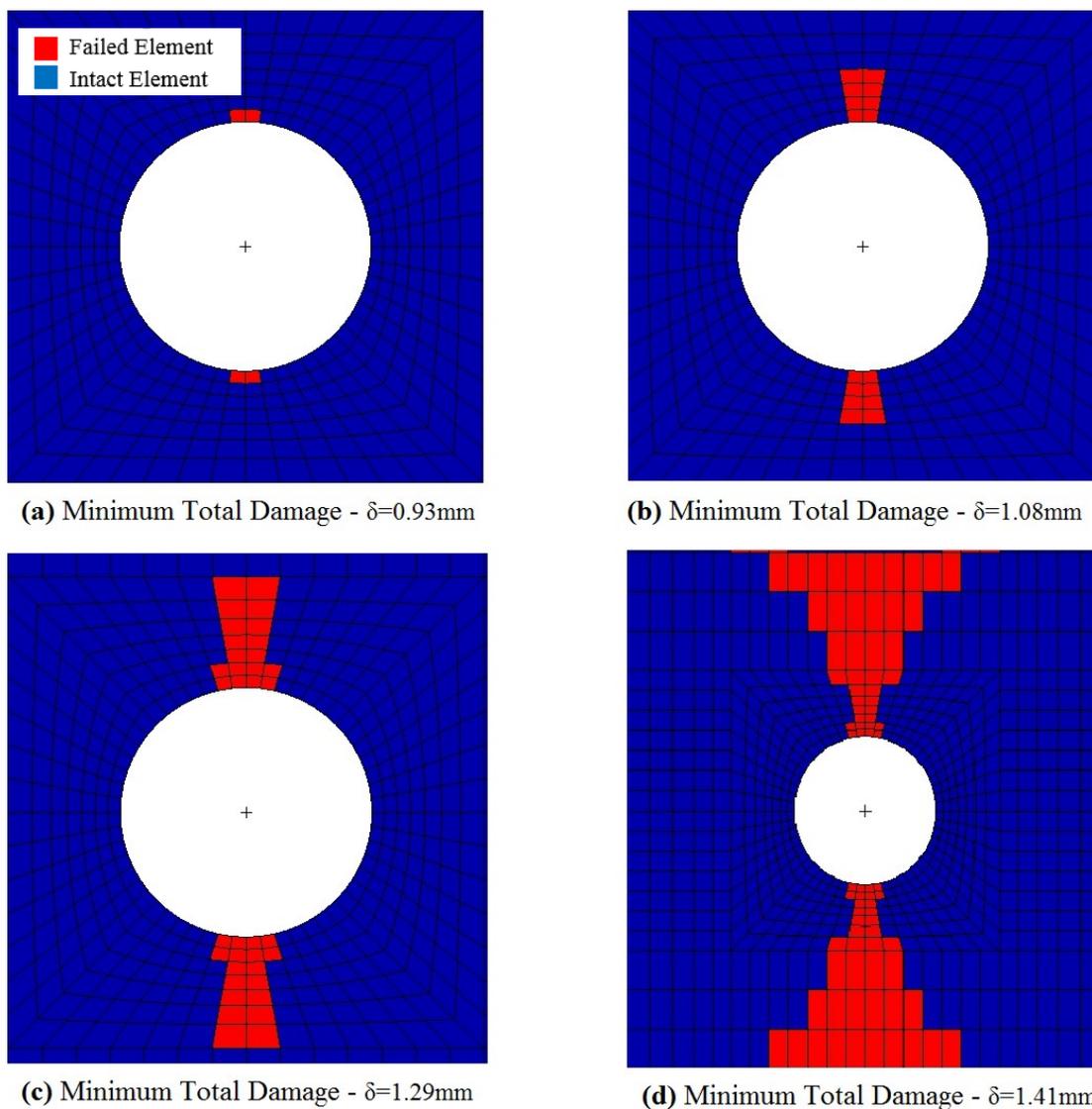


Figura 16 Propagazione della rottura attraverso il laminato definita attraverso il valore minimo di Total Damage

In figura 17 si può osservare l'indice di failure mentre si verifica la condizione di First Ply Failure. Come è evidente, negli elementi indicati in rosso in figura 15, il valore dell'indice di failure è pari o superiore a 1, e questo conferma quanto predetto precedentemente su quali siano gli elementi che sono soggetti ad un danneggiamento nel momento del FPF.

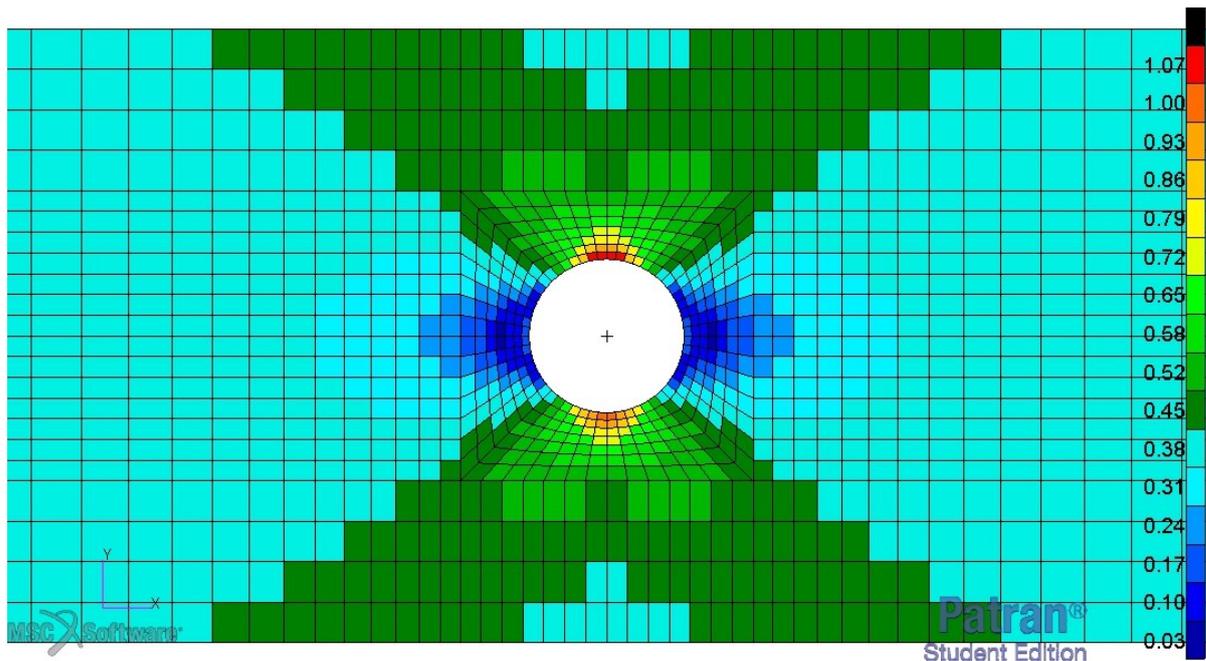


Figura 17 Indici di Failure al momento del FPF nel laminato per il caso di Massimo stress con degradazione istantanea

Tornando al carico ultimo di rottura (UFL), è possibile avere un'idea di quanto la struttura sia effettivamente danneggiata al raggiungimento di questo limite andando a visualizzare l'indice di "Total Damage", ma questa volta considerando i valori massimi attraverso il laminato. In questo modo sarà possibile osservare in quali elementi sia avvenuta almeno un cedimento, e che quindi identificano un qualche strato che avrà ridotto la rigidità iniziale. La condizione appena descritta è rappresentata in figura 18, e come è evidente la maggior parte della zona intorno al foro centrale presenta dei cedimenti (zone di colore rosso); inoltre anche le zone agli estremi hanno riportato dei danneggiamenti, sintomo che il campione ha ceduto.

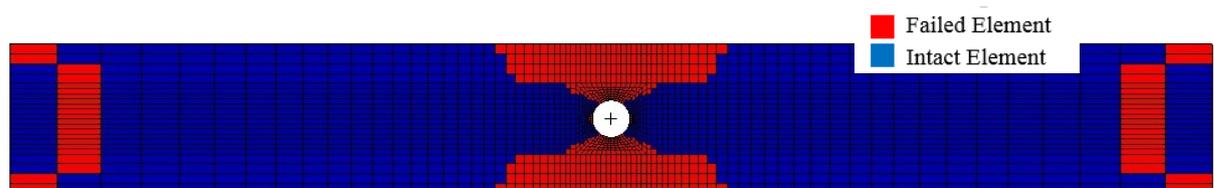


Figura 18 Indice di "Total Damage" al momento dell'Ultimate Failure Load nel laminato per il caso di Massimo stress con degradazione istantanea

Si passa ora alla simulazione di una PFA con modello di danneggiamento graduale. In figura 19 è evidente come la curva caratteristica del materiale in questo caso non assuma più la medesima conformazione del caso precedente. Innanzitutto è bene specificare che in questo caso, affinché avvenisse la rottura definitiva del composito, è stato necessario incrementare lo spostamento massimo fino a 4 mm, mantenendo invariato il tempo fra un incremento di carico e l'altro.

La linearità rilevata precedentemente non è più assicurata fino al carico finale di rottura, ma al contrario, quando lo spostamento imposto supera il valore dei 2 mm, si cominciano a notare delle alterazioni nella caratteristica. Queste possono essere fundamentalmente associate alla progressiva perdita di rigidità da parte del materiale, che essendo più lenta rispetto al caso precedente, e protraendosi maggiormente nel tempo, diventa più visibile.

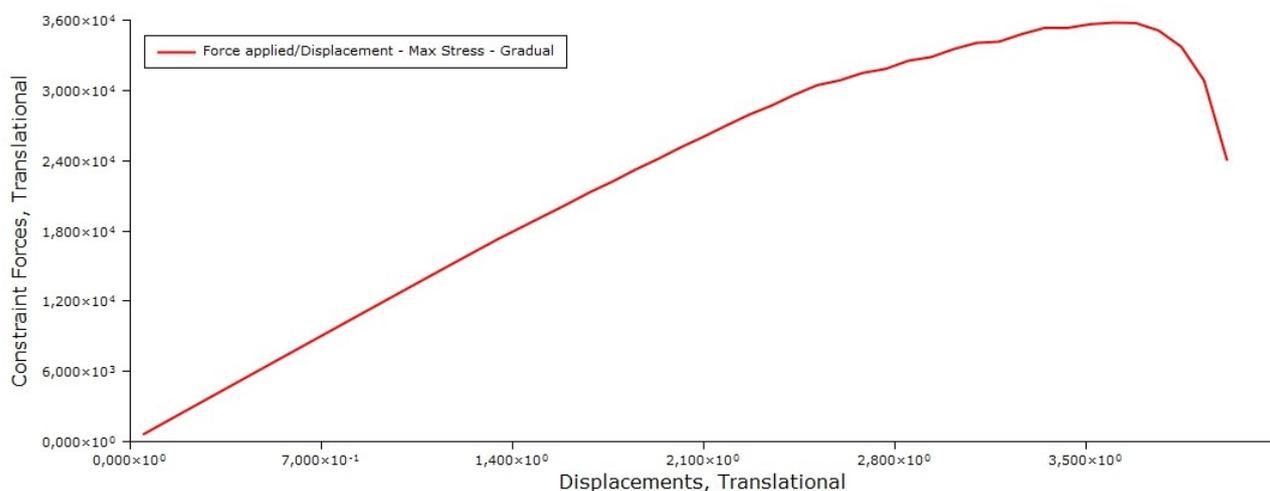


Figura 19 Curva Forza/Spostamento per il caso di Massimo stress con degradazione graduale

Altra osservazione da fare è che il valore del carico finale di rottura è circa il doppio rispetto a quello rilevato nel modello di danneggiamento istantaneo, il che porta a sovrastimare le proprietà di resistenza del materiale, che ricordiamo essere state testate sperimentalmente. Esso si attesta a 35800 N, con un errore di circa il 56% rispetto ai dati rilevati da Chang.

Per quanto riguarda il modello di danneggiamento graduale, l'indicazione del "Total Damage" assume un significato diverso. In questo caso infatti, i valori possibili per questo indice non sono più due, come nel caso analizzato precedentemente. In questo modello, come descritto precedentemente, la rigidità del materiale, nel singolo stato di un dato elemento, non viene ridotta istantaneamente a zero, ma subisce successive degradazioni basandosi su un particolare parametro SRC. E saranno proprio queste ultime a determinare il valore del "Total Damage", che dopo ogni riduzione delle proprietà meccaniche sarà pari a:

$$Total\ Damage = 1 - RS = 1 - \frac{K_f}{K_i}$$

Dove RS indica il rapporto tra la rigidità del materiale soggetto a failure (K_f) e quella del materiale integro (K_i). Essendo K_f direttamente proporzionale al numero delle degradazioni avvenute fino al raggiungimento dello SRC finale (in questa tesi assunto pari a 0.001), l'indice di "Total Damage" varierà con esso.

Nelle figure 20 e 21 è rappresentata l'evoluzione del danneggiamento attraverso l'indice di "Total Damage", al momento dell'Ultimate Failure Load, lungo lo spessore complessivo del laminato.

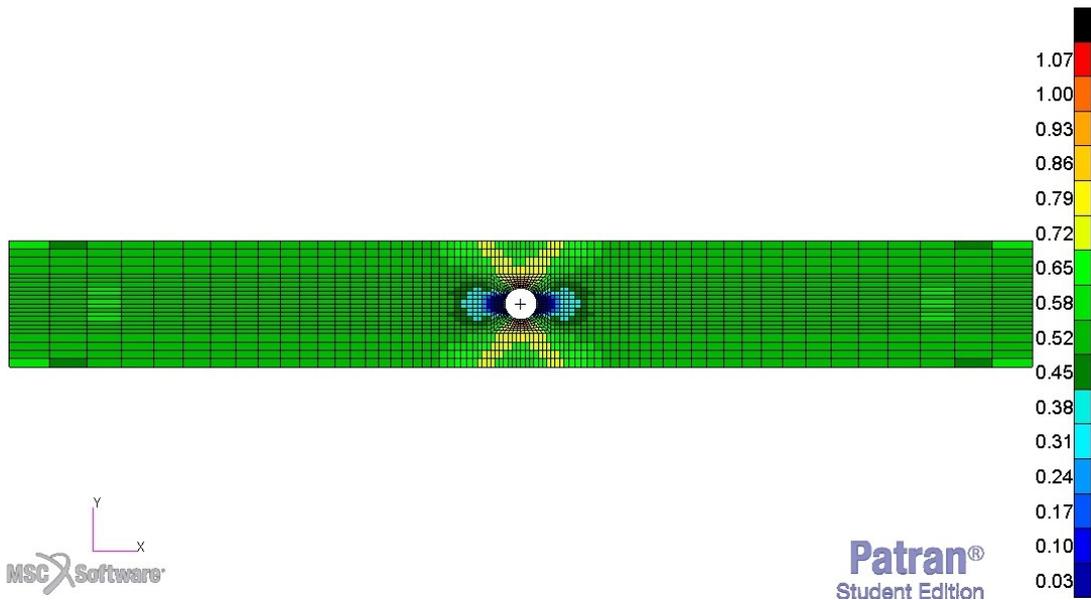


Figura 20 Evoluzione del danneggiamento attraverso l'indice di "Total Damage" per il caso di Massimo stress con degradazione graduale

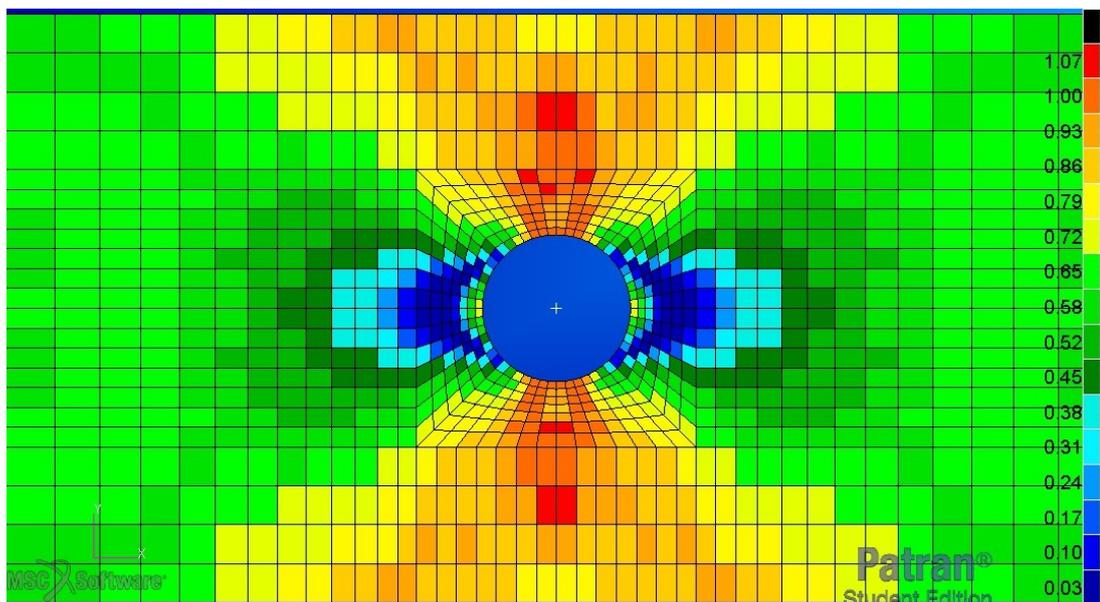


Figura 21 Particolare dell'evoluzione del danneggiamento sul foro centrale attraverso l'indice di "Total Damage" per il caso di Massimo stress con degradazione graduale

Nelle immagini precedenti è possibile interpretare il risultato osservando che tutti gli elementi evidenziati con un colore tendente al rosso hanno raggiunto un valore di "Total Damage" intorno a 1, e quindi hanno raggiunto il limite di rigidità residua previsto.

Per quanto concerne gli elementi evidenziati con un colore tendente all'azzurro, essi sono quelli che durante l'analisi progressiva del danno non hanno riportato danni considerevoli, e quindi l'indice di danneggiamento che presentano è vicino allo zero.

Tutti gli elementi che presentano valori intermedi sono stati soggetti almeno ad una failure, e nel caso di modello di danneggiamento graduale, questo comportamento è presente sulla maggior parte del campione.

Questo fenomeno può essere ricollegato al valore di carico di rottura finale più elevato che si raggiunge: nel caso di danneggiamento istantaneo, la struttura, cedendo ad un valore nettamente inferiore, non sviluppava stress tali per cui gran parte degli elementi lontani del foro centrale potessero cedere. In questo caso, invece, il processo di graduale riduzione della rigidità della struttura, porta a sviluppare tali stress, con conseguente failure anche in suddetti elementi.

Relativamente al FPF in questo caso si attesta a 8400 N, in linea con quanto stimato da Sleight [5].

Nella figura sottostante si può osservare come anche in questo caso siano gli elementi vicini al foro centrale a cedere sin dall'inizio. Tuttavia, come sottolineato precedentemente il valore del danneggiamento totale non è unitario dopo il First Ply Failure, in quanto la rigidità degli elementi non è stata ridotta completamente a zero, ma ad un valore intermedio che oscilla tra il 17% e il 38% del valore originario.

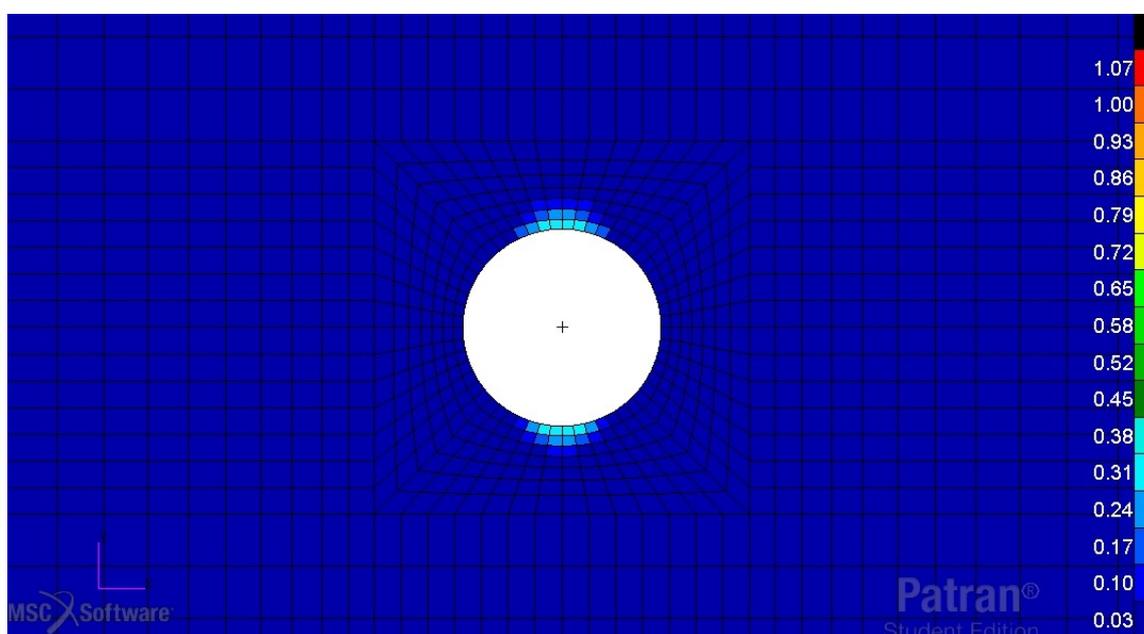


Figura 22 Indice di “Total Damage” per il First Ply Failure per il caso di Massimo stress con degradazione graduale

Possiamo trovare ulteriore riscontro andando a visualizzare gli indici di failure presenti nella struttura sottoposta ad una carico di 7730N, ovvero subito prima dell'insorgere del FPF. È evidente come nelle stesse zone evidenziate in figura 22, gli indici di failure sono prossimi o pari a uno. Inoltre, se confrontiamo le figure 23 e 17, si intuisce come il comportamento e gli indici nella struttura siano pressoché i medesimi, a meno di variazioni dovute a stati tensionali leggermente diversi, in particolar modo nelle zone lontane dal foro.

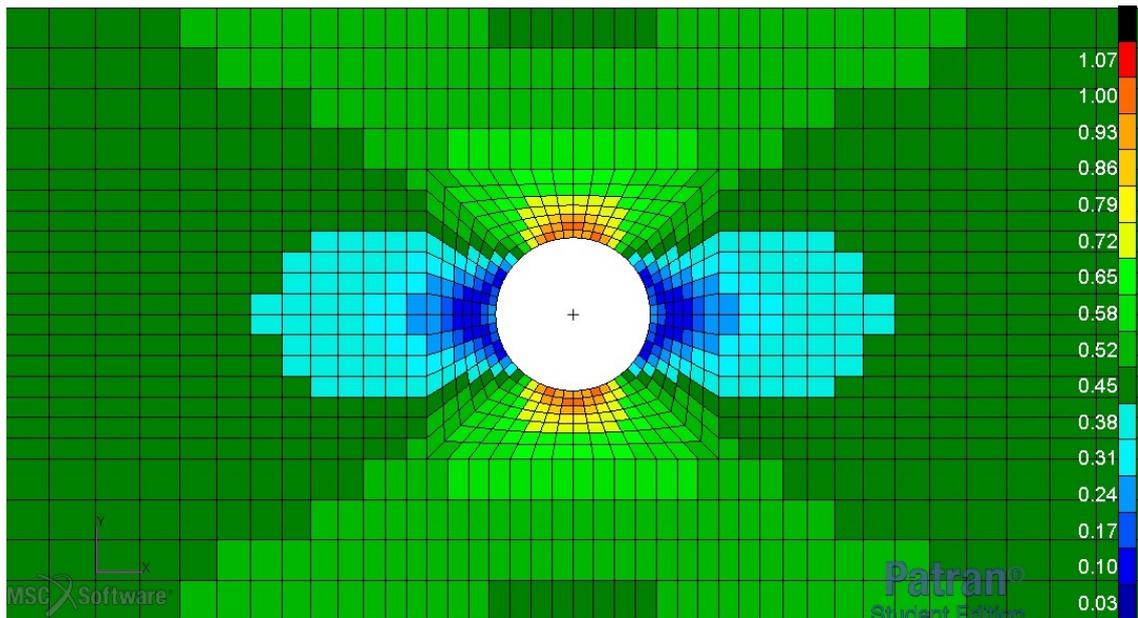


Figura 23 Indici di Failure al momento del First Ply Failure per il caso di Massimo Stress con degradazione graduale

3.4.2 Analisi con criterio di Hashin

La successiva simulazione è relativa all'utilizzo del criterio di Hashin per la rottura del laminato. Come già citato precedentemente, questo criterio rappresenta un caposaldo per l'analisi progressiva del danno, in quanto attraverso di esso, possiamo conoscere se la rottura dell'elemento è da imputare al cedimento della matrice o delle fibre, e quindi individuare il modo di cedimento.

In figura 24 è presentata la curva caratteristica prodotta da questa tipologia di analisi, nella quale si osserva la sommatoria delle forze generate nei nodi dallo spostamento imposto.

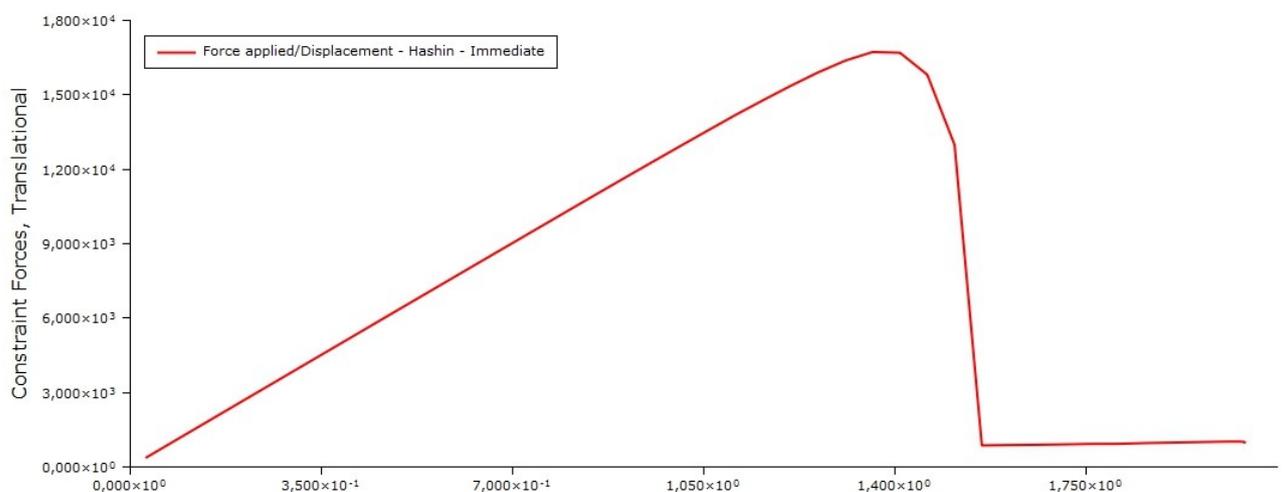


Figura 24 Curva Forza/Spostamento per il caso di Hashin con degradazione istantanea

Qualitativamente si nota che essa è simile a quella ottenuta per il criterio del Massimo Stress. La motivazione che intuitivamente si riesce a dare è che, nel caso di condizioni di carico semplici, come può essere un carico unidirezionale a trazione, i due criteri tendono ad equivalersi producendo gli stessi risultati.

Di fatto, nel criterio del Massimo Stress, la rottura delle fibre può essere associata all'indice di failure ricavato dallo stress parallelo alla direzione delle fibre stesse. Il cedimento della matrice, invece, è legato allo stress trasversale alla direzione delle fibre.

Partendo dall'analisi del First Ply Failure, si va ad identificare il punto in cui avviene il primo cedimento del laminato. In figura 25 osserviamo gli indici di "Total Damage", attraverso lo spessore del laminato. In questo caso la forza da applicare per raggiungere questo punto è pari a 7220 N, in linea con i precedenti rilevamenti. Confrontando questo risultato con quello ottenuto con il criterio di Massimo Stress, notiamo che essi sono fondamentalmente in linea tra loro, a meno di quattro elementi in più presenti nel caso in esame in questo paragrafo.

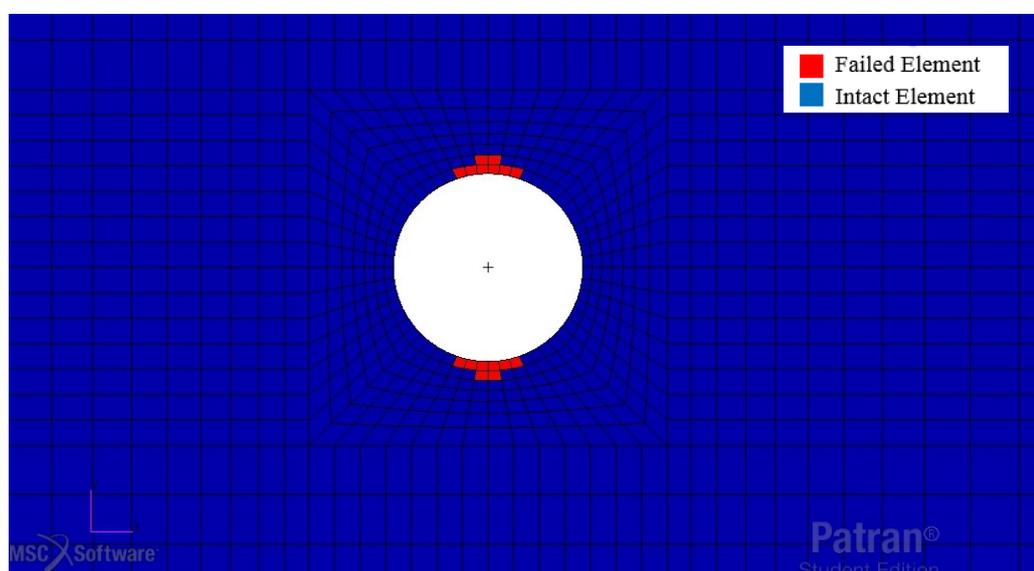


Figura 25 Indici di "Total Damage" al verificarsi del First Ply Failure per il caso di Hashin con degradazione istantanea

Come riferito precedentemente, il criterio di Hashin ha come punto di forza la capacità di distinguere intrinsecamente il cedimento in base al modo. Per dimostrare quanto questa potenzialità possa essere rilevante, si vuole ora andare a confrontare l'indice di danneggiamento rilevato a livello delle fibre e della matrice nello stesso istante. Si vada a considerare uno degli strati in cui l'inclinazione delle fibre è pari a 90° rispetto all'asse x geometrico (in questo caso specifico, si fa riferimento al numero 8).

Patran, nel caso di criteri mode-dependent, come quello di Hashin appunto, offre la possibilità di visualizzare gli indici di danneggiamento per le fibre ("Fiber Damage") e per la matrice ("Matrix Damage").

Si va ora a ricercare a quale valore di carico corrisponde il primo cedimento delle fibre: come si può osservare in figura 26(a), il primo cedimento nelle fibre sullo strato 8 del laminato, si verifica ad un carico pari a 16400N, corrispondente ad uno spostamento imposto di 1.36 mm. Si noti come queste particolari condizioni sono molto vicine alla condizione di rottura finale

del laminato, ovvero al picco della curva Forza/Spostamento; quindi il cedimento delle fibre avviene quando quasi tutto il laminato sta per arrivare a rottura. Se nello stesso istante dell'analisi, con le stesse condizioni di carico, si vanno a visualizzare gli indici di danneggiamento della matrice (Figura 26(b)), si nota che, mentre il cedimento nelle fibre è in uno stato embrionale, quello della matrice è in stato avanzato e ha praticamente raggiunto gran parte della zona intorno al foro centrale. Sarà quindi il danneggiamento diffuso della matrice a causare la rottura finale del campione.

Sebbene in un caso semplice come questo, il precedente risultato sia in linea con ciò che intuitivamente si potrebbe pensare, una tale distinzione tra i modi di rottura diventa rilevante nel caso in cui le strutture da analizzare assumano un grado di complessità più elevato.

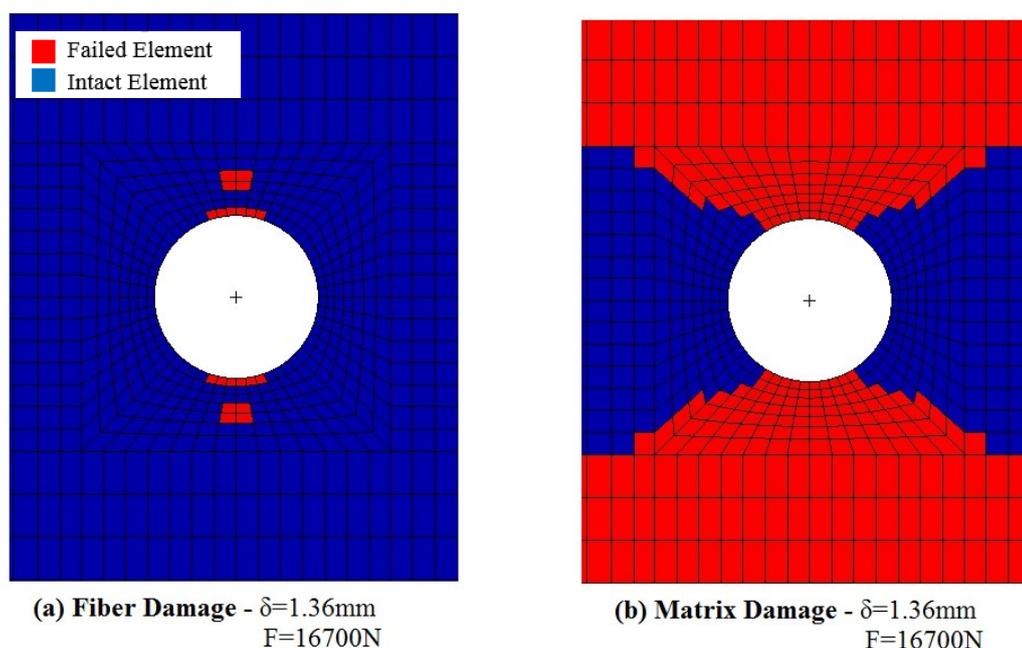


Figura 26 Comparazione indici di danneggiamento per fibre e matrice nella zona del foro centrale

Anche nel caso di modello di danneggiamento graduale, è evidente come ci sia un valore rilevato di carico finale a rottura più alto rispetto al danneggiamento istantaneo. Comparando però la Figura 27 con quella nelle stesse condizioni ricavata per il criterio di Massimo Stress (Figura 19), il carico massimo in questo caso si attesta intorno a 24900 N, con un errore rispetto al valore trovato da Chang del 37%.

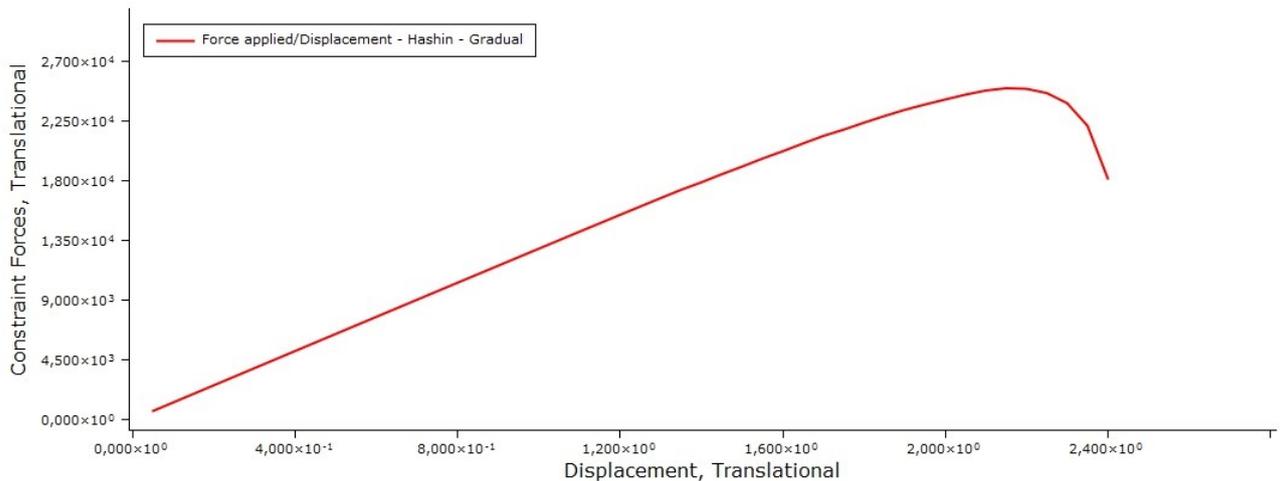


Figura 27 Curva Forza/Spostamento per il caso di Hashin con degradazione graduale

In questo caso Il FPF si manifesta ad un valore di forza applicata pari a 7740 N, anche questa volta in linea con le precedenti previsioni.

In figura 28 possiamo osservare l'indice di danneggiamento "Total Damage" per il First Ply Failure, che come descritto anche precedentemente, rispecchia il danneggiamento graduale della struttura, con valori di rigidezza residua pari a circa il 70% di quella originale. Per le considerazioni effettuate, il danneggiamento del FPF sarà dovuto solo alla matrice del materiale in composito.

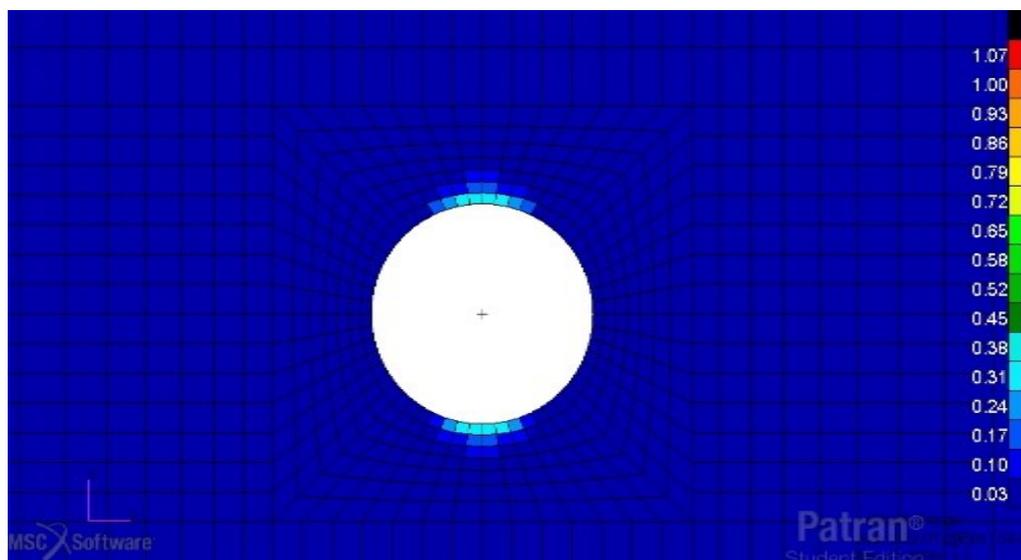


Figura 28 Indice di danneggiamento nel momento del First Ply Failure per il caso di Hashin con degradazione graduale

Anche in questo caso, per giustificare gli indici di danneggiamento appena mostrati, ci si può servire dell'indicazione relativa agli indici di failure al momento del FPF. Questi sono rappresentati in Figura 29. Come si può notare, tutti gli elementi soggetti a degradazione e rappresentati in Figura 28, trovano corrispondenza nella seguente Figura, nella quale, in quelli stessi elementi, visualizzando sempre il valore massimo lungo tutti gli stati del laminato, presentano degli indici pari o superiori a 1.

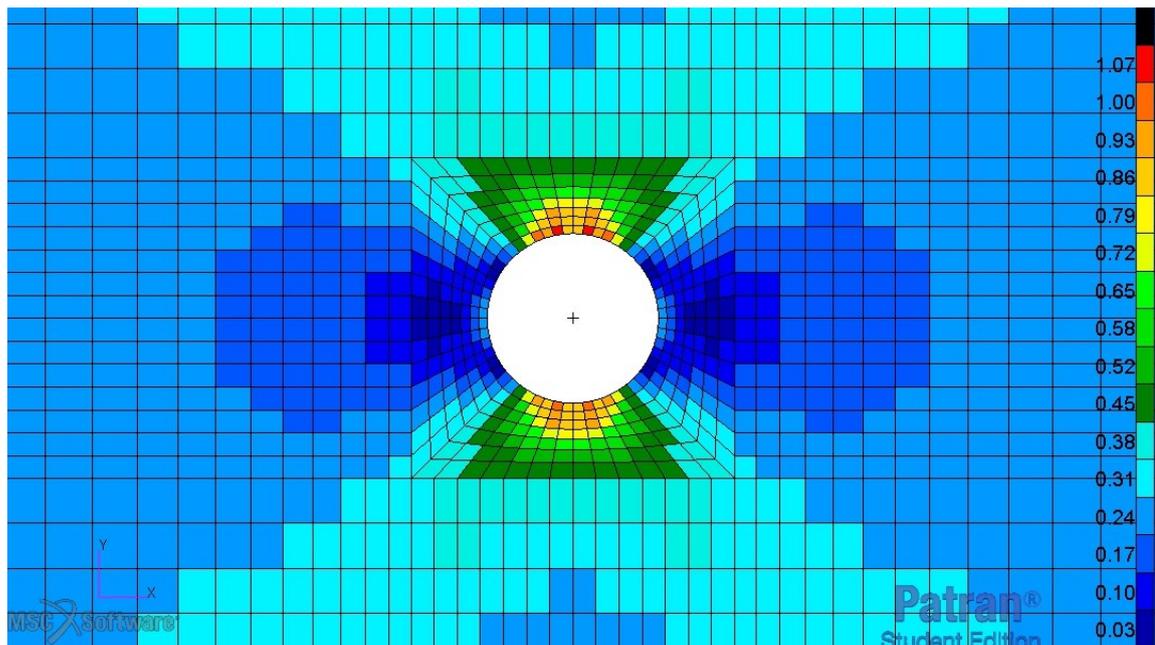


Figura 29 Indice di failure nel momento del First Ply Failure per il caso di Hashin con degradazione graduale

Relativamente all'Ultimate Failure Load possiamo vedere in Figura 30 l'evoluzione del danneggiamento complessivo (contributo di fibra e matrice) con i relativi indici di "Total Damage".

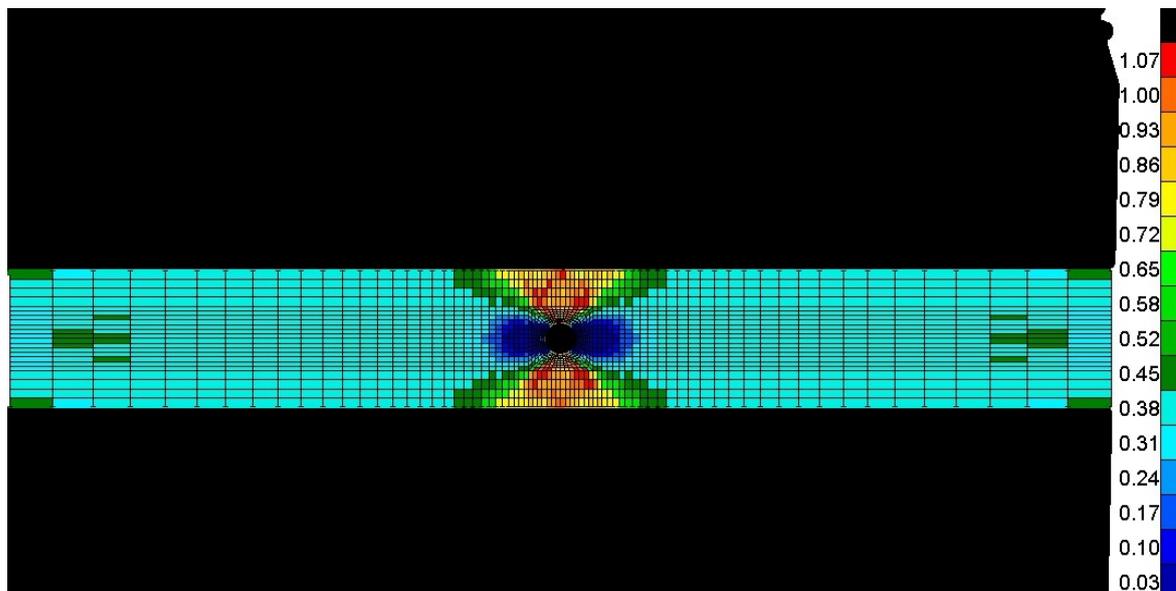


Figura 30 Indice di danneggiamento "Total Damage" per il criterio di Hashin con danneggiamento graduale

Come si nota dalla Figura precedente, le aree intorno al foro saranno quelle che, come già rilevato nei casi precedenti, danno origine alla rottura finale del campione. Nello specifico, come si nota in Figura 31, dove è mostrato il particolare dell'area appena citata, solo alcuni degli elementi hanno completamente ridotto la loro rigidità fino al limite imposto dallo SRC, ovvero quelli che hanno raggiunto un valore di danneggiamento totale approssimabile a 1.

Altra caratteristica da evidenziare è che, a differenza del caso di danneggiamento istantaneo, gli elementi evidenziati nei riquadri neri in figura non hanno subito una totale degradazione delle caratteristiche meccaniche, ma sono ancora in grado di sostenere carichi.

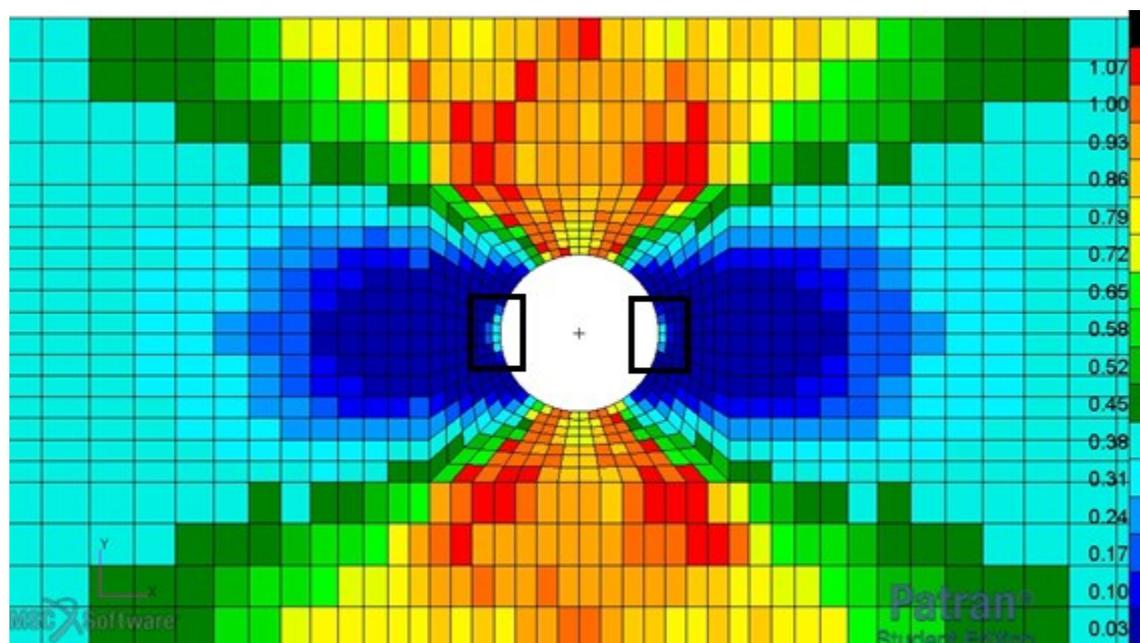


Figura 31 Particolare dell'evoluzione del danneggiamento sul foro centrale attraverso l'indice di "Total Damage" per il caso di Hashin con degradazione graduale

3.4.2 Analisi con criterio di Tsai-Wu

Lo step successivo in questo lavoro di tesi è rappresentato dalla verifica di criteri di failure polinomiali, che sebbene siano interattivi non prevedono una metodologia che distingua tra cedimento delle fibre e della matrice, essendo indipendenti dal modo di frattura.

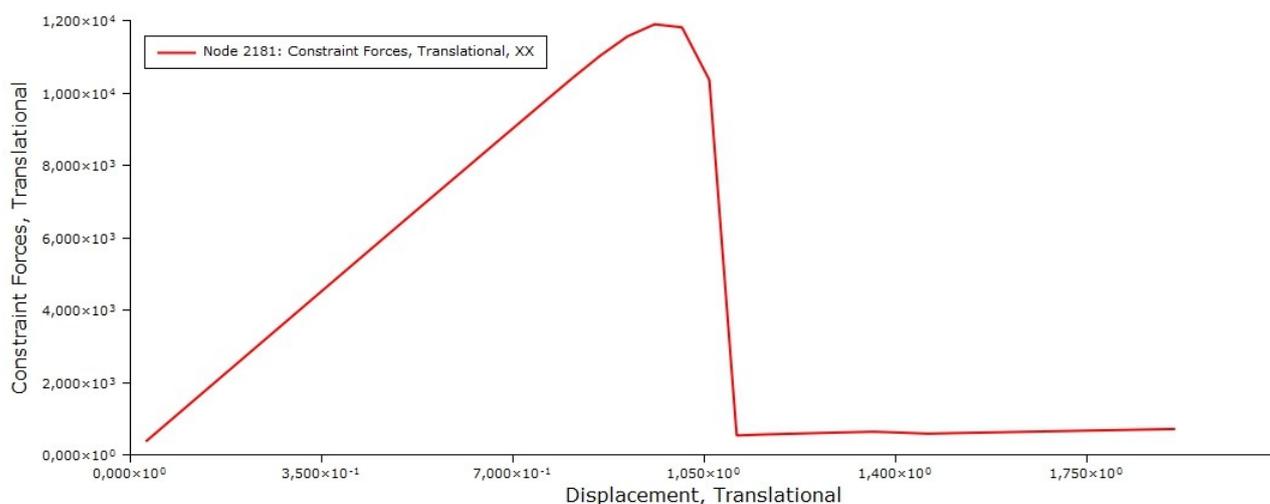


Figura 32 Curva Forza/Spostamento per il caso di Tsai Wu con degradazione istantanea

Nella precedente figura, che illustra il percorso di carico del materiale, si nota subito una prima differenza tra i precedenti criteri di rottura e quello polinomiale di Tsai-Wu. Infatti, il carico critico alla soglia del quale si verifica la rottura del materiale è diminuito notevolmente ed è pari a 11900 N. Questo valore, che è anche inferiore al valore rilevato sperimentalmente da Chang, mostra un comportamento decisamente conservativo in questa tipologia di criterio di cedimento. Una giustificazione di questo può essere trovata nel fatto che, sebbene questo criterio, al pari di quello di Hashin sia interattivo, non prevedendo una distinzione a monte tra cedimento nelle fibre o nella matrice, possiede un solo indice di failure. Inevitabilmente, quest'ultimo, dovendo tenere conto di tutti gli stress agenti sulla struttura, raggiunge il valore unitario, associabile a rottura, prima rispetto ai criteri precedenti. Di conseguenza questo comporterà che la degradazione del materiale avvenga in corrispondenza di spostamenti ridotti, e che la struttura stessa arrivi a rottura per valori di carico applicato inferiori.

Per quanto riguarda il First Ply Failure, il materiale, anche per questa analisi, segue un comportamento intuitivo, e manifesta il primo cedimento alle estremità del foro centrale, in modo perpendicolare all'applicazione del carico, come mostrato in Figura 33.

Anche in questo caso il valore di carico al quale questo fenomeno si manifesta è all'incirca il medesimo dei casi precedenti, 6570 N. Questo particolare risultato mostra come effettivamente il processo di degradazione del materiale non vada ad influire sull'analisi quasi-lineare condotta fino al manifestarsi del FPF. Fino a questo momento infatti il materiale reagisce indipendentemente dal criterio di failure o dal modello di danneggiamento.

Tuttavia, come mostrato in Figura 34, dove sono rappresentati gli indici di failure al momento del FPF, il valore leggermente ridotto del carico al quale questa condizione di manifesta porta gli elementi più lontani dal foro ad essere meno sollecitati, e quindi ad avere indici inferiori rispetto alle situazioni visualizzate precedentemente. Inoltre si nota anche una leggera asimmetria tra la zona superiore e inferiore del foro, che però non va ad influire sul cedimento degli elementi.

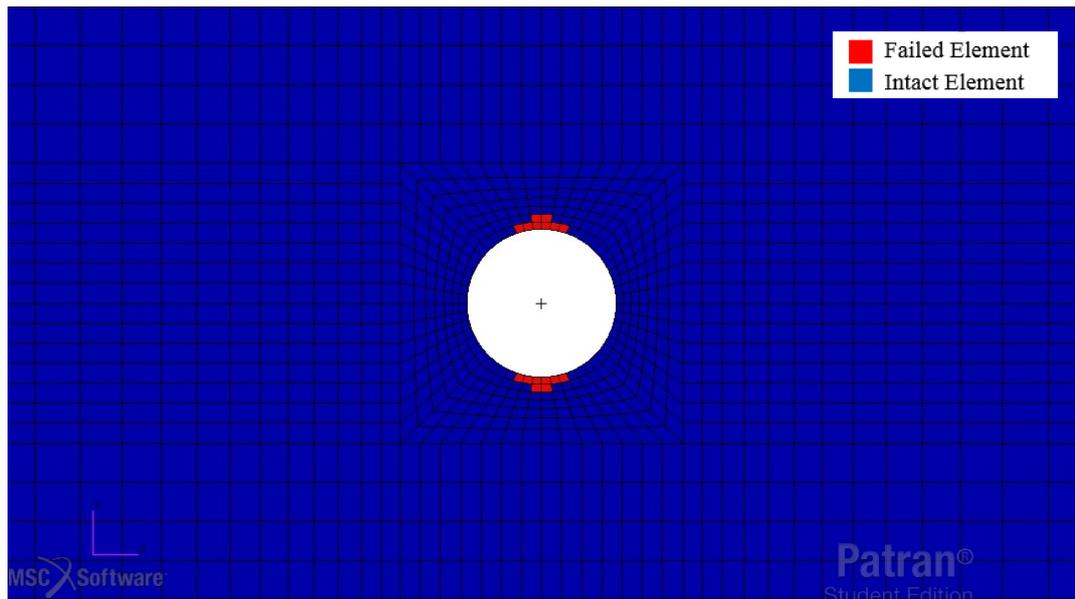


Figura 33 Indici di danneggiamento “Total Damage” al momento del First Ply Failure per il caso di Tsai Wu con degradazione istantanea

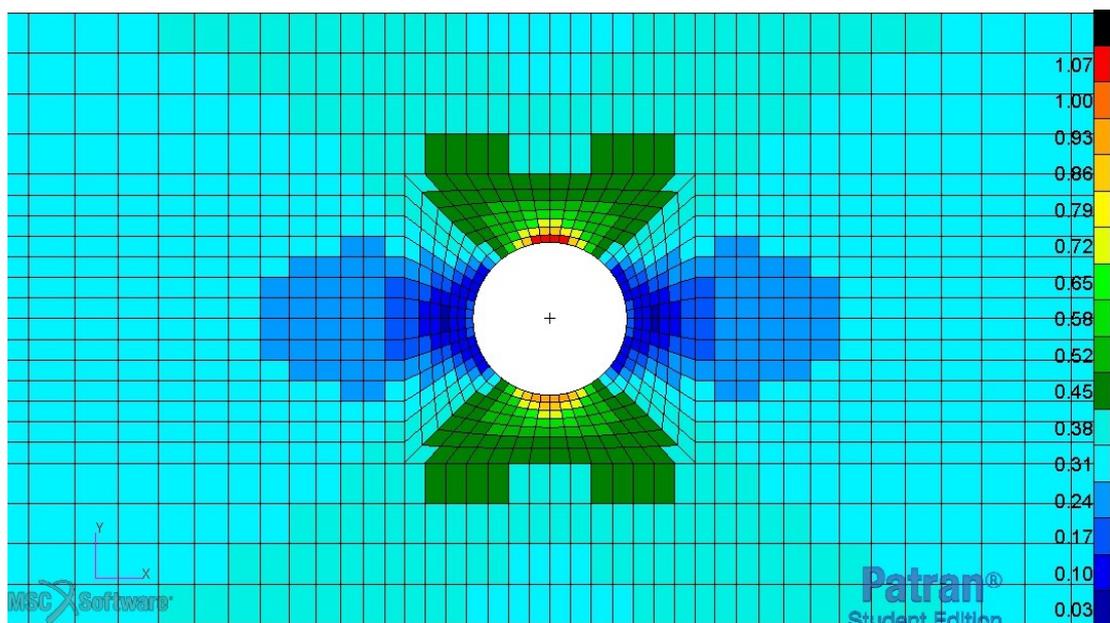


Figura 34 Indici di Failure al momento del First Ply Failure per il caso di Tsai Wu con degradazione istantanea

Nella figura sottostante invece possiamo osservare l’evoluzione dell’indice di danneggiamento nel momento in cui viene applicato il carico finale di rottura. In particolare, a differenza dei casi precedenti (facendo ad esempio un confronto con la Figura 18), si può evidenziare come l’area di cedimento sia rimasta localizzata nelle vicinanze del foro, non estendendosi alle zone esterne del laminato. Questo è un’ulteriore dimostrazione del fatto che il carico al quale avviene la rottura finale è inferiore rispetto ai casi analizzati con i criteri del Massimo Stress e di Hashin, in quanto gli elementi vicini alle zone esterne non raggiungono livelli di stress sufficienti a rendere l’indice di failure maggiore di 1.

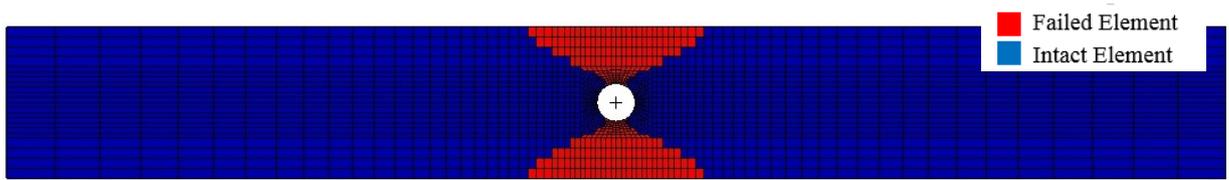


Figura 35 Indici di danneggiamento nel momento dell'Ultimate Failure Load per il caso Tsai Wu con degradazione istantanea

Passando all'analisi con modello di degradazione graduale, si può osservare nella curva caratteristica rappresentata in Figura 36, che in questo caso il valore di carico applicato al quale avviene la completa rottura del composito è paragonabile ai valori trovati nei casi di danneggiamento istantaneo nei modelli di massimo stress e Hashin. Questo risultato è in linea con ciò che è emerso dall'analisi con danneggiamento istantaneo, dove il carico di UFL era inferiore a quelli ricavati per i criteri analizzati precedentemente. Adesso infatti, il comportamento dell'indice di Failure descritto in precedenza viene compensato dal fatto che la degradazione non comporta la riduzione totale delle caratteristiche meccaniche del materiale. Il danneggiamento graduale della rigidità fa sì che, sebbene le failure si manifestino a carichi inferiori, il materiale continua a resistere parzialmente, spostando l'Ultimate Failure Load a valori più elevati. In particolare esso è pari a 17800 N. In Figura 37 si può osservare il livello degli indici di danneggiamento "Total Damage", che rispettano lo schema dell'evoluzione della cricca citato più volte in questa tesi, ma in questo caso, come accadeva nel modello di degradazione istantanea, le zone del campione vicine agli estremi sono poco o per nulla sollecitate.

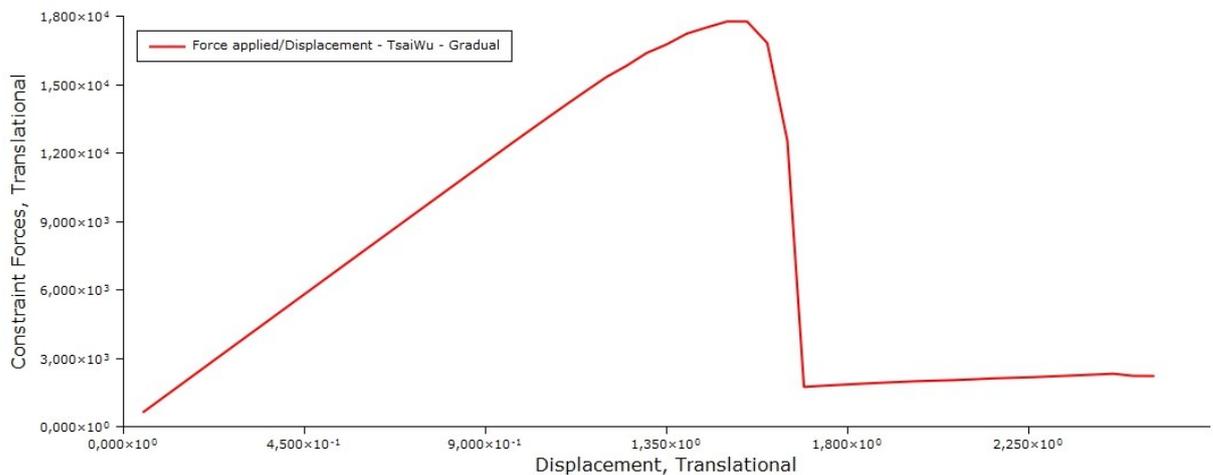


Figura 36 Curva Forza/Spostamento per il caso di Tsai Wu con degradazione graduale

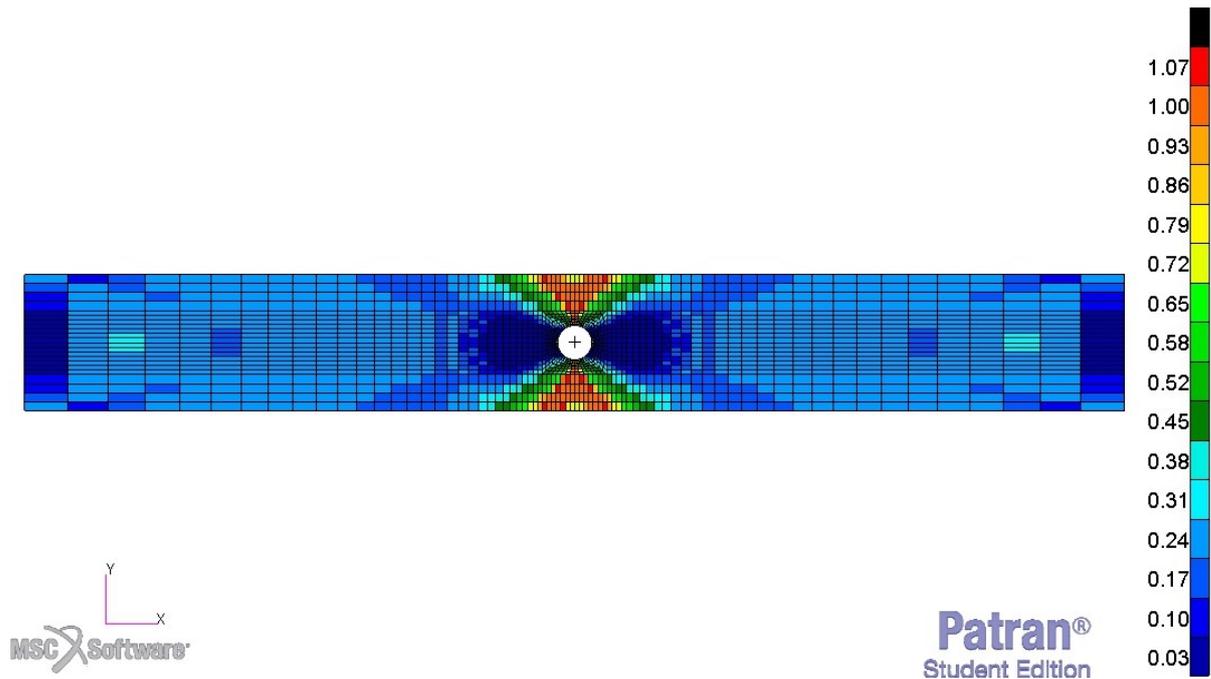


Figura 37 Indici di danneggiamento "Total Damage" per il criterio di Tsai-Wu con degradazione graduale

3.4.4 Analisi con criterio di Hoffman

Come ultimo criterio da confrontare ed analizzare è stato selezionato il criterio di Hoffman. Questa particolare scelta è dovuta all'idea di voler valutare eventuali variazioni nelle predizioni dei carichi critici di rottura rispetto a quelle del criterio di Tsai-Wu appena descritto. Il criterio di Hoffman è anch'esso polinomiale, e si differenzia da quello precedente solo per la definizione dei coefficienti di interazione F_{12} , F_{13} ed F_{23} . Di fatto però, questi ultimi rappresentano i fattori caratterizzanti di questi criteri polinomiali, pertanto ci si aspetta di osservare alcune variazioni soprattutto nei valori rilevati.

In realtà, come si può osservare dal grafico riportato qui di seguito, il valore di carico massimo da applicare per far sì che avvenga rottura del materiale è all'incirca lo stesso del caso precedente, intorno ai 12000N.

Questo risultato dimostra che, nonostante la differente definizione di coefficienti, i due criteri di rottura portano a risultati numerici abbastanza in linea tra loro.

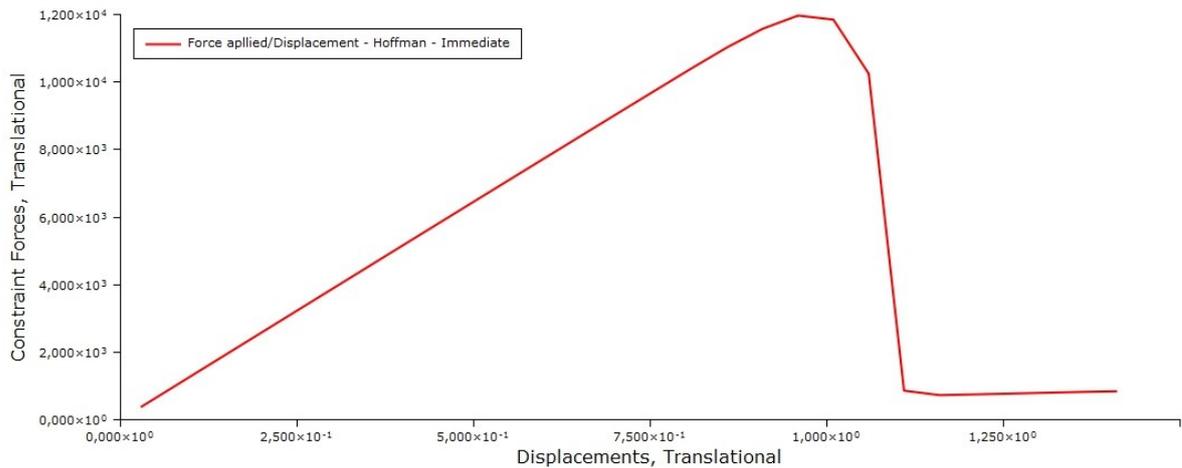


Figura 38 Curva Forza/Spostamento per il caso di Hoffman con degradazione istantanea

Continuando con il rilevamento dei dati significativi, si trova che il FPF, come ormai ci si aspetta, risulta essere in linea con i valori precedentemente riscontrati, in quanto si attesta intorno ai 6570 N, come era avvenuto nel caso di Tsai-Wu.

Anche nel caso di analisi con criterio di Hoffman gli elementi che vengono degradati per primi sono gli stessi precedentemente evidenziati in Figura 33. L'unica differenza sostanziale tra i due criteri polinomiali sta nei valori degli indici di Failure. Come si può notare infatti, confrontando i risultati in Figura 39 e quelli in Figura 34, nel caso del criterio di Hoffman, i valori degli indici sono globalmente più bassi. Questo è giustificato proprio dalla diversa definizione dei coefficienti F_{12} , F_{13} ed F_{23} , che influiscono direttamente su questi valori.

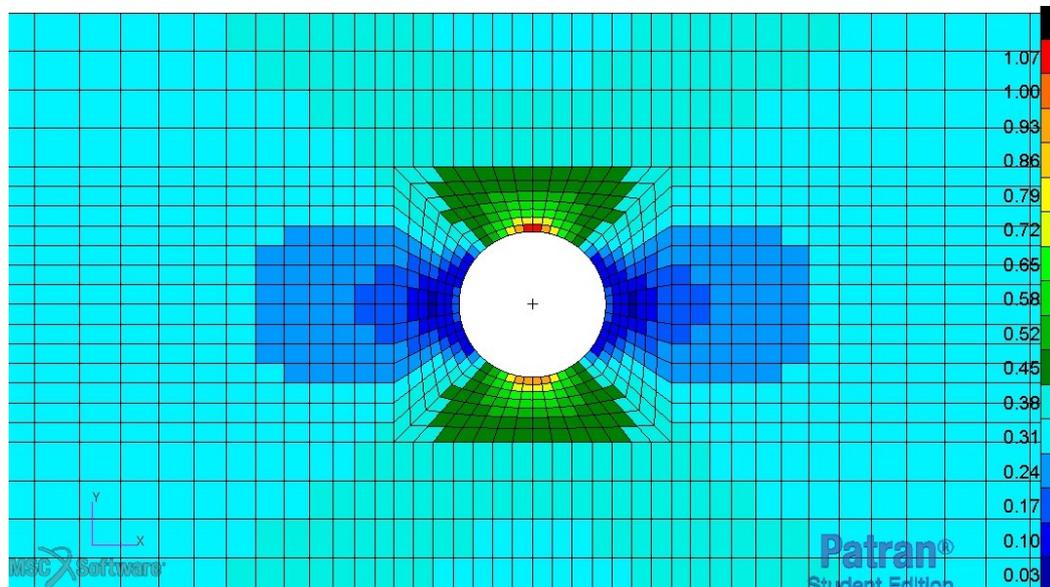


Figura 39 First Ply Failure per il caso di Hoffman con danneggiamento istantaneo

Infine si riporta come ultimo risultato il pattern degli indici di danneggiamento “Total Damage” nel momento in cui si raggiunge la condizione di Ultimate Failure Load. Come si nota, a meno di qualche elemento nelle zone più lontane dal foro centrale, questa visualizzazione è molto simile a quella ottenuta per il caso del criterio di Tsai-Wu. Questo attesta che, sebbene la definizione dei coefficienti sia differente, i due criteri si equivalgono in tutti gli aspetti e conducono alle stesse rilevazioni.

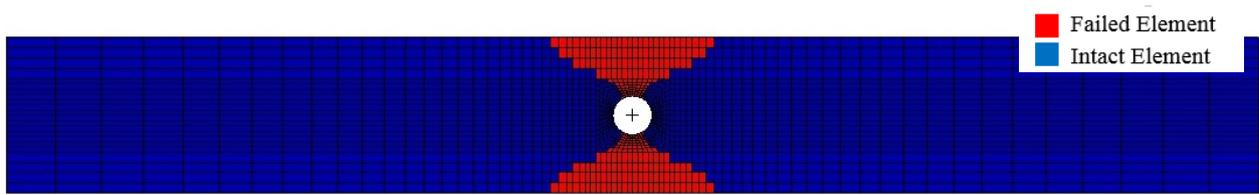


Figura 40 Indici di danneggiamento nel momento dell'Ultimate Failure Load per il caso di Hoffman con degradazione istantanea

CAPITOLO 4

IMPLEMENTAZIONE CODICE IN LINGUAGGIO MATLAB

4.1 Introduzione al codice

L'idea di implementare un codice in linguaggio Matlab per la risoluzione di analisi progressive del danno nasce dai limiti rilevati nelle analisi svolte nel software commerciale MSC Nastran. Di fatto, come precedentemente illustrato, se il modello di danneggiamento progressivo risulta essere particolarmente fedele ai risultati sperimentali trovati in letteratura, in quanto anch'esso si basa pedissequamente sulla riduzione delle proprietà meccaniche della struttura ad un numero tendente a zero, per quanto riguarda il modello di degradazione graduale, sono stati riscontrati dei valori di FPF e UFL pari a circa il doppio di quelli rilevati per la prima tipologia di degradazione.

Investigando sui possibili motivi legati a questa problematica, sono state formulate diverse ipotesi. Intuitivamente, si può immaginare come un'analisi progressiva del danno con un modello di danneggiamento istantaneo porta alcuni elementi della struttura a cedere talvolta prematuramente, in quanto la dimensione di una eventuale cricca, che agisce a livello microscopico, non porta necessariamente ad un cedimento macroscopico dell'intero elemento. Inoltre, il modello di danneggiamento progressivo presente di default in Nastran prevede una legge esponenziale basata sugli indici di cedimento rilevati al momento della rottura. Scopo di questa implementazione in MATLAB è proprio quello di andare a confrontare i modelli preimpostati in un codice commerciale, come appunto MSC Nastran, e un modello basato sulle evidenze sperimentali.

In particolare, nel modello elaborato in MATLAB sarà possibile scegliere tra un modello di degradazione istantanea, con un SRC scelto dall'utente, o graduale, con un fattore, sempre gestito dall'utente, che farà sì di ridurre le caratteristiche meccaniche del materiale, lasciando tuttavia all'elemento una rigidità residua tale da poter sopportare ulteriori carichi. In quest'ultimo modello la rigidità residua sarà ridotta fino a raggiungere un valore limite di "Residual Stiffness Factor", impostato di default a 0,001.

4.2 Assunzioni e modello agli elementi finiti

Per l'implementazione si è partiti da un codice per l'analisi lineare di piastre multistrato, che prevedesse l'utilizzo di elementi con modello Mindlin. Di fatto questa scelta è stata effettuata per consentire alla piastra da modellare di poter essere soggetta a deformazioni e spostamenti, non solo in piano, ma anche in direzione perpendicolare. Con elementi finiti di tipo membranale questo non sarebbe stato possibile, e si sarebbe corso il rischio di non riuscire a prevedere correttamente il comportamento della piastra.

Nella teoria della piastra di Mindlin non lineare, gli spostamenti sono espressi in funzione delle traslazioni e delle rotazioni (intorno all'asse x e y) nel piano mediano dell'elemento:

$$\bar{u} = u + z\theta_x$$

$$\bar{v} = v + z\theta_y$$

$$\bar{w} = w$$

Nelle relazioni precedenti u e v sono gli spostamenti nel piano, w è lo spostamento fuori dal piano mentre θ_x e θ_y sono le rotazioni.

Nel caso non lineare il vettore delle deformazioni può essere scritto come:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_i^0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z\varepsilon_b^0 \\ \varepsilon_s^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_i^L \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dove abbiamo suddiviso le varie deformazioni in deformazioni lineari nel piano

$$\varepsilon_i^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \end{bmatrix}$$

Deformazioni dovute a flessione lineare

$$\varepsilon_b^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Deformazioni di taglio lineari

$$\varepsilon_s^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{bmatrix}$$

E deformazioni non lineari nel piano

$$\varepsilon_i^L = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Si potranno a questo punto individuare e definire gli stress attraverso l'utilizzo della matrice di rigidezza appositamente calcolata nel caso di materiali ortotropi. La matrice riportata di seguito si riferisce agli assi di ortotropia del materiale.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{\Delta E_2 E_3} & \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{\Delta E_2 E_3} & \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{\Delta E_2 E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{\Delta E_2 E_3} & \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{\Delta E_1 E_3} & \frac{\nu_{32} + \nu_{31}\nu_{12}}{\Delta E_1 E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{\Delta E_2 E_3} & \frac{\nu_{32} + \nu_{31}\nu_{12}}{\Delta E_1 E_3} & \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{\Delta E_1 E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix}$$

$$\text{Dove } \Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{13}\nu_{32}}{E_1 E_2 E_3}$$

Per semplicità di implementazione, la matrice di rigidezza è stata suddivisa in sottomatrici per il comportamento membranale e flessionale, per lo sforzo di taglio e per le componenti non lineari.

Questa matrice appena ricavata, che chiameremo Q , trattandosi di un laminato in composito in cui ogni strato possiede una sua orientazione, dovrà subire una rotazione, per l'allineamento con gli assi geometrici. Questo avviene attraverso una matrice di rotazione T , secondo l'equazione riportata di seguito.

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix}$$

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1}[Q] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} [T]$$

E di conseguenza le componenti della matrice $[\bar{Q}]$ saranno:

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})m^3n + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})mn^3$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})n^3m + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})nm^3$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{66}(m^4 + n^4)$$

Con questo dati a disposizione si possono definire le matrici di rigidezza ridotte \bar{Q}_P e \bar{Q}_T , rispettivamente matrice delle rigidezze ridotte membranali e matrice delle rigidezze ridotte di taglio.

Nella stessa funzione implementata per la definizione della matrici di rigidezza ridotte, viene effettuato uno degli step più importanti nell'analisi progressiva del danno, che consiste nella creazione e nell'immagazzinamento delle proprietà meccaniche del materiale in un'apposita matrice tridimensionale. Questa matrice salva per ogni elemento e per ogni stato di esso una riga di valori relativi alle dodici caratteristiche meccaniche del materiale ($E_1, E_2, E_3, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, \nu_{21}, \nu_{31}, \nu_{32}, G_{12}, G_{13}, G_{23}$) che durante l'analisi potrebbero essere ridotte. In questo modo si riescono a tenere in memoria i singoli valori in ogni elemento e in ogni strato del materiale, processo che consentirà di poter ricavare di volta in volta gli stress attraverso matrici di rigidezza ridotte adeguate.

La discretizzazione agli elementi finiti ha richiesto l'utilizzo di funzioni di forma per elementi QUAD4. Per quanto riguarda la definizione della componente di spostamento trasversale al piano xy , è bene notare che sono state impiegate anche delle funzioni di forma di tipo parabolico. Di fatto, quindi, la componente w è legata agli spostamenti nodali w_i attraverso

una funzione lineare, e alle rotazioni attraverso delle funzioni paraboliche [17]. Il modello delle funzioni di forma utilizzate è riportato di seguito.

$$u = \sum_{i=1}^4 L_i(\xi, \eta) u_i$$

$$v = \sum_{i=1}^4 L_i(\xi, \eta) v_i$$

$$w = \sum_{i=1}^4 L_i(\xi, \eta) w_i + P_{x,i}(\xi, \eta) \theta_{x,i} + P_{y,i}(\xi, \eta) \theta_{y,i}$$

$$\theta_x = \sum_{i=1}^4 L_i(\xi, \eta) \theta_{x,i}$$

$$\theta_y = \sum_{i=1}^4 L_i(\xi, \eta) \theta_{y,i}$$

È importante sottolineare come il processo di integrazione numerica per risalire alle funzioni di forma, alle loro derivate, e alla matrice Jacobiana, è stato effettuato utilizzando il metodo di quadratura di Gauss. Questo metodo permette di calcolare il valore delle funzioni appena descritte in un numero prefissato di punti significativi, ottenendo un elevato grado di precisione, ma con uno sforzo computazionale inferiore rispetto al calcolo degli integrali definiti.

Dopo aver effettuato la discretizzazione, la definizione della matrice di rigidità secante e tangente ha costituito il passo seguente per l'implementazione del modello. In particolare la prima può essere definita come segue [6]:

$$K_s = \int_A ((B_{ib}^0)^T D_{ib} B_{ib}^0 + \frac{1}{2} (B_{ib}^0)^T D_{ib} B_i^L + (B_i^L)^T D_{ib} B_{ib}^0 + \frac{1}{2} (B_i^L)^T D_{ib} B_i^L) dA + \int_A (B_s^0)^T D_s B_s^0 dA$$

Nella precedente espressione B_{ib}^0 è la matrice che mette in relazione gli spostamenti e le deformazioni in piano e flessionali, B_i^L rappresenta la matrice spostamenti-deformazioni non lineare, mentre B_s^0 è la matrice che collega spostamenti e deformazioni di taglio. Esse sono definite come di seguito.

$$B_{ib}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$B_i^L = \begin{bmatrix} 00 & \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial P_{x,1}}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial P_{y,1}}{\partial x} & 00 & \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial P_{x,4}}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial P_{y,4}}{\partial x} \\ 00 & \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial P_{x,1}}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial P_{y,1}}{\partial y} & 00 & \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial P_{x,4}}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial P_{y,4}}{\partial y} \\ 00 & \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial P_{x,1}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial P_{x,1}}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial P_{y,1}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial P_{y,1}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial N_4}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial P_{x,4}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial P_{x,4}}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial P_{y,4}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial P_{y,4}}{\partial y} \\ 00 & 0 & 0 & 0 & 00 & 0 & 0 & 0 \\ 00 & 0 & 0 & 0 & 00 & 0 & 0 & 0 \\ 00 & 0 & 0 & 0 & 00 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_s^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial P_{x,1}}{\partial x} + N_1 & \frac{\partial P_{y,1}}{\partial x} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial P_{x,4}}{\partial x} + N_4 & \frac{\partial P_{y,4}}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial P_{x,1}}{\partial y} & \frac{\partial P_{y,1}}{\partial y} + N_1 & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial P_{x,4}}{\partial y} & \frac{\partial P_{y,4}}{\partial y} + N_4 \end{bmatrix}$$

È bene notare che nel caso della matrice B_i^L vi sono delle derivate degli spostamenti da tenere in considerazione. Esse sono calcolate basandosi sui valori degli spostamenti ottenuti dall'iterazione precedente nel metodo di Newton-Raphson. Esse sono espresse come di seguito.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial L_i}{\partial x} \cdot u_i^p$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial L_i}{\partial y} \cdot u_i^p$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial L_i}{\partial x} \cdot v_i^p$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial L_i}{\partial y} \cdot v_i^p$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial L_i}{\partial x} \cdot w_i^p + \frac{\partial P_{x,i}}{\partial x} \cdot \theta_{x,i}^p + \frac{\partial P_{y,i}}{\partial x} \cdot \theta_{y,i}^p$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial L_i}{\partial y} \cdot w_i^p + \frac{\partial P_{x,i}}{\partial y} \cdot \theta_{x,i}^p + \frac{\partial P_{y,i}}{\partial y} \cdot \theta_{y,i}^p$$

Dove $u_i^p, v_i^p, w_i^p, \theta_{x,i}^p, \theta_{y,i}^p$ sono i valori degli spostamenti nodali dell'elemento, calcolati nella precedente iterazione.

Le matrici D_{ib} e D_0 sono le sottomatrici del materiale contenenti le componenti planari e flessionali la prima, di taglio la seconda. Detta z^{k+} la quota della faccia superiore dello strato k e z^{k-} quella della faccia inferiore, le componenti planari, flessionali, di accoppiamento e di taglio possono essere scritte rispettivamente come:

$$[A] = \sum_{k=1}^{\text{numero strati}} [\bar{Q}_P^k] (z^{k+} - z^{k-})$$

$$[B] = \sum_{k=1}^{\text{numero strati}} [\bar{Q}_P^k] \left(\frac{(z^{k+})^2}{2} - \frac{(z^{k-})^2}{2} \right)$$

$$[D] = \sum_{k=1}^{\text{numero strati}} [\bar{Q}_P^k] \left(\frac{(z^{k+})^3}{3} - \frac{(z^{k-})^3}{3} \right)$$

$$[AT] = \sum_{k=1}^{\text{numero strati}} [\bar{Q}_T^k] (z^{k+} - z^{k-})$$

Le matrici D_{ib} e D_0 , saranno quindi assemblate come segue.

$$[D_{ib}] = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & D \end{bmatrix}$$

$$[D_0] = [AT]$$

Per quanto riguarda la definizione della matrice tangente, come già descritto precedentemente, essa è uguale alla variazione del residuo tra le forze esterne e quelle interne, valutato rispetto all'incremento degli spostamenti

$$K_T = \frac{\partial R}{\partial D}$$

Per il calcolo agli elementi finiti la sua formulazione è la stessa utilizzata nel lavoro di Pica, Wood e Hinton [6] ed assume la forma seguente

$$K_T = \int_A ((B_{ib}^0)^T D_{ib} B_{ib}^0 + (B_{ib}^0)^T D_{ib} B_i^L + (B_i^L)^T D_{ib} B_{ib}^0 + (B_i^L)^T D_{ib} B_i^L) dA + \int_A (B_S^0)^T D_S B_S^0 dA + \int_A (dB_{ib})^T \hat{\sigma}_{ib} dA$$

Dove i termini nel primo integrale rappresentano le componenti nel piano e flessionale della matrice di rigidità, nel secondo integrale troviamo i termini legati allo sforzo di taglio nel piano, mentre nell'ultima parte c'è la cosiddetta matrice dello stress iniziale (o matrice geometrica). Quest'ultima può essere espressa come

$$K_\sigma = \int_A G^T S G dA$$

In cui la matrice S è una matrice 2x2 contenente le forze nel piano orizzontale, e lo sforzo di taglio nello stesso:

$$S = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix}$$

Mentre la matrice G è una 2x20, contenente nella prima riga le derivate delle funzioni di forma rispetto a x, e nella seconda quelle fatte rispetto a y:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial P_{x,1}}{\partial x} & \frac{\partial P_{y,1}}{\partial x} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial L_4}{\partial x} & \frac{\partial P_{x,4}}{\partial x} & \frac{\partial P_{y,4}}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial L_1}{\partial y} & \frac{\partial P_{x,1}}{\partial y} & \frac{\partial P_{y,1}}{\partial y} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial L_4}{\partial y} & \frac{\partial P_{x,4}}{\partial y} & \frac{\partial P_{y,4}}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Con queste matrici è stato possibile risalire alle matrici di rigidità secante e tangente, e procedere al calcolo dello stato di equilibrio non lineare.

Come riportato precedentemente, l'integrazione viene effettuata attraverso il metodo di quadratura di Gauss. In ogni elemento e della struttura, considerando quindi l'i-esimo nodo della quadratura, con un peso di W_i e in il determinante della matrice Jacobiana ha un valore di DJ_i , le matrici di rigidità secante e tangente nel singolo nodo di Gauss saranno:

$$K_s = \left([B_{ib(i)}^0]^T [D_{ib}] [B_{ib(i)}^0] + \frac{1}{2} [B_{ib(i)}^0]^T [D_{ib}] [B_i^L(i)] + [B_i^L(i)]^T [D_{ib}] [B_{ib(i)}^0] + \frac{1}{2} [B_i^L(i)]^T [D_{ib}] [B_i^L(i)] + [B_S^0(i)]^T [D_0] [B_S^0(i)] \right) W_{(i)} DJ_{(i)}$$

$$K_T = \left([B_{ib(i)}^0]^T [D_{ib}] [B_{ib(i)}^0] + [B_{ib(i)}^0]^T [D_{ib}] [B_i^L(i)] + [B_i^L(i)]^T [D_{ib}] [B_{ib(i)}^0] + [B_i^L(i)]^T [D_{ib}] [B_i^L(i)] + [B_S^0(i)]^T [D_0] [B_S^0(i)] + [G(i)]^T S [G(i)] \right) W_{(i)} DJ_{(i)}$$

Sommando i contributi in tutti i nodi di Gauss si ottengono le matrici di rigidezza del singolo elemento. Una volta ricavate tutte le matrici per tutti gli elementi, queste dovranno essere assemblate in base alla matrice di connectivity del sistema.

Per il calcolo dello stato di equilibrio non lineare, individuati i nodi relativi ai vincoli del sistema (compresi eventuali spostamenti controllati nell'estremo libero), si passa alla partizione della matrice di rigidezza secante. Detti I_V i nodi vincolati e I_L quelli liberi, si potrà scrivere il residuo come:

$$\{R\} = K(I_L, I_L)Q(I_L) + K(I_L, I_V)Q(I_V) - F$$

Riprendendo il metodo di Newton-Raphson descritto nel capitolo 2.2, si calcoleranno gli incrementi di spostamento, si andrà ad aggiornare la matrice Q degli spostamenti, e se la norma del residuo è maggiore della tolleranza, il metodo inizierà un'altra iterazione, con il relativo ricalcolo delle matrici.

Tuttavia, per ragioni di costi computazionali, la matrice di rigidezza tangente non viene calcolata ad ogni iterazione, ma viene aggiornata occasionalmente (Metodo Newton-Raphson Modificato). In particolare, essa sarà aggiornata ad ogni incremento di carico.

4.3 Rilevamento del cedimento e modellazione del danneggiamento

Dopo aver definito tutte le caratteristiche meccaniche del materiale, con annesse le matrici di rigidezza del sistema, e dopo aver effettuato l'assemblaggio sia di queste ultime, sia del vettore dei carichi applicati ai nodi, si passa a determinare lo stato di equilibrio del sistema.

Per ogni livello di carico, attraverso un numero predefinito di iterazioni, si arriva ad una soluzione convergente, nella quale la norma del residuo, definito come la differenza tra le forze interne ed esterne, è minore di una tolleranza impostata dall'utente (per questo lavoro è pari a 10^{-3}).

$$\{R\} = [K_S]\{D\} - \{F\} < \text{tolleranza}$$

A questo punto si passa alla determinazione degli spostamenti associati allo stato di equilibrio rilevato, e, attraverso un apposito script, si va ad effettuare il processo di recupero delle deformazioni prima e degli stress, poi. La rilevazione avviene per ogni elemento, e per ogni strato dell'elemento stesso. Dopo aver ottenuto le prime, utilizzando le derivate delle matrici Spostamenti-Deformazioni, per ogni elemento sarà necessario ricalcolare le matrici di rigidezza ridotte, attraverso una funzione che tenga conto della proprietà meccaniche del materiale in quell'esatto step di analisi. Solo a questo punto sarà possibile ottenere valori adeguati per gli stress, che saranno immagazzinati di volta in volta in una matrice tridimensionale.

Con i valori appena rilevati, si potranno andare a determinare gli indici di Failure.

Per fare questo è necessario trasformare gli stress calcolati in assi geometrici, in stress orientati secondo gli assi principali del materiale, o assi di ortotropia, in quanto i criteri di cedimento

sono definiti secondo questi assi. Per ottenere questa trasformazione si fa riferimento al procedimento descritto nel capitolo 2.3.

A questo punto, in base al criterio di cedimento scelto a monte per l'analisi, il programma andrà a confrontare se le condizioni di failure, per ogni elemento, e per ogni stato dello stesso, sono soddisfatte. In caso di responso negativo si passerà all'analisi dello strato o dell'elemento successivo.

Nel caso in cui il programma, invece, rileva che in un particolare punto i valori ammissibili di stress sono stati superati, segnala che in quell'elemento, in un particolare strato è avvenuto un cedimento.

Contestualmente a questo rilevamento, il programma valuta anche se la Failure è avvenuta a livello delle fibre, della matrice. Nel caso dei criteri di Massimo Stress, Tsai-Wu e Hoffman è previsto anche un terzo modo di cedimento, quello dedicato allo scorrimento di taglio.

Nelle metodologie di implementazione dei vari criteri, escludendo il caso di Hashin, che intrinsecamente prevede una divisione tra i modi di rottura, si è dovuto ricercare un metodo che permettesse di distinguere tra rottura della matrice o delle fibre.

Nel caso del criterio di Massimo Stress, si è associato alla rottura delle fibre, il superamento dei valori ammissibili longitudinali a trazione e a compressione (precedentemente definiti come X_T e X_C). Per quanto riguarda la rottura della matrice, invece, essa viene rilevata quando lo stress σ_{22} supera i limiti di resistenza trasversali (Y_T e Y_C). Sebbene quest'ultima pratica sia comunemente utilizzata nell'analisi progressiva del danno, Nastran non permette di fare questa distinzione.

Discorso diverso vale per i criteri polinomiali, la cui determinazione dei modi di cedimento non è immediata. Per questi infatti si deve ricorrere alla metodologia ideata da Reddy [8] secondo la quale si vanno a definire sei componenti di stress, dividendo in maniera opportuna l'espressione per ricavare l'indice di cedimento prevista da Tsai Wu e Hoffman. In caso stato di tensione piano, e analisi bidimensionale, le componenti di stress si riducono a tre:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= F_1\sigma_{11} + F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} \\ \phi_2 &= F_2\sigma_{22} + F_{22}\sigma_{22}^2 + F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} \\ \phi_4 &= F_{66}\tau_{12}^2\end{aligned}$$

Si passerà quindi a rilevare quale di questi tre contributi abbia il valore maggiore e conseguentemente si identificherà il modo di cedimento sulla base di questa valutazione. Si considerano cedute le fibre se è la prima componente ad essere maggiore, si considera ceduta la matrice se invece sarà la seconda ad avere il valore più elevato.

Una volta completata la fase di identificazione del cedimento e rilevamento del modo, si passerà a recuperare i valori delle caratteristiche meccaniche del materiale non danneggiato, precedentemente immagazzinate in matrice tridimensionale apposita. In particolare, a seconda del modo di cedimento, cambieranno i valori delle proprietà meccaniche recuperate. Questi dati saranno inseriti come input in una funzione di degradazione, che a seconda del modello

scelto a monte dall'utente (istantaneo o graduale), provvederà a modificarli e restituirli come output.

Se si utilizza il modello di degradazione istantanea, un passaggio fondamentale che il programma esegue a questo livello è identificare se in un dato elemento, per un certo strato è già avvenuto un cedimento. In questo modello infatti, le proprietà meccaniche possono essere ricalcolate solo una volta. Quando questo avviene si andrà ad identificare l'avvenuta failure attraverso un flag. Pertanto, prima di iniziare un nuovo processo di degradazione, la funzione atta a svolgere questo, effettua un check sul valore di questo flag, per evitare ridegradazioni non desiderate.

Nel caso di degradazione graduale, il flag appena introdotto sarà sostituito da un numero di iterazioni effettuate. In questo modo si terrà conto di quante volte è avvenuta la degradazione in un particolare punto, ed una volta che il numero di iterazioni è tale da aver raggiunto il SRC, questo processo si arresta per un particolare strato di un elemento, non permettendo una degradazione ulteriore.

Terminato il processo per la determinazione delle nuove proprietà meccaniche per tutti gli elementi soggetti a danneggiamento, sarà necessario ricalcolare tutte le matrici di rigidezza. Questo passaggio avverrà nel momento in cui si passerà ad analizzare lo step di carico successivo, quindi nel momento in cui una nuova analisi non lineare con il metodo di Newton-Raphson sarà introdotta. Il ricalcolo delle matrici avverrà esattamente nello stesso modo descritto in precedenza, con l'unica differenza rappresentata dai diversi valori di input da processare.

In teoria, dopo aver terminato il processo di identificazione del cedimento ad un dato livello di carico, con relativa degradazione, dovrebbe essere previsto un ristabilimento delle condizioni di equilibrio per il sistema. Tuttavia, questo ulteriore processo di calcolo, al quale dovrebbe seguire anche un ulteriore processo di rilevamento di failure, aumenterebbe esponenzialmente il tempo di esecuzione dello script. Per tale motivo, considerando che per incrementi di spostamento (o di carico) scelti sufficientemente piccoli questo processo è trascurabile [5], nel programma implementato non si prevede un ristabilimento delle condizioni di equilibrio.

4.4 Esecuzione del programma

In questo capitolo si andranno a descrivere gli step fondamentali per eseguire correttamente il programma in codice MATLAB e settare tutti i parametri necessari. Il codice finale è stato ottenuto partendo da un programma pre-esistente, elaborato dal Prof. Marco Gherlone, che permetteva un'analisi lineare agli elementi finiti di piastre multistrato, che è stato elaborato e riadattato per svolgere un'analisi progressiva non lineare di strutture in composito.

Una volta aperto lo script principale da eseguire (“PIASTRAFEM_PFA.mat”), il codice passerà in esame una subroutine atta ad assegnare tutte le proprietà alla piastra da analizzare. Quest’ultima in particolare avrà innanzitutto il compito di definire la tipologia di analisi da sviluppare, e quale tipo di degradazione applicare. Si potrà scegliere tra una degradazione istantanea e una graduale.

Successivamente bisognerà definire le proprietà geometriche del campione e la conseguente matrice delle coordinate dei nodi, ed in questa fase ci sono due opzioni di cui l’utente può usufruire:

- Definizione manuale delle dimensioni della piastra (che avrà necessariamente una forma rettangolare) e del numero di divisioni secondo la direzione x e y (che andranno poi a determinare il numero di elementi finiti); successivamente la matrice delle coordinate dei nodi sarà determinata calcolando la distanza tra un nodo e l’altro in direzione x e y;
- Definizione diretta della matrice delle coordinate nodali estrapolando la stessa dal file esecutivo ricavato attraverso il software commerciale Patran. In particolare, questo software genera un file nel quale sono disponibili le coordinate dei nodi, già elaborate sotto forma matriciale, e quindi l’utente deve limitarsi a considerare quegli stessi valori, generando direttamente la matrice delle coordinate.

Ulteriore step è rappresentato dalla definizione della matrice di connectivity degli elementi, e anche in questo caso l’utente ha due soluzioni diverse da poter adottare, entrambe strettamente collegate al metodo scelto precedentemente per la definizione della matrice delle coordinate nodali. Infatti, l’utente, se ha scelto di definire manualmente le dimensioni della piastra, può procedere con l’automatica definizione della matrice di connectivity, attraverso un processo implementato nello script. Alternativamente, se la definizione delle coordinate nodali è avvenuta attraverso il file esecutivo generato da Patran, la matrice di connectivity sarà ricavata nello stesso modo, estrapolandola quindi dallo stesso file.

Definite queste due matrici, bisognerà calcolare un’ulteriore matrice di connectivity, ma questa volta relativa ai gradi di libertà per ogni elemento, nella quale si assegneranno ad ognuno di questi gli spostamenti nodali possibili.

A questo punto, attraverso un’ulteriore subroutine, si passerà alla definizione delle caratteristiche di laminazione, che comprendono il numero di strati, e, per ognuno di essi, l’orientamento delle fibre, la tipologia di materiale assegnato e la coordinata in direzione perpendicolare al piano della faccia superiore e inferiore.

Attraverso queste caratteristiche, sarà infine possibile ricavare le funzioni di forma, le prime matrici di rigidezza ridotta, le matrici planari, flesso torsionali, di accoppiamento e di taglio.

Successivamente, nel programma principale, si procede con il calcolo della matrice di rigidezza K_{ib} (relativa alle componenti planari e flessionali) e K_s (nella quale sono presenti le componenti di taglio). Con queste informazioni è possibile ricavare la matrice di rigidezza secante e tangente per il singolo elemento, attraverso le formule descritte in precedenza,

passando poi ad assemblarle per ottenere le matrici di rigidezza del sistema all'inizio dell'analisi.

L'utente a questo punto ha la possibilità di scegliere se eseguire un'analisi in controllo di carico o in controllo di spostamento. Nel primo caso, si imposta un valore di carico distribuito finale, e il numero di step nel quale questo stesso carico deve essere diviso. Nel secondo invece sarà lo il valore dello spostamento imposto finale ad essere richiesto, e anche in questo caso si possono decidere il numero di step e la loro suddivisione.

Per gli scopi di questo lavoro di tesi è stata impostata la soluzione che prevede l'analisi in controllo di spostamento.

In entrambi i casi, sarà necessario andare a fornire le condizioni al contorno, e quindi i vincoli del sistema. Di seguito si descriverà la definizione delle condizioni al contorno nel caso di analisi in controllo di spostamento, ma il processo nel caso di controllo di carico è fondamentalmente lo stesso, a meno dell'imposizione dello spostamento controllato nei nodi dell'estremo libero.

Innanzitutto occorrerà determinare quali siano i nodi di bordo della struttura, e conseguentemente i gradi di libertà in ognuno di essi. Nello script sono inoltre impostate di default alcune condizioni di vincolo, come l'incastro, l'appoggio e la simmetria. L'utente dovrà quindi selezionare la tipologia di vincolo desiderata.

Nel caso di analisi in controllo di spostamento bisognerà impostare il valore dello spostamento controllato, assegnandolo correttamente ai nodi di bordo.

Ulteriore passo è rappresentato dall'inserimento dei dati sui carichi (se necessari). Nel caso di analisi PFA in controllo di carico è stata implementata una funzione apposita per assegnare ai vari nodi di bordo il valore del carico ad ogni step di analisi. Questi carichi saranno assemblati successivamente, per ogni step di carico.

Eseguite tutte le precedenti azioni preliminari, l'analisi potrà cominciare sottoponendo il modello numerico alla prima condizione di spostamento (o carico). Per ogni step successivo, sarà eseguita un'analisi non lineare, che si compone di 400 iterazioni, al fine di arrivare ad una soluzione convergente. Al momento della prima iterazione, ma solo a partire dal secondo step di carico, verrà aggiornata la matrice di rigidezza secante e tangente per il sistema.

A questo punto, l'analisi non lineare proseguirà attraverso le modalità descritte nei capitoli precedenti, portando alla determinazione degli stress nella struttura e alla successiva determinazione di eventuali cedimenti. Questi cedimenti origineranno una degradazione delle proprietà meccaniche, come descritto nel capitolo 4.3.

Importante è sottolineare come l'utente possa selezionare, prima di iniziare l'analisi, il criterio di rottura desiderato.

Nel corso dell'analisi sono previsti dei particolari comandi per far sì che ad ogni step di carico siano immagazzinati in opportuni file: gli spostamenti nodali (relativi a tutti i gradi di libertà), le componenti nodali della forza applicata nei nodi all'estremo libero per la prova a trazione, la matrice con i flag relativi all'avvenuto cedimento in un dato strato di un elemento (nel caso del modello di degradazione graduale, questa matrice è sostituita con quella contenente il

numero di cedimenti avvenuti in ogni strato del singolo elemento), e le componenti di stress in assi geometrici σ_x , σ_y , τ_{xy} . Questi dati serviranno per il post processing dei risultati.

Di seguito, in Figura 41, è riportato un flow chart che riassume le principali operazioni svolte dal programma implementato in codice MATLAB.

In Figura 42, invece, è possibile osservare più nello specifico il processo che porta alla definizione delle matrici di rigidezza secante K e tangente K_t .

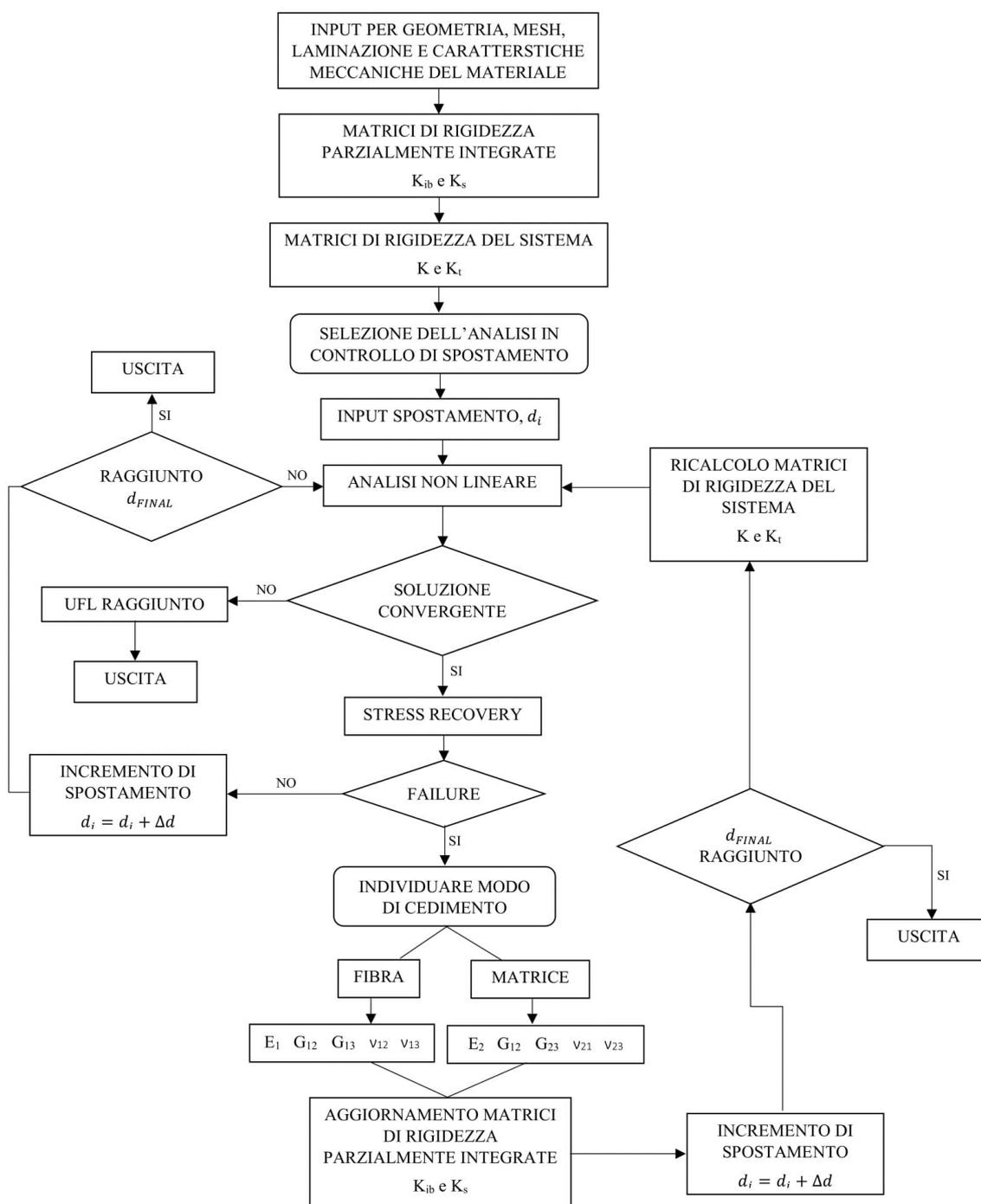


Figura 41 Flow-Chart relativo al programma in Codice MATLAB con analisi in controllo di spostamento

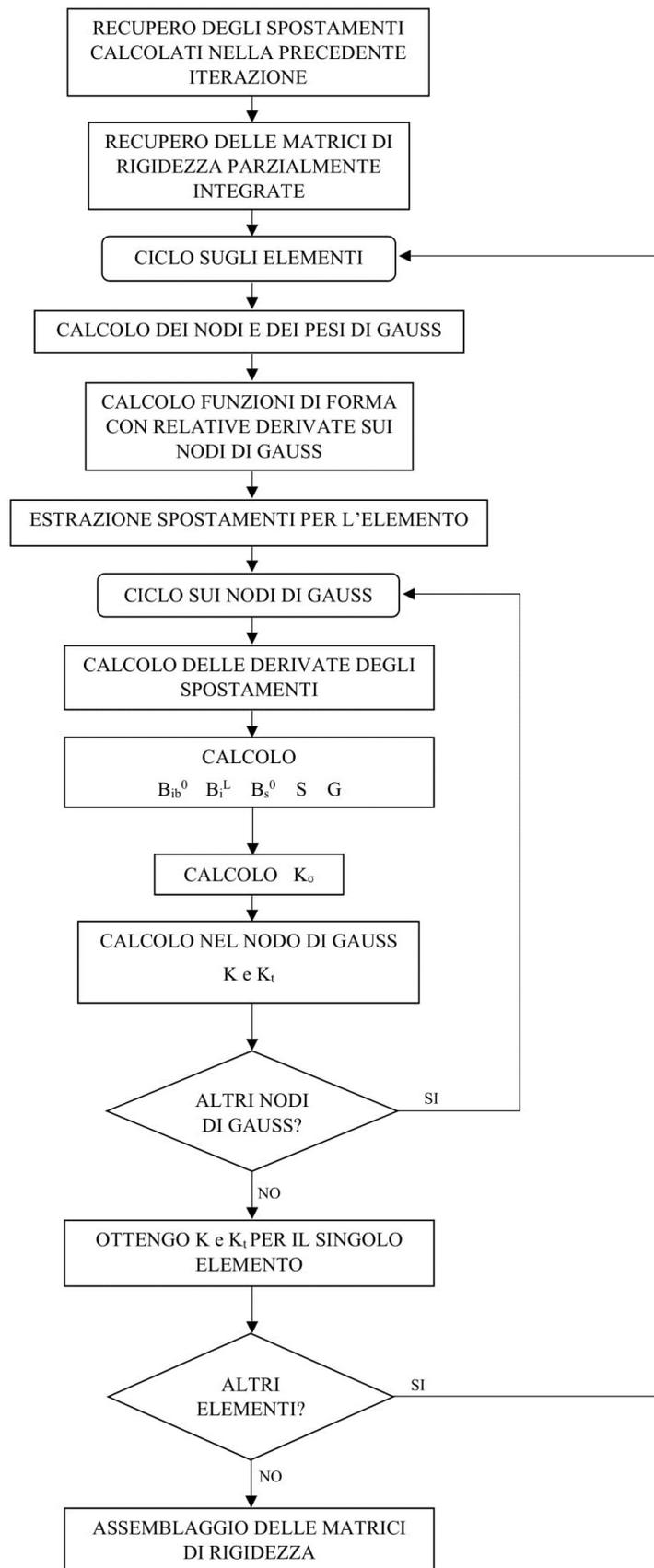


Figura 42 Flow-Chart per il calcolo delle matrici di rigidezza secante e tangente

4.5 Post Processing e verifica dei risultati

Al fine di verificare i risultati ottenuti dalle simulazioni e visualizzare il processo di danneggiamento sulla struttura in esame, che si ricorda essere quella analizzata da Chang e Chang [1], è stato necessario implementare una serie di script che elaborassero gli output ottenuti.

Sono state effettuate delle simulazioni di analisi progressiva del danneggiamento attraverso degradazioni istantanee e graduali di quattro criteri di cedimento: Massimo Stress, Hashin, Tsai-Wu e Hoffman. Per ognuno di essi, il primo risultato ad essere mostrato sarà il grafico Forza-Spostamento, che consente di individuare il punto in cui avviene la rottura finale del campione, ovvero l'Ultimate Failure Load.

Per quanto concerne le simulazioni eseguite con modello di degradazione istantanea, i risultati di maggior interesse che si è deciso di rappresentare sono i seguenti:

- Elementi che abbiano manifestato un cedimento in almeno uno degli strati al momento dell'Ultimate Failure Load, in maniera tale da avere una panoramica relativa all'entità del danneggiamento all'interno della struttura;
- Elementi che mostrano un cedimento al manifestarsi del First Ply Failure;
- Numero di strati per ogni elemento che hanno manifestato un cedimento a livello delle fibre e a livello della matrice.

Quest'ultimo risultato è particolarmente significativo, in quanto consente di capire a quale modo di rottura è imputabile il cedimento finale della struttura.

Relativamente al caso di degradazione graduale delle proprietà del materiale, i risultati che saranno mostrati, oltre al grafico Forza-Spostamento su citato, sono:

- Numero di degradazioni avvenute per ogni elemento al momento dell'Ultimate Failure Load, in uno strato scelto in fase di post-processing dall'utente, per quanto riguarda sia il cedimento delle fibre sia quello della matrice;
- Numero massimo di degradazioni avvenute in ogni elemento, identificato attraverso il numero di degradazioni subite dallo strato maggiormente danneggiato.

4.5.1 Risultati per il criterio del Massimo Stress

Parallelamente a quanto effettuato per le simulazioni con il software Patran, il primo criterio attraverso il quale si vanno ad effettuare delle valutazioni è quello del Massimo Stress.

Dato che intrinsecamente il criterio non prevede una distinzione tra i modi di cedimento, nell'implementazione si è asserito che le fibre di un dato strato cedono se lo stress rilevato supera i valori di resistenza a compressione o trazione longitudinali (X_T o X_C), mentre la matrice cede se sono i valori trasversali di resistenza ad essere superati. Per completezza, è

stato previsto anche un terzo modo di cedimento, quello a scorrimento, che si manifesta nel caso in cui lo stress di taglio supera il limite di resistenza a taglio in piano S_{12} . Tuttavia in questo particolare caso analizzato, con uno stato tensionale unidirezionale a trazione, questo modo di cedimento non sarà rilevante.

In Figura 43, è riportato il grafico Forza-Spostamento per il criterio di Massimo stress con modello di danneggiamento istantaneo.

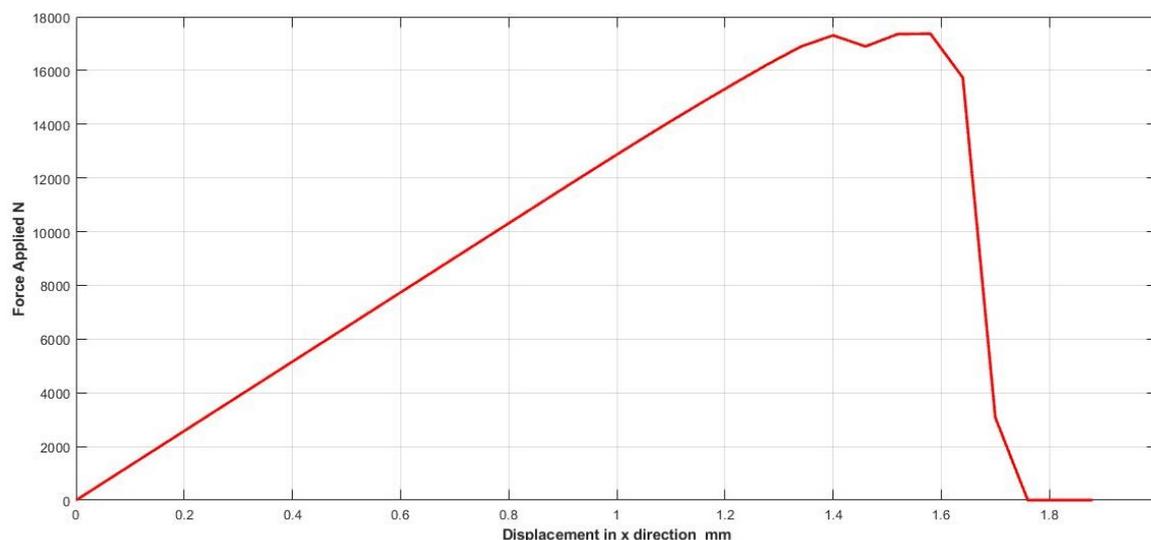


Figura 43 Curva Forza/Spostamento per il caso di Massimo stress con degradazione istantanea ottenuto con simulazione in MATLAB

È subito evidente, se si compara il precedente grafico con quello in Figura 24, che il comportamento e l'andamento delle curve ricavate attraverso il software commerciale e il programma implementato in codice MATLAB sono prettamente i medesimi. In particolare, si nota come anche in questo caso il primo tratto sia fondamentalmente lineare, finché non si giunge a dei valori di spostamento e forza critici. Nell'intervallo di spostamenti compreso tra 1.4mm e 1.6mm si nota un decremento della forza risultante, sintomo che in quel momento dell'analisi il numero di elementi danneggiati si avvicina al valore critico e la matrice di rigidità presenta una chiara riduzione dei suoi coefficienti. Confrontando questo risultato con quello rilevato attraverso l'analisi in Patran, si vede che, se in quest'ultima, proprio in questo intervallo, si manifestava l'Ultimate Failure Load, i risultati in MATLAB mostrano capacità del campione di continuare a sostenere carichi fino ad uno spostamento di circa 1.65mm, sebbene il valore di UFL sia simile (17371 N).

Analizzando il comportamento relativo al First Ply Failure, in Figura 44 sono riportati gli elementi nei quali questo fenomeno si manifesta.

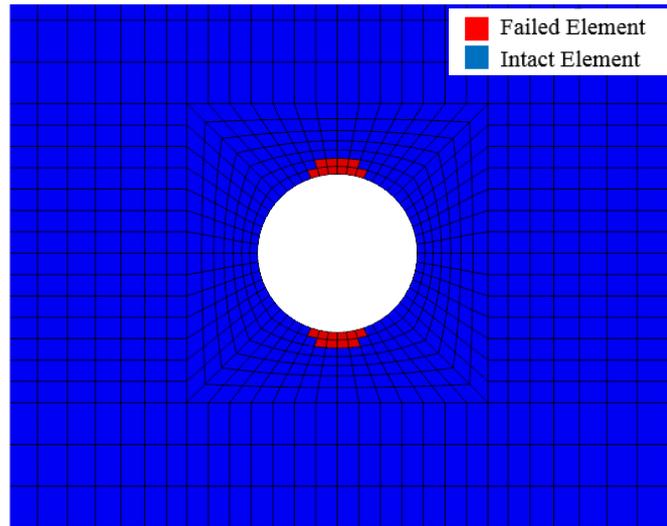


Figura 44 Rappresentazione degli elementi soggetti a First Ply Failure per il criterio del Massimo Stress con degradazione istantanea

Si intuisce subito come il comportamento al momento del FPF sia in linea con quello rilevato nelle precedenti simulazioni in Patran e con i risultati sperimentali. Gli elementi sul bordo del foro centrale, disposti sulla direttrice ortogonale alla direzione di applicazione del carico sono i primi a manifestare cedimento. L'unica differenza sostanziale sta nel numero di elementi che raggiungono questa condizione, poiché come si può osservare essi sono leggermente aumentati. Ciononostante questa lieve differenza non interferisce sulle modalità di progressione del danno.

Successivamente nelle Figure 45 e 46 possiamo osservare quanti strati per ogni elemento abbiano evidenziato un cedimento, rispettivamente nella matrice e nelle fibre. Il pattern che ne risulta è esattamente quello che ci si aspetterebbe, in quanto si può dedurre che la cricca tramire la quale il campione arriverà a rottura evolve dai bordi del foro centrale fino all'estremità della piastra.

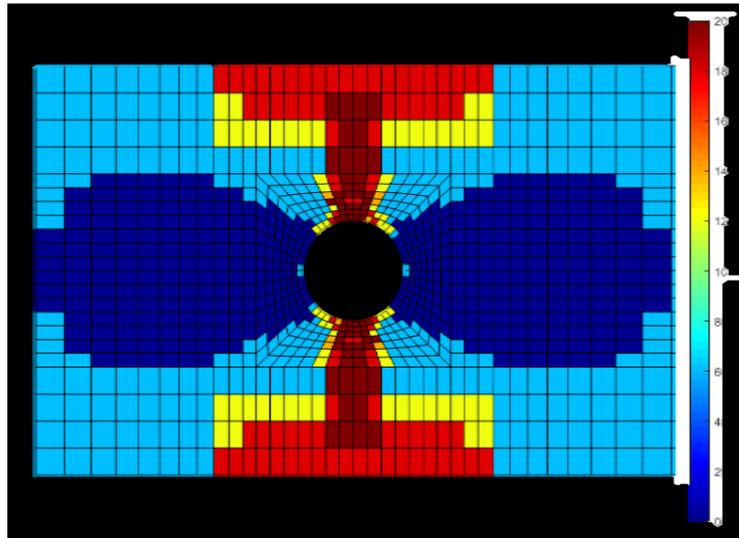


Figura 45 Numero di strati soggetti a cedimento della matrice per il caso di Massimo Stress con degradazione istantanea

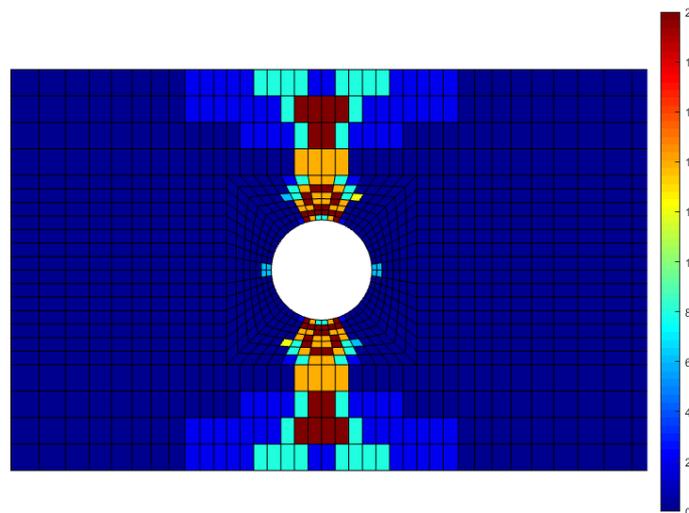


Figura 46 Numero di strati soggetti a cedimento delle fibre per il caso di Massimo Stress con degradazione istantanea

Inoltre, come intuitivamente ci si aspetterebbe, è la matrice ad essere maggiormente danneggiata, in quanto la ridotta resistenza ai carichi di quest'ultima e le particolari condizioni di tensione sviluppate, influiscono maggiormente sulle componenti della matrice stessa.

Una caratteristica interessante da sottolineare, e che può essere osservata anche in Figura 47, è che, a differenza delle simulazioni svolte in Patran (si veda la Figura 18), anche gli elementi più lontani dal foro centrale subiscono almeno un cedimento, avendo un numero di strati danneggiati che va da cinque a sette. Questo comportamento evidenzia una maggiore propensione al cedimento da parte di tutta la struttura, con conseguente maggior diffusione del danneggiamento, almeno nel caso dell'analisi in MATLAB.

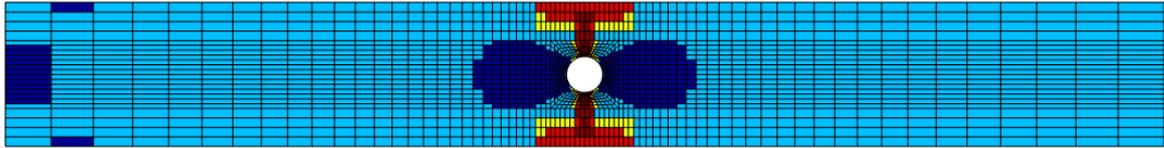


Figura 47 Numero di strati soggetti a cedimento della matrice per il caso di Massimo Stress con degradazione istantanea - Visualizzazione estesa

Infine nell'immagine successiva, è presente una visualizzazione complessiva di tutti gli elementi soggetti almeno ad un cedimento, sia dovuto alle fibre che alla matrice, nella zona centrale del campione, quella in cui esso si rompe.

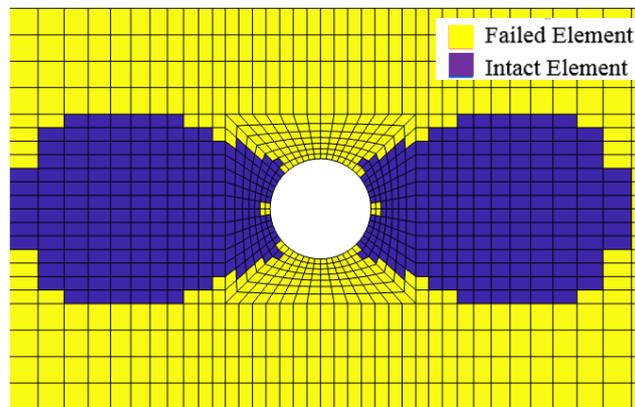


Figura 48 Cedimento complessivo per il caso di Massimo Stress con degradazione istantanea

Passando ora alla simulazione effettuata con un modello di degradazione graduale, possiamo notare in Figura 49 un comportamento insolito per la curva Forza/Spostamento.

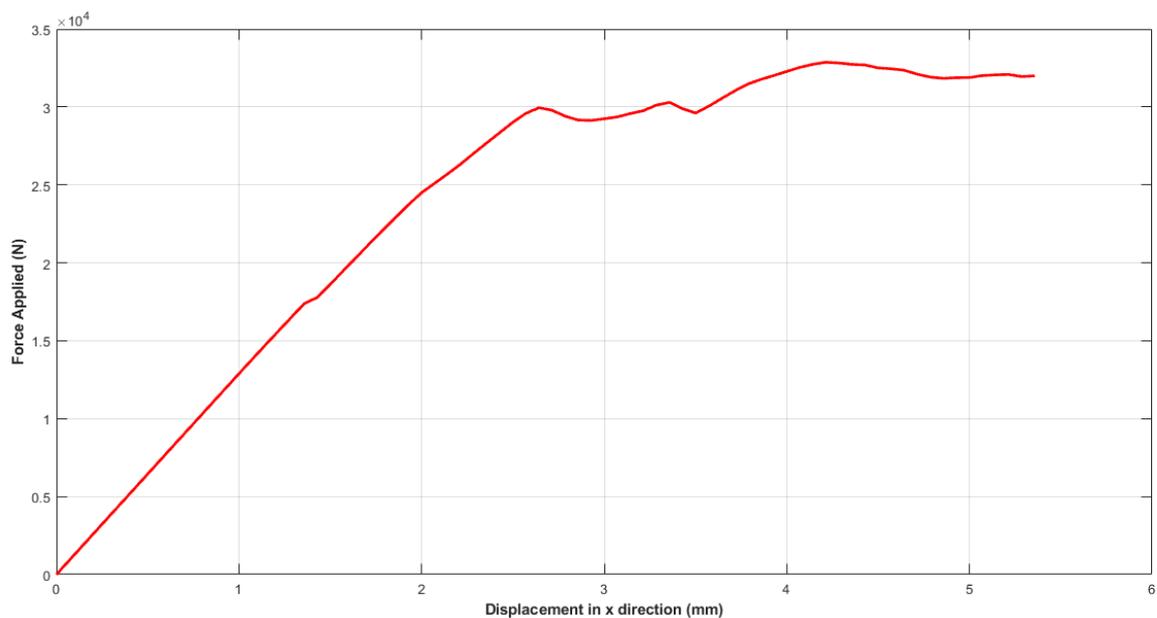


Figura 49 Curva Forza/Spostamento per il caso di Massimo stress con degradazione graduale ottenuto con simulazione in MATLAB

Si ricorda che per questa simulazione il fattore di degradazione utilizzato è pari a “0.5”.

Sebbene il valore di picco rilevato sia compatibile con quello rilevato attraverso la simulazione in Patran, si osserva che dopo il raggiungimento del carico finale di rottura, non si verifica una repentina riduzione della forza risultante, ma essa continua ad oscillare intorno allo stesso valore di Ultimate Failure Load, producendo così un’elongazione del campione di molto superiore a quella prevista nei casi precedenti.

A questo punto ci sono quindi due differenti osservazioni da fare. La prima è che come già spiegato precedentemente, il valore più elevato del carico di rottura previsto per la degradazione graduale è da ricondursi al fatto che gli elementi non subiscono una repentina riduzione delle proprietà meccaniche, e queste continuano ad avere valori tali da continuare a sopportare carichi.

La seconda osservazione è relativa al metodo con cui si definisce il valore ultimo di cedimento del materiale. In questo caso infatti, si considera raggiunto questo limite nel momento in cui tutti gli elementi hanno ceduto lungo una linea che divide in due la struttura. Se Nastran, nella visualizzazione del grafico Forza/Spostamento, tiene conto di questa particolare definizione, nell’implementazione in MATLAB, questo comportamento viene visto come una continua elongazione del campione, seppur esso ha già manifestato la rottura definitiva.

A seguito di questo risultato, che conferma il carico critico di rottura rilevato precedentemente, si può pensare che l’affidabilità della degradazione graduale deve fare sempre riferimento alla dimensione della cricca in ogni singolo elemento, comparata con la dimensione dell’elemento stesso. Nel caso di mesh più fini, l’utilizzo di degradazione istantanea produce risultati più attendibili, in quanto le dimensioni appena citate sono simili tra loro. Se invece viene adoperata una mesh più grossolana, la degradazione graduale è giustificata, in quanto aiuta a simulare meglio l’evoluzione dei cedimenti.

Questo comportamento è confermato anche dall’immagine seguente, nella quale è rappresentato il numero massimo di degradazioni avvenute nel singolo elemento, al momento dell’Ultimate Failure Load.

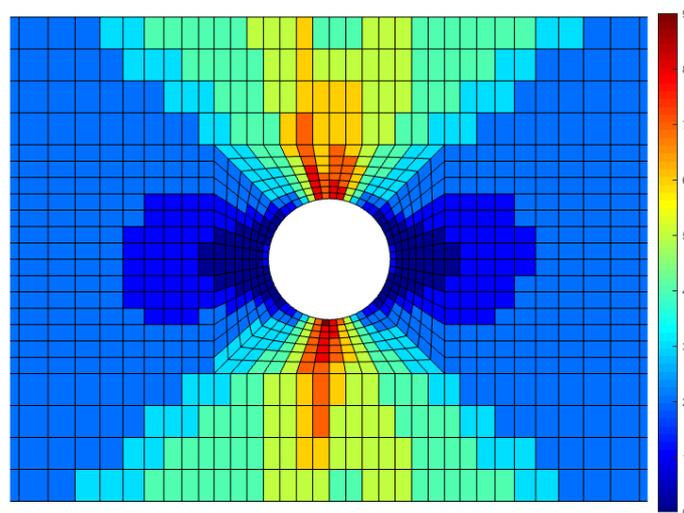


Figura 50 Numero massimo di degradazioni avvenute in ogni elemento per il caso di Massimo Stress con danneggiamento graduale

Di fatto, si osserva che nella zona adiacente il foro, e che si estende lungo il pattern di rottura precedentemente osservato, gli elementi non hanno ancora raggiunto una failure completa, quindi si tende a sottostimare l'entità del cedimento.

Nelle zone più esterne invece, le quali possiedono una maggiore dimensione della mesh, la degradazione graduale fa sì che gli elementi in questi punti non manifestino un completo azzeramento delle proprietà meccaniche, visto che sicuramente la dimensione della cricca sarà inferiore a quella dell'elemento.

4.5.2 Risultati per il criterio di Hashin

A seguire, si è passati ad analizzare il modello attraverso il criterio di cedimento di Hashin, che, essendo un criterio "Mode-dependent", è in grado di distinguere intrinsecamente tra rotture nelle fibre o nella matrice.

In Figura 51 è riportata la curva Forza-Spostamento per il modello di danneggiamento istantaneo. L'andamento è fondamentalmente simile a quello ottenuto con l'analisi attraverso il criterio del Massimo Stress, ed anche i valori di FPF e UFL sono simili tra loro. Quest'ultimo si attesta intorno a 17260 N, anche questa volta comparabile con il valore sperimentale e con quello calcolato in precedenza attraverso il codice Patran.

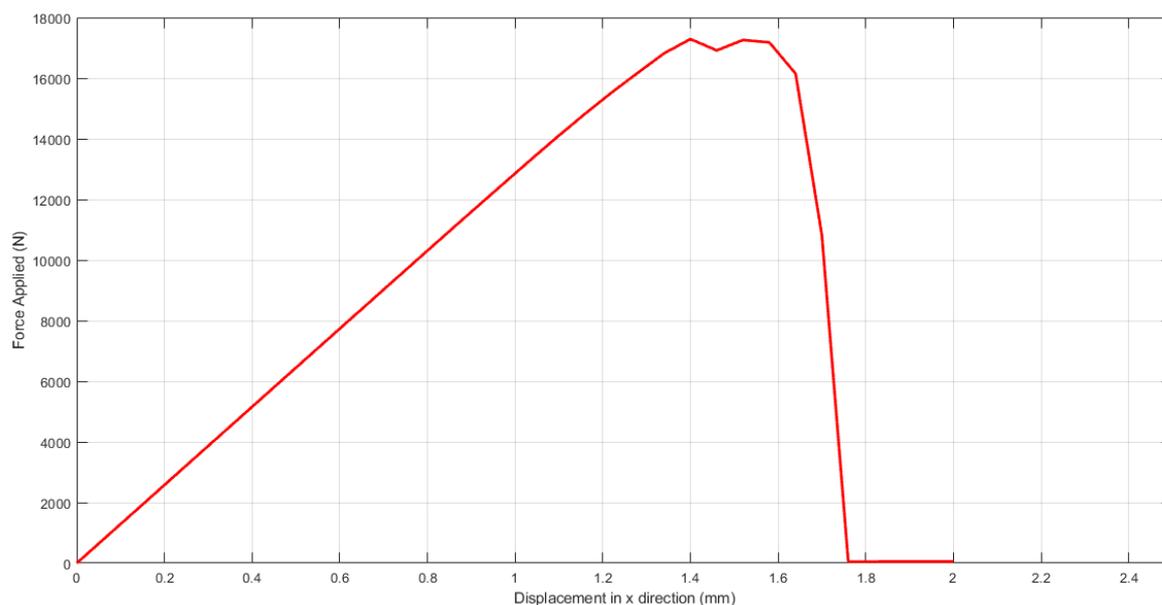


Figura 51 Curva Forza/Spostamento per il caso di Hashin con degradazione istantanea ottenuto con simulazione in MATLAB

Nella Figura successiva è riportato il comportamento della struttura al momento del First Ply Failure, che è il medesimo calcolato per il criterio di Massimo Stress.

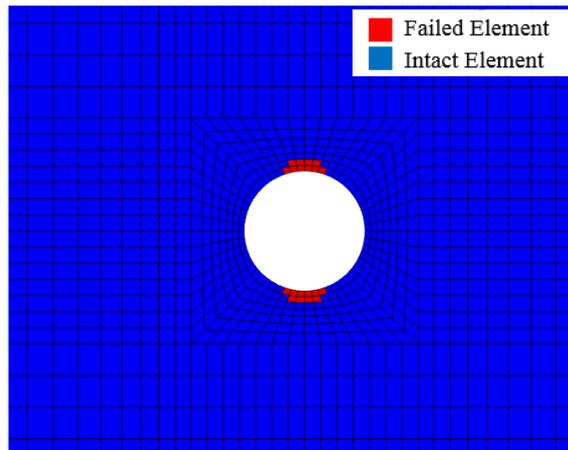


Figura 52 Rappresentazione degli elementi soggetti a First Ply Failure per il criterio di Hashin con degradazione istantanea

Anche in questo caso infatti, gli elementi che manifestano un cedimento sono quelli più vicini al foro centrale, disposti sulla direttrice normale all'applicazione del carico. Tutto ciò avviene ad un carico di circa 6500 N, corrispondenti, secondo il grafico sopra riportato, ad uno spostamento di 0.56 mm. Tutti i dati sono in linea con le evidenze sperimentali e con le simulazioni effettuate in Nastran, a meno di ammissibili oscillazioni.

Passando ora alle evidenze ottenute analizzando il momento in cui la struttura raggiunge l'Ultimate Failure Load, possiamo notare in Figura 53 e 54, che, contrariamente a quanto mostrato nel caso del criterio del Massimo Stress, la zona nella quale avviene la rottura finale è più marcata. Infatti, come si può notare, tutti gli strati degli elementi nella zona più sollecitata hanno manifestato un cedimento della matrice, portando il campione ad una rottura più estesa rispetto a quella rilevata con il precedente criterio analizzato.

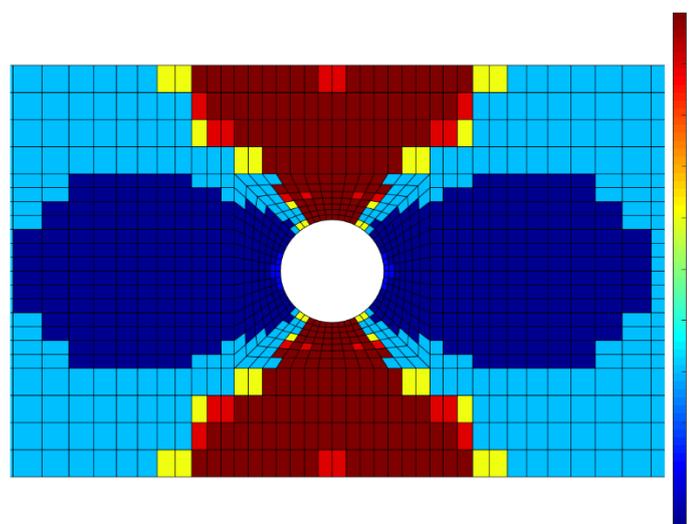


Figura 53 Numero di strati soggetti a cedimento della matrice per il caso di Hashin con degradazione istantanea

Anche per quanto riguarda le fibre del materiale, notiamo un'estensione maggiore della zona di danneggiamento rispetto a ciò che è stato ricavato per il criterio del Massimo Stress.

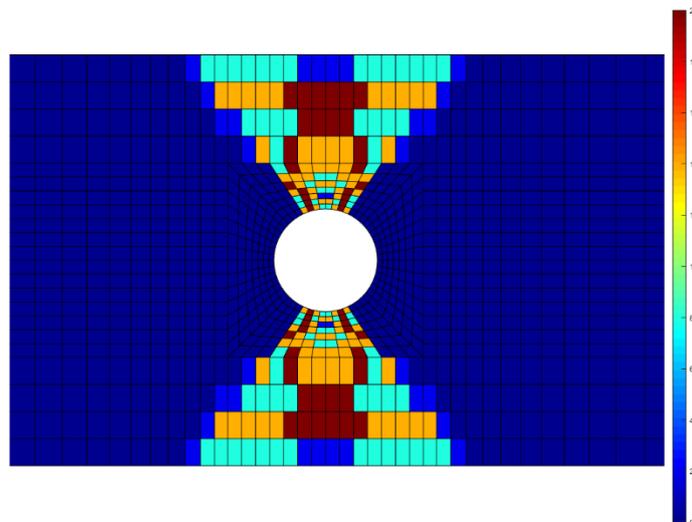


Figura 54 Numero di strati soggetti a cedimento delle fibre per il caso di Hashin con degradazione istantanea

Questo comportamento può essere visto come una diretta conseguenza delle definizioni de criteri di danneggiamento. Infatti, essendo il criterio di Hashin studiato per ottenere una chiara distinzione tra i due modi di cedimento, annoverando in ogni espressione anche termini relativi allo stress di taglio, esso permette di rappresentare più accuratamente l'evoluzione del danneggiamento. Il criterio del Massimo Stress, prevedendo una semplice comparazione tra i valori degli stress e gli ammissibili del materiale, offre solo una visione indicativa del comportamento della struttura in risposta ai carichi applicati.

Nell'immagine successiva, si possono notare, indicati con il colore giallo, tutti gli elementi che presentano almeno uno strato danneggiato. In questo caso, l'unica differenza apprezzabile con ciò che è mostrato nella stessa tipologia di immagine, relativa al criterio di Massimo Stress (Figura 48), è una maggiore estensione del danneggiamento degli elementi posti sulla stessa direttrice della direzione di applicazione del carico.

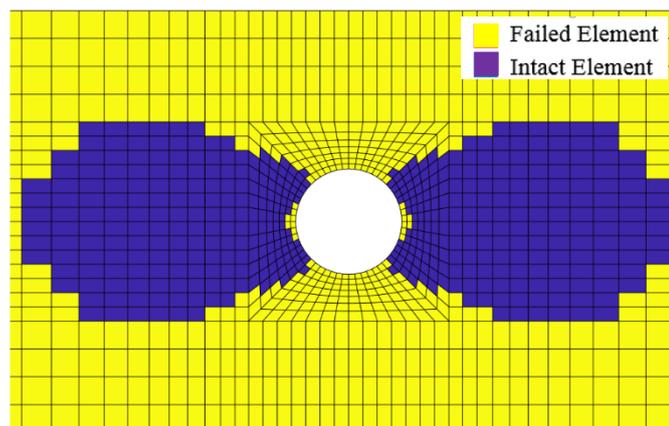


Figura 55 Cedimento complessivo per il caso di Hashin con degradazione istantanea

Si passi ora all'analisi dei risultati ottenuti per il modello di degradazione graduale nel caso del criterio di Hashin.

Visti risultati ottenuti in questo capitolo, i quali sembrano rappresentare più accuratamente l'evoluzione del danno, nel caso di degradazione graduale per il criterio di Hashin si è scelto di simulare un allungamento del campione che arrivasse fino a circa 10mm. Quest'ultimo è

decisamente non ragionevole per un campione di queste dimensioni, ma lo scopo è quello di stabilire se il comportamento rilevato precedentemente, ovvero quello di una continua oscillazione dei valori di forza, portasse prima o poi ad un drop-off del carico.

Osservando il grafico in Figura 56 tuttavia, ci si rende conto che il carico continua a rimanere perlopiù invariato, stabilizzandosi intorno ad un valore di 30000 N. Ancora una volta quest'ultimo è circa il doppio di quello rilevato sperimentalmente.

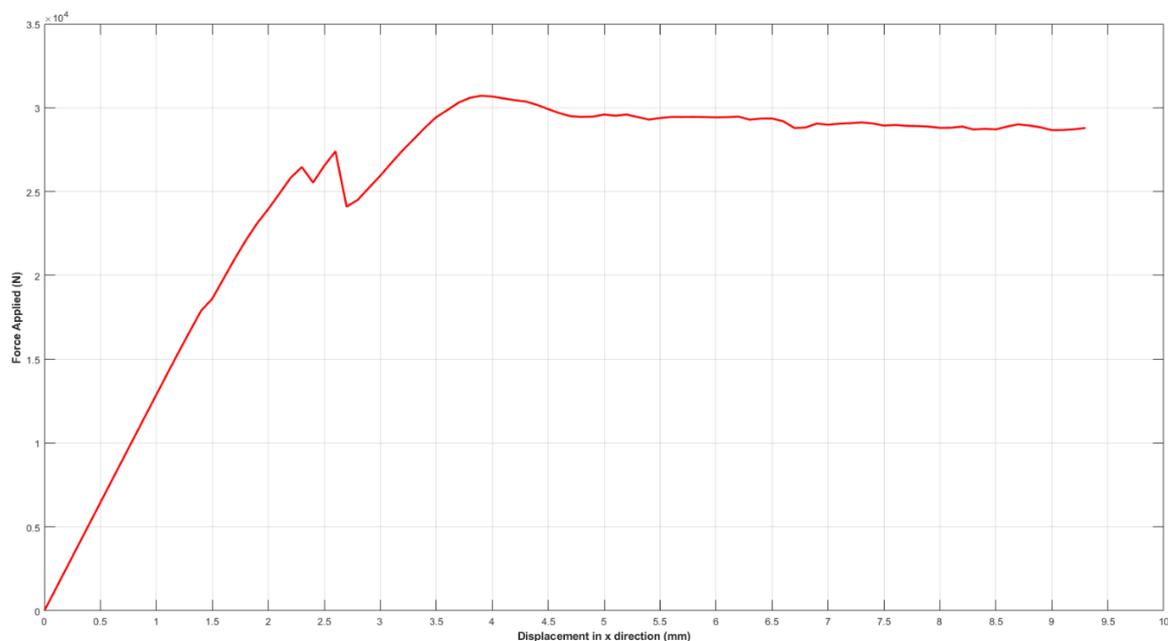


Figura 56 Curva Forza/Spostamento per il caso di Hashin con degradazione graduale ottenuto con simulazione in MATLAB

A questo punto è interessante capire di quanto si sia danneggiata la struttura, e per fare questo ci si serve delle Figure 57, 58 e 59. Si consideri in particolar modo lo strato “8” del campione, avente le fibre orientate a 90° rispetto all’asse x geometrico. Gli strati con questa orientazione sono i primi a manifestare cedimento e pertanto sono i più significativi da ispezionare per rilevare i danneggiamenti sulla struttura in esame.

Si precisa che tutte le immagini sono elaborate nell’ultimo istante dell’analisi, ovvero quando il campione risulterebbe avere un’elongazione di 10 mm. Come già detto questo allungamento è fuori scala per una struttura con queste dimensioni, pertanto ci si aspetterebbe che almeno negli strati più sollecitati la degradazione abbia raggiunto il suo massimo valore.

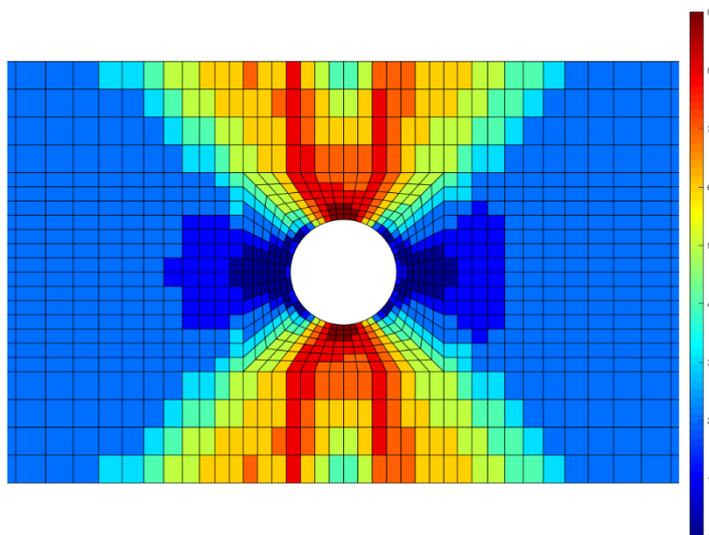


Figura 57 Numero massimo di degradazioni delle proprietà della matrice avvenute in ogni elemento nello strato 8 per il caso di Hashin con danneggiamento graduale

Come si può notare dalla figura precedente, la matrice dello strato “8”, tuttavia, non è stata ancora danneggiata completamente, manifestando il massimo grado di degradazione solo negli elementi più prossimi al foro centrale. Nello specifico, nove degradazioni successive corrispondono ad un valore di SRC pari a “0.00195”, approssimabile con il valore ultimo preimpostato di “0.001”.

Nelle zone più esterne del campione, in particolare quelle che caratterizzano l’evoluzione della cricca, nessuno degli elementi ha raggiunto tale valore, ma gli SRC sono compresi in un range che va da 0.0156 a 0.004.

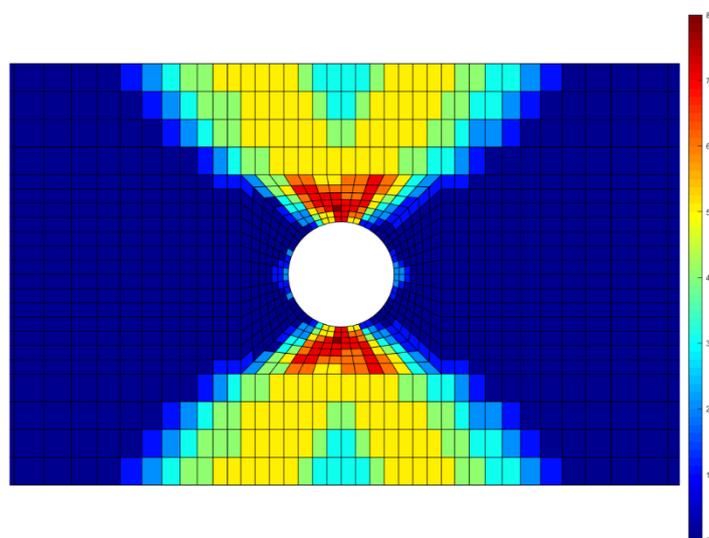


Figura 58 Numero massimo di degradazioni delle proprietà delle fibre avvenute in ogni elemento nello strato 8 per il caso di Hashin con danneggiamento graduale

Anche nella rappresentazione del cedimento per le fibre nello strato 8, i valori di rigidità residua sono ancora relativamente alti, motivando quindi il fatto che il carico mostrato nella curva Forza-Spostamento non abbia subito alcun decremento repentino.

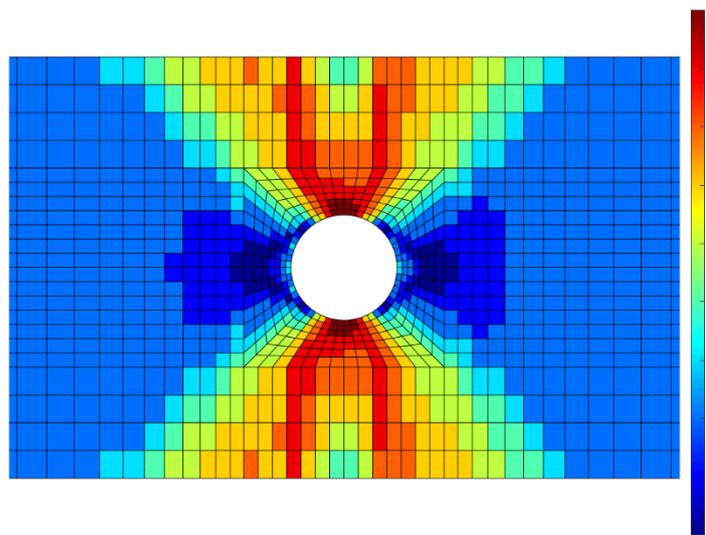


Figura 59 Numero massimo di degradazioni avvenute in ogni elemento per tutti gli strati per il caso di Hashin con danneggiamento graduale

Infine, in Figura 59, si può osservare come, complessivamente la struttura, risulti danneggiata, e le zone più critiche (indicate dai colori tendenti al rosso) seguano lo schema di propagazione della cricca più volte evidenziato nel corso di questa tesi.

A questo proposito, però, c'è da fare un'osservazione. Se si confrontano la precedente figura con la stessa relativa al danneggiamento graduale per il caso del criterio del Massimo Stress, si nota come in quel caso, il danneggiamento complessivo fosse meno evidente. Infatti il SRC massimo in quel caso, sui bordi del campione, era pari a 0.03125: la rigidità complessiva del campione in quei punti era stata ridotta al 3% del valore iniziale. Sebbene questo valore sia abbastanza lontano dal limite imposto di 0.001, una tale riduzione può giustificare una rottura del campione in quel punto.

In questo caso, invece, si sono raggiunti valori prossimi al limite imposto solo perché l'analisi è stata protratta per valori di spostamento decisamente superiori.

4.5.2 Risultati per il criterio di Tsai-Wu

Il terzo criterio analizzato è il criterio polinomiale di Tsai-Wu. In questo caso, come si vedrà, i risultati ottenuti sono di particolare interesse, in quanto mostrano delle sostanziali differenze con il modello simulato attraverso il software commerciale Nastran.

Partendo dal grafico Forza-Spostamento, mostrato di seguito, si nota che il carico per l'Ultimate Failure Load è comparabile con i risultati ottenuti sperimentalmente, essendo pari a 17468 N. Questo non avveniva nella simulazione effettuata tramite Nastran, nella quale questo valore si attestava intorno ai 12000 N.

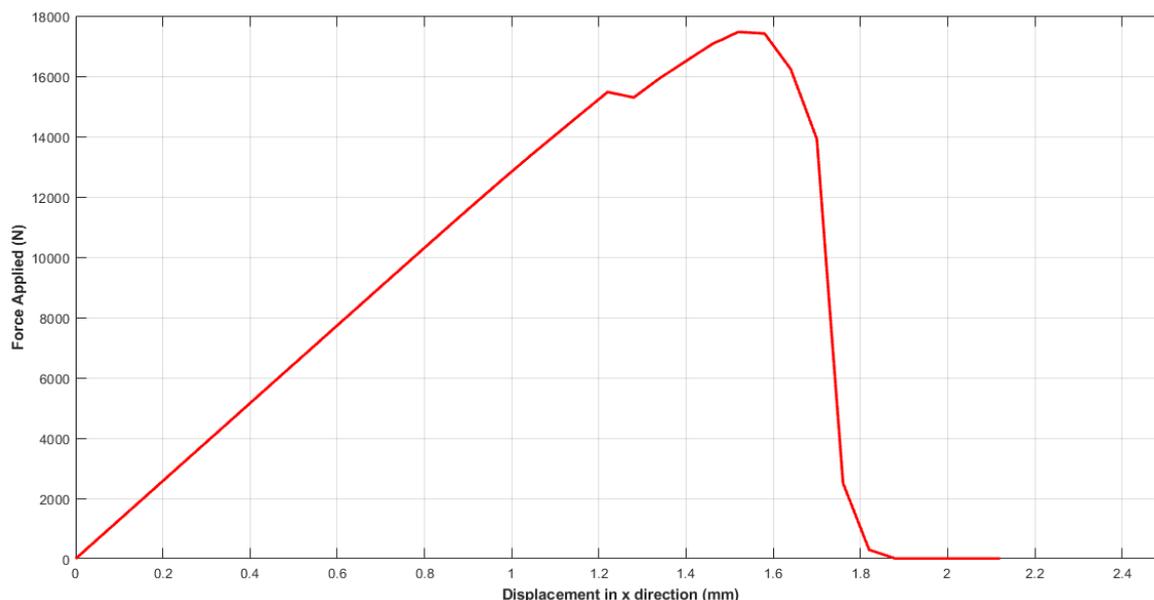


Figura 60 Curva Forza/Spostamento per il caso di Tsai-Wu con degradazione istantanea ottenuto con simulazione in MATLAB

Questo comportamento è associabile alle modalità di degradazione e rilevamento del cedimento differenti previste dai due sistemi di calcolo.

Nastran infatti, per i criteri polinomiali, non adotta una distinzione tra i modi di cedimento, e ed essendo questi caratterizzati da un unico indice di failure, quando si supera il valore unitario, tutte le proprietà meccaniche del materiale vengono degradate, senza distinzione tra quelle legate alle fibre e quelle legate alla matrice.

Nel codice implementato nel corso di questa tesi, invece, sebbene l'indice di failure resti sempre uno solo, attraverso il metodo descritto da Reddy [8], è stato possibile suddividere i modi di cedimento, rendendo i risultati della simulazioni più simili a quelli sperimentali. Infatti in questo caso, solo le componenti relative alle fibre o alla matrice saranno degradati, in base al modo di cedimento rilevato.

In generale, se precedentemente, nelle simulazioni effettuate con il programma in codice MATLAB per i criteri del Massimo Stress e di Hashin, si poteva osservare un netto decremento delle caratteristiche meccaniche della struttura quanto la struttura si era allungata di 1.4 mm, nel caso del criterio di Tsai-Wu, questo fenomeno è visualizzato leggermente prima, quando lo spostamento è pari a 1.22 mm.

In Figura 61 è rappresentata la condizione di First Ply Failure. Come è evidente, anche in questo caso gli elementi soggetti a cedimento sono i medesimi rilevati nei casi precedenti. Tuttavia questa condizione si verifica in corrispondenza di un'elongazione pari a 0.5 mm, corrispondente ad una carico di circa 4000 N, più bassa rispetto ai casi del Massimo Stress e di Hashin. Se ne deduce quindi che il criterio di rottura di Tsai-Wu predice un FPF in condizioni di carico inferiori, rendendo questo approccio più conservativo.

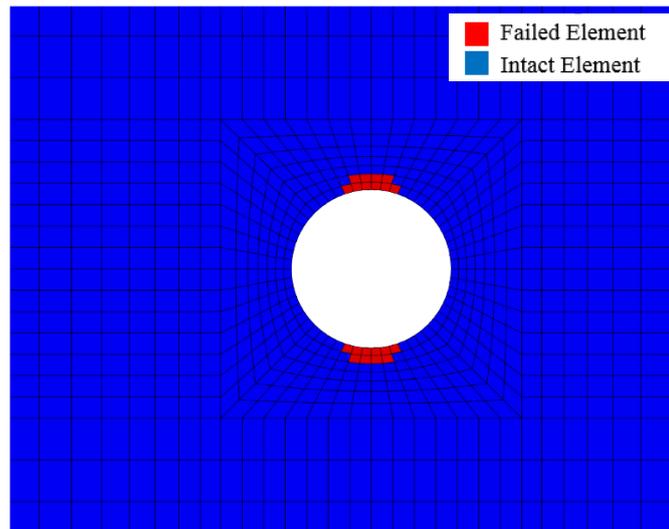


Figura 61 Rappresentazione degli elementi soggetti a First Ply Failure per il criterio di Tsai-Wu con degradazione istantanea

Si passi adesso ad analizzare il comportamento della struttura nella condizione di Ultimate Failure Load.

Osservando l'evoluzione del cedimento rappresentata in Figura 62 e 63, si nota che l'entità del danno nella matrice ottenuta con il criterio di Tsai-Wu, si assesta a metà strada tra quella meno marcata del criterio del Massimo Stress, e quella più evidente e critica relativa al criterio di Hashin.

Appare chiaramente visibile lo schema di propagazione della frattura, che ha correttamente raggiunto il bordo esterno della struttura.

Relativamente ai cedimenti a livello delle fibre, la condizione finale è sommariamente la stessa riscontrata con il criterio di Hashin.

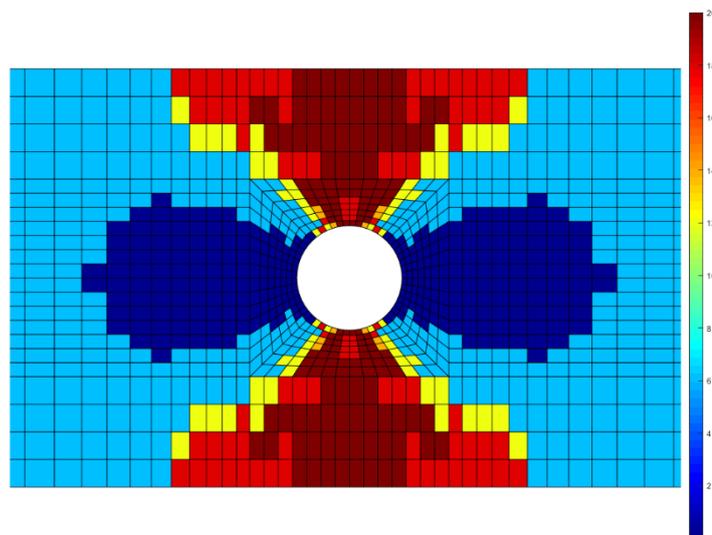


Figura 62 Numero di strati soggetti a cedimento della matrice per il caso di Tsai-Wu con degradazione istantanea

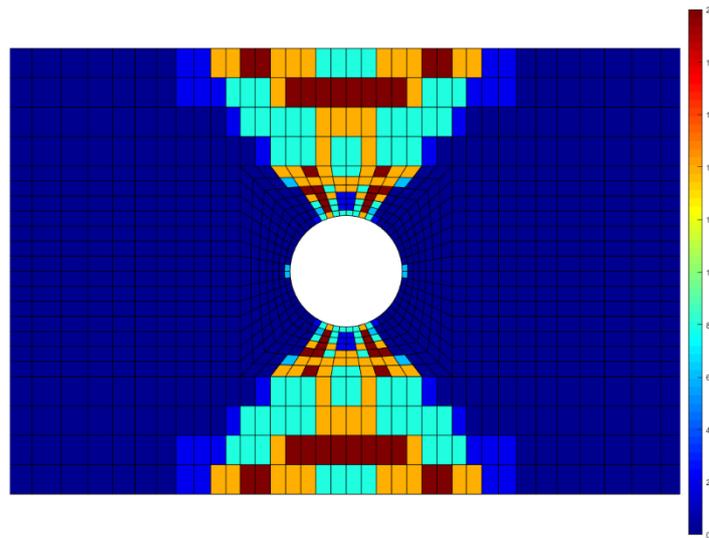


Figura 63 Numero di strati soggetti a cedimento delle fibre per il caso di Tsai-Wu con degradazione istantanea

Per analizzare quale sia il comportamento della struttura attraverso il criterio di Tsai-Wu con degradazione graduale, si parta dall'osservazione del grafico in Figura 64.

In questo caso il picco della curva è posto in corrispondenza di un carico di circa 25000 N, un valore più basso rispetto agli altri modelli di degradazione graduale analizzati in MATLAB finora. Tuttavia, questo valore è però maggiore rispetto a quello ricavato dalla stessa simulazione effettuata in Nastran, la quale, per questo particolare caso, era in linea con le evidenze sperimentali.

Per giustificare la precedenti osservazioni, si ricorda che, come già discusso nel capitolo 3.4.2, il modello di degradazione implementato da Nastran, prevedendo una degradazione di tutte le proprietà del materiale ad ogni cedimento rilevato, fa sì che per la degradazione graduale si ottengano risultati confacenti alle prove sperimentali.

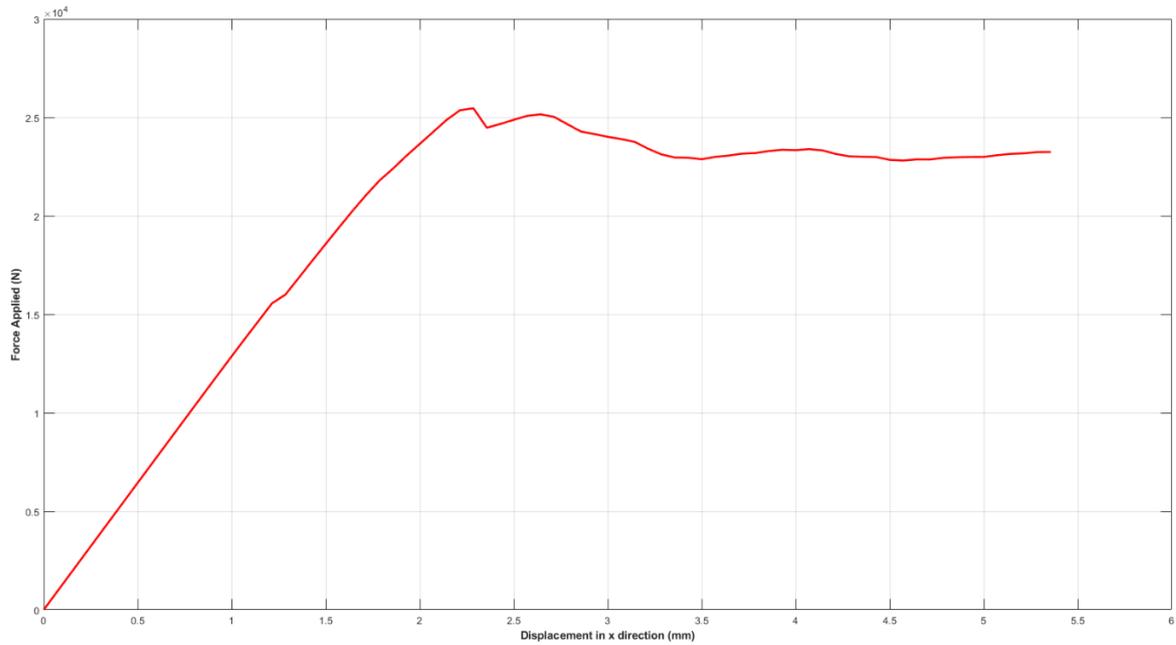


Figura 64 Curva Forza/Spostamento per il caso di Tsai-Wu con degradazione graduale ottenuto con simulazione in MATLAB

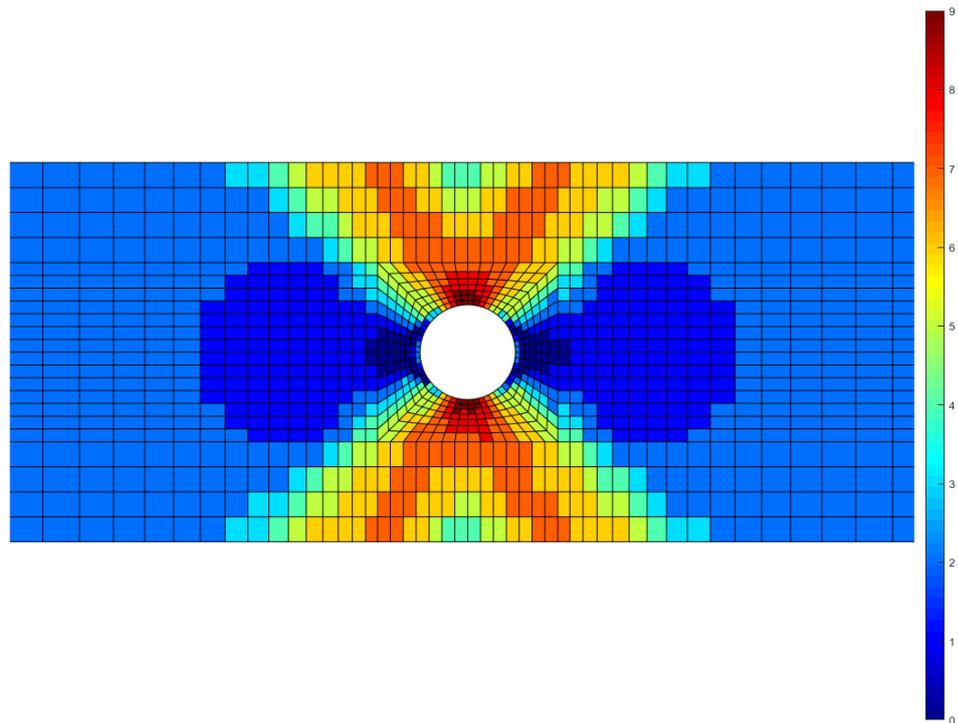


Figura 65 Numero massimo di degradazioni avvenute in ogni elemento per tutti gli strati per il caso di Tsai-Wu con danneggiamento graduale

In Figura 65 si può osservare l'evoluzione del danneggiamento nel momento in cui l'elongazione teorica del campione ha raggiunto i 5 mm. Salta subito all'occhio l'evidente schema di rottura che in questo caso è più marcato rispetto alle situazioni precedenti. Infatti esso rispecchia perfettamente l'evoluzione della cricca ottenuta sperimentalmente, con gli elementi che hanno raggiunto un SRC pari a 0.0078, riducendo così le proprietà del materiale

allo 0.78% del valore iniziale (valore che non consente a questi elementi di supportare ulteriori carichi considerevoli).

4.5.3 Risultati per il criterio di Hoffman

L'ultimo criterio analizzato attraverso l'implementazione in MATLAB è quello di Hoffman. Come in precedenza, questo criterio è utilizzato fundamentalmente come cartina di tornasole per verificare quanto i criteri polinomiali si discostino tra loro, e quanto i risultati prodotti siano paragonabili.

Anche in questo caso, come è avvenuto per il criterio di Tsai-Wu, basandosi sulla distinzione dei modi di rottura utilizzata da Reddy [8], per il processo di degradazione si è tenuto conto della distinzione dei modi di cedimento.

Nel grafico in Figura 66, l'andamento riportato è praticamente il medesimo del criterio di Tsai-Wu, eccezion fatta per il valore del carico massimo di rottura, il quale questa volta è pari a 18180 N, un valore leggermente superiore a tutti gli altri casi analizzati finora con questo modello di danneggiamento.

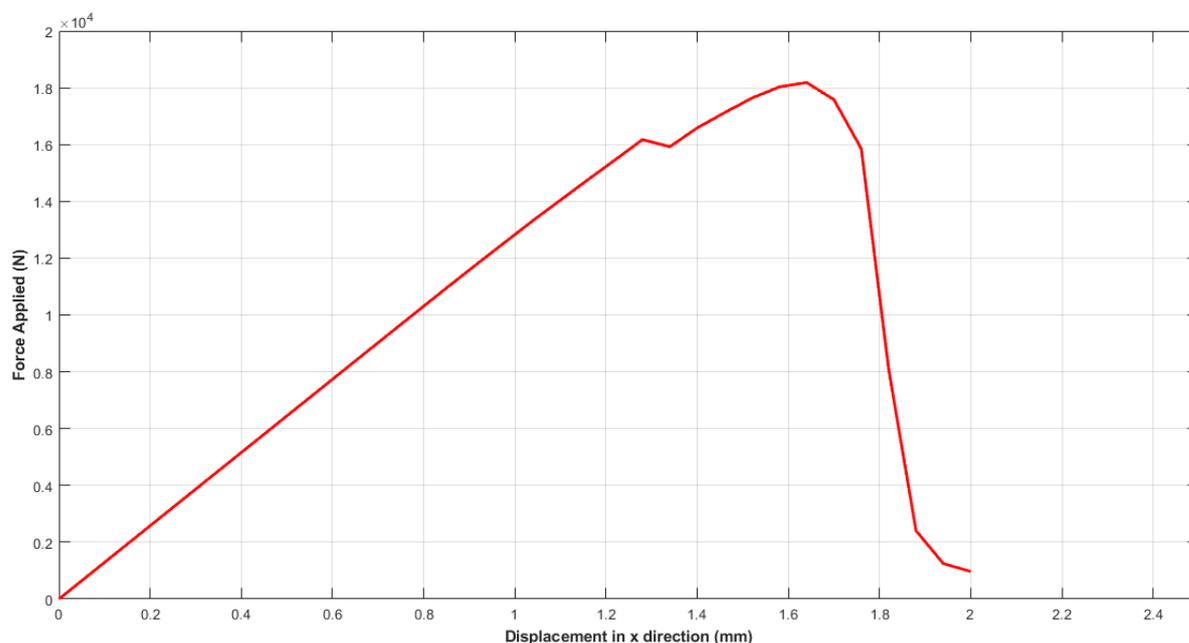


Figura 66 Curva Forza/Spostamento per il caso di Hoffman con degradazione istantanea ottenuto con simulazione in MATLAB

Tuttavia, anche per il caso di Hoffman, se si confrontano i risultati con quelli ottenuti dalle simulazioni in Nastran, si può osservare come il fatto di distinguere i modi di cedimento in un'analisi porti ad ottenere una soluzione molto più in linea con quella sperimentale. Infatti, nell'analisi in Nastran, il carico critico di rottura era sotto stimato, mentre ora, come per il caso di Tsai-Wu, concorda con gli esperimenti di Chang.

Relativamente al First Ply Failure, i due criteri mostrano esattamente gli stessi risultati, sia per quanto riguarda gli elementi che hanno manifestato cedimento, sia per quanto riguarda lo spostamento da imporre affinché tale condizione di verificarsi, pari a 0.56mm

Continuando a comparare i risultati tra i due metodi polinomiali, l'evoluzione del danneggiamento a livello della matrice mostra alcune differenze, come si può dedurre comparando la Figura 67 con la 62.

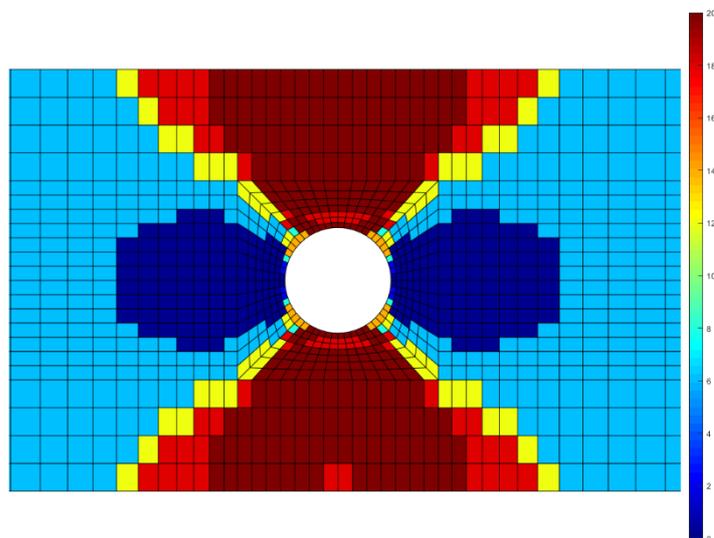


Figura 67 Numero di strati soggetti a cedimento della matrice per il caso di Hoffman con degradazione istantanea

Infatti, in questo caso, il danneggiamento a livello della matrice è più marcato, e si avvicina maggiormente ai risultati ottenuti attraverso il criterio di Hashin, il quale prevede una netta distinzione tra fibre e matrice, e che quindi ci si aspetta essere quello più fedele alla realtà.

Altra particolarità riscontrata nel caso del criterio di Hoffman sta negli elementi che presentano almeno uno strato che manifesti cedimento. Osservando Figura 68, si nota come, a differenza non solo del criterio di Hashin, ma anche di tutte le altre simulazioni effettuate in precedenza, in questo caso, gli elementi sul bordo del foro che tendono a cedere sono molto più diffusi. In particolare si fa riferimento agli elementi evidenziati con i riquadri neri.

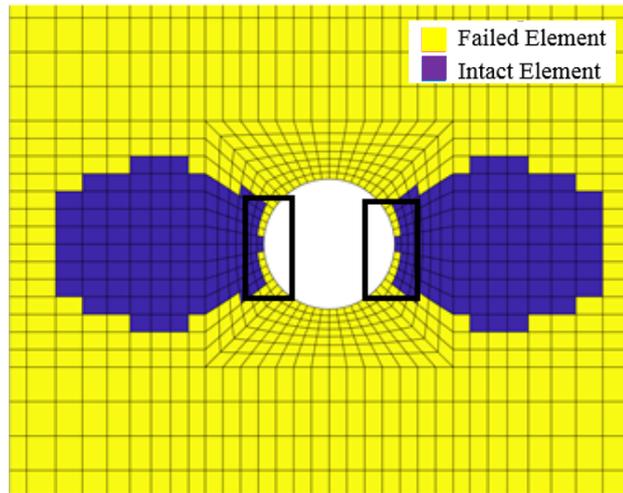


Figura 68 Cedimento compressivo per il caso di Hoffman con degradazione istantanea

CAPITOLO 5

CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI

Nel presente lavoro di tesi si sono analizzati i comportamenti di diversi criteri macroscopici di rottura per le strutture in composito, ritenuti dalle fonti bibliografiche citate, tra i più conformi ai risultati sperimentali. In combinazione con questi criteri, sono stati studiati diversi processi di degradazione dei materiali in composito soggetti a cedimento strutturale. In particolar modo ci si è concentrati su processi di degradazione delle caratteristiche meccaniche dei materiali in modo istantaneo o graduale.

Associando ai criteri di rottura scelti, degli opportuni modelli di degradazione, è stato possibile analizzare una struttura in composito, scelta dopo un'accurata ricerca bibliografica, per confrontare le potenzialità e i limiti dell'analisi progressiva del danneggiamento.

Per simulare il comportamento della struttura è stato scelto di utilizzare due approcci differenti.

Il primo è basato sulla modellazione e l'analisi attraverso un software commerciale, MSC Nastran, il quale consente di default di svolgere un'analisi sul danneggiamento dei materiali in composito, adoperando una vasta gamma di criteri di cedimento, ed associandoli con delle metodologie di danneggiamento preimpostate nel sistema. Nello specifico, esso consente una degradazione istantanea, nella quale l'utente può selezionare il livello di danneggiamento richiesto, o una degradazione graduale, in cui il danneggiamento è calcolato sulla base di specifiche formule impostate di default nel software e non modificabili.

Il secondo approccio è stato quello di implementare un programma in linguaggio MATLAB, che consentisse di svolgere un'analisi progressiva del danneggiamento. Questa soluzione è stata scelta per consentire all'utente di impostare liberamente i parametri per il danneggiamento, anche graduale, non dovendo quindi necessariamente basarsi sulle logiche preimpostate all'interno del software.

In particolare, l'utente, con questa tipologia di implementazione, è libero di selezionare il parametro di degradazione da utilizzare per il danneggiamento graduale, e di effettuare analisi che tengano sempre conto dei modi di cedimento della struttura, anche se il criterio scelto è indipendente da questi ultimi.

In entrambi gli approcci sono stati analizzati gli stessi criteri di rottura, confrontando i differenti risultati, che sono poi stati comparati con quelli sperimentalmente ricavati da Chang [1] nei suoi studi.

Basandoci sulle simulazioni effettuate nel corso di questa tesi, si possono trarre le seguenti conclusioni:

- Sia nelle analisi svolte in ambiente Patran, che in quelle svolte attraverso l'implementazione in MATLAB, i criteri di rottura del Massimo Stress e di Hashin, nel caso di degradazione istantanea, presentano una quasi totale congruenza con i risultati sperimentali, sia sotto il profilo della previsione relativa al First Ply Failure, e sia relativamente all'evoluzione del danneggiamento fino alla condizione di Ultimate Failure Load;
- Nelle simulazioni svolte in ambiente Nastran, i criteri di rottura polinomiali, utilizzati per la degradazione istantanea dei materiali in composito, generano risultati che sottostimano i carichi dell'Ultimate Failure Load, rilevando delle rotture al di sotto dei valori sperimentali;
- L'implementazione in MATLAB ha consentito di ottenere dei risultati, utilizzando i criteri di rottura polinomiali, che siano confacenti alle prove sperimentali, in quanto sia per il rilevamento della failure che per la progressione del danneggiamento, si è tenuto conto del modo di cedimento (fibra o matrice) a cui un particolare strato della struttura è soggetto;
- Nel corso di questa tesi è parso evidente che degradare un materiale non tenendo conto del fatto che il cedimento avvenga a livello delle fibre o della matrice, compromette l'attendibilità dei risultati, poiché in questo caso tutte le proprietà meccaniche dei materiali sono degradate indipendentemente da quali valori ammissibili siano stati superati;
- Sia in Nastran che in MATLAB, i criteri polinomiali conducono a soluzioni che, a meno di leggere variazioni (come il numero di elementi nei quali è avvenuto cedimento durante il FPF, o il pattern di propagazione del danno più o meno evidente), sono fundamentalmente in linea tra loro. Questo dimostra che la variazione nella definizione dei coefficienti non rappresenta un fattore in grado di alterare sensibilmente i risultati dell'analisi;
- In merito alla degradazione graduale, in quasi tutte le simulazioni svolte, i valori del carico critico per l'Ultimate Failure Load sono al di sopra di quelli risultanti dalle prove sperimentali. Questo porta a una erronea taratura dell'evoluzione del danneggiamento, con conseguente sovrastima delle potenzialità del materiale;
- Il precedente comportamento è in larga parte imputabile alla dimensione della mesh utilizzata. La degradazione graduale è adatta a modellare l'evoluzione del danneggiamento nel caso in cui la dimensione della cricca sia inferiore a quella effettiva della mesh, ma nelle zone più interne del campione analizzato - quelle vicine al foro centrale - queste sono comparabili tra loro. Questo porta a sottostimare il danno in queste zone, non consentendo una progressione del danneggiamento realistica, poiché dalle simulazioni effettuate questi elementi resistono a carichi di molto eccedenti quelli di rottura. D'altro canto, la degradazione graduale risulta essere molto più consona alle prove sperimentali nel caso degli elementi distanti dal foro, che ci si

aspetta siano meno danneggiati rispetto a quelli più interni. Di fatto, la loro rigidità residua si attesta a valori intorno al 12-25% di quello originale, in linea con l'idea di un danneggiamento parziale ma non catastrofico per la struttura;

- Il comportamento rilevato nella zona dell'Ultimate Failure Load con l'implementazione in MATLAB, costringe ad adottare una diversa metodologia per definire la rottura del campione. Se nel caso di degradazione istantanea è sufficiente assegnare il valore dell'Ultimate Failure Load a quello del picco della curva Forza-Spostamento, nel caso di degradazione graduale la rottura del campione è individuata nel momento in cui tutti gli elementi sulla direttrice perpendicolare alla direzione di applicazione del carico hanno ceduto;
- Per una corretta caratterizzazione della progressione del danneggiamento, si dovrebbero prevedere diversi modelli di degradazione per gli elementi più vicini alle zone critiche della struttura e quelli più lontani da esse. In questo modo, per le prime potrebbe essere prevista una degradazione istantanea, di modo che non si rischi di sovrastimare la loro resistenza. Per le zone meno sensibili, il modello di degradazione graduale sarebbe auspicabile, per far sì che in questo caso non siano completamente azzerate le proprietà meccaniche.

Nel corso della presente tesi, sono stati analizzati solo i danneggiamenti intralaminari, tralasciando tutti quegli effetti legati ai cedimenti interlaminari, come ad esempio la delaminazione. In questo caso bisognerebbe modellare anche il cedimento degli stress normali al piano, il che andrebbe a rappresentare un netto valore aggiunto in questa ricerca, dato che nel caso di struttura in composito i fenomeni di delaminazione sono fortemente caratterizzanti e critici. Ulteriore passo da effettuare sarebbe quindi quello di comprendere il meccanismo di totale danneggiamento dei materiali in composito, assegnando un peso ai cedimenti intralaminari e interlaminari.

Lo studio effettuato è stato svolto per confrontare le diverse risposte dei criteri di cedimento su una struttura sottoposta ad un carico uniassiale piano. Interessante sarebbe estendere questo studio ad altre tipologie di carico, sia uniassiali che biassiali, in modo da studiare quale sia la risposta delle strutture, e dei criteri di cedimento citati, a queste condizioni. In particolare, in bibliografia, sono presenti pochi studi relativi ai carichi combinati, che tuttavia sono anche quelli che più frequentemente si incontrano nella realtà.

Relativamente ai criteri di cedimento polinomiali, è necessaria una maggiore investigazione relativa alla suddivisione dei modi di cedimento. Nella metodologia proposta in questa tesi, elaborata sulla base delle ricerche di Reddy e Reddy [8], è stata riscontrata una buona accordanza con i risultati sperimentali, ma sarebbe necessario controllarne l'affidabilità anche nel caso di differenti tipologie di carico. Infatti è possibile che essa sia applicabile solo a stati di tensione semplici, e che non produca risultati altrettanto consoni in caso di stress

complessi. In tal caso sarebbe interessante sviluppare un criterio di suddivisione dei modi di cedimento che sia applicabile ad una quanto più vasta gamma di casistiche.

Maggiori studi devono essere effettuati relativamente ai meccanismi di degradazione graduale delle strutture, in quanto essi rappresentano un potente strumento per caratterizzare il cedimento in maniera quanto più realistica possibile, ma allo stesso tempo risultano ancora basati su considerazioni empiriche, derivate dalle evidenze sperimentali. Una corretta assegnazione delle proprietà di danneggiamento nei vari elementi del sistema, nel caso di un'analisi FEM, consentirebbe una chiara ed affidabile simulazione della rottura di strutture in composito.

Nel corso della tesi sono stati citati altri criteri per modellare il danneggiamento delle strutture, come lo "Internal State Variable" e lo "Element Finite Method". Queste tipologie di danneggiamento non sono ancora implementate in software commerciali come Nastran, in quanto comportano dei costi computazionali più elevati, o dei meccanismi di definizione più complicati. Interessante sarebbe però utilizzare la presente implementazione eseguita in MATLAB come base attraverso la quale poter caratterizzare le strutture attraverso queste metodologie, in modo da comprenderne limiti e potenzialità.

BIBLIOGRAFIA

- [1] F. Chang e K. Chang, «A Progressive damage model for laminated composites containing stress concentrations,» *Journal of Composite Materials*, pp. 21, 834-855, 1987.
- [2] N. F Knight, «User-Defined Material Model for Progressive Failure Analysis,» 2019. [Online].
- [3] E. Pietropaoli, «Progressive Failure Analysis of Composite Structures Using a Constitutive Material Model (USERMAT) Developed and Implemented in Ansys,» *Applied Composite Materials*, vol. 19, n. 3-4, pp. 657-668, 2011.
- [4] T. & L. G. & T. V. B. C. & S. X. & P. Tay, «Progressive Failure Analysis of Composites,» *Journal of Composite Materials*, n. 42, pp. 1921-1966, 2008.
- [5] D. W. Sleight, «Progressive Failure Analysis Methodology for Laminated Composites,» 1999.
- [6] A. Pica, R. Wood e E. Hinton, «Finite Element Analysis of Geometrically Nonlinear Plate Behaviour using a Mindlin Formulation,» *Computers and Structures*, vol. 11, pp. 203-215, 1980.
- [7] S. Zabaraz e N. Tolson, «Finite element analysis of progressive failure in laminated composite plates,» *Computers and Structures*, n. 38, pp. 361-376, 1991.
- [8] Y. Reddy e J. Reddy, «Three Dimensional Finite Element Progressive Failure Analysis of Composite Laminates under Axial Compression,» *Journal of Composite Technology and Research*, vol. 15, n. 2, 1993.
- [9] J. Reddy e A. Pandey, «A First-Ply Failure Analysis of composites laminates,» *Computers and Structures*, vol. 25, n. 3, pp. 371-393, 1987.

- [10] P. P. Camanho, *Failure Criteria for Fibre-Reinforced Polymer Composites*, 2002.
- [11] J.-H. K. S.-k. K. D.-M. R. J.-M. L. Chi-Seung L., «Initial and progressive failure analyses for composite laminates using Puck failure criterion and damage-coupled finite element method,» *Journal of Composite Structures*, vol. 121, p. 406–419, 2015.
- [12] S. a. N. R. Tan, «A Theory for Progressive Matrix Cracking in Composite Laminates,» *Journal of Composite Materials*, vol. 23, n. 10, p. 1029–1047, 1989.
- [13] Y. Reddy e C. a. R. J. Moorthy, «Non-linear progressive failure analysis of laminated composite plates,» *Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 30, n. 5, pp. 629-649, 1995.
- [14] G. M. e K. A., «Non-linear progressive failure analysis of open-hole composite laminates under combined loading,» *Journal of Sandwich Structures and Materials*, vol. 15, n. 3, pp. 309-339, 2013.
- [15] A. Matzenmiller, J. Lubliner e R. Taylor, «A constitutive model for anisotropic damage in fiber-composites,» *Mechanics of Materials*, vol. 20, n. 2, pp. 125-152, 1995.
- [16] MSC Software, «Nonlinear (SOL 400) User's Guide,» 2018.
- [17] A. Tessler e T. Hughes, «An improved treatment of transverse shear in the Mindlin-type four-node quadrilateral element,» *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 39, pp. 311-355, 1983.
- [18] A. Patil e S. Kolukula, «FEM MATLAB Code for Linear and Nonlinear Bending Analysis of Plates».

RINGRAZIAMENTI

Al mio relatore, per il tempo dedicatomi, per la professionalità dimostrata, per avermi dato sempre tutto il supporto possibile, per la possibilità di svolgere questo lavoro di tesi, per tutto ciò che ha saputo trasmettermi in questi mesi, dalle nozioni universitarie alla voglia di confrontarsi con nuove sfide.

Alla mia famiglia, che in questi cinque anni ha investito sul mio futuro, ha creduto in me, ha sempre supportato le mie decisioni, mi è stata accanto, anche se a quasi mille chilometri di distanza, e mi ha dato l'opportunità di lanciarmi ad ali spiegate verso un futuro che ne io, ne loro, avremmo immaginato fino a qualche tempo fa.

A Nadia, per il suo saper supportarmi e sopportarmi ogni giorno, per avermi donato momenti di incondizionata felicità, per essermi stata sempre accanto, per aver condiviso con me questo percorso e per avermi fatto apprezzare piccole cose che molto spesso si reputano scontate.

Agli amici, quelli che mi sono rimasti accanto, con i quali continuo a condividere storie ed avventure, quelli che hanno dedicato anche solo un secondo del loro tempo a spronarmi nel mettercela tutta, quelli che mi hanno sostenuto dall'inizio alla fine.

A Harry.

Grazie

Clemente Mirko Saggese

27 Marzo 2019