

POLITECNICO DI TORINO

Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

**Corso di Laurea Magistrale  
in Ingegneria Aerospaziale**

Tesi di Laurea Magistrale

**Analisi di Trasferimenti a Bassa Spinta  
con Effetto di J2**



**Relatore**

Prof. Lorenzo Casalino

**Candidato**

Gianluca Commissari

Marzo 2019

## Sommario

Lo sviluppo del settore spaziale ha portato negli anni all'affollamento, in particolari orbite, di materiali di scarto, detti detriti. Questi, nel caso in cui non vengano trattati, porteranno un aumento nel numero di collisioni in orbita e, di conseguenza, alla cessazione futura dei lanci, come evidenziato nello scenario proposto da Kessler nella sua omonima *Sindrome di Kessler*. Lo smaltimento di questi elementi rappresenta una necessità imprescindibile. L'utilizzo di propulsione elettrica per queste operazioni offre un risparmio in termini di propellente utilizzato. I tempi di manovra più lunghi rispetto al caso con propulsione chimica permettono lo sfruttamento delle perturbazioni legate alla non sfericità della terra, in particolare quelle legate all'armonica  $J_2$ .

In questa tesi sono state considerate manovre di trasferimento tra orbite quasi circolari in LEO, i cui costi sono stati ottenuti mediante un metodo indiretto di ottimizzazione di un problema di orbite basse con  $J_2$  basato sulla teoria di Edelbaum.

Nella prima parte del lavoro sono state analizzate le manovre di variazione di quota e inclinazione, partendo da condizioni iniziali fisse, successivamente sono stati analizzati gli andamenti dei parametri orbitali, in modo tale da giustificare i comportamenti delle curve ottenute in precedenza. Nella seconda parte sono stati analizzati gli effetti legati alla variazione delle condizioni iniziali. I risultati ottenuti hanno permesso di trovare opportunità di manovra tali da poter risparmiare in termini di costo e durata.

# Ringraziamenti

Vorrei ringraziare il professore Lorenzo Casalino per il suo aiuto nello svolgimento di questo lavoro di tesi, la sua professionalità e disponibilità a chiarimenti sono stati fondamentali nel corso di questi mesi.

Vorrei, inoltre, ringraziare i miei genitori e i miei nonni, i quali mi hanno supportato lungo tutto questo percorso universitario.

Un ringraziamento speciale anche a Sonia, per esserci sempre stata.

# Indice

Elenco delle figure	5
Elenco delle tabelle	8
<b>1 Introduzione</b>	<b>9</b>
1.1 Detriti	9
1.2 Meccanica Orbitale	12
1.3 Perturbazioni Orbitali	15
1.3.1 Effetti Non Sfericità e Non Omogeneità della Terra	16
1.3.2 Effetti di J2	17
1.3.3 Altre Perturbazioni	18
1.4 Manovre Orbitali	20
1.4.1 Confronto Propulsione Chimica ed Elettrica	20
1.4.2 Manovre con Propulsione Elettrica	22
1.4.3 Modello di Edelbaum	22
<b>2 Metodologie</b>	<b>27</b>
2.1 Problema di Ottimizzazione	27
2.1.1 Teoria del Controllo Ottimale	27
2.1.2 Risoluzione del BVP	29
2.2 Ottimizzazione Edelbaum	30
2.3 Problema considerato	34
<b>3 Risultati</b>	<b>35</b>
3.1 Analisi di manovre a condizioni iniziali costanti	35
3.1.1 Variazioni di Semiassie con inclinazione $51^\circ$	35
3.1.2 Variazione di inclinazione a quota costante 500km	38
3.1.3 Manovre combinate	40
3.1.4 Manovre combinate -Variazioni positive e negative-	41
3.1.5 Conclusioni	45
3.2 Andamento Parametri Orbitali	46
3.2.1 Confronto $ 0\text{km}/0^\circ/-8^\circ $ $ -500\text{km}/0^\circ/-8^\circ $ $ 500\text{km}/0^\circ/-8^\circ $	50
3.2.2 Confronto $ 0\text{km}/0^\circ/-8^\circ $ $ 0\text{km}/0^\circ/8^\circ $	52
3.2.3 Confronto $ 0\text{km}/-5^\circ/-10^\circ $ $ 0\text{km}/-5^\circ/10^\circ $	55
3.2.4 Confronto $ 0\text{km}/5^\circ/-10^\circ $ $ 0\text{km}/5^\circ/10^\circ $	57

3.2.5	Confronto $ 0\text{km}/-5^\circ/-10^\circ   0\text{km}/5^\circ/-10^\circ $ . . . . .	59
3.2.6	Confronto $ 0\text{km}/5^\circ/-10^\circ   0\text{km}/-5^\circ/10^\circ $ . . . . .	61
3.2.7	Confronto $ 0\text{km}/-5^\circ/-10^\circ   0\text{km}/5^\circ/10^\circ $ . . . . .	63
3.2.8	Confronto $ 200\text{km}/-5^\circ   200\text{km}/5^\circ   -200\text{km}/-5^\circ   -200\text{km}/5^\circ $ per $\Delta i=0$ . . . . .	65
3.2.9	Confronto variazione di $\Delta\Omega_0$ . . . . .	67
3.2.10	Conclusioni . . . . .	68
3.3	Variazione delle condizioni iniziali . . . . .	69
3.3.1	Confronto Variazioni Nulle . . . . .	70
3.3.2	Confronto Variazioni Non Nulle . . . . .	72
3.3.3	Confronto per $\Delta\Omega_{ottimo}$ . . . . .	76
3.3.4	Conclusioni . . . . .	79
3.4	Andamento Parametri Orbitali per Condizioni Iniziali Differenti . . . . .	79
3.4.1	Manovre a variazioni nulle . . . . .	81
3.4.2	Manovre con variazione di inclinazione positiva . . . . .	82
3.4.3	Manovre con variazione di inclinazione negativa . . . . .	84
3.4.4	Effetti grandezze su $\Omega$ e $\Omega_T$ . . . . .	86
3.4.5	Conclusioni . . . . .	87
3.5	Analisi Inclinazioni Iniziali . . . . .	87
3.5.1	Analisi intervallo inclinazione . . . . .	89
3.5.2	Conclusioni . . . . .	91
3.6	Considerazioni Conclusive . . . . .	91

<b>Bibliografia</b>		<b>93</b>
---------------------	--	-----------

# Elenco delle figure

1.1	Evoluzione del numero dei detriti per tipo [© ESA]	10
1.2	Evoluzione del numero dei detriti per orbita [© ESA]	11
1.3	Simulazione del numero di detriti in LEO	11
1.4	Scenari evoluzione con ADR	11
1.5	Rappresentazione grafica dei parametri orbitali <sup>1</sup>	13
1.6	Anomalia eccentrica e anomalia media	14
1.7	Effetto delle perturbazioni su un elemento orbitale[8]	15
1.8	Regressione della linea dei nodi e precessione della linea degli apsidi [4]	16
1.9	Confronto Impulso specifico e Payload <sup>1</sup>	21
1.10	Confronto traiettoria propulsione chimica ed elettrica [1]	21
1.11	Rappresentazione grafica di $\alpha$ e $\beta$	23
1.12	Differenze tra soluzione reale e approssimata	26
1.14	Limite variazione di inclinazione a seconda del $\beta_0$	26
2.1	Rappresentazione grafica dell'orbita di partenza e di arrivo	34
3.1	Andamento di $a$ in una manovra con $\Delta a = 0$ ; $\Delta i = 0$	36
3.2	Variazioni positive semiasse	37
3.3	Variazioni negative semiasse	37
3.4	Confronto variazioni positive e negative del semiasse	37
3.5	Variazioni positive inclinazione	39
3.6	Variazioni negative inclinazione	39
3.7	Caso variazioni combinate positive	40
3.8	Semiasse costante -200km	42
3.9	Semiasse costante -100km	42
3.10	Semiasse costante 100km	42
3.11	Semiasse costante 200km	43
3.12	Inclinazione costante -4°	43
3.13	Inclinazione costante -2°	43
3.14	Inclinazione costante 2°	44
3.15	Inclinazione costante 4°	44
3.16	Variazioni inclinazioni globali	47
3.17	Variazioni quota globali	48
3.18	Variazioni della pendenza di $\Omega$	48
3.19	Variazioni della pendenza di $\Omega_t$	48

3.20	Condizioni iniziali di fase s/c e orbita target . . . . .	49
3.21	Confronto costo e durata delle manovre . . . . .	50
3.22	Confronto andamento inclinazione (Tempo adimensionato) . . . . .	50
3.23	Confronto andamento quota (Tempo adimensionato) . . . . .	51
3.24	Confronto andamento $\Omega - \Omega_T$ parziale . . . . .	51
3.25	Confronto andamento $\Omega - \Omega_T$ completo . . . . .	51
3.26	Confronto costo e durata delle manovre . . . . .	53
3.27	Confronto andamento inclinazione . . . . .	53
3.28	Confronto andamento quota . . . . .	53
3.29	Confronto andamento $\Omega$ . . . . .	54
3.30	Confronto andamento $\Omega$ e $\Omega_T$ . . . . .	54
3.31	Confronto convenienza $\Delta\Omega_0$ . . . . .	54
3.32	Confronto tempo e durata delle manovre . . . . .	55
3.33	Confronto andamento inclinazione . . . . .	56
3.34	Confronto andamento quota . . . . .	56
3.35	Confronto andamento $\Omega - \Omega_T$ . . . . .	56
3.36	Confronto costo e durata delle manovre . . . . .	57
3.37	Confronto andamento $\Omega$ e $\Omega_T$ . . . . .	57
3.38	Confronto andamento inclinazione . . . . .	58
3.39	Confronto andamento quota . . . . .	58
3.40	Confronto andamento $\Omega - \Omega_T$ . . . . .	58
3.41	Confronto costo e durata delle manovre . . . . .	59
3.42	Confronto andamento $\dot{\Omega}$ e $\dot{\Omega}_t$ . . . . .	59
3.43	Confronto andamento inclinazione . . . . .	60
3.44	Confronto andamento quota . . . . .	60
3.45	Confronto andamento $\Omega - \Omega_T$ . . . . .	60
3.46	Confronto costo e durata delle manovre . . . . .	61
3.47	Confronto andamento $\Omega$ e $\Omega_t$ . . . . .	61
3.48	Confronto andamento inclinazione . . . . .	62
3.49	Confronto andamento quota . . . . .	62
3.50	Confronto andamento $\Omega - \Omega_T$ . . . . .	62
3.51	Confronto $\Omega - \Omega_T$ nei casi favorevoli e sfavorevoli . . . . .	63
3.52	Confronto della pendenza di $\Omega$ nei casi favorevoli e sfavorevoli . . . . .	63
3.53	Confronto tempo e durata delle manovre . . . . .	64
3.54	Confronto andamento inclinazione . . . . .	64
3.55	Confronto andamento quota . . . . .	64
3.56	Confronto andamento $\Omega - \Omega_T$ . . . . .	65
3.57	Confronto costo delle manovre . . . . .	65
3.58	Confronto andamento inclinazione . . . . .	66
3.59	Confronto andamento quota . . . . .	66
3.60	Confronto andamento $\Omega - \Omega_T$ . . . . .	66
3.61	Confronto andamento quota . . . . .	67
3.62	Confronto confronto andamento inclinazione . . . . .	67
3.63	Variazioni di costo a quota iniziale costante caso 500km . . . . .	70
3.64	Variazioni di costo a quota iniziale costante caso 1000km . . . . .	71
3.65	Variazioni di costo a inclinazione iniziale costante caso 41° . . . . .	71

3.66	Variazioni di costo a inclinazione iniziale costante caso $61^\circ$ . . . . .	71
3.67	Variazioni di costo a quota iniziale costante caso 500km . . . . .	72
3.68	Variazioni di costo a inclinazione iniziale costante caso $41^\circ$ . . . . .	73
3.69	Variazioni di costo a quota iniziale costante caso 500km . . . . .	73
3.70	Variazioni di costo a inclinazione iniziale costante caso $41^\circ$ . . . . .	73
3.71	Variazioni di costo a quota iniziale costante caso 500km . . . . .	74
3.72	Variazioni di costo a inclinazione iniziale costante caso $41^\circ$ . . . . .	74
3.73	Zona di minimo variazioni nulle . . . . .	74
3.74	Zona di minimo variazione di quota positiva . . . . .	75
3.75	Zona di minimo variazione di inclinazione positiva . . . . .	75
3.76	Zona di minimo variazione di inclinazione negativa . . . . .	75
3.77	Confronto per manovre a variazione nulla . . . . .	76
3.78	Confronto per manovre con $\Delta a = 300km$ . . . . .	77
3.79	Confronto per manovre con $\Delta a = 1000km$ . . . . .	77
3.80	Confronto per manovre con $\Delta i = 5^\circ$ . . . . .	78
3.81	Confronto per manovre con $\Delta i = -5^\circ$ . . . . .	78
3.82	Andamento del semiasse nelle manovre . . . . .	81
3.83	Andamento dell'inclinazione nelle manovre . . . . .	81
3.84	Andamento del costo con inclinazione iniziale costante . . . . .	82
3.85	Andamento del semiasse nelle manovre . . . . .	83
3.86	Andamento dell'inclinazione nelle manovre . . . . .	83
3.87	Confronto $\Omega - \Omega_T$ per $\Delta\Omega_0 = 0^\circ$ . . . . .	83
3.88	Confronto $\Omega - \Omega_T$ per $\Delta\Omega_0 = 10^\circ$ . . . . .	84
3.90	Andamento dell'inclinazione nelle manovre . . . . .	84
3.89	Andamento del semiasse nelle manovre . . . . .	85
3.91	Confronto $\Omega - \Omega_T$ per $\Delta\Omega_0 = 0^\circ$ . . . . .	85
3.92	Confronto $\Omega - \Omega_T$ per $\Delta\Omega_0 = 10^\circ$ . . . . .	85
3.93	Effetti delle diverse manovre sulla pendenza di $\Omega_T$ . . . . .	86
3.94	Effetti delle diverse manovre sulla pendenza di $\Omega$ . . . . .	86
3.95	Andamento del costo per variazioni nulle . . . . .	88
3.96	Andamento del costo per variazioni positive . . . . .	88
3.97	Andamento del costo per variazioni negative . . . . .	88
3.98	Variazione della pendenza di $\Omega_T$ al variare di $i_0$ . . . . .	89
3.99	Variazione dell'inclinazione al variare di $i_0$ . . . . .	90
3.100	Variazione del semiasse al variare di $i_0$ . . . . .	90

# Elenco delle tabelle

3.1	Variazioni di semiasse per manovra . . . . .	36
3.2	Variazioni di inclinazione per manovra . . . . .	38
3.3	Variazioni di semiasse e inclinazione per manovra . . . . .	40
3.4	Variazioni di semiasse e inclinazione per manovra . . . . .	41
3.5	Confronto del costo tra manovra singola e combinata . . . . .	44
3.6	Manovre scelte per l'analisi dei parametri orbitali . . . . .	46
3.7	Elenco dei confronti tra manovre effettuati . . . . .	47
3.8	Schema riepilogativo situazioni favorevoli . . . . .	68
3.9	Valori di semiasse e inclinazione iniziali considerati . . . . .	69
3.10	Manovre considerate . . . . .	69
3.11	Manovre caratteristiche considerate . . . . .	79
3.12	Confronto costi e durate variazioni nulle . . . . .	81
3.13	Confronto costi e durate variazioni positive . . . . .	82
3.14	Confronto costi e durate variazioni negative . . . . .	84
3.15	Punti caratteristici considerati . . . . .	87

# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Detriti

Dall'inizio dell'era spaziale, il 4 ottobre 1957 con il lancio dello Sputnik 1, sono stati effettuati circa 5450 lanci, grazie ai quali sono stati immessi in orbita circa 8950 satelliti, di questi circa 5000 sono ancora in orbita e 1950 ancora in funzione.

I detriti spaziali sono residui artificiali che orbitano attorno alla terra, essi possono essere spacecraft rimasti inutilizzati, stadi di lanciatori, frammenti dovuti a collisioni tra corpi e residui vari di missioni. Nella figura 1.1 viene mostrata la suddivisione per tipo di detrito e l'evoluzione in termini di numero.

I diagrammi mostrano due incrementi netti: il primo è dovuto al test anti-satellite effettuato dalla Cina in data 11/01/2007, il secondo alla collisione del 10/02/2009 tra il satellite Iridium 33 e Kosmos-2251. Nel diagramma, 1.2, si nota come il maggior numero di detriti sia presente in orbita LEO.

Secondo i dati forniti dall'ESA il numero di detriti regolarmente rilevati da sistemi radar di terra e misurazioni ottiche è pari a circa 22300. Il numero di rotture, esplosioni o collisioni avvenute dal 1957 è oltre il valore di 500, mentre la massa totale di detriti orbitanti supera le 8400 tonnellate.

Le dimensioni di questi detriti sono variabili, si parte da circa 34000 oggetti di dimensioni maggiori ai 10 cm, passando per 900000 di dimensioni comprese tra 1 cm e 10 cm, fino ad arrivare a circa 128 milioni di frammenti tra 1 mm e 1 cm. <sup>1</sup>

Nonostante le taglie ridotte possono rappresentare una seria minaccia per uno spacecraft (s/c) per via delle elevate velocità possedute da entrambi i corpi. Attraverso la resistenza dell'atmosfera terrestre è possibile il rientro di alcuni detriti degli strati più bassi, inoltre l'attività solare permette ciclicamente, ogni 11 anni, di variare la densità dell'aria, con conseguente variazione della quota dell'atmosfera e quindi possibilità periodica di pulizia di parte dei detriti presenti negli strati più bassi.

Nel 1978 Donald J. Kessler propose uno scenario riguardante l'evoluzione del numero di detriti orbitanti, la *Sindrome di Kessler*, la quale afferma che, in caso di mancato trattamento, il numero di questi corpi e frammenti è destinato a crescere in maniera esponenziale.

---

<sup>1</sup> Dati ottenuti da <https://www.esa.int>

L'aumento dei detriti, porterà a maggiori probabilità di collisioni e quindi un ulteriore aumento del loro numero. Esistono tre regioni critiche dal punto di vista della Sindrome di Kessler:[2]

$$\text{quota} = 1000\text{km} \pm 100\text{km} \text{ a } i = 82 \pm 1^\circ$$

$$\text{quota} = 800\text{km} \pm 100\text{km} \text{ a } i = 99 \pm 1^\circ$$

$$\text{quota} = 850\text{km} \pm 100\text{km} \text{ a } i = 71 \pm 1^\circ$$

In particolare la prima regione rappresenta la zona con la maggiore stima di numero di collisioni catastrofiche nei prossimi 200 anni, la seconda è più interessante dal punto di vista commerciale e rappresenta la zona di orbita eliosincrona.

Per limitare la crescita dei detriti sono presenti diverse opzioni, una tra queste è la passivazione, la quale prevede la rimozione dell'energia interna residua dello s/c a fine vita in modo tale da evitare eventuali esplosioni successive. Sono state stabilite, inoltre, delle linee guida: per le orbite LEO il rientro in atmosfera entro 25 anni sfruttando la resistenza dell'atmosfera, mentre per le orbite a quota più alta un trasferimento in un'orbita cimitero. Lo scenario proposto da Kessler rimane valido anche nell'eventualità di cessazione dei lanci, risulta quindi necessaria l'implementazione di metodi di rimozione attiva dei detriti, nello specifico occorrerebbe rimuovere almeno 5 detriti di grandi dimensioni ogni anno per mantenere la quantità di detriti in LEO circa costante per i prossimi 200 anni [6]. Nel corso degli anni sono stati proposti diversi sistemi, generalmente sono costituiti dalle seguenti fasi: un processo di identificazione dei detriti migliori da rimuovere, in termini di massa e costo, un processo di avvicinamento e sincronizzazione dell'orbita, un processo di cattura o contatto ed infine una fase di rientro o de-orbiting.

Nei diagrammi 1.3 e 1.4 vengono riportati i risultati delle simulazioni effettuate utilizzando il metodo LEGEND, capace di ipotizzare la futura evoluzione della popolazione di detriti nelle orbite attorno la Terra. Il primo diagramma rappresenta l'evoluzione dei detriti in orbita LEO nello scenario di cessazione dei lanci, il secondo introduce un confronto tra diversi scenari: il primo con la sola rimozione a fine missione (PMD) e gli altri con rimozione attiva nel caso di 2 (ADR02) o 5 (ADR05) detriti l'anno.[6]

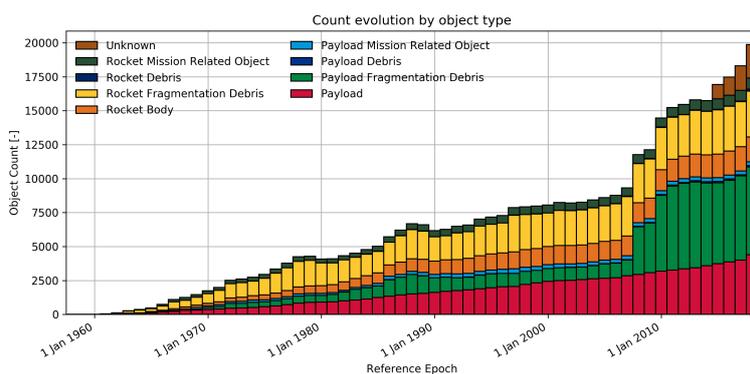


Figura 1.1: Evoluzione del numero dei detriti per tipo [© ESA]

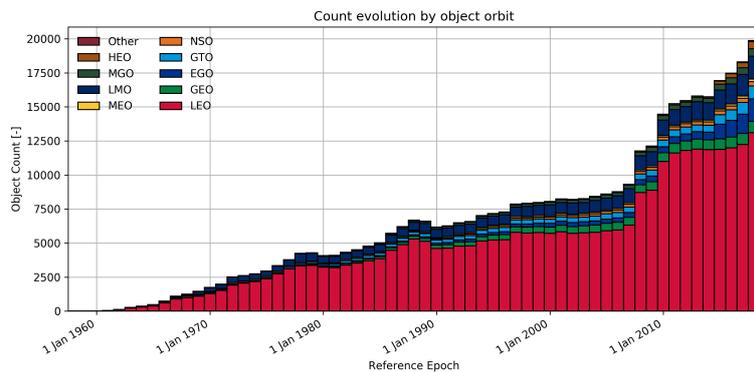


Figura 1.2: Evoluzione del numero dei detriti per orbita [© ESA]

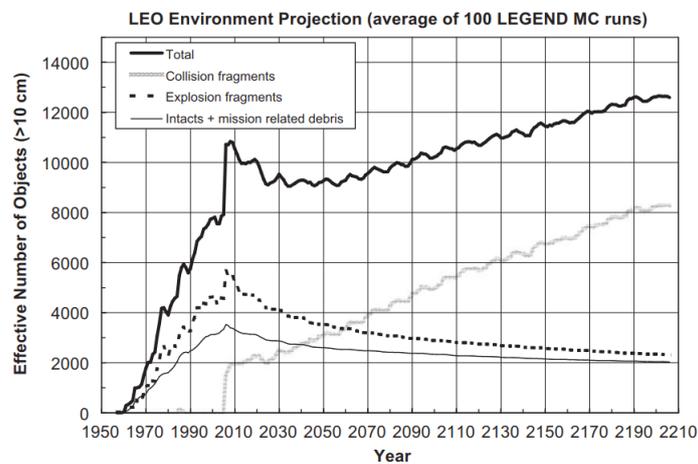


Figura 1.3: Simulazione del numero di detriti in LEO

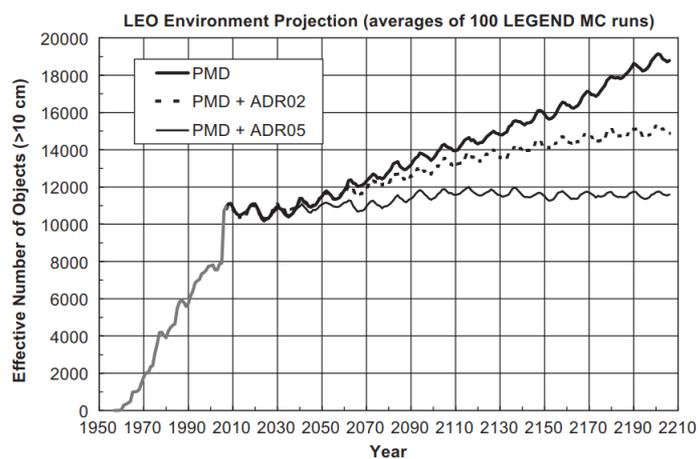


Figura 1.4: Scenari evoluzione con ADR

## 1.2 Meccanica Orbitale

In questa sezione vengono introdotte, in maniera sintetica, le nozioni teoriche di meccanica orbitale di interesse. L'orbita di un corpo, o *spacecraft* (*s/c*), attorno un corpo principale viene descritta attraverso l'introduzione di grandezze che prendono il nome di *parametri orbitali*. I parametri orbitali sono delle grandezze che identificano la dimensione, la forma e l'orientamento di un'orbita. La definizione di questi parametri viene effettuata a partire dall'introduzione di: una terna di versori ( $\hat{I}; \hat{J}; \hat{K}$ ), un piano equatoriale e un piano dell'orbita. L'intersezione tra questi due piani produce una linea, detta *linea dei nodi*. Nella definizione classica si hanno sei parametri:

- *semiasse maggiore*  $a$ ;
- *inclinazione*  $i$ , angolo tra il piano dell'orbita e il piano equatoriale;
- *eccentricità*  $e$ , direzione data dal periastro e modulo dall'eccentricità dell'ellisse;
- *argomento del periastro*  $\omega$ , angolo tra il periastro e la linea dei nodi;
- *longitudine del nodo ascendente*  $\Omega$ , angolo compreso tra la linea dei nodi e il versore  $\hat{I}$ ;
- *anomalia vera*  $\nu$ , angolo tra il vettore posizione dello *s/c* e il periastro.

Il semiasse maggiore  $a$  identifica la dimensione dell'orbita, l'eccentricità  $e$  ne caratterizza la forma e l'inclinazione  $i$  ne fornisce l'orientamento. In caso di orbite kepleriane, i primi cinque parametri rimangono costanti,  $\nu$  varia in quanto dipendente dal tempo.

Un'orbita viene definita *orbita equatoriale* quando  $i = 0$ , in questo caso viene a mancare la linea dei nodi e di conseguenza il parametro  $\Omega$ . Il secondo caso particolare è rappresentato dalle *orbite circolari*, esse presentano un valore di eccentricità  $e$  nullo, in questo caso non sarà presente la longitudine del periastro  $\omega$ .

Attraverso le considerazioni provenienti dalla meccanica dei due corpi, l'equazione del moto dello *s/c* rispetto al corpo principale vale:

$$\ddot{\bar{r}} = -\frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{\bar{r}}{r} \quad (1.1)$$

$$\mu = G \cdot M \quad (1.2)$$

dove  $\mu$  prende il nome di parametro gravitazionale (o costante gravitazionale planetaria) e per la Terra vale  $3.986004418 \times 10^{14} m^3/s$ .  $\bar{r}$  rappresenta il vettore posizione, congiungente il centro della terra con lo *s/c*.

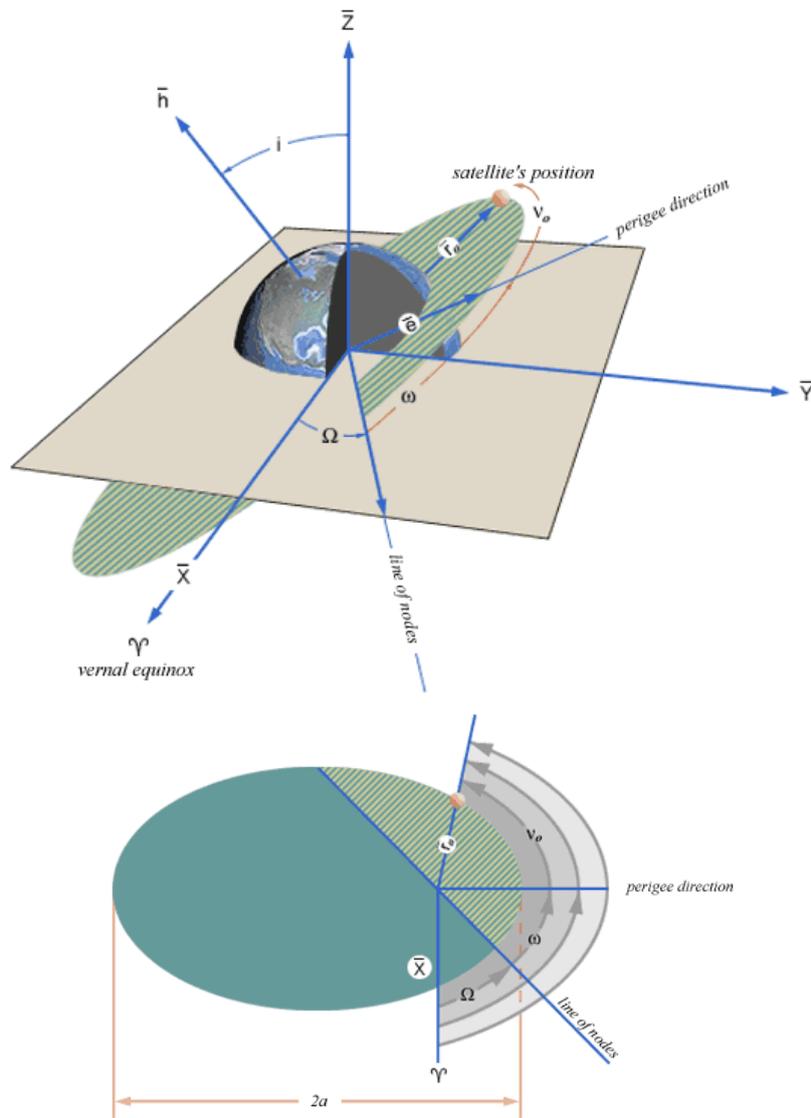


Figura 1.5: Rappresentazione grafica dei parametri orbitali <sup>1</sup>

<sup>1</sup><https://spaceflight.nasa.gov/realddata/elements/graphs.html>

Un corpo in orbita attorno a un corpo principale possiede un'energia meccanica data dalla somma di energia potenziale ed energia cinetica. In assenza di forze perturbative questa somma si mantiene costante, per un'orbita circolare l'energia vale:

$$\varepsilon = \frac{v_c^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2r} \quad (1.3)$$

Questa relazione permette la determinazione della velocità di un corpo in orbita circolare attorno ad un corpo principale ed il relativo periodo dell'orbita  $T$

$$v_c = v_{\text{circolare}} = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad (1.4)$$

$$T_{\text{circolare}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mu}} \quad (1.5)$$

La velocità di un corpo dipende, quindi, dalla sua distanza dal corpo principale, se il raggio dell'orbita aumenta allora si avrà una velocità minore.

L'intervallo di tempo che lo s/c impiega per percorrere un certo arco di orbita può essere determinato mediante l'introduzione di due grandezze aggiuntive: l'*anomalia eccentrica*  $E$  e l'*anomalia media*  $M$ .

L'anomalia eccentrica viene utilizzata nei problemi definiti diretti, ovvero dove si conosce l'intervallo di anomalia vera  $\Delta\nu$  e si vuole determinare il tempo  $\Delta t$ , viceversa per l'anomalia media.

I due angoli vengono individuati graficamente dalla figura 1.6 e si ottengono mediante la costruzione di una circonferenza di raggio pari al semiasse maggiore, e da una perpendicolare all'asse x passante per la posizione dello s/c.

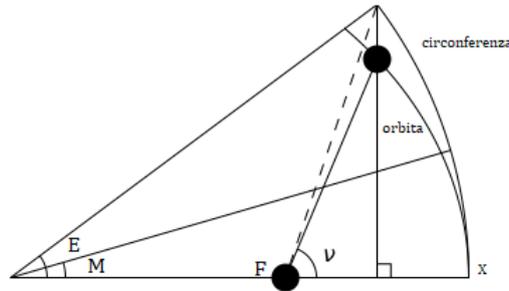


Figura 1.6: Anomalia eccentrica e anomalia media

$$\cos E = \frac{e + \cos \nu}{1 + e \cos \nu} \quad (1.6)$$

$$M = E - e \sin E = t_{P1} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (1.7)$$

$$t_{P1} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (E - e \sin E) \quad (1.8)$$

### 1.3 Perturbazioni Orbitali

Le perturbazioni orbitali sono forze esterne che portano alla variazione di uno o più parametri orbitali, si parlerà di orbite non kepleriane. Queste variazioni possono essere di corto periodo, di lungo periodo o secolari. Le prime hanno periodo minore di quello dell'orbita dello s/c, le seconde hanno periodo maggiore, infine le secolari vengono rappresentate da una variazione lineare di un parametro.

I parametri orbitali  $a$ ;  $e$ ;  $i$  vengono modificati dalle sole perturbazioni periodiche, mentre  $\Omega$ ;  $\omega$  subiscono l'influenza sia degli effetti periodici che dei secolari.

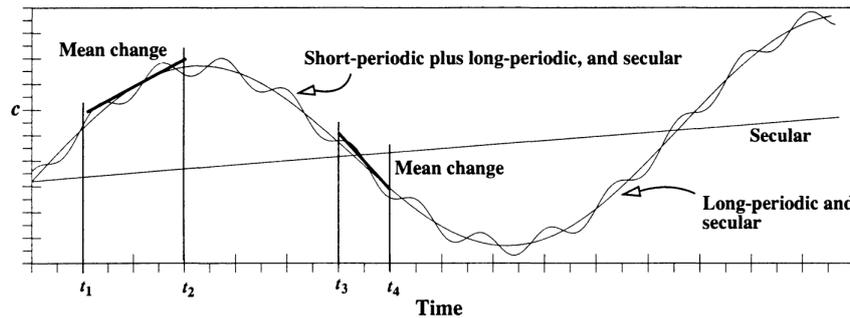


Figura 1.7: Effetto delle perturbazioni su un elemento orbitale[8]

Le principali cause di queste forze sono:

- non sfericità e non omogeneità della Terra;
- presenza di un 3° corpo;
- resistenza aerodinamica;
- pressione solare.

L'effetto perturbativo si manifesta nell'equazione del moto attraverso l'introduzione del parametro accelerazione  $\bar{a}_p$

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} + \bar{a}_p \quad (1.9)$$

In questo studio il contributo di perturbazione più importante è dato dalla forma della Terra, tuttavia vengono descritte, in maniera sintetica, anche le altre cause.

### 1.3.1 Effetti Non Sfericità e Non Omogeneità della Terra

Il modello utilizzato per approssimare la forma della Terra è detto *geoide*, una superficie equipotenziale passante per il livello medio del mare. Nel caso di Terra sferica si può determinare l'energia potenziale gravitazionale attraverso la relazione:

$$E_p = -\frac{\mu}{r} \quad (1.10)$$

Nel caso di geoide la relazione diviene:

$$E_p = -\frac{\mu}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{r_t}{r} \right)^2 P_n \sin La - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} J_{n,m} P_n^m \sin La \cos(Lo - Lo_{n,m}) \right\} \quad (1.11)$$

Le  $J_n$  sono dette *armoniche zonali*, mentre le  $J_{n,m}$  sono definite: *armoniche tesserali* se  $m \neq n$  o *armoniche settoriali* se  $m = n$ . Le tesserali dipendono dalla longitudine e dalla latitudine, mentre le settoriali dipendono solo dalla longitudine.  $P_n$  è il *polinomio di Legendre di grado n*.

L'armonica principalmente considerata è la  $J_2$ , la quale considera l'effetto dello schiacciamento dei poli e vale  $J_2 = 1082,6 \cdot 10^{-6}$ . Questo schiacciamento porta a tre effetti principali:

- effetto su  $\Omega$ , regressione della linea dei nodi;
- effetto su  $\omega$ , precessione della linea degli apsi;
- effetto sull'anomalia media M.

Nelle due successive figure vengono mostrati gli andamenti di questi effetti al variare di quota e inclinazione.

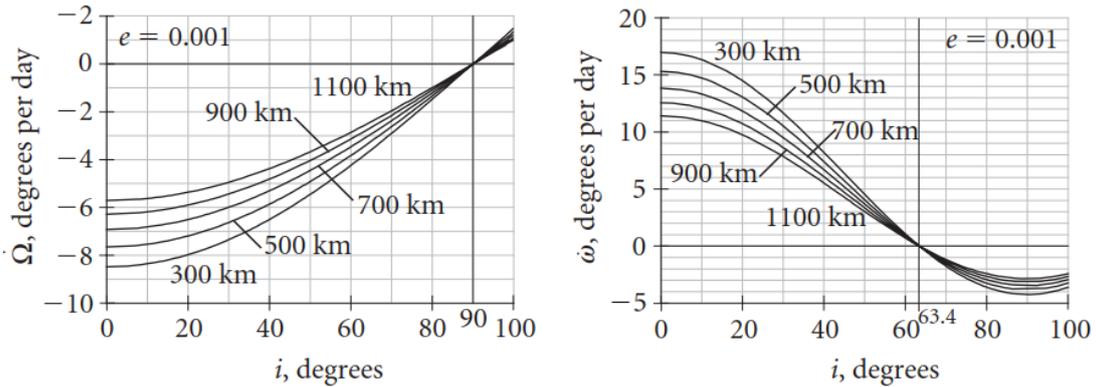


Figura 1.8: Regressione della linea dei nodi e precessione della linea degli apsi [4]

### 1.3.2 Effetti di J2

#### Effetto sulla linea dei nodi

Il primo effetto riguarda la regressione della linea dei nodi e si manifesta attraverso una variazione nel tempo della longitudine del nodo ascendente  $\Omega$ , questa variazione sarà negativa nel caso di orbite dirette ( $0 < i < \pi/2$ ), positiva nel caso di orbite retrograde ( $\pi/2 < i < \pi$ ). La variazione viene quantificata in:

$$\dot{\Omega} = \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} \left( \frac{R_{terra}}{p} \right)^2 n J_2 \cos(i) \quad (1.12)$$

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (1.13)$$

$$p = a(1 - e^2) = h + R_{terra} \quad (1.14)$$

$p$  rappresenta il *semilatus rectum*,  $n$  il *moto medio*.

L'ultimo membro della relazione 1.14 risulta valido solo per orbite circolari, dato che l'eccentricità ha valore nullo.

Dalle relazioni si nota come l'effetto perturbativo sia maggiore, in valore assoluto, a quote o inclinazioni basse. Andamento confermato nella figura a sinistra in 1.8.

La relazione 3.2 può essere vista in termini di velocità  $V$  e inclinazione  $i$  raccogliendo i termini costanti ed evidenziato il comportato appena citato. Una diminuzione di quota porta a un aumento di velocità, di conseguenza il modulo delle perturbazioni aumenterà, discorso analogo al diminuire dell'inclinazione. [3]

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} J_2 \sqrt{\mu} R_E^2 a^{-\frac{7}{2}} \cos I = -k \left( \frac{\mu}{a} \right)^{\frac{7}{2}} \cos I = -k V^7 \cos I \quad (1.15)$$

Questa perturbazione può essere utilizzata per risparmiare propellente, il diverso rateo di regressione di due piani a quote e/o inclinazioni diverse porta questi ad allinearsi dopo un certo intervallo temporale: [7]

$$t_{allineamento} = \frac{\Omega_{s/c}(t_0) - \Omega_T(t_0) + K2\pi}{\dot{\Omega}_T - \dot{\Omega}_{s/c}} \quad (1.16)$$

Dove il pedice  $s/c$  è relativo allo spacecraft, mentre il pedice  $T$  all'orbita *target*.

### Effetto sulla linea degli apsidi

Il secondo effetto riguarda la precessione della linea degli apsidi, in questo caso si assiste a una variazione dell'argomento del periastro  $\omega$ , quantificata in:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4} \left( \frac{R_{terra}}{p} \right)^2 n J_2 (5 \cos^2(i) - 1) \quad (1.17)$$

L'effetto perturbativo dipende ancora dalla quota, in questo caso però si avranno effetti maggiori a inclinazioni  $i = 0^\circ; \pi; 2\pi$ . Le perturbazioni si annullano in due specifici punti:

$$5 \cos^2(i) - 1 = 0 \quad (1.18)$$

$$i = 63.4^\circ \text{ e } i = 106.6^\circ$$

### Effetto sull'anomalia media

L'effetto sull'anomalia media si quantifica in:

$$\dot{M} = n \left[ 1 + \frac{3}{4} J_2 \left( \frac{R_e}{p} \right)^2 \sqrt{1 - e^2} (3 \cos^2 i - 1) \right] \quad (1.19)$$

## 1.3.3 Altre Perturbazioni

### Presenza 3° corpo

La seconda causa di perturbazione è dovuta alla presenza di un 3° corpo, ad esempio il Sole o la Luna.

Introducendo con  $\rho$  la distanza tra il 3° corpo e lo s/c e con  $R$  quella tra il corpo principale e il 3° corpo, è possibile quantificare questo effetto perturbativo:

$$\bar{a}_p = -\frac{\mu_{3c} \bar{\rho}}{\rho^2} + \frac{\mu_{3c} \bar{R}}{R^2} \quad (1.20)$$

Dalla relazione è possibile osservare come questa perturbazione dipenda dalla differenza tra la forza di attrazione che il 3° corpo ha sulla massa principale e quella che applica sullo s/c. L'effetto aumenta all'aumentare della distanza dello s/c dal corpo principale, a parità di distanza l'effetto sarà massimo quando lo s/c si trova in congiunzione di fase, ovvero allineato tra i due corpi, mentre sarà minimo in quadratura di fase, ovvero quando la congiungente satellite-corpo principale forma un angolo di  $\pi/2$  o  $3\pi/2$  con la congiungente corpo principale-3° corpo.

### Resistenza aerodinamica

L'effetto della resistenza aerodinamica viene avvertito da corpi in orbita fino a 1000 km circa, oltre può essere considerato trascurabile. Gli effetti maggiori si hanno sotto i 200 km. In questo studio verranno analizzate quote comprese tra 500 km e 1500 km, gli effetti della resistenza si sentirebbero solo a lungo termine, quindi possono essere considerati trascurabili.

Indicando con  $v$  la velocità del satellite rispetto all'atmosfera, con  $S$  la sua superficie frontale e con  $C_D$  il coefficiente di resistenza dovuto a impatti molecolari (solitamente approssimato al valore di circa 2) è possibile quantificare questo effetto in:

$$a_{p_0} = -\frac{1}{m} \frac{1}{2} \rho v^2 S C_D \quad (1.21)$$

Orbite ellittiche variano la propria distanza dal corpo principale nel corso del moto di rivoluzione, di conseguenza gli effetti della resistenza variano e portano effetti maggiori al perigeo, il punto dell'orbita più vicino al corpo principale. L'orbita tenderà ad assumere una forma sempre più circolare. Il rateo di variazione della quota viene indicato con:

$$\dot{a} = -\sqrt{\mu a} \rho \frac{S}{m} C_D \quad (1.22)$$

### Pressione solare

L'effetto della pressione solare è caratterizzato da una variazione del momento della quantità di moto  $p$ , dovuto all'interazione tra il corpo e i fasci di fotoni. La perturbazione ha un valore trascurabile per i satelliti in orbita bassa attorno la terra, acquisisce importanza nel caso di satelliti caratterizzati da un grande rapporto volume-peso. Il valore della perturbazione, in modulo, vale:

$$a_{p_{SR}} = p \frac{S}{m} \quad (1.23)$$

$$p = 4.5 \cdot 10^{-6} N/m^2 \quad \text{a distanza dal sole : } 1AU \quad (1.24)$$

## 1.4 Manovre Orbitali

Le manovre orbitali sono serie di operazioni effettuate allo scopo di variare l'orbita, compensare perturbazioni o errori di ignizione, esse possono essere effettuate mediante propulsione chimica o elettrica, nel primo caso si adatterà l'ipotesi di spinta impulsiva, quindi tutta la spinta viene applicata in un tempo infinitesimo, nel secondo caso questa ipotesi non è applicabile. Il costo di ogni manovra viene quantificato attraverso il parametro  $\Delta V$ , solitamente espresso in  $km/s$ . Le manovre possono essere catalogate in base al numero di impulsi, nel caso di singolo impulso è possibile effettuare:

- variazioni di quota, quindi aggiustamento del periastro o dell'apoastro;
- variazioni di inclinazione;
- rotazioni della linea degli apsi, quindi variazioni di  $\omega$ ;
- manovre combinate.

Le manovre a più impulsi possono essere considerate come ripetizioni o combinazioni del caso singolo, due esempi sono dati dalla *Trasferta di Hohmann* e dal *rifasamento dell'orbita*, entrambe le manovre sono caratterizzate da una doppia variazione di quota.

### 1.4.1 Confronto Propulsione Chimica ed Elettrica

Il costo di una missione,  $\Delta V$ , può essere correlato alla massa dello s/c mediante l'equazione di Tsiolkovsky:

$$\Delta V = c \ln \left( \frac{m_0}{m_f} \right); \quad \frac{m_f}{m_0} = e^{-\frac{\Delta v}{c}} \quad (1.25)$$

Dove con  $c$  si intende la velocità efficace di scarico, con  $m_0$  la massa iniziale e con  $m_f$  la massa finale. La relazione permette di evidenziare come, a parità di  $\Delta V$ , sia necessario aumentare  $c$  per aumentare la massa finale. Esistono due grandi categorie di propulsione: chimica ed elettrica, vengono riportate le relazioni utilizzate per il calcolo di  $c$ , rispettivamente:

$$c_{chim} = u_e = \sqrt{2E_{ch}}; \quad c_{elet} = u_e = \sqrt{2\eta \frac{P_E}{\dot{m}_p}} = \frac{2\eta P_E}{T} \quad (1.26)$$

Nel caso chimico la velocità viene limitata dal potere calorifico  $E_{ch}$ , mentre nell'elettrico è possibile scegliere liberamente questo valore in base alla potenza elettrica  $P_E$ . La velocità di scarico può essere vista sotto forma di un'altra grandezza, l'impulso specifico  $I_{sp}$ , il quale esprime il rapporto tra la spinta che si ottiene e la massa che si utilizza:

$$I_{sp} = \frac{T \Delta t}{\dot{m}_p \Delta t g_0} = \frac{c}{g_0} \quad (1.27)$$

Nella figura 1.9a vengono riportati i valori di impulso specifico e spinta per i diversi tipi di propulsori, propulsori chimici presentano valori di impulso specifico bassi e livelli di spinta

elevati, ciò si traduce in missioni più brevi del caso elettrico, ma con capacità di payload inferiori, come evidenziato nella figura 1.9b, inoltre il vincolo imposto dal potere calorifico limita i valori di impulso specifico massimo che si possono raggiungere.

La differenza di tempo nella manovra porta a conseguenze sul tipo di traiettoria, considerando un passaggio tra due orbite circolari, nel caso di propulsione chimica basterà effettuare una manovra di Hohman con due impulsi e due direzioni del vettore velocità, nel caso di propulsione elettrica la traiettoria avrà una forma a spirale e sarà necessario correggere più volte la direzione del vettore velocità, i due grafici in figura 1.10 permettono di visualizzare questo diverso andamento, a sinistra è presente il caso chimico, a destra quello elettrico.

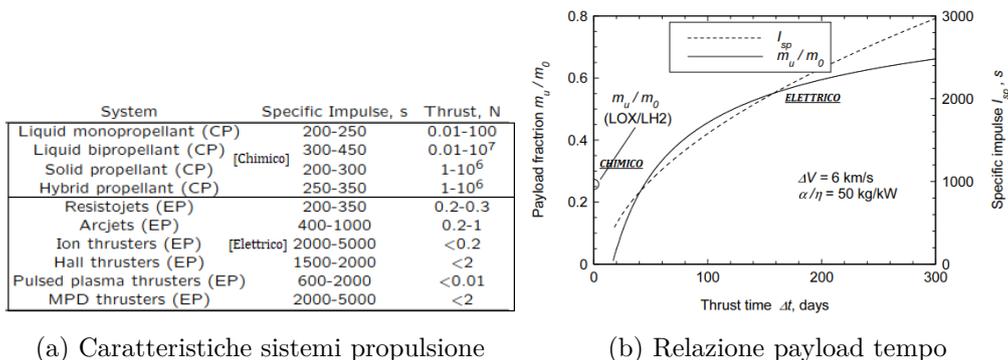


Figura 1.9: Confronto Impulso specifico e Payload <sup>1</sup>

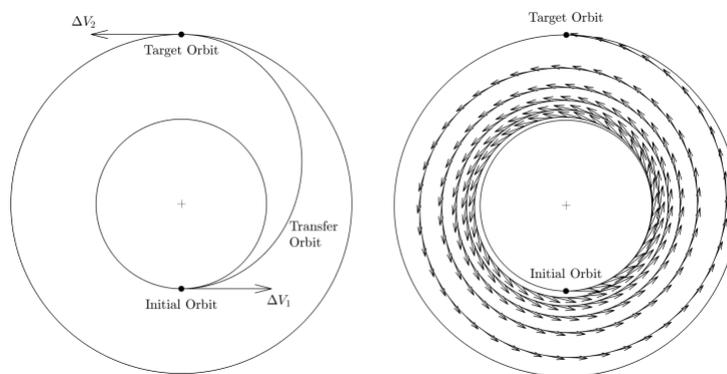


Figura 1.10: Confronto traiettoria propulsione chimica ed elettrica [1]

<sup>1</sup>L. Casalino, Space Propulsion 2017

### 1.4.2 Manovre con Propulsione Elettrica

I livelli di spinta che si hanno con propulsione elettrica sono minori rispetto al caso chimico, essa dovrà, inoltre, essere applicata in maniera continuativa. Manovre in precedenza considerate istantanee, come il cambio di inclinazione, ora assumono una dipendenza dal tempo. La trattazione di queste manovre viene effettuata mediante il *Modello di Edelbaum*, il quale effettua una approssimazione delle *Equazioni Planetarie di Gauss*, queste ultime descrivono la variazione dei parametri orbitali nel tempo

$$\frac{da}{dt}; \quad \frac{de}{dt}; \quad \frac{di}{dt}; \quad \frac{d\Omega}{dt}; \quad \frac{d\omega}{dt}; \quad \frac{d\nu}{dt} \quad (1.28)$$

### 1.4.3 Modello di Edelbaum

Nel 1961 Theodore N. Edelbaum pubblicò un lavoro [5] riguardante l'ottimizzazione di manovre a bassa spinta per orbite quasi circolari. Il suo risultato fu quello di minimizzare il tempo della manovra e, di conseguenza, il  $\Delta V$ . L'approssimazione di Edelbaum si basa sulle seguenti ipotesi:

- orbite quasi circolari, quindi  $r \approx a \approx p, V^2 \approx \mu/r$ ;
- $E \approx \nu \approx M$ ;
- inclinazione orbita piccola, quindi  $\sin i \approx i, \cos i \approx 1$ ;
- spinte continua e di modulo costante;
- spinte basse, quindi accelerazioni:  $a_V = a_T \ll \mu/r^2; a_W \ll \mu/r^2; a_R \ll \mu/r^2$  ;
- direzione di spinta fuori dal piano,  $\beta$ , costante lungo una singola rivoluzione.

In base a queste ipotesi si ottiene una semplificazione delle equazioni di Gauss

$$\dot{a} = 2 \frac{T_V}{m} \frac{a}{V} \quad (1.29)$$

$$\dot{e} = \left[ 2 \cos \nu \frac{T_V}{m} - \sin \nu \frac{T_N}{m} \right] \frac{1}{V} \quad (1.30)$$

$$\dot{\omega} = -\dot{\Omega} + \left( 2 \sin \nu \frac{T_V}{m} + \cos \nu \frac{T_N}{m} \right) \frac{1}{Ve} \quad (1.31)$$

$$\dot{i} = \cos(\omega + \nu) \frac{T_W}{m} \frac{1}{V} \quad (1.32)$$

$$\dot{\Omega} = \sin(\omega + \nu) \frac{T_W}{m} \frac{1}{iV} \quad (1.33)$$

$$\dot{M} = \dot{\nu} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (1.34)$$

Con  $T$  si intende la spinta. La componente parallela alla velocità  $T_V$  permette la variazione dei parametri  $a; e; \omega$  e dell'energia. La componente  $T_N$ , normale al vettore velocità, permette la variazione di  $e$  e  $\omega$ , non facendo variare il modulo della velocità, l'energia si manterrà costante. La componente  $T_W$ , perpendicolare al piano, fa variare  $i$  e  $\Omega$ . Queste

relazioni, a loro volta, vengono ulteriormente semplificate dalla presenza delle singolarità dovute alle ipotesi iniziali,  $e \approx 0$ ;  $i \approx 0$  quindi  $\dot{\omega} \rightarrow \infty$ ;  $\dot{\Omega} \rightarrow \infty$ . Edelbaum ignora le equazioni che contengono queste singolarità, il sistema finale si riduce a:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= 2 \frac{T_V}{m} \frac{a}{V} \\ \dot{e} &= \left[ 2 \cos \nu \frac{T_V}{m} - \sin \nu \frac{T_N}{m} \right] \frac{1}{V} \\ \dot{i} &= \cos(\omega + \nu) \frac{T_W}{m} \frac{1}{V} \end{aligned}$$

Le diverse manovre hanno una direzione preferenziale di applicazione della spinta, in modo tale da massimizzarne la variazione. Le componenti della spinta sono definite come:

$$T_V = T \cos \alpha \cos \beta \quad (1.35)$$

$$T_N = -T \sin \alpha \cos \beta = -T_R \quad (1.36)$$

$$T_W = T \sin \beta \quad (1.37)$$

In figura 1.11 è possibile visualizzare i due angoli.

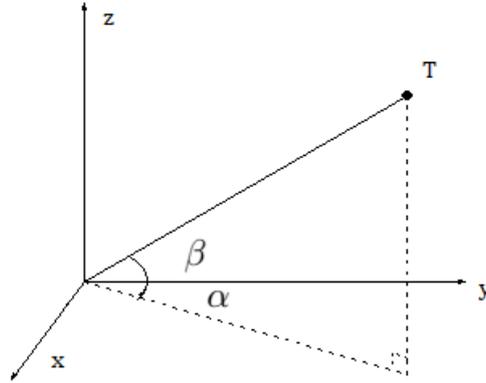


Figura 1.11: Rappresentazione grafica di  $\alpha$  e  $\beta$

### Variazione dei parametri

Nel caso in cui si voglia variare il solo parametro  $a$ , la spinta dovrà essere applicata in direzione tangenziale, quindi:

$$\alpha = \beta = 0 \quad T_V = T \quad T_R = T_W = 0$$

Nel caso di variazione della sola eccentricità  $e$  occorre avere :

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \tan \nu \quad \beta = 0 \quad \Delta a = \Delta i = 0$$

La variazione del parametro viene effettuata applicando la spinta in direzione perpendicolare alla linea del periastro.

Nel caso di variazione della sola  $i$  occorre un  $\beta = \pm 90^\circ$ , il caso positivo corrisponde a un aumento di latitudine, il caso negativo a un decremento. La variazione della posizione nell'orbita, il rifasamento, viene realizzata applicando la spinta in direzione tangenziale in un verso fino al raggiungimento della metà della correzione desiderata, successivamente si inverte il verso della spinta per tornare nell'orbita di partenza.

### Costo e durata della manovra

Vengono di seguito riportate le velocità caratteristiche per piccole variazioni dei parametri, in orbite quasi circolari, con propulsione sia chimica che elettrica:[5]

High Thrust $\Delta V/V_0$	Low Thrust $\Delta V/V_0$
0.5 $\Delta a/a_0$	0.5 $\Delta a/a_0$
0.5 $\Delta e$	0.649 $\Delta e$
1 $\Delta i$	1.571 $\Delta i$
0.106 $\Delta \nu/n$	0.212 $\Delta \nu/n$

Considerando la propulsione chimica come High Thrust e l'elettrica come Low Thrust è possibile notare come la variazione del semiasse abbia velocità caratteristiche uguali nei due casi, mentre le variazioni di eccentricità con bassa spinta richiedono circa il 30% di spinta in più, il cambio di inclinazione il 57%, mentre il rifasamento il doppio. Mantenendo costante il valore di  $\beta$ , la relazione ottenuta da Edelbaum per quantificare il costo viene espressa come:

$$\Delta V = \sqrt{V_0^2 + V_F^2 - 2V_0V_F \cos[(\pi/2)\Delta i]} \quad (1.38)$$

A partire da questa relazione è possibile determinare la durata di una manovra, strettamente legata al  $\Delta V$ , reintroducendo l'accelerazione  $a$

$$t_F = \frac{\Delta V}{a} = \frac{\Delta V m_0}{T} \quad (1.39)$$

nel corso del lavoro, mantenendo inalterata l'accelerazione, si otterranno andamenti grafici del tempo analoghi a quelli del costo.

### Variazione combinate

L'ultimo caso riguarda la variazione combinata di  $a$  e  $i$ , in questa circostanza occorre  $\alpha = 0$  e la ricerca del massimo nella relazione  $\dot{a} + ki$ , la quale può essere riscritta utilizzando le relazioni 1.29 e 1.32 in:

$$\tan \beta = k \cos(\omega + \nu)$$

Il valore di  $k$  dipende dalla variazione desiderata dei parametri. Considerando un solo giro di traiettoria è possibile ottenere una soluzione approssimata, ma valida, utilizzando un  $|\beta|$  costante. Le differenze con la soluzione reale sono mostrate in figura 1.13a. In caso di più giri occorre scegliere, di volta in volta, il valore ottimale di  $\beta$ .

Ipotizzando traiettorie quasi circolari e  $\beta$  costante a ogni giro, l'ottimizzazione del parametro avviene se:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{di}{dV} + k \frac{dt}{dV} \right) = 0 \quad (1.40)$$

quindi

$$V \sin \beta = \text{costante} = V_0 \sin \beta_0 \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{\mu/r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin \beta}{\sqrt{r}} = \frac{\sin \beta_0}{\sqrt{r_0}}$$

A raggi piccoli, quindi nelle vicinanze del corpo principale, si hanno  $V$  elevate e il costo del cambio di inclinazione sarà più grande del caso con raggio maggiore. Converterà avere  $\beta$  piccoli per raggi piccoli. Discorso inverso per raggi elevati.

Assegnato un valore di  $\beta_0$ , nel caso di velocità minima  $V_m = V_0 \sin \beta_0$  si ottiene  $\beta = 90^\circ$

$$r_m = \mu/V_m^2; \quad \Delta V_{0m} = V_0 \cos \beta_0; \quad \Delta i_{0m} = 1 - (2/\pi)\beta_0$$

Esiste quindi un limite alla variazione di inclinazione che può essere effettuata in una sola manovra, visibile a livello grafico nella figura 1.14, rappresentato da  $\beta_0 \rightarrow 0$ , che fornisce i seguenti risultati:

$$V_m = 0; \quad r_m = \infty; \quad \Delta i_{0m} = 57.3^\circ; \quad \Delta V = V_0 - V_1$$

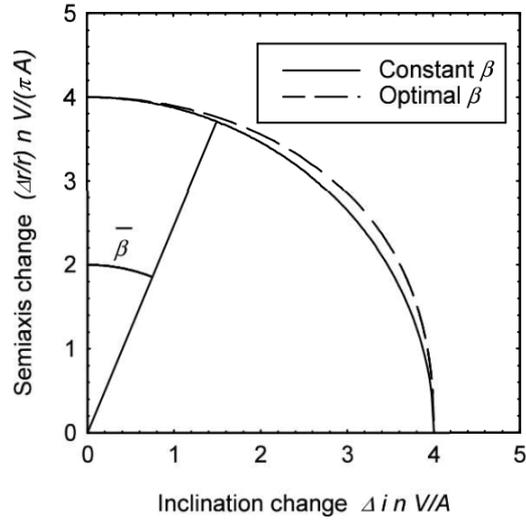


Figura 1.12: Differenze tra soluzione reale e approssimata

(a) L. Casalino, Space Propulsion 2017

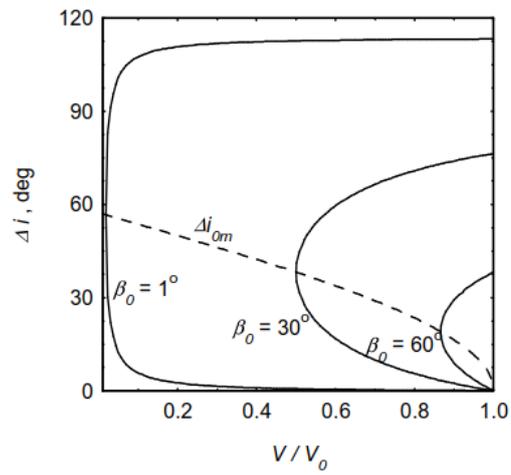


Figura 1.14: Limite variazione di inclinazione a seconda del  $\beta_0$

(a) L. Casalino, Space Propulsion 2017

# Capitolo 2

## Metodologie

### 2.1 Problema di Ottimizzazione

Un generico processo di ottimizzazione ha lo scopo di massimizzare o minimizzare un certo indice di prestazione, nel caso di manovre orbitali si può, ad esempio, massimizzare la massa finale o minimizzare il propellente necessario. Esistono diversi approcci a questo problema, in questa trattazione vengono considerati i *metodi indiretti*, i quali sfruttano i principi del calcolo variazionale e determinano i controlli attraverso la soluzione di un problema differenziale ai limiti. Questi metodi consentono, inoltre, anche un'elevata precisione numerica e limitati tempi di calcolo, a fronte però di difficoltà di convergenza e scarsa robustezza.

#### 2.1.1 Teoria del Controllo Ottimale

Vengono introdotti il vettore delle variabili di stato  $x$  e il vettore dei controlli  $u$ . L'evoluzione del sistema è descritta da equazioni differenziali nella forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad (2.1)$$

La traiettoria da ottimizzare viene suddivisa in  $n$  sottointervalli, ognuno dei quali definito tra il tempo  $t_{(j-1)+}$  e  $t_{j-}$ , discorso analogo per le variabili, le quali assumeranno agli estremi valori  $x_{(j-1)+}$  e  $x_{j-}$ . Questa suddivisione permette di tenere conto di discontinuità delle variabili.

Vengono imposte condizioni di tipo non lineare:

$$\chi(x_{(j-1)+}, x_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

Si introduce il funzionale  $J$ , nel problema di ottimo occorre trovare i valori massimi o minimi di questa grandezza:

$$J = \varphi(x_{(j-1)+}, x_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \phi(x(t), u(t), t) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

Il primo termine tiene conto dei valori assunti dalle variabili agli estremi, il secondo dei valori assunti in ogni punto. Nel caso di  $\varphi = 0$  si parlerà di formulazione di Lagrange, nel

caso di  $\phi = 0$  invece di formulazione di Mayer. Vengono introdotte le grandezze  $\mu$  e  $\lambda$ , rispettivamente: moltiplicatori di Lagrange, riferiti alle condizioni al contorno, e variabili aggiunte, riferite all'equazione di stato. Queste due grandezze permettono di introdurre  $J^*$

$$J^* = \varphi + \mu^T \chi + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\phi + \lambda^T (f - \dot{x})) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

Il passo successivo prevede l'integrazione per parti per togliere la dipendenza da  $\dot{x}$

$$J^* = \varphi + \mu^T \chi \sum_j (\lambda_{(j-1)+}^T x_{(j-1)+} - \lambda_{j-}^T x_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\Phi + \lambda^T f - \dot{\lambda}^T x) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (2.5)$$

Lo step successivo introduce l'Hamiltoniano  $H$ , si differenzia inoltre il funzionale precedente

$$H = \Phi + \lambda^T f \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \delta J^* = & \left( -H_{(j-1)+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j-1)+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{(j-1)+}} \right) \delta t_{(j-1)+} + \\ & + \left( H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j-}} \right) \delta t_{j-} + \\ & + \left( \lambda_{(j-1)+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{(j-1)+}} + \mu^T \left[ \frac{\partial \chi}{\partial x_{(j-1)+}} \right] \right) \delta x_{(j-1)+} + \\ & + \left( -\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j-}} + \mu^T \left[ \frac{\partial \chi}{\partial x_{j-}} \right] \right) \delta x_{j-} + \\ & + \sum_j \int_{t_{(j-1)}}^{t_j} \left( \left( \frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}^T \right) \delta x + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u \right) dt \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.7)$$

La condizione di ottimo si ottiene nel caso di stazionarietà del funzionale, quindi  $\delta J^* = 0$ . A partire dalla relazione precedente è possibile ottenere le equazioni differenziali di Eulero-Lagrange per le variabili aggiunte e le equazioni algebriche per i controlli, rispettivamente:

$$\frac{d\lambda}{dT} = - \left( \frac{\delta H}{\delta x} \right)^T \quad (2.8)$$

$$\left( \frac{\delta H}{\delta u} \right)^T = 0 \quad (2.9)$$

Vengono, infine, riportate le condizioni al contorno di ottimo mancanti

$$\sigma(x_{j-1}, x_{j-}, \lambda_{j-1}, \lambda_{j-}, t_{j-1}, t_{j-}) = 0 \quad (2.10)$$

## 2.1.2 Risoluzione del BVP

Attraverso la teoria del controllo ottimale è stato possibile ottenere un sistema di equazioni differenziali ai limiti (BVP, Boundary Value Problems), considerando che alcune variabili di stato e alcune variabili aggiunte hanno valore incognito, occorre trovare dei valori iniziali che, integrati, permettano di soddisfare le condizioni al contorno imposte e di ottimo. Risulta necessario considerare le particolarità del problema considerato, si avrà a che fare con un intervallo di integrazione suddiviso in sottointervalli, i quali hanno durata generalmente incognita, inoltre si possono avere condizioni al contorno non lineari e variabili discontinue ai contorni interni, il cui successivo valore potrebbe essere incognito. La risoluzione del BVP viene effettuata suddividendo il problema in una successione di problemi ai valori iniziali, portati a convergenza mediante il metodo di Newton. Essendo il tempo incognito si sostituisce la variabile  $t$  con  $\epsilon$  e si introduce la durata del sottointervallo  $\tau_j$

$$\epsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} \quad (2.11)$$

Si ottiene il seguente sistema di equazioni differenziali, dove non vi è più differenza tra variabili di stato e aggiunte

$$\frac{dy}{d\epsilon} = f^*(y, t) \quad y = (x, \lambda) \quad (2.12)$$

Tenendo conto dei parametri costanti  $c$  si introduce il vettore  $z = (y, c)$ , il sistema di equazione diventa

$$\frac{dz}{d\epsilon} = f(z, \epsilon) \quad (2.13)$$

$$\frac{dy}{d\epsilon} = \tau_j \frac{dy}{dt} \quad \frac{dc}{d\epsilon} = 0 \quad (2.14)$$

Introducendo il vettore  $s$ , contenente i valori delle variabili a ogni contorno, si scrivono le condizioni al contorno:

$$\Psi(s) = 0 \quad s = (y_0, y_1, \dots, y_n, c) \quad (2.15)$$

L'obiettivo diviene quello di ottenere i valori iniziali delle variabili, tali da soddisfare le condizioni al contorno. A partire da un valore di tentativo iniziale  $p^1$  si procede iterativamente integrando lungo la traiettoria con i valori ottenuti nell'iterazione precedente. Ogni iterazione porta a una variazione dell'errore, pari a:

$$\Delta\Psi = \left[ \frac{\partial\Psi}{\partial p} \right] \Delta p \quad (2.16)$$

per tenere conto di questo errore sulle condizioni al contorno si correggono i valori iniziali

$$\Delta p = p^{r+1} - p^r = - \left[ \frac{\partial\Psi}{\partial p} \right]^{-1} \Psi^r \quad (2.17)$$

questa ultima relazione introduce una linearizzazione, quindi esiste il rischio di non convergenza causata dall'aumento dell'errore sulle condizioni al contorno. Si effettua una *correzione alla correzione*, attraverso un parametro  $K_1$ , il cui valore è stato fissato, in maniera empirica, in un intervallo tra 0.1 e 1

$$p^{r+1} = p^r + K_1 \Delta p \quad (2.18)$$

Dopo aver calcolato il valore di  $p^{r+1}$  si confrontano gli errori massimi tra l'ultima iterazione e la sua precedente, si procede all'iterazione successiva solo se  $E_{\max}^{r+1} < K_2 E_{\max}^r$ , con  $K_2 = 2 \div 3$ . In caso contrario si procede alla bisezione, dimezzando la correzione apportata:

$$p^{r+1} = p^r + K_1 \frac{\Delta p}{2} \quad (2.19)$$

## 2.2 Ottimizzazione Edelbaum

Edelbaum, nel suo lavoro [5], impone condizioni di spinta continua e costante, considera orbite quasi circolari e un valore della direzione di accelerazione fuori dal piano,  $\beta$ , costante durante la singola rivoluzione. Il risultato ottenuto è la massimizzazione del cambio di inclinazione per rivoluzione e la relativa minimizzazione del  $\Delta V$ .

Vengono prese in considerazione le equazioni di Gauss per orbite quasi circolari,  $e \cong 0$ , di conseguenza  $r = a = p$ . Vengono inoltre trascurate le variazioni di  $\dot{e}$  e  $\dot{\omega}$ . La longitudine dal nodo viene indicata come  $\theta = \omega + v$  e la sua variazione nel tempo vale  $d\theta/dt = \sqrt{\mu/a^3}$ . La velocità viene indicata con  $V = \sqrt{\mu/a}$ . L'accelerazione viene scomposta nelle due componenti  $A_T = A \cos \beta$ ,  $A_W = A \sin \beta$ .

La variazione dei parametri orbitali nel tempo, per una rivoluzione, vale:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2Aa^2}{\sqrt{\mu a}} \cos \beta \\ \frac{di}{dt} &= \sqrt{\frac{a}{\mu}} A \sin \beta \cos \theta \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \sqrt{\frac{a}{\mu}} A \left( \frac{\sin \beta}{\sin i} \right) \sin \theta - \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_E}{a} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \cos i \\ \frac{d\theta}{dt} &= \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \end{aligned}$$

Viene effettuato il cambio della variabile indipendente, da  $t$  a  $\theta$ ,  $\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\theta}$

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\theta} &= \frac{2Aa}{\mu/a^2} \cos \beta \\ \frac{di}{d\theta} &= \frac{A}{\mu/a^2} \sin \beta \cos \theta \\ \frac{d\Omega}{d\theta} &= \frac{A}{\mu/a^2} \left( \frac{\sin \beta}{\sin i} \right) \sin \theta - \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_E}{a} \right)^2 \cos i \\ \frac{dt}{d\theta} &= \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \end{aligned}$$

Per effettuare l'ottimizzazione su una singola rivoluzione si introducono il vettore di stato e la grandezza Hamiltoniano, rispettivamente

$$x = a; i; \Omega; t$$

$$H = \sum_x \lambda_x \frac{\partial x}{\partial \theta}$$

dove  $\lambda_x$  prende il nome di variabile aggiunta, avendo a che fare con piccole variazioni essa viene considerata costante, infatti:

$$a \cong a_0; \quad i \cong i_0; \quad A \ll \frac{\mu}{r^2}; \quad J_2 \ll 1$$

$$\dot{\lambda}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0; \quad \lambda_x = \text{cost}$$

Il valore di  $\beta$  ottimo si ha nella condizione di  $dH/d\beta = 0$

$$\tan \beta = \frac{\lambda_i \cos \theta + \frac{\lambda_\Omega \sin \theta}{\sin i}}{2\lambda_a a}$$

Vengono introdotte le grandezze

$$\tan \theta_0 = \frac{\lambda_\Omega}{\lambda_i \sin i}; \quad \Lambda = \sqrt{\left(\frac{\lambda_\Omega}{\sin i}\right)^2 + \lambda_i^2}; \quad K = \frac{\Lambda}{2a\lambda_a}$$

$$\cos \theta_0 = \frac{\lambda_i}{\Lambda}; \quad \sin \theta_0 = \frac{\lambda_\Omega}{\Lambda \sin i}; \quad \tan \beta = k \cos(\theta - \theta_0)$$

Viene effettuato un nuovo cambio di variabile introducendo

$$\theta' = \theta - \theta_0$$

dove  $\theta_0$  rappresenta il punto dove si ha il massimo di  $\beta$ , inoltre viene effettuato il cambio del verso della spinta nel punto dove  $\theta_0 \pm \pi/2$

$$\tan \beta = K \cos \theta' \quad ; \quad \sin \beta = \frac{K \cos \theta'}{\sqrt{1 + (K \cos \theta')^2}};$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + (K \cos \theta')^2}}; \quad R = \sqrt{1 + (K \cos \theta')^2}$$

Integrando si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\theta'} &= \frac{da}{d\theta} = \frac{2A}{\mu/a^2} a \frac{1}{R} \\ \frac{di}{d\theta'} &= \frac{di}{d\theta} = \frac{A}{\mu/a^2} \frac{K \cos \theta'}{R} \cos(\theta' + \theta_0) \\ \frac{d\Omega}{d\theta'} &= \frac{d\Omega}{d\theta} = \frac{A}{\mu/a^2} \left( \frac{K}{\sin i} \right) \frac{\cos \theta'}{R} \sin(\theta' + \theta_0) - \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_E}{a} \right)^2 \cos i \\ \frac{dt}{d\theta'} &= \frac{dt}{d\theta} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\end{aligned}$$

Data la complessità della risoluzione dei calcoli viene introdotta una semplificazione su  $\beta$ , la grandezza avrà modulo costante  $k$  e segno uguale a quello di  $\cos(\theta - \theta_0)$ , con il cambio del segno al  $\theta_0 \pm \pi/2$  citato in precedenza. Introducendo la semplificazione si ottengono le relazioni finali per singola rivoluzione:

$$\begin{aligned}\Delta a &= \frac{4\pi A}{\frac{\mu}{a^2}} a \cos \beta \\ \Delta i &= \frac{4A}{\frac{\mu}{a^2}} \sin \beta \cos \theta_0 \\ \Delta \Omega &= \frac{4A \sin \beta}{\frac{\mu}{a^2} \sin i} \sin \theta_0 - 3\pi J_2 \left( \frac{R_E}{a} \right)^2 \cos i \\ \Delta t &= 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\end{aligned}$$

Nel caso di rivoluzioni multiple si considera  $a$  come variabile indipendente, si scrivono nuovamente le equazioni variazionali e si determina il  $\dot{\lambda}_i$

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{da} &= \frac{\tan \beta \sin \theta_0}{\pi a \sin i} - \frac{3}{4} \frac{J_2 \left( \frac{R_E}{a} \right)^2 \cos i}{A \cos \beta} \frac{\mu}{a^3} \\ \frac{di}{da} &= \frac{\tan \beta \cos \theta_0}{\pi a} \\ \frac{dt}{da} &= \frac{\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}}{2A \cos \beta}\end{aligned}$$

$$\dot{\lambda}_i = \dot{\lambda}_t = 0; \quad \lambda_\Omega = \text{cost}; \quad \lambda_t = \text{cost}$$

$$\dot{\lambda}_i = \lambda_\Omega \left( \frac{\tan \beta \sin \theta_0 \cos i}{\pi a \sin^2 i} - \frac{3}{4} \frac{J_2 \left( \frac{R_E}{a} \right)^2 \sin i}{A \cos \beta} \frac{\mu}{a^3} \right)$$

Viene introdotta e risolta la condizione di ottimo

$$\frac{\partial H}{\partial \theta_0} = \frac{\lambda_\Omega \cos \theta_0}{\sin i} - \lambda_i \sin \theta_0 = 0; \quad \tan \theta_0 = \frac{\lambda_\Omega}{\lambda_i \sin i}$$

$$\sin \beta = \frac{\Lambda}{\pi a} \cdot \frac{2A}{-\lambda_t \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} + \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_E}{a} \right)^2 \cos i \frac{\mu}{a^3}}$$

Si è nella condizione di  $H_{max}$  nel caso in cui sia  $\sin \theta_0$  che  $\cos \theta_0$  hanno lo stesso segno di  $\lambda_\Omega / \sin i$  e  $\lambda_i$ .

Risulta possibile un secondo approccio per le rivoluzioni multiple, in questo caso prendendo come variabile indipendente il tempo

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2A}{\sqrt{\mu}} a^{\frac{3}{2}} \cos \beta \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{2A\sqrt{a} \sin \beta \sin \theta_0}{\pi \sqrt{\mu} \sin i} - \frac{3}{2} J_2 \frac{R_E^2}{a^{\frac{7}{2}}} \sqrt{\mu} \cos i \\ \frac{di}{dt} &= \frac{2A\sqrt{a} \sin \beta \cos \theta_0}{\pi \sqrt{\mu}} \\ H &= \sum_x \lambda_x \dot{x} = \lambda_a \left( \frac{2Aa^{\frac{3}{2}} \cos \beta}{\sqrt{\mu}} \right) + \\ &+ \lambda_\Omega \left( \frac{2A\sqrt{a} \sin \beta}{\pi \sqrt{\mu} \sin i} \sin \theta_0 - \frac{3}{2} J_2 \frac{R_E^2}{a^{\frac{7}{2}}} \cos i \sqrt{\mu} \right) + \lambda_i \left( \frac{2A \sin \beta \cos \theta_0 \sqrt{a}}{\pi \sqrt{\mu}} \right) \end{aligned}$$

In questo caso  $\dot{\lambda}_\Omega = 0$ , mentre le altre grandezze valgono:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_a &= -\lambda_a \frac{3A\sqrt{a} \cos \beta}{\sqrt{\mu}} - \lambda_\Omega \left( \frac{A \sin \beta \sin \theta_0}{\pi \sqrt{\mu} \sin i \sqrt{a}} + \frac{21}{4} J_2 \frac{R_E^2 \cos i \sqrt{\mu}}{a^2} \right) - \lambda_i \left( \frac{A \sin \beta \cos \theta_0}{\pi \sqrt{\mu} \sqrt{a}} \right) \\ \dot{\lambda}_i &= -\lambda_\Omega \left( -\frac{2A\sqrt{a} \sin \beta \cos i \sin \theta_0}{\pi \sqrt{\mu} \sin^2 i} + \frac{3}{2} J_2 \frac{R_E^2 \sin i \sqrt{\mu}}{a^{\frac{7}{2}}} \right) \end{aligned}$$

Si procede annullando l'Hamiltoniano

$$\frac{\partial H}{\partial \theta_0} = \frac{\lambda_\Omega \cos \theta_0}{\sin i} - \lambda_i \sin \theta_0 = 0$$

Risolvendo si ottiene

$$\tan \theta_0 = \frac{\lambda_\Omega}{\lambda_i \sin i}; \quad \sin \theta_0 = \pm \frac{\lambda_\Omega}{\Lambda \sin i}; \quad \cos \theta_0 = \pm \frac{\lambda_i}{\Lambda}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \beta} = -\lambda_a \frac{2A\sqrt{a} \pi a \sin \beta}{\pi \sqrt{\mu}} + \lambda_\Omega \frac{2A\sqrt{a} \cos \beta \sin \theta_0 \cos \beta}{\pi \sqrt{\mu} \sin i} + \lambda_i \frac{2A\sqrt{a} \cos \beta \cos \theta_0}{\pi \sqrt{\mu}}$$

$$\tan \beta = \frac{1}{\pi a} \left( \frac{\lambda_\Omega \sin \theta_0}{\sin i} + \lambda_i \cos \theta_0 \right) \frac{1}{\lambda_a} = \frac{\Lambda}{\lambda_a \pi a}$$

$$\sin \beta = \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + (\lambda_a \pi a)^2}}; \quad \cos \beta = \frac{\lambda_a \pi a}{\Lambda^2 + (\lambda_a \pi a)^2}$$

La massimizzazione di H avviene nel caso in cui  $\cos \beta$  abbia lo stesso segno di  $\lambda_a$ , di conseguenza il  $\sin \beta$  deve avere lo stesso segno di  $\left( \frac{\lambda_\Omega \sin \theta_0}{\sin i} + \lambda_i \cos \theta_0 \right)$

## 2.3 Problema considerato

Vengono definite due orbite, una di partenza e una di arrivo. La prima definita da  $a_0; i_0; \Omega_0$ , la seconda da  $a_f; i_f; \Omega_f$ . La grandezza  $\Omega_f$  è considerata variabile, in quanto dipende dal tempo e quindi dalla durata della manovra effettuata.

In questo studio vengono utilizzati i metodi indiretti, i quali si basano sulla teoria del controllo ottimale, trasformando il problema di ottimo in un problema di valori al contorno. Saranno presenti, quindi, delle grandezze iniziali con valori incogniti che andranno determinati in modo tale da soddisfare le condizioni di ottimo viste nel paragrafo precedente. La risoluzione viene effettuata mediante metodi di shooting, prendendo quindi dei valori di tentativo e controllando la variazione dell'errore sulle condizioni finali dopo ogni iterazione. La fase di ottenimento dei dati è stata svolta mediante l'utilizzo di programmi denominati *edelbaumj2.exe* e *cedj2.exe*, scritti in linguaggio Fortran e realizzati da lavori di tesi precedenti. Il primo eseguibile, definito puntuale, permette lo svolgimento dei calcoli per un singolo valore di  $\Delta\Omega_0$ , mentre il secondo, detto ciclico, permette di specificare un intervallo specifico di  $\Delta\Omega_0$ . Entrambi i programmi hanno a disposizione una loro versione vincolata, la quale permette la definizione di una quota limite, rappresentate l'atmosfera, in fase di calcolo.

I codici prevedono l'utilizzo di cinque variabili:  $a; i; \Omega; \lambda_a; \lambda_i$ . Le grandezze  $\lambda$  sono dette *variabili aggiunte*. Vengono analizzate orbite quasi circolari,  $e \cong 0$ , si considera quindi  $a = r = p$ .

Nel caso non vincolato sono previste tre incognite: il tempo finale  $t_f; \lambda_{ao}; \lambda_{io}$ , nel caso vincolato le incognite sono 5:  $t_1; t_2; t_3; \lambda_{ao}; \lambda_{io}$ . All'inizio di ogni analisi questi parametri vengono inseriti manualmente come soluzione di tentativo. La loro scelta è importante per arrivare a convergenza.

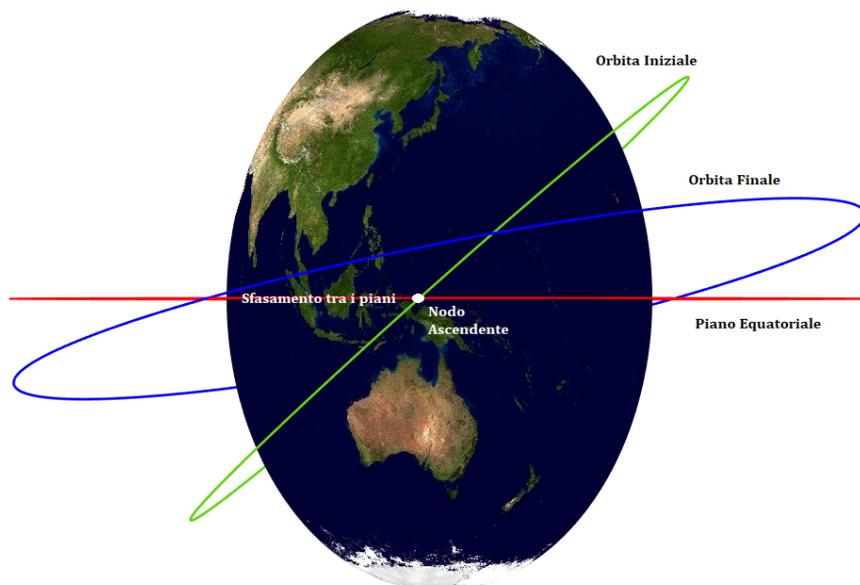


Figura 2.1: Rappresentazione grafica dell'orbita di partenza e di arrivo

# Capitolo 3

## Risultati

### 3.1 Analisi di manovre a condizioni iniziali costanti

In questa fase del lavoro, attraverso l'utilizzo dei programmi *edelbaumj2.exe* e *cedj2.exe* (versioni vincolate e non) sono stati calcolati i costi delle diverse tipologie di manovre. Le condizioni iniziali sono state mantenute costanti, i risultati sono stati successivamente diagrammati in grafici del costo  $\Delta V$  [km/s] in funzione di  $\Delta\Omega_0$  [°].

Le manovre sono state suddivise in tre categorie:

- Variazione di semiasse a inclinazione costante a 51°;
- Variazione di inclinazione a semiasse costante a 500 km;
- Manovre combinate.

I punti dei diagrammi indicati con circonferenze vuote o colori diversi indicano i casi in cui è stato applicato il vincolo dell'atmosfera terrestre, utilizzando il programma *cedj2av.exe*, tale vincolo non permette di scendere oltre una determinata quota durante la manovra (quota minima 200 km).

#### 3.1.1 Variazioni di Semiasse con inclinazione 51°

In tabella 3.1 sono riportate le manovre analizzate.

Considerando inizialmente le sole variazioni di quota positive, figura 3.2, si nota un addensamento delle curve per valori di  $\Delta\Omega_0$  bassi, i costi tra le varie manovre saranno quindi simili.

Si può notare come, per valori di  $\Delta\Omega_0$  compresi tra -10° e -8°, il costo dei cambi di semiasse con  $\Delta a > 400\text{km}$  sia minore di quello con variazioni di semiasse più piccole. In questa fascia di  $\Delta\Omega_0$ , esempio, un cambio  $\Delta a = 1000\text{km}$  costerà meno di un  $\Delta a = 300\text{km}$ .

Il punto di minimo costo parte da un valore di  $\Delta\Omega_0 = 0^\circ$  per un cambio di quota nullo e si sposta verso  $\Delta\Omega_0$  negativi all'aumentare della variazione di quota.

Oltre il punto di minimo si ha un continuo aumento del costo e l'aumento di quota  $\Delta a$  porterà a un aumento del  $\Delta V$ .

$\Delta a$ [km]	$\Delta i$ [°]	$\Delta a$ [km]	$\Delta i$ [°]
100	0	800	0
200	0	900	0
300	0	1000	0
400	0	-100	0
500	0	-200	0
600	0	-300	0
700	0		

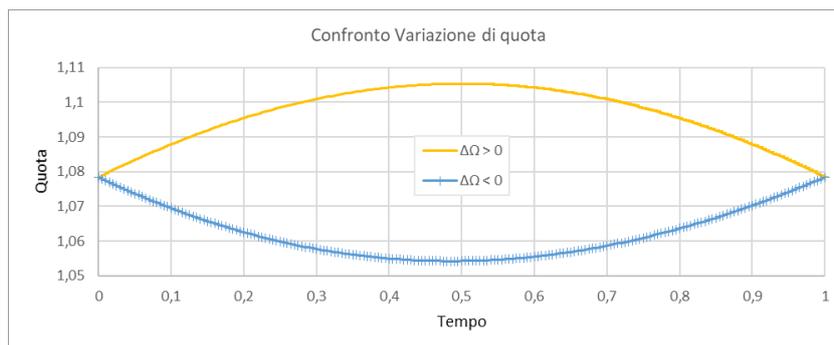
Tabella 3.1: Variazioni di semiasse per manovra

Prendendo in considerazione anche le variazioni di quota negative  $\Delta a < 0$ , figura 3.3, si osserva un andamento quasi simmetrico a quello ottenuto con variazioni positive.

A parità di  $|\Delta a|$ , una variazione negativa porta, generalmente, a un costo massimo maggiore.

In conclusione, è possibile affermare che, per variazioni di quota positive, sarebbe preferibile operare a  $\Delta\Omega_0$  negativi per avere una condizione favorevole in termini di costo, in quanto le due orbite si troverebbero in una condizione di avvicinamento. Ragionamento inverso per variazioni negative. Il punto di intersezione tra le due curve con  $|\Delta a|$  uguale e segno opposto, si sposta verso  $\Delta\Omega_0$  maggiori all'aumentare della quota, conseguenza del maggior costo  $\Delta V$  della variazione negativa rispetto alla controparte positiva.

Il vincolo dell'ingresso in atmosfera (circonferenze vuote nei diagrammi) è stato applicato in misura maggiore nel caso di  $\Delta a < 0$ , inoltre è stato utilizzato principalmente per  $\Delta\Omega_0 < 0$ . Nel caso di  $\Delta a < 0$  la motivazione è intuitiva e legata al fatto che si stia manovrando verso quote più vicine al limite dell'atmosfera. Nel caso del  $\Delta\Omega_0 < 0$  la motivazione è legata all'andamento del parametro orbitale  $a$  durante la manovra, il quale per questi valori di  $\Delta\Omega_0$  lavora diminuendo temporaneamente la quota (curva blu in figura 3.1). Questo comportamento sarà descritto con maggior precisione nella successiva sezione.

Figura 3.1: Andamento di  $a$  in una manovra con  $\Delta a = 0$ ;  $\Delta i = 0$

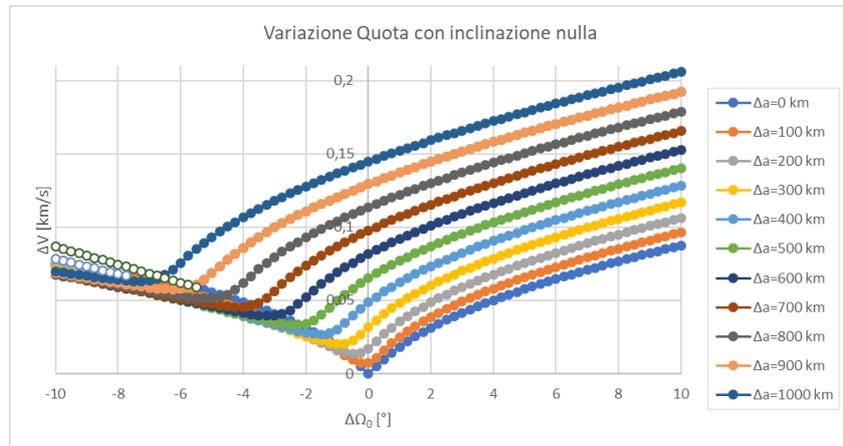


Figura 3.2: Variazioni positive semiasse

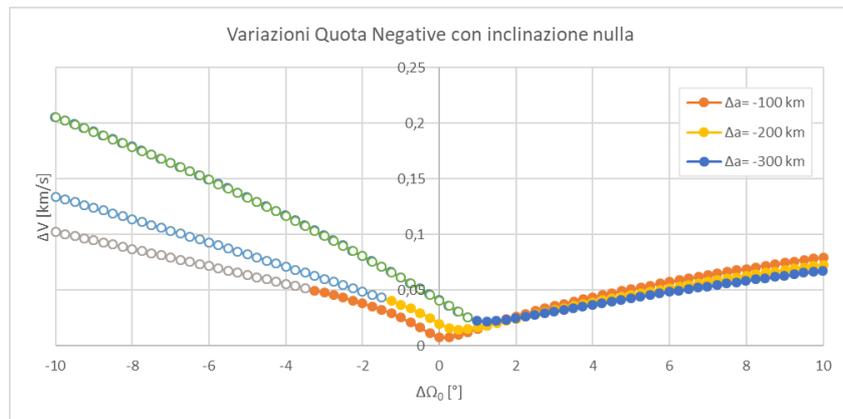


Figura 3.3: Variazioni negative semiasse

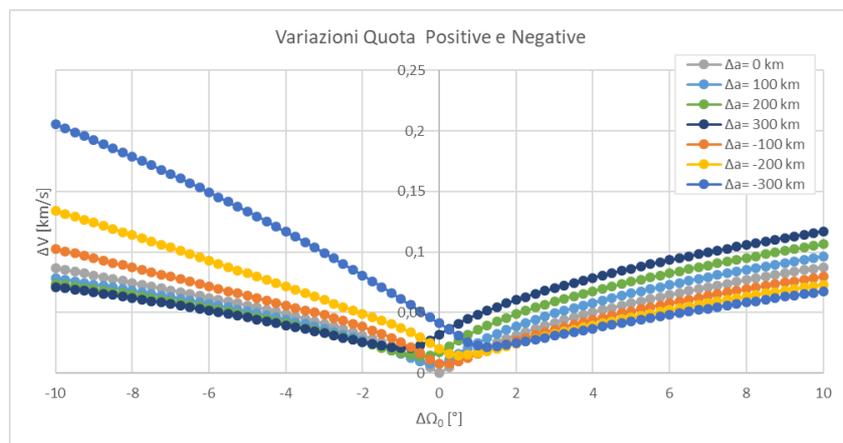


Figura 3.4: Confronto variazioni positive e negative del semiasse

### 3.1.2 Variazione di inclinazione a quota costante 500km

Sono state considerate le seguenti manovre:

$\Delta a$ [km]	$\Delta i$ [°]	$\Delta a$ [km]	$\Delta i$ [°]
0	1	0	-1
0	2	0	-2
0	3	0	-3
0	4	0	-4
0	5	0	-5
0	6	0	-6
0	7	0	-7
0	8	0	-8

Tabella 3.2: Variazioni di inclinazione per manovra

All'aumentare della variazione di inclinazione  $\Delta i$  si nota un appiattimento delle curve e un aumento del costo, la variazione di piano per  $\Delta i$  maggiori di  $0^\circ$  può essere effettuata in qualsiasi momento senza incorrere in elevate differenze di costi.

Variazioni di inclinazione positive e negative hanno un andamento simmetrico rispetto l'asse verticale.

Il valore di minimo costo si sposta verso  $\Delta\Omega_0$  negativi, per variazioni  $\Delta i > 0$  e verso  $\Delta\Omega_0$  positivi per variazioni  $\Delta i < 0$ , all'aumentare del cambio di piano richiesto aumenta anche il tempo necessario per la manovra, la conseguenza di ciò è che occorre iniziare la manovra in anticipo in caso di variazioni positive, ragionamento opposto per il caso negativo.

Rimane valido il concetto visto nel caso di variazione del semiasse, per variazioni di inclinazione positive conviene operare a  $\Delta\Omega_0$  negativi e viceversa.

Il punto di intersezione tra le curve a variazione positiva e negativa (a parità di  $|\Delta i|$ ), si sposta leggermente a destra all'aumentare dell'inclinazione come nel caso della variazione di semiasse, segno che le manovre con  $\Delta i < 0$  hanno un costo leggermente maggiore di quelle con  $\Delta i > 0$ .

Il vincolo atmosferico è stato applicato in misura maggiore nel caso di variazioni negative, in esse è stato necessario per tutti i valori di  $\Delta i$  fino a  $\Delta\Omega_0 \cong -5^\circ$ . Nel caso di variazioni positive è stato applicato solo per variazioni fino a  $\Delta i = 2^\circ$ . Le ragioni di questo comportamento sono da ricercarsi sempre nell'andamento del parametro orbitale  $a$  trattato nel precedente paragrafo.

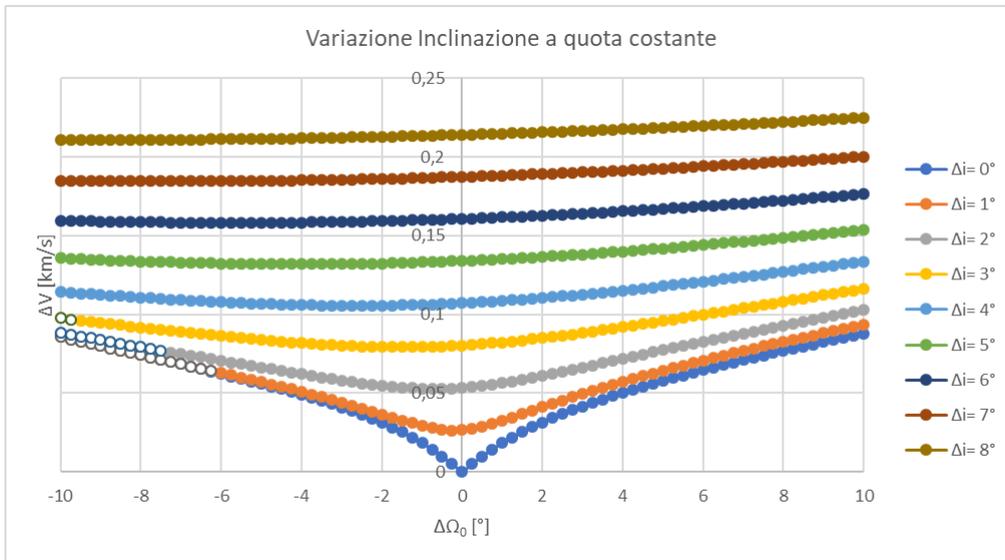


Figura 3.5: Variazioni positive inclinazione

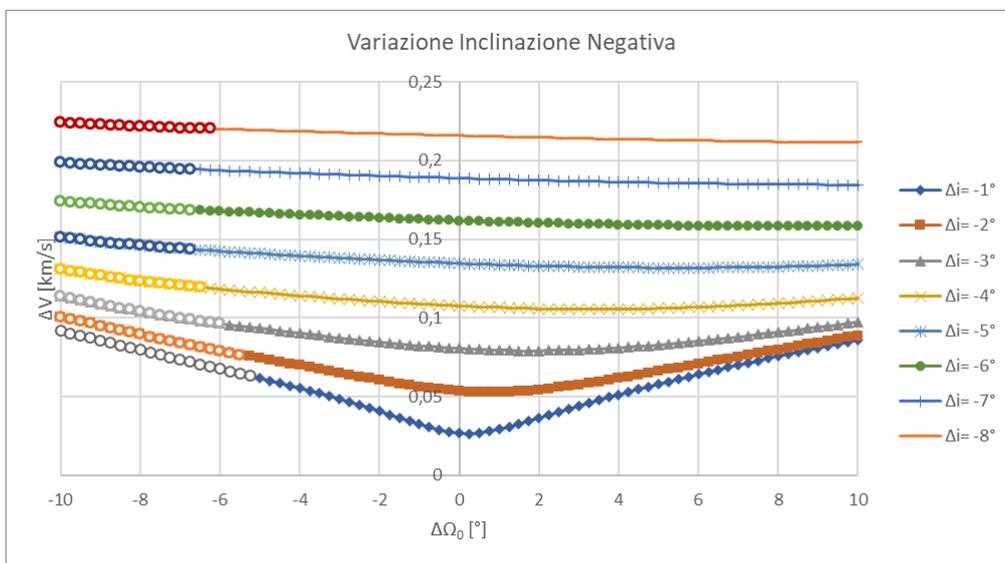


Figura 3.6: Variazioni negative inclinazione

### 3.1.3 Manovre combinate

Sono state diagrammate le seguenti manovre:

$\Delta a$ [km]	$\Delta a$ [°]	$\Delta a$ [km]	$\Delta a$ [°]	$\Delta a$ [km]	$\Delta a$ [°]
100	1	300	1	500	1
100	2	300	2	500	2
100	3	300	3	500	3
200	1	400	1		
200	2	400	2		
200	3	400	3		

Tabella 3.3: Variazioni di semiasse e inclinazione per manovra

In questo diagramma si considerano solo variazioni combinate positive. Si nota lo stesso addensamento per  $\Delta\Omega_0$  negativi che si aveva nel caso della sola variazione del semiasse. Fino a  $\Delta\Omega_0 = -6^\circ$  il costo delle manovre combinate con  $1^\circ$  e  $2^\circ$  è minore del caso con variazioni nulle, inoltre il costo diminuisce all'aumentare della variazione di semiasse.

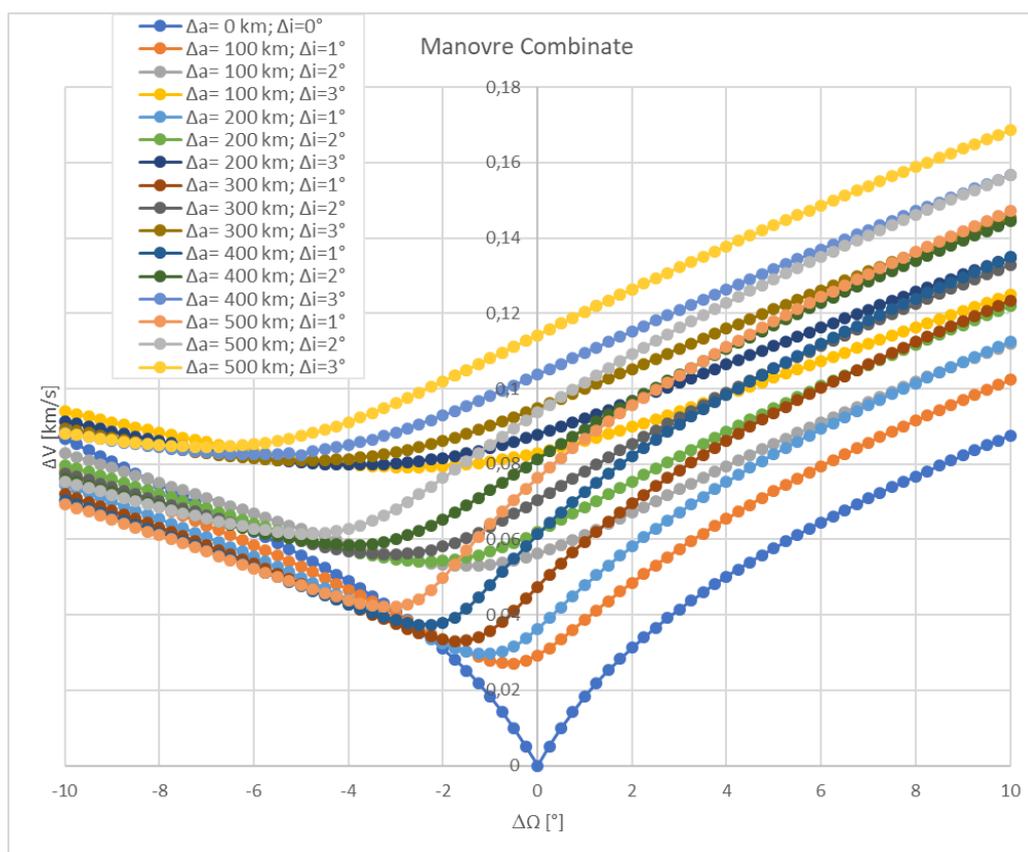


Figura 3.7: Caso variazioni combinate positive

### 3.1.4 Manovre combinate -Variazioni positive e negative-

Sono state diagrammate le seguenti manovre:

$\Delta a$ [km]	$\Delta i$ [°]						
-200	1	-100	1	100	1	200	1
-200	2	-100	2	100	2	200	2
-200	3	-100	3	100	3	200	3

Tabella 3.4: Variazioni di semiasse e inclinazione per manovra

I risultati sono stati suddivisi, a livello grafico, in due categorie:

*Diagrammi a variazione di semiasse costante:* All'aumentare del  $|\Delta a|$  il punto di intersezione delle curve con  $|\Delta i|$  uguale si allontana dall'asse delle ordinate. Nel caso di variazioni combinate con valore di  $\Delta a > 0$  sarà necessario operare in anticipo, viceversa nel caso di  $\Delta a < 0$ . All'aumentare del  $|\Delta i|$  le curve si appiattiscono e il loro costo aumenta.

*Diagrammi a variazione di inclinazione costante:* Per ogni valore di inclinazione sono stati riportati quattro valori di quota, i loro andamenti rispecchiano quanto visto nei diagrammi precedenti, con addensamenti di curve e intervalli di convenienza in cui iniziare a manovrare.

Attraverso la visione dei quattro diagrammi è stato possibile osservare i seguenti comportamenti:

- l'aumento del  $|\Delta i|$  provoca una traslazione delle curve in direzione verticale, a parità di  $\Delta \Omega_0$  si avranno costi maggiori;
- le curve delle manovre con  $\Delta i > 0$  risultano traslate verso sinistra rispetto le controparti a segno negativo, sarà necessario iniziare la manovra in anticipo.

In questi diagrammi sono stati riportati i punti di applicazione del vincolo atmosferico (punti con colore diverso), le manovre con maggiore richiesta sono state quelle con  $\Delta a < 0$  e  $\Delta i < 0$ . La giustificazione per il  $\Delta a$  è analoga ai casi precedenti, quindi una richiesta di quota negativa. Le motivazioni per il  $\Delta i$  sono da ricercarsi a livello di intensità delle perturbazioni, considerando solamente il caso  $\Delta \Omega_0 < 0$  per via della concavità della curva del parametro orbitale  $a$  verso l'alto (figura 3.1), nel caso di  $\Delta i < 0^\circ$  l'orbita di arrivo avrà una regressione più intensa, inoltre parte da una condizione di anticipo di fase rispetto allo s/c. La manovra sarà quindi più lunga rispetto al caso con  $\Delta i > 0^\circ$ , l'abbassamento di quota sarà più accentuato e la possibilità di raggiungimento del vincolo atmosferico più alta.

In tabella 3.5 è stato effettuato un confronto tra il costo ottenuto attraverso una manovra combinata ( $\Delta V_{comb}$ ) e quella effettuata tramite due manovre singole ( $\Delta V_{sing}$ ), attraverso questo confronto è stato possibile confermare come le manovre combinate consentano un risparmio di  $\Delta V$ . A parità di  $\Delta a$  il risparmio, espresso in termini di  $|\%$ , diminuisce all'aumentare del  $|\Delta i|$ , a parità di  $\Delta i$  il risparmio aumenta all'aumentare del  $\Delta a$ . I massimi valori di risparmio sono stati quelli con grande  $\Delta a$  e piccoli valori di  $|\Delta i|$ .

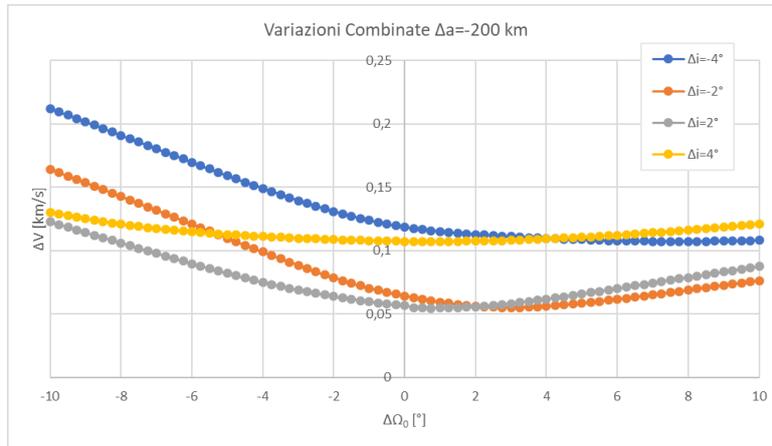


Figura 3.8: Semiassse costante -200km

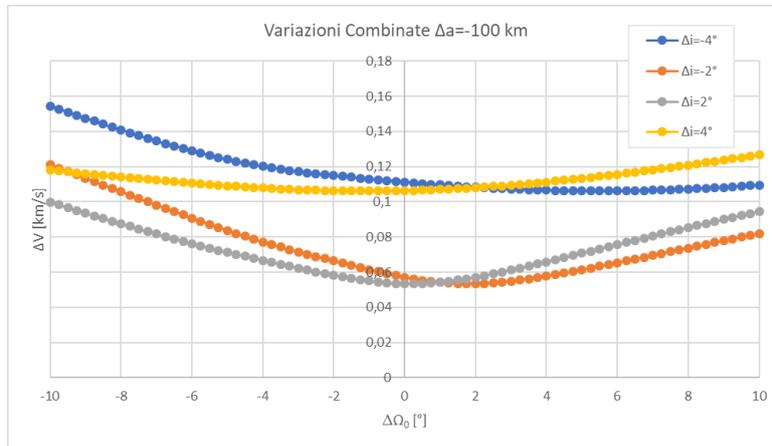


Figura 3.9: Semiassse costante -100km

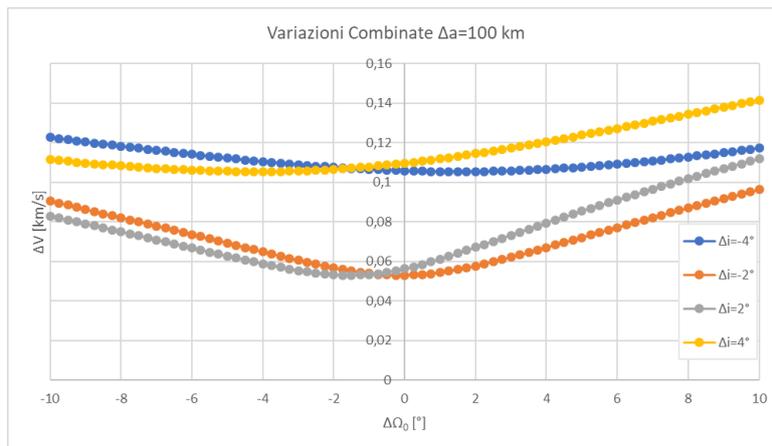


Figura 3.10: Semiassse costante 100km

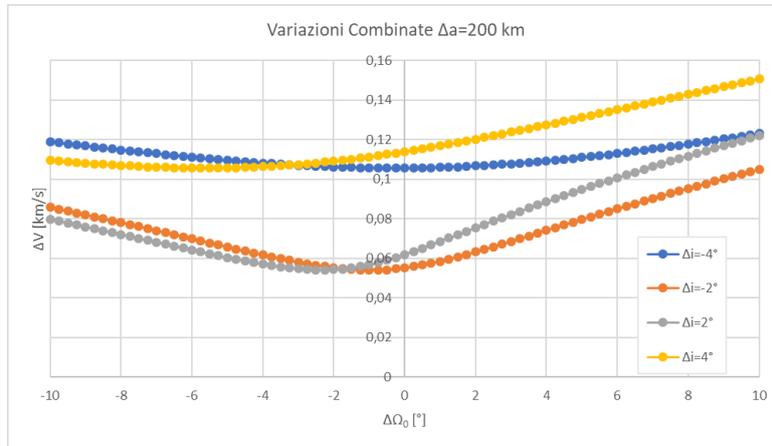


Figura 3.11: Semiassa costante 200km

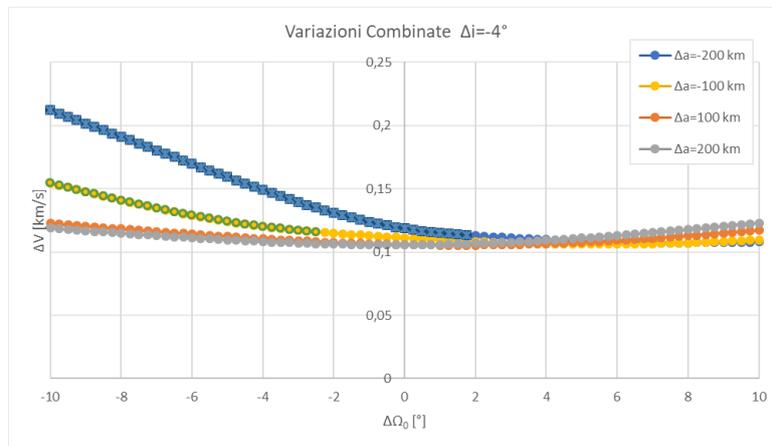


Figura 3.12: Inclinazione costante  $-4^\circ$

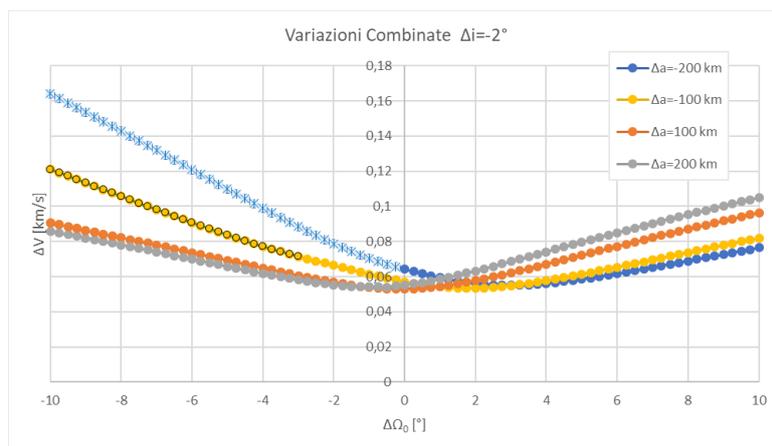


Figura 3.13: Inclinazione costante  $-2^\circ$

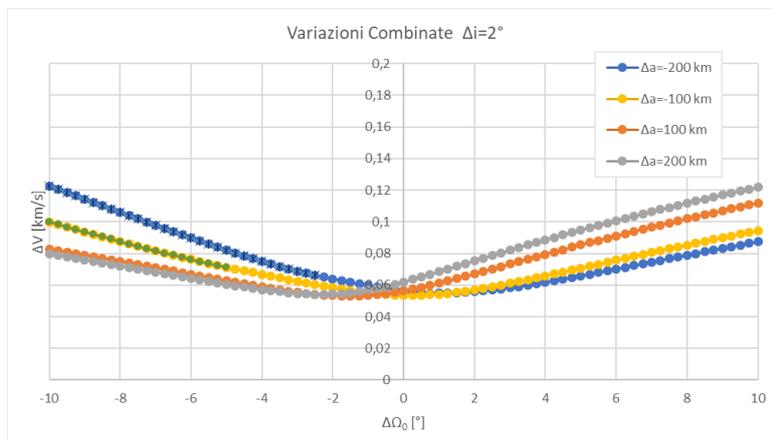


Figura 3.14: Inclinazione costante 2°

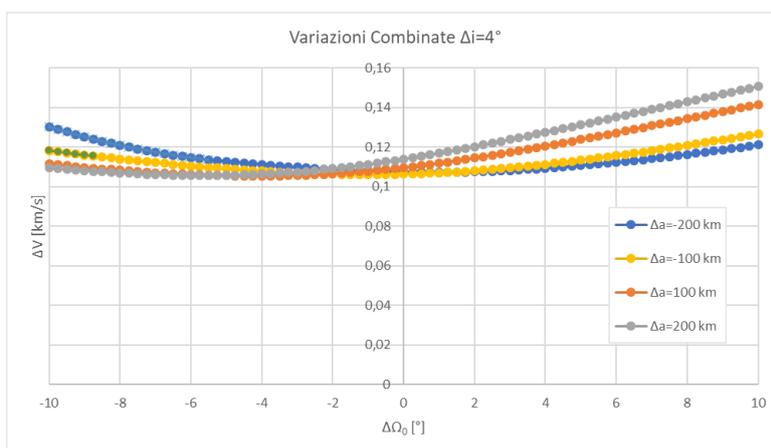


Figura 3.15: Inclinazione costante 4°

$\Delta a$ [km]	$\Delta i$ [°]	$\Delta V_{comb}$ [km/s]	$\Delta V_{sing}$ [km/s]	Var. [%]	$\Delta a$ [km]	$\Delta i$ [°]	$\Delta V_{comb}$ [km/s]	$\Delta V_{sing}$ [km/s]	Var. [%]
-200	-4	0,1072	0,1199	10,57	100	-4	0,1054	0,1129	6,63
-200	-2	0,0551	0,0671	17,9	100	-2	0,0531	0,0601	11,74
-200	2	0,0546	0,0671	18,5	100	2	0,0531	0,0601	11,76
-200	4	0,1073	0,1199	10,49	100	4	0,1054	0,1129	6,63
-100	-4	0,1061	0,1130	6,1	200	-4	0,1057	0,1193	11,43
-100	-2	0,0535	0,0603	11,32	200	-2	0,0541	0,0666	18,75
-100	2	0,0535	0,0603	11,31	200	2	0,0542	0,0666	18,61
-100	4	0,1062	0,1130	6,08	200	4	0,1057	0,1193	11,43

Tabella 3.5: Confronto del costo tra manovra singola e combinata

### 3.1.5 Conclusioni

In questa sezione sono stati diagrammati gli andamenti dei costi al variare di quota, inclinazione e  $\Delta\Omega_0$ . Sono state visualizzate le differenze in una manovra nel caso di analogia variazione, ma segno opposto. Sono stati riportati i soli diagrammi relativi al costo  $\Delta V$  in quanto gli andamenti del tempo della manovra sono risultati analoghi ad essi. I diagrammi con variazione di quota hanno evidenziato l'importanza del tempo di inizio della manovra attraverso la grandezza  $\Delta\Omega_0$ , se i punti di partenza e di arrivo tendono ad avvicinarsi nel tempo, per effetto delle diverse intensità delle perturbazioni, allora si avrà una situazione favorevole.

Nei diagrammi a variazione di inclinazione le curve sono risultate maggiormente piatte, risulta possibile operare in qualsiasi momento senza che ci siano grandi variazioni del costo  $\Delta V$ . Nelle manovre a singola variazione conviene operare a  $\Delta\Omega_0$  negativi per variazioni positive, viceversa per le negative, mentre nelle manovre combinate la convenienza tra  $\Delta\Omega_0$  positivi e negativi si modifica in base al peso delle due variazioni richieste. Il vincolo atmosferico è stato applicato, per entrambi i diagrammi, in misura maggiore nel caso di variazioni negative. Questo risulta intuitivo per variazioni di quota negative, mentre per l'inclinazione la giustificazione viene data dall'andamento del parametro orbitale  $a$ , il quale per valori di  $\Delta\Omega_0 < 0$  e  $\Delta i < 0^\circ$  avrà una variazione con concavità verso l'alto, come osservato nella figura 3.1.

Nei diagrammi a variazione di  $\Delta a$  è presente un intervallo di  $\Delta\Omega_0$  dove all'aumentare del  $|\Delta a|$  richiesto il costo diminuisce, una manovra da  $\Delta a = 1000km$  costa meno di una con  $\Delta a = 100km$ . Per variazioni positive l'intervallo si colloca a  $\Delta\Omega_0$  negativi, viceversa per variazioni negative. Non è stato possibile osservare lo stesso andamento nelle manovre con cambio di inclinazione.

Le manovre combinate hanno mostrato entrambi i comportamenti osservati nelle manovre singole, nel diagramma relativo alle sole variazioni positive, figura 3.7, si nota l'addensamento delle curve per  $\Delta\Omega_0$  bassi e l'appiattimento dovuto alla variazione di inclinazione. Rispetto al caso singolo si perde la fascia di convenienza per la variazione del semiasse, presente nell'intervallo  $\Delta\Omega_0 -10^\circ;-8^\circ$  circa. Il costo minimo della manovra combinata risulta inferiore alla somma dei minimi delle singole manovre. Il vincolo atmosferico è stato applicato in misura maggiore per le manovre con entrambe le variazioni negative ( $\Delta a < 0$  e  $\Delta i < 0$ ). Nei vari diagrammi si evidenzia in maniera più netta come sia necessario operare a  $\Delta\Omega_0$  negativi per variazioni positive, viceversa per le variazioni negative.

## 3.2 Andamento Parametri Orbitali

In base alle osservazioni effettuate nei precedenti diagrammi sono stati analizzati gli andamenti dei parametri orbitali di alcune specifiche manovre:

Manovra	$\Delta a$ [km]	$\Delta i$ [°]	$\Delta \Omega$ [°]	$\Delta V$ [km/s]	Tipo Manovra	Applicazione Vincolo Atm.
1	0	0	-8	9,43E-03	0km/0°/-8°	si
2	-500	0	-8	0,0753	-500km/0°/-8°	si
3	500	0	-8	7,53E-03	500km/0°/-8°	no
4	0	0	8	9,71E-03	0km/0°/8°	no
5	0	-5	-10	0,0191	0km/-5°/-10°	si
6	0	5	-10	0,0171	0km/5°/-10°	no
7	0	-5	10	0,0169	0km/-5°/10°	no
8	0	5	10	0,0194	0km/5°/10°	no
9	200	0	-5	6,04E-03	200km/0°/ -5°	no
10	200	0	5	9,55E-03	200km/0°/ 5°	no
11	-200	0	-5	1,04E-02	-200km/0°/-5°	no
12	-200	0	5	5,83E-03	-200km/0°/5°	no

Tabella 3.6: Manovre scelte per l'analisi dei parametri orbitali

"*tipo manovra*" definisce rispettivamente  $\Delta a$ ;  $\Delta i$ ;  $\Delta \Omega_0$ , questa denominazione risulta utile nella successiva fase di confronti.

Si ricorda che le condizioni iniziali sono:

$$h_0=500 \text{ km} ; i_0=51^\circ ; \Omega_0=0^\circ$$

Le diverse manovre sono state calcolate tramite *edelbaumj2.exe*, con applicazione del vincolo dell'atmosfera, mediante *edelbaumj2av.exe*, nei casi 1; 2; 5. Lo scopo di questa seconda analisi è stato quello di giustificare i diversi andamenti del  $\Delta V$  riscontrati nella precedente sezione. In questa fase dell'analisi è stata introdotta la grandezza  $\Omega_{T_{\text{target}}}$  ( $\Omega_T$ ), relativa all'ascensione retta dell'orbita di arrivo, variabile in base al tempo di realizzazione della manovra e definita come:

$$\Omega_T = \Delta \Omega_0 - |\dot{\Omega}| \cdot \text{tempo} \quad (3.1)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} \left( \frac{R_{\text{terra}}}{p} \right)^2 n J_2 \cos(i) \quad (3.2)$$

$$\Delta \Omega_0 = \Omega_T - \Omega_0 \quad (3.3)$$

$$p = h + 6371[\text{km}] \quad (3.4)$$

Il  $\Delta\Omega_0$  rappresenta lo sfasamento tra l'orbita di partenza (o lo s/c) e l'orbita di arrivo (target), mentre  $\dot{\Omega}$  è il contributo legato alla regressione della linea dei nodi. Nella relazione 3.2 sono presenti grandezze relative all'inclinazione e alla quota, le diverse manovre saranno quindi influenzate da questa relazione.

La validità del calcolo è stata verificata mediante confronto del  $\Delta V$  con i risultati ottenuti in precedenza. I valori di inclinazione sono espressi in [°], le indicazioni sulla quota sono fornite in [km].

I diagrammi successivi, figure 3.16, 3.17, 3.18 e 3.19 mostrano una panoramica dei risultati tutte le manovre, solo in questo caso è stata effettuata l'adimensionalizzazione del tempo, la visualizzazione dell'inclinazione in radianti e quella della quota in:

$$quota(t) = [h_0 + da(t)] / R_{terra}$$

Nei paragrafi successivi sono riportati 8 confronti tra i parametri orbitali, definiti nella tabella 3.7, in modo tale da confrontarne l'andamento al variare della manovra richiesta.

Confronto	Manovra 1 $\Delta a; \Delta i; \Delta\Omega_0$	Manovra 2 $\Delta a; \Delta i; \Delta\Omega_0$	Manovra 3 $\Delta a; \Delta i; \Delta\Omega_0$	Manovra 4 $\Delta a; \Delta i; \Delta\Omega_0$
Confronto 1:	0km/0°/-8°	-500km/0°/-8°	500km/0°/-8°	
Confronto 2:	0km/0°/-8°	0km/0°/8°		
Confronto 3:	0km/-5°/-10°	0km/-5°/10°		
Confronto 4:	0km/5°/-10°	0km/5°/10°		
Confronto 5:	0km/-5°/-10°	0km/5°/-10°		
Confronto 6:	0km/5°/-10°	0km/-5°/10°		
Confronto 7:	0km/-5°/-10°	0km/5°/10°		
Confronto 8:	200km/0°/-5°	200km/0°/5°	-200km/0°/-5°	-200km/0°/5°

Tabella 3.7: Elenco dei confronti tra manovre effettuati

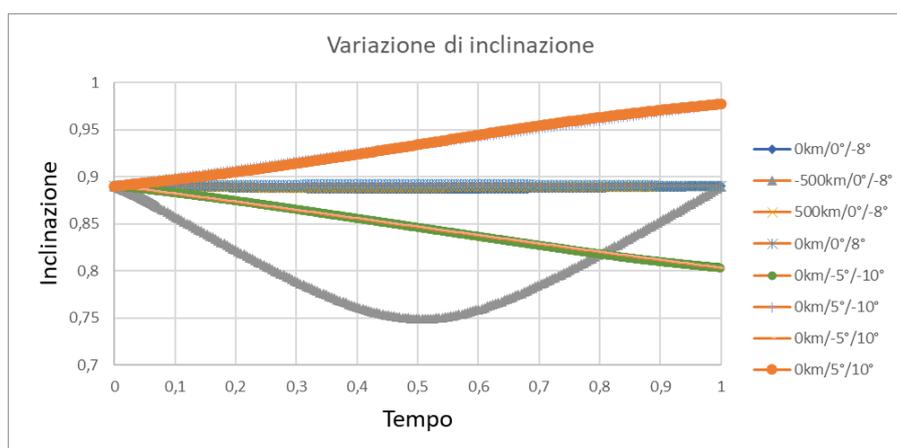


Figura 3.16: Variazioni inclinazioni globali

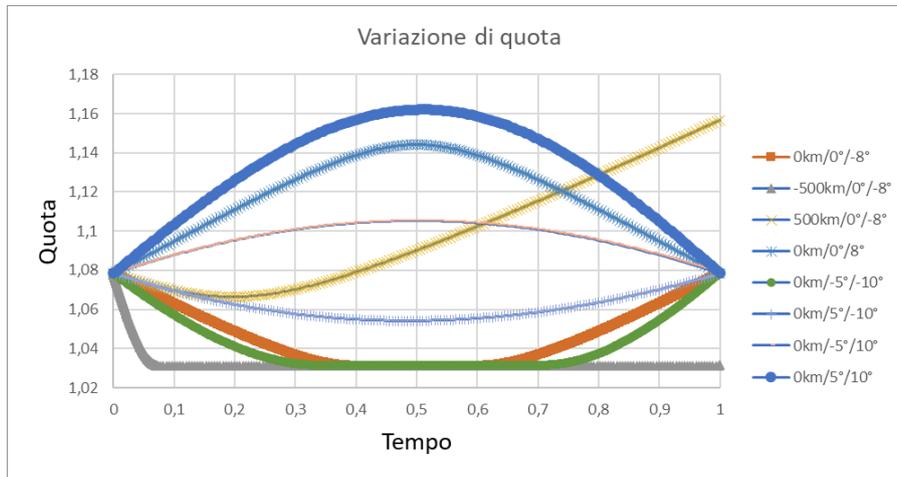


Figura 3.17: Variazioni quota globali

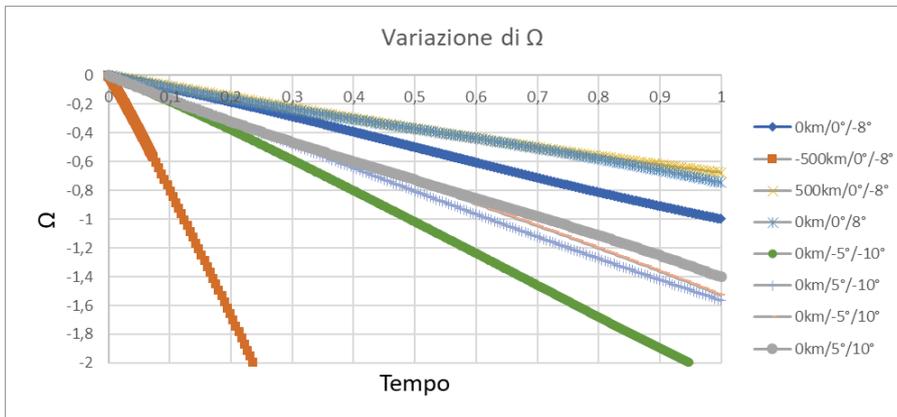


Figura 3.18: Variazioni della pendenza di  $\Omega$

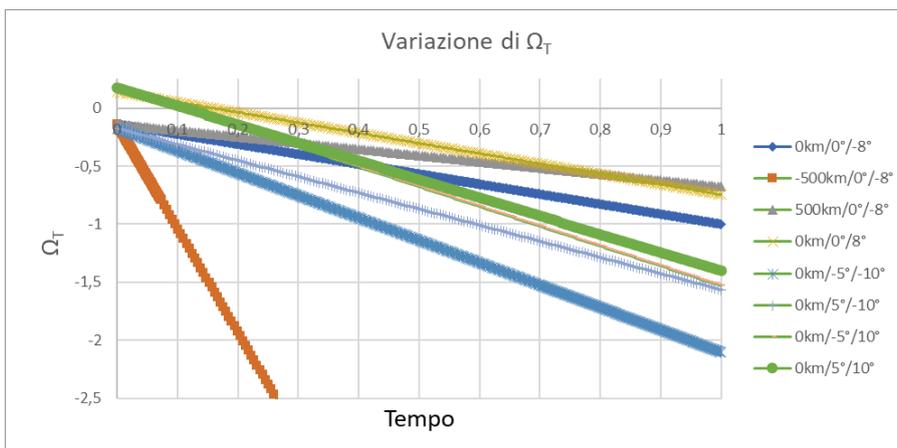


Figura 3.19: Variazioni della pendenza di  $\Omega_t$

### Premessa teorica

Le orbite considerate hanno tutte avuto un'inclinazione inferiore a  $\pi/2$  (orbite dirette), la regressione  $\dot{\Omega}$  ha quindi sempre presentato un valore negativo. Il  $\Delta\Omega_0$  corrisponde alla differenza di  $\Omega$  tra l'orbita target e lo s/c,  $\Delta\Omega_0 = \Omega_T - \Omega_{s/c}$ , a livello grafico, è possibile definire lo s/c in "anticipo" rispetto al target nel caso di  $\Delta\Omega_0 > 0$ , viceversa sarà in ritardo nel caso negativo. Si ricorda che variazioni positive di quota o inclinazione portano a minori perturbazioni. Le condizioni di anticipo e ritardo nella figura precedente sono riferite

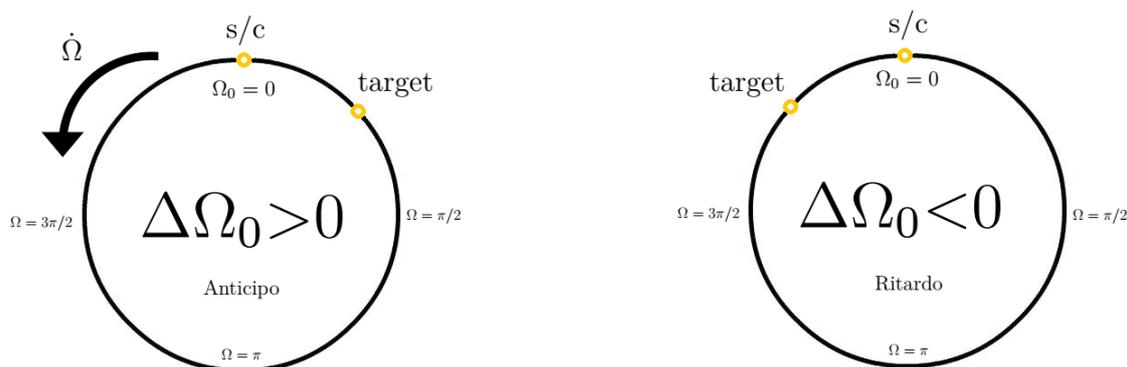


Figura 3.20: Condizioni iniziali di fase s/c e orbita target

allo s/c in relazione al target.

L'obiettivo è quello di far coincidere i due valori di  $\Omega$ . Ragionando in termini di perturbazioni, quindi  $|\dot{\Omega}|$ , nel caso di  $\Delta\Omega_0 > 0$  lo s/c si troverà in una condizione favorevole se possiede un valore minore di  $|\dot{\Omega}|$ , il target avrà infatti una regressione della linea dei nodi maggiore e potrà "recuperare" lo sfasamento. Nel caso di  $\Delta\Omega_0 < 0$  è lo s/c che deve raggiungere il target, sarà quindi necessario un valore di  $|\dot{\Omega}_{s/c}|$  maggiore, questo può essere ottenuto in caso di variazioni di quota o inclinazione positive. In questo scenario i due piani tendono ad allinearsi con il tempo, in caso contrario sarà necessario spendere di più in quanto i due punti tenderebbero a sfasarsi in maniera maggiore nel tempo.

Nel caso di manovre con  $\Delta a = 0$  km occorre ragionare in termini di andamento del parametro orbitale  $a$ . Esso mostra una variazione temporanea anche in questo caso di variazioni nulle, con concavità verso l'alto nel caso di  $\Delta\Omega_0 < 0$ , verso il basso nel caso di  $\Delta\Omega_0 > 0$ , nel primo caso si ottiene un aumento della velocità di regressione, utile nel caso di variazioni  $\Delta i > 0$ , nel secondo una situazione favorevole per  $\Delta i < 0$ .

### 3.2.1 Confronto $|0\text{km}/0^\circ/-8^\circ|$ $|-500\text{km}/0^\circ/-8^\circ|$ $|500\text{km}/0^\circ/-8^\circ|$

In questo confronto si analizzano tre manovre a inclinazione costante, realizzate con lo stesso  $\Delta\Omega_0$ , l'obiettivo è quindi quello di capire cosa succede in base alla variazione di quota.

La manovra più breve ed economica risulta quella con incremento di quota ( $\Delta a = 500\text{km}$ ), mentre la peggiore risulta essere quella con decremento ( $\Delta a = -500\text{km}$ ).

Dal primo diagramma, 3.22, è possibile osservare come l'inclinazione rimanga costante nel primo e nel terzo caso, mentre per il secondo si osserva una concavità verso l'alto. Questo differente andamento è imputabile all'impossibilità di diminuire ulteriormente la quota per via dell'atmosfera, quindi il cambiamento di  $\Omega$  viene realizzato variando anche l'inclinazione. Nel secondo diagramma, 3.23 la manovra con  $\Delta a = 0$  prevede lo stesso una variazione intermedia della quota. La manovra  $\Delta a = 500\text{km}$  ha un costo leggermente più basso della  $\Delta a = 0\text{km}$  in quanto si opera a quote più alte, dove l'effetto delle perturbazioni (a parità di inclinazione) è minore in valore assoluto. Gli ultimi due diagrammi rappresentano l'andamento dello sfasamento tra l'orbita dello s/c e l'orbita di arrivo,  $\Omega - \Omega_T$ . In questo caso sono stati necessari due diagrammi per via della grande differenza di durata tra le manovre. Essi mostrano come la manovra più economica abbia un andamento dello sfasamento più rettilineo rispetto agli altri casi, inoltre la manovra più costosa mostra una inversione di segno, nonostante le due orbite non siano più sfasate non sono state raggiunte le condizioni di quota desiderate e la manovra non viene considerata conclusa.

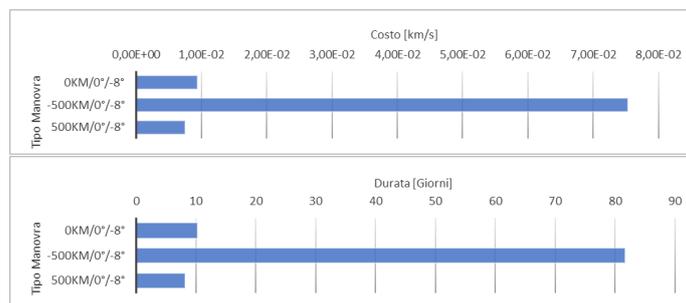


Figura 3.21: Confronto costo e durata delle manovre

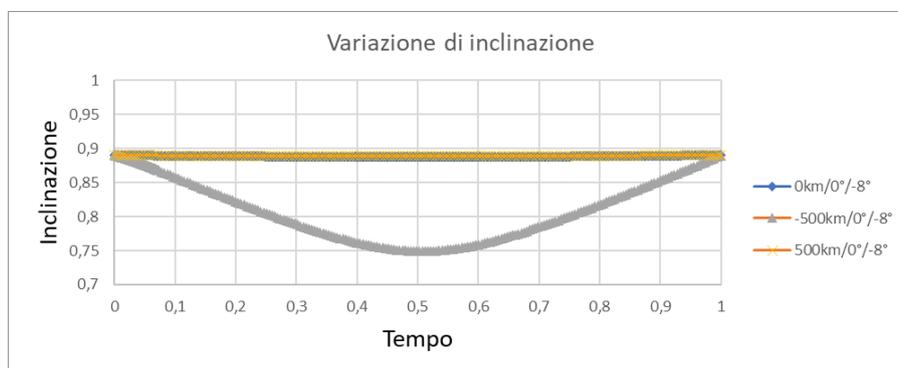


Figura 3.22: Confronto andamento inclinazione (Tempo adimensionato)



Figura 3.23: Confronto andamento quota (Tempo adimensionato)

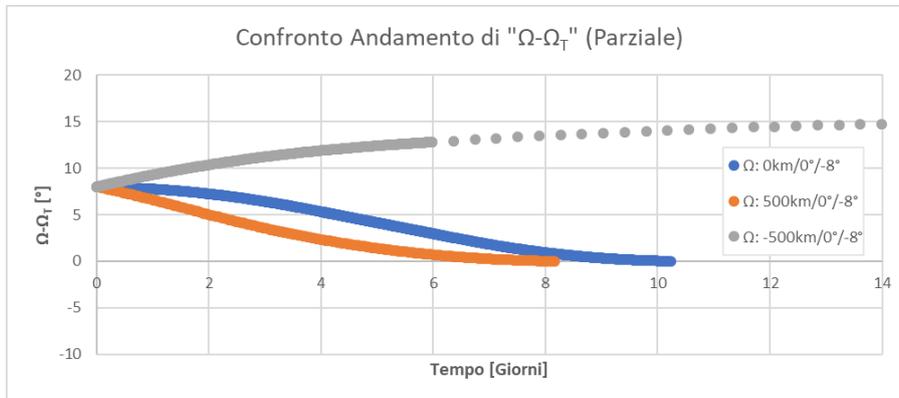


Figura 3.24: Confronto andamento  $\Omega - \Omega_T$  parziale

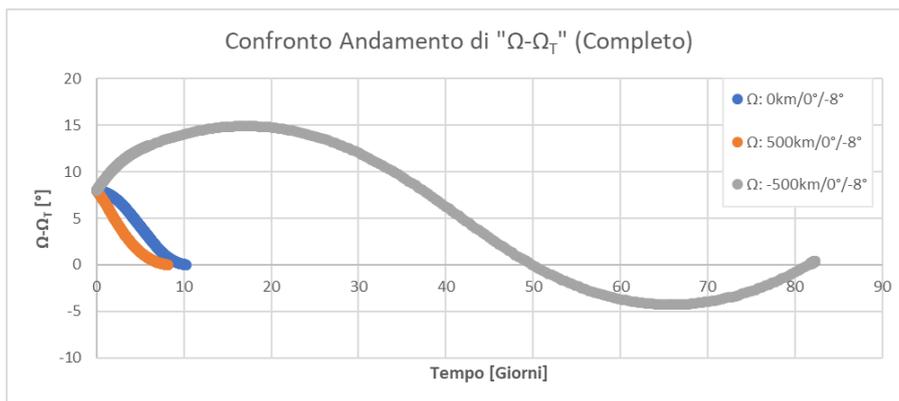


Figura 3.25: Confronto andamento  $\Omega - \Omega_T$  completo

### 3.2.2 Confronto $|0\text{km}/0^\circ/-8^\circ|$ $|0\text{km}/0^\circ/8^\circ|$

In questo caso sono state confrontate due manovre con variazioni di quota e inclinazione nulle, ma con  $\Delta\Omega_0$  opposti. Nel primo caso lo s/c è in ritardo rispetto al target, nel secondo in anticipo.

La manovra più economica è risultata essere quella con  $\Delta\Omega_0 = -8^\circ$ . Questa manovra ha previsto l'utilizzo del vincolo dell'ingresso in atmosfera. Nel caso questo non fosse stato applicato si sarebbero ottenuti degli andamenti speculari dei parametri orbitali, l'applicazione non permette la completa variazione del parametro  $a$  e la variazione di  $\Omega$  viene quindi effettuata attraverso una variazione maggiore dell'inclinazione rispetto al caso  $\Delta\Omega_0 > 0$ .

Tra le particolarità di questo confronto si osservano, per il caso  $\Delta\Omega_0=8^\circ$ , una variazione di inclinazione e quota con concavità verso il basso, mentre verso l'alto per  $\Delta\Omega_0 = -8$ . Nel primo caso lo s/c opererà in condizioni di perturbazioni minori dell'orbita target e l'effetto di regressione sarà più lento, quindi una pendenza della curva  $\dot{\Omega}$  minore.

$$\dot{\Omega} = \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} \left( \frac{R_{terra}}{p} \right)^2 n J_2 \cos(i) \quad (3.5)$$

$$\Delta\Omega_0 = \Omega_2 - \Omega_1 \quad (3.6)$$

In questo confronto viene evidenziato l'effetto della perturbazione  $J_2$  sulla convenienza della manovra. Partendo dalla relazione 3.6, il  $\Delta\Omega_0$  è negativo se  $\Omega_1 > \Omega_2$ , l'obiettivo è avere dei piani che, sfruttando l'effetto delle perturbazioni, coincidano tra loro con il passare del tempo. Come mostrato nei diagrammi 3.27 e 3.28, la manovra con questo  $\Delta\Omega_0$  opera in condizioni di maggiore perturbazione, questo porta il valore di  $\Omega_1$  a coincidere con  $\Omega_2$  senza ricorrere a grandi spese in termini di  $\Delta V$ .

La scelta del segno di  $\Delta\Omega_0$  non influisce sulla pendenza della curva  $\Omega_T$ , essa traslerà in direzione verticale.

$$\Omega_T = \Delta\Omega_0 - \left| \dot{\Omega} \right| \cdot tempo \quad (3.7)$$

Si presentano quindi due situazioni, la curva di  $\Omega$  parte sempre da 0 (per via delle condizioni iniziali), nel caso di  $\Delta\Omega_0$  negativo la curva  $\Omega_T$  parte da valori negativi, viceversa per  $\Delta\Omega_0$  positivi.

Diagrammando le curve di  $\Omega$  e  $\Omega_T$  è possibile individuare una situazione, in termini di costi, favorevole e una sfavorevole. La situazione favorevole è quella con  $\Delta\Omega_0=-8^\circ$ , in questo caso le curve di  $\Omega$  e  $\Omega_T$  hanno pendenze tali da avvicinarsi tra loro con il tempo, questo comporta un minore costo rispetto all'altro caso. La situazione sfavorevole, infatti, è descritta da una tendenza delle curve all'allontanamento.

Il concetto appena esposto può essere spiegato in maniera generica utilizzando la figura 3.31, una variazione di quota o inclinazione positiva porta a zone con meno perturbazione, come detto in precedenza, quindi una pendenza di  $\Omega_T$  minore, discorso inverso per la variazione negativa. In caso di  $\Delta\Omega_0 > 0$  e variazione positiva le curve  $\dot{\Omega}$  (relativa allo s/c) e  $\dot{\Omega}_T$  si troveranno in una situazione di allontanamento reciproco, lo s/c dovrà spendere di più per correggere la pendenza della curva e raggiungere il target. Nel caso di variazione negativa lo scenario diviene favorevole in quanto le curve si avvicinano con il tempo.

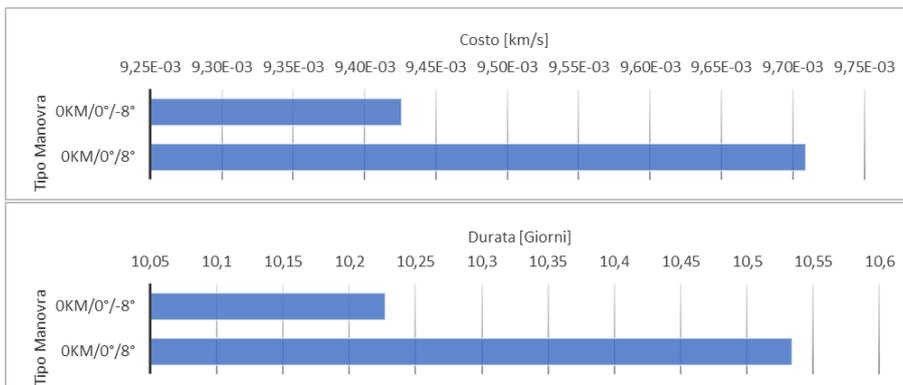


Figura 3.26: Confronto costo e durata delle manovre

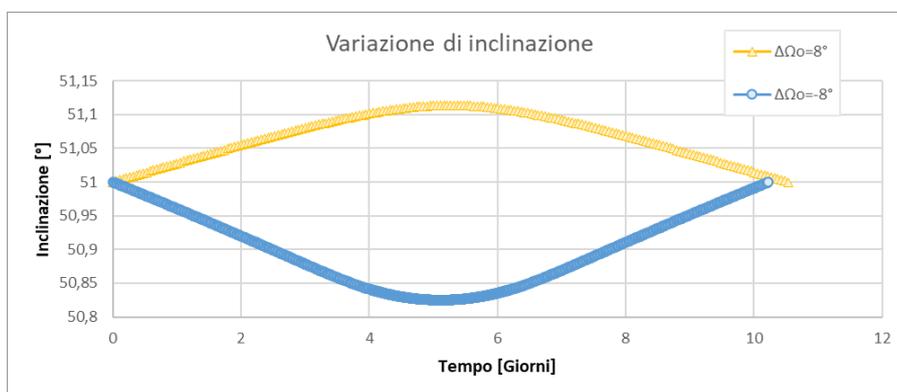


Figura 3.27: Confronto andamento inclinazione

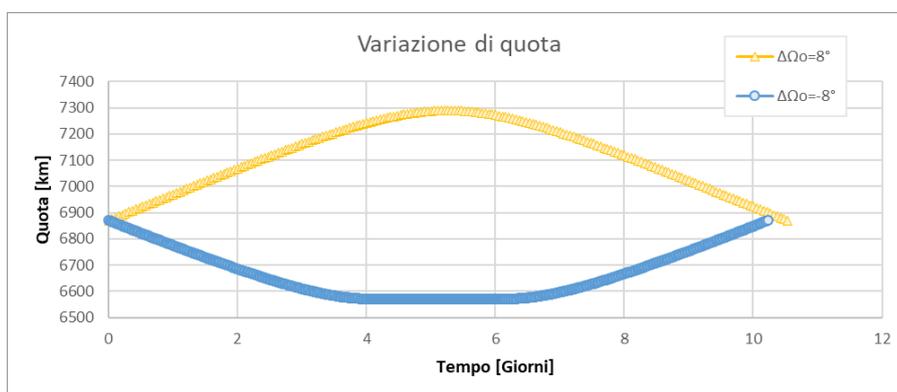


Figura 3.28: Confronto andamento quota

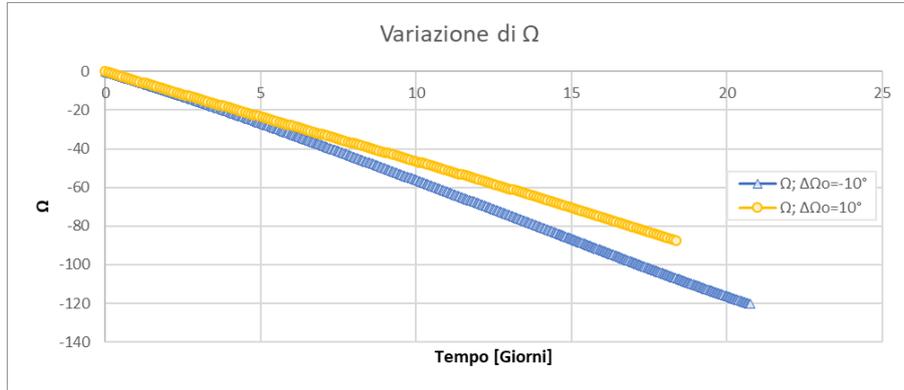


Figura 3.29: Confronto andamento  $\Omega$

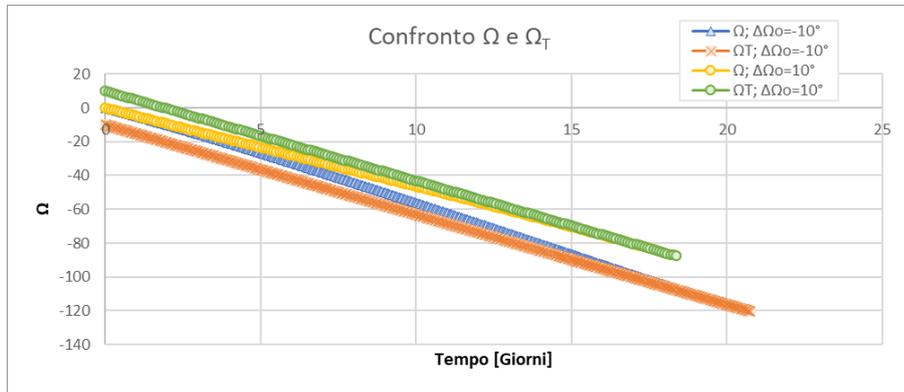


Figura 3.30: Confronto andamento  $\Omega$  e  $\Omega_T$

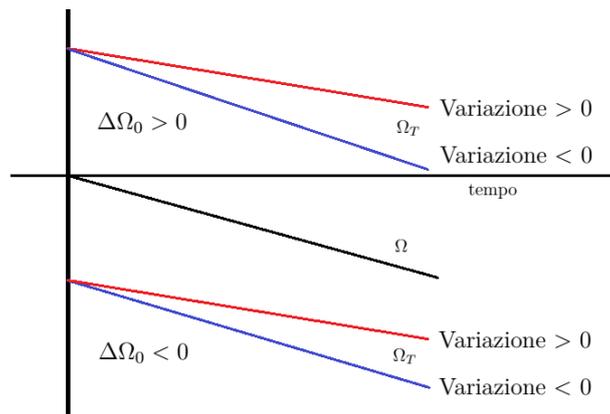


Figura 3.31: Confronto convenienza  $\Delta\Omega_0$

### 3.2.3 Confronto $|0\text{km}/-5^\circ/-10^\circ|$ $|0\text{km}/-5^\circ/10^\circ|$

In questo confronto si effettua una analisi simile alla precedente, quindi sempre considerando manovre con diversi  $\Delta\Omega_0$ , ma per una variazione di inclinazione negativa. La manovra più economica è stata quella effettuata con  $\Delta\Omega_0 = 10^\circ$ . In questo caso, quindi, il risultato è opposto a quello ottenuto nel confronto precedente. L'orbita di destinazione sarà in condizioni di perturbazioni maggiori, quindi conviene iniziare la manovra quando lo s/c ha un valore di fase minore del target, ovvero in condizioni di anticipo, in modo tale che la maggiore velocità di regressione del target permetta ad esso di "raggiungere" lo s/c. I due casi hanno riportato la stessa curva di variazione di inclinazione, le differenze sono quindi da evidenziare nel diagramma della variazione di quota. In questo si osserva un aumento iniziale per il caso  $\Delta\Omega_0 = 10^\circ$ , quindi meno perturbazioni e la conseguenza di una curva  $\Omega$  meno inclinata del caso con variazione di ascensione retta negativa, inoltre l'applicazione del vincolo per la manovra con  $\Delta\Omega_0 = -10^\circ$  porta a una zona con quota costante, tale zona rettilinea causa un aumento del costo rispetto ad una generica variazione curvilinea.

Viene confermata la concavità della variazione di quota vista in precedenza, per variazioni di ascensione retta,  $\Delta\Omega_0$ , negative la concavità sarà verso l'alto, viceversa per valori positivi.

La spiegazione a questo andamento viene fornita attraverso i ratei di regressione di  $\Omega$ , entrambe le manovre portano in una condizione di inclinazione minore, quindi maggiori perturbazioni, ciò porta a un'orbita target con una regressione più veloce di quella di partenza. Nel caso di sfasamento positivo l'orbita di partenza si trova ad un valore di  $\Omega$  maggiore, lo sfasamento viene quindi azzerato sfruttando il maggiore valore di  $\Omega_T$ , questa rappresenta una condizione favorevole. Nel caso di  $\Delta\Omega_0 = -10^\circ$  lo s/c si trova costretto a rincorrere un'orbita con uno sfasamento che tenderebbe a crescere nel tempo, sarà quindi necessario spendere maggiore propellente.

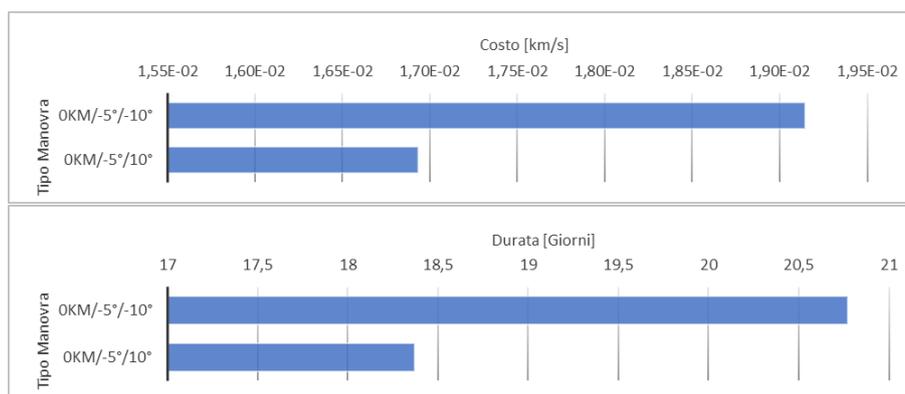


Figura 3.32: Confronto tempo e durata delle manovre

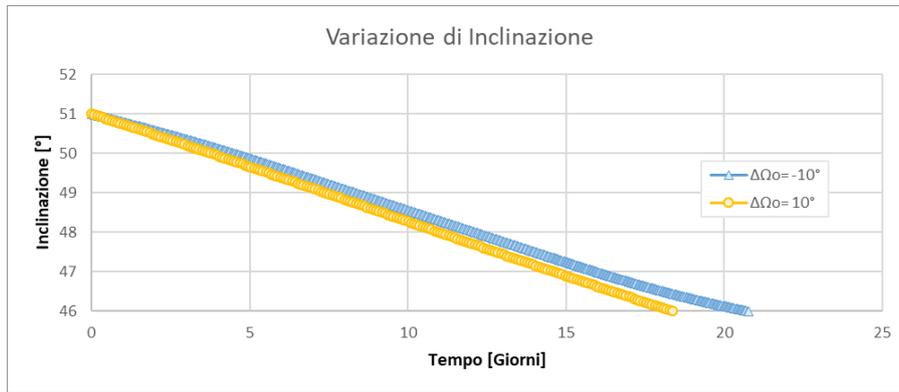


Figura 3.33: Confronto andamento inclinazione

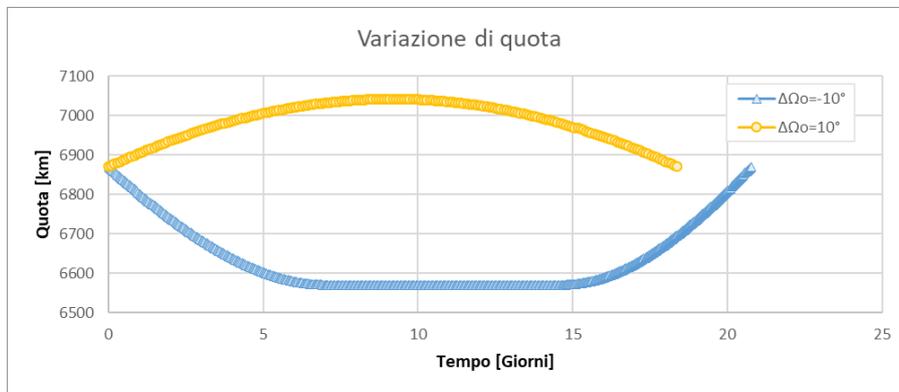


Figura 3.34: Confronto andamento quota

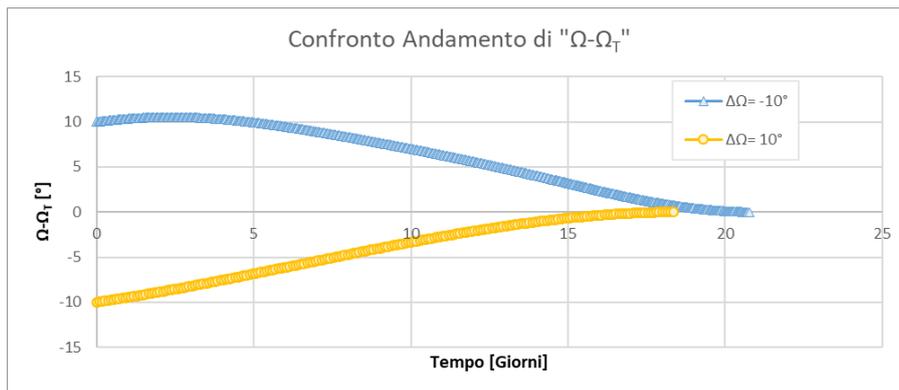


Figura 3.35: Confronto andamento  $\Omega - \Omega_T$

### 3.2.4 Confronto $|0\text{km}/5^\circ/-10^\circ|$ $|0\text{km}/5^\circ/10^\circ|$

In questo confronto si conferma il risultato ottenuto nel 2° caso, paragrafo 3.2.2. In caso di variazioni  $\Delta a$  o  $\Delta i$  nulle o maggiori di 0 occorre operare con un  $\Delta\Omega_0 < 0$ .

La maggiore durata della manovra più costosa provoca una variazione maggiore della quota, visibile in figura 3.39.

Le curve relative allo sfasamento mostrano un comportamento opposto al caso precedente. In questa condizione una variazione positiva di inclinazione porta a zone con minori perturbazioni e quindi un'orbita target che varierà il suo  $\Omega_T$  in maniera più lenta dello s/c. Questo ultimo, nel caso di sfasamento positivo ( $\Delta\Omega_0 > 0^\circ$ ), si troverà "in anticipo" rispetto alla destinazione e dovrà correggere la manovra, a livello grafico, figura 3.37, questo viene visualizzato tramite una variazione della pendenza della curva di  $\Omega$  per intercettare la curva di  $\Omega_T$ .

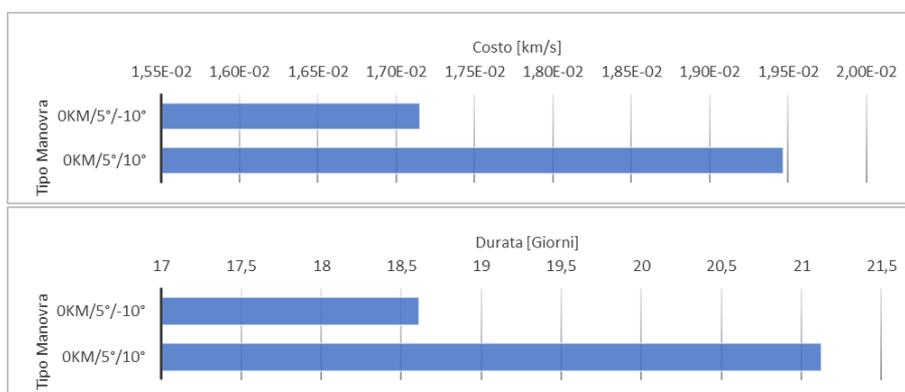


Figura 3.36: Confronto costo e durata delle manovre

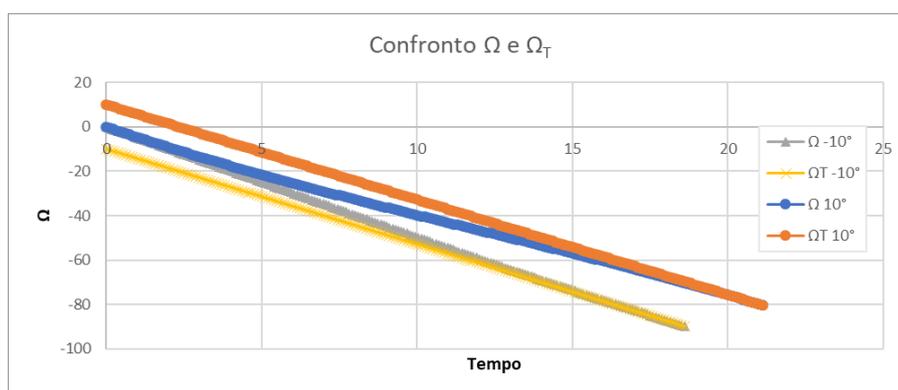


Figura 3.37: Confronto andamento  $\Omega$  e  $\Omega_T$

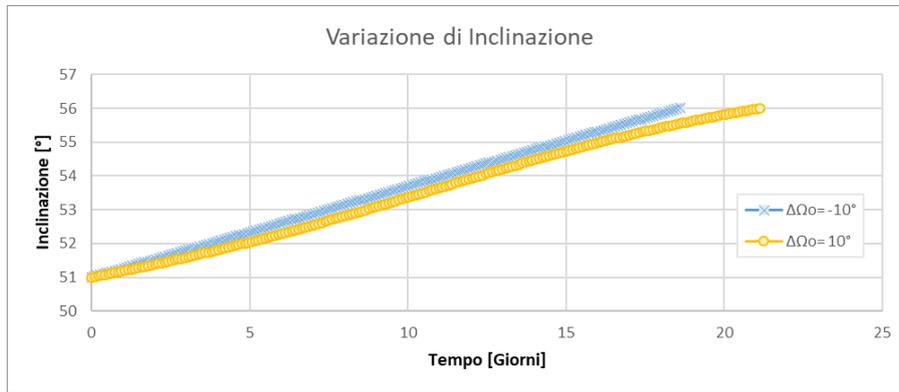


Figura 3.38: Confronto andamento inclinazione

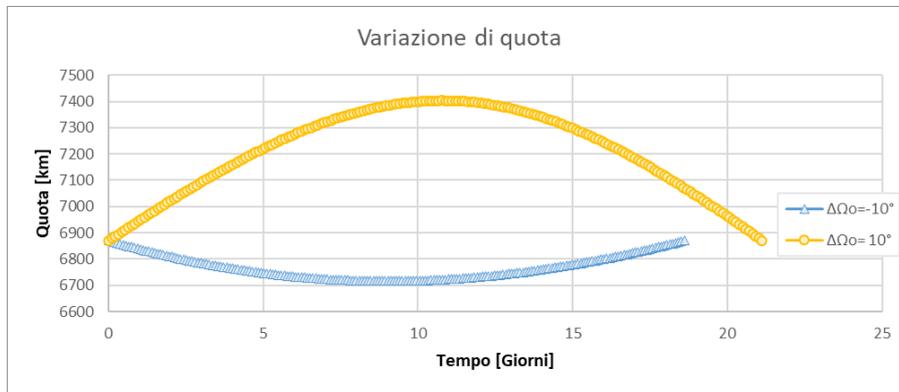


Figura 3.39: Confronto andamento quota

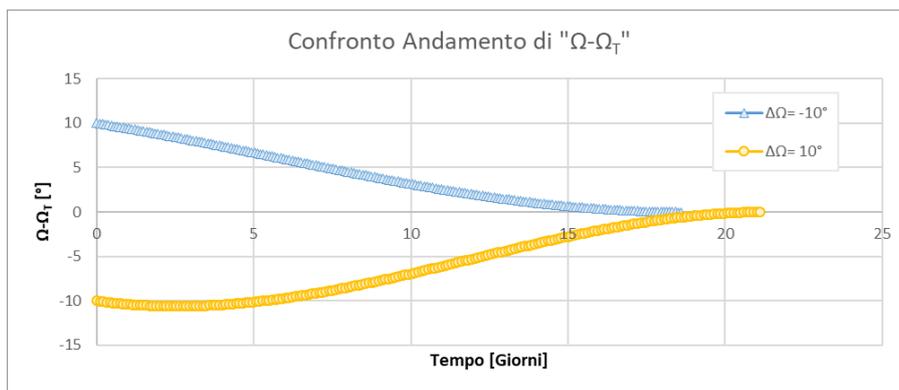


Figura 3.40: Confronto andamento  $\Omega - \Omega_T$

### 3.2.5 Confronto |0km/-5°/-10°| |0km/5°/-10°|

In questo caso vengono mostrate le differenze tra una manovra con  $\Delta i < 0$  svolta in condizione sfavorevole e una con  $\Delta i > 0$ , svolta in condizioni favorevoli.

È possibile notare la differenza di andamenti tra le due curve  $\Omega$ , figura 3.42, quella relativa al  $\Delta i > 0$  (situazione favorevole) intercetta con maggiore facilità la curva relativa a  $\dot{\Omega}_t$ .

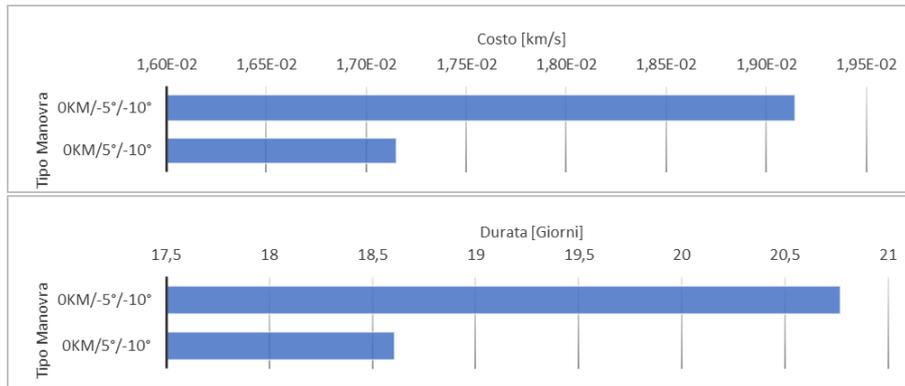


Figura 3.41: Confronto costo e durata delle manovre

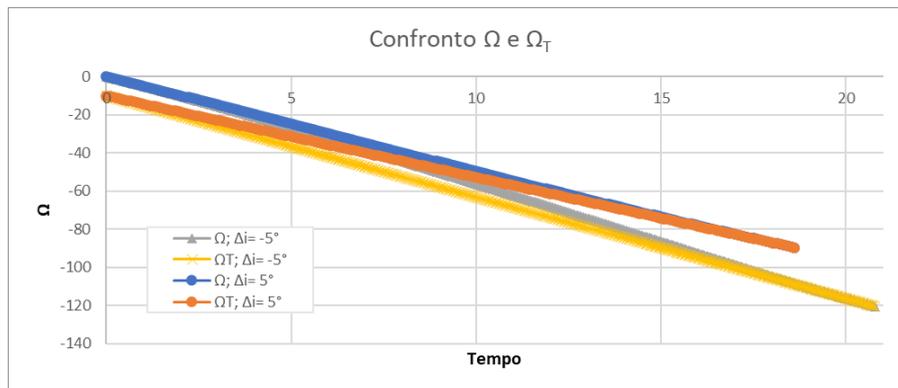


Figura 3.42: Confronto andamento  $\dot{\Omega}$  e  $\dot{\Omega}_t$

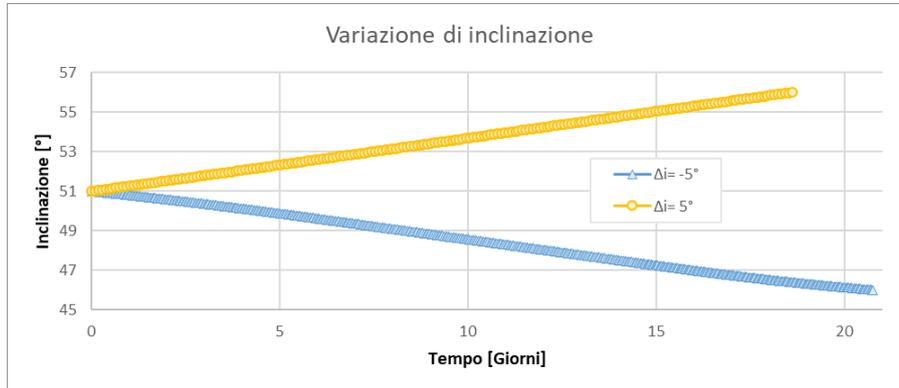


Figura 3.43: Confronto andamento inclinazione

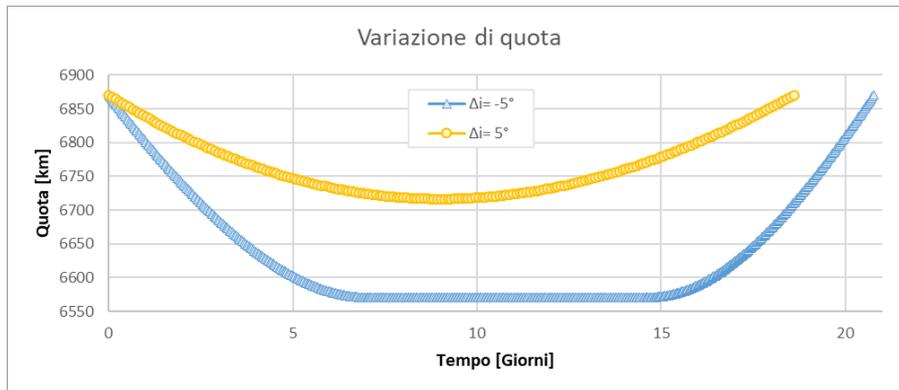


Figura 3.44: Confronto andamento quota

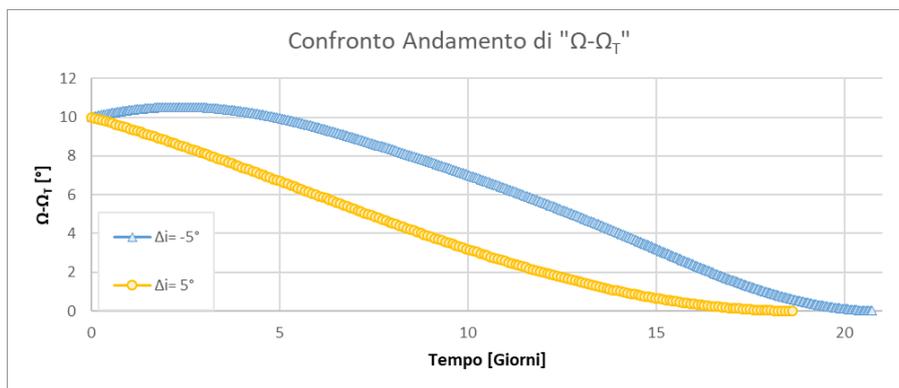


Figura 3.45: Confronto andamento  $\Omega - \Omega_T$

### 3.2.6 Confronto $|0\text{km}/5^\circ/-10^\circ|$ $|0\text{km}/-5^\circ/10^\circ|$

Vengono confrontate le due situazioni favorevoli viste in precedenza. In questo caso, le due manovre, ricevono contributi opposti in termini di variazione degli effetti perturbativi: la manovra con  $\Delta i = -5^\circ$  ha un contributo positivo alla perturbazione per via della diminuzione di  $\Delta i$ , ma anche uno negativo per via dell'aumento temporaneo di quota  $\Delta a$  causato dal  $\Delta\Omega > 0$ . Discorso inverso per il caso con  $\Delta i = 5^\circ$ . L'effetto finale è quello di avere curve  $\Omega$  con pendenze molto simili.

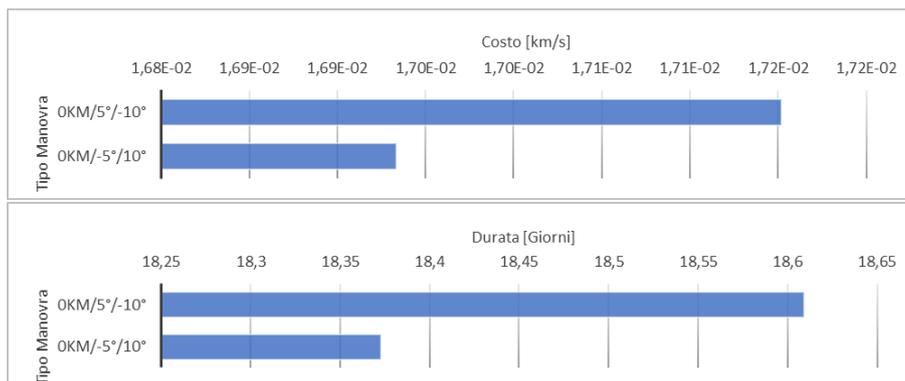


Figura 3.46: Confronto costo e durata delle manovre

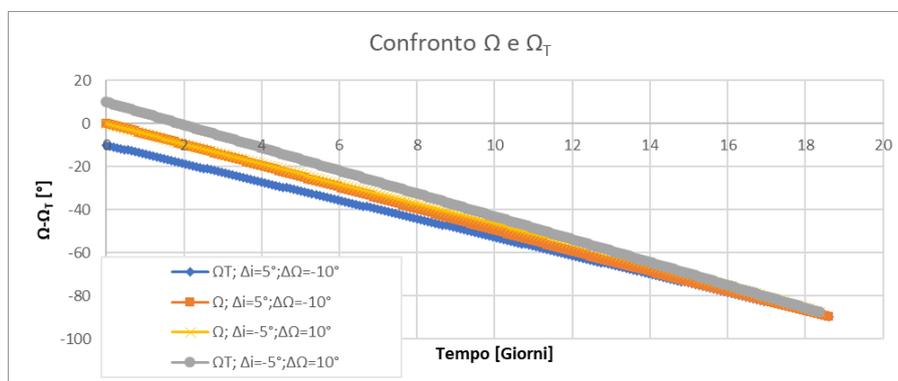


Figura 3.47: Confronto andamento  $\Omega$  e  $\Omega_t$

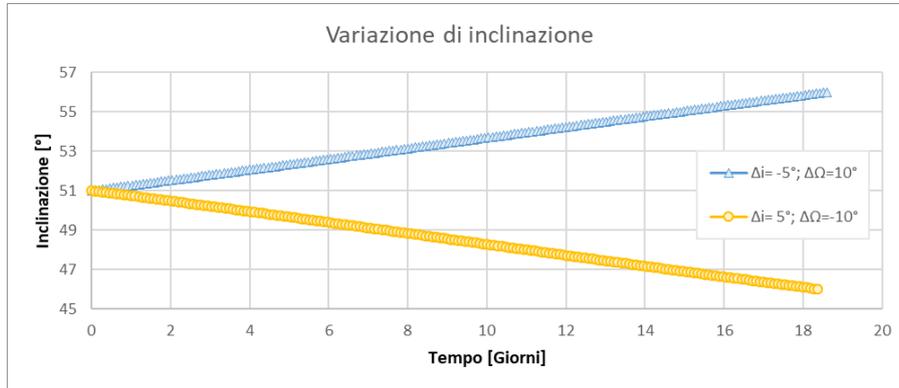


Figura 3.48: Confronto andamento inclinazione

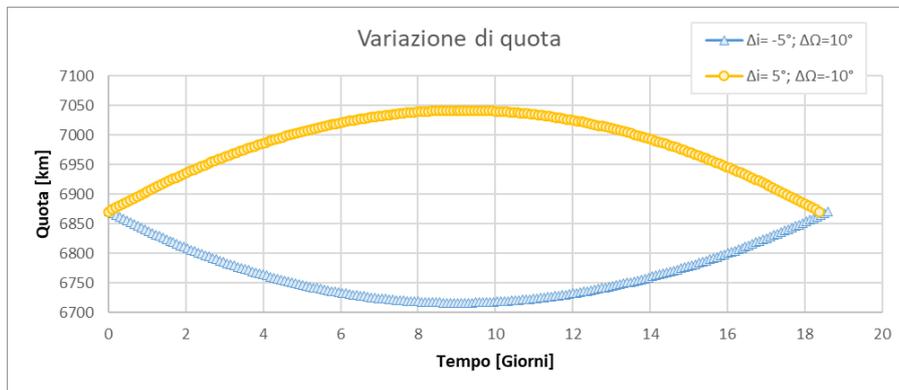


Figura 3.49: Confronto andamento quota

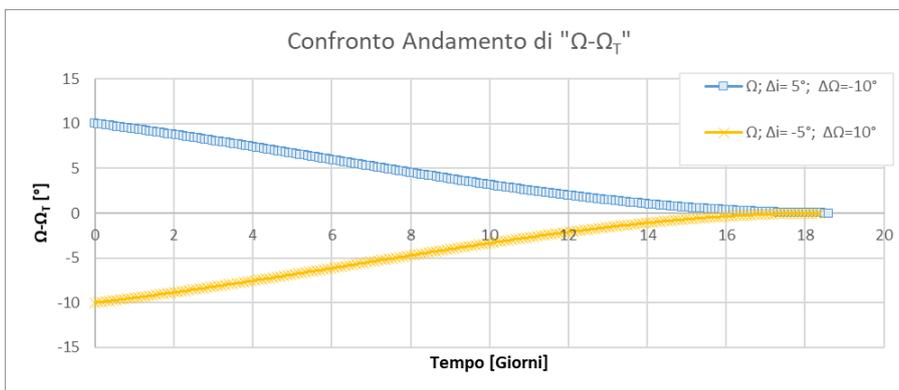


Figura 3.50: Confronto andamento  $\Omega - \Omega_T$

### 3.2.7 Confronto $|0\text{km}/-5^\circ/-10^\circ| |0\text{km}/5^\circ/10^\circ|$

Vengono confrontate le due situazioni sfavorevoli viste in precedenza. La manovra con  $\Delta\Omega_0 = -10^\circ$  ha maggiori perturbazioni, a causa della sua inclinazione e quota minori, nonostante ciò riesce a intercettare la curva  $\Omega_T$  con maggiore facilità del caso con variazione positiva. Questo porta a un costo leggermente minore per  $\Delta\Omega_0 = -10^\circ$ , tuttavia maggiore rispetto ai casi favorevoli trattati nel paragrafo 3.2.6.

Nel diagramma 3.51 sono mostrati gli andamenti dello sfasamento nel tempo, con zone più ampie nel caso di situazioni sfavorevoli.

Queste due ultime serie di confronti hanno permesso di evidenziare, nel diagramma 3.52, il diverso andamento delle curve  $\Omega$ . Nella situazione favorevole le curve rimangono per lo più rettilinee, mentre nella situazione sfavorevole le curve tendono ad assumere una leggera concavità e quindi variare in maniera più netta la propria pendenza.

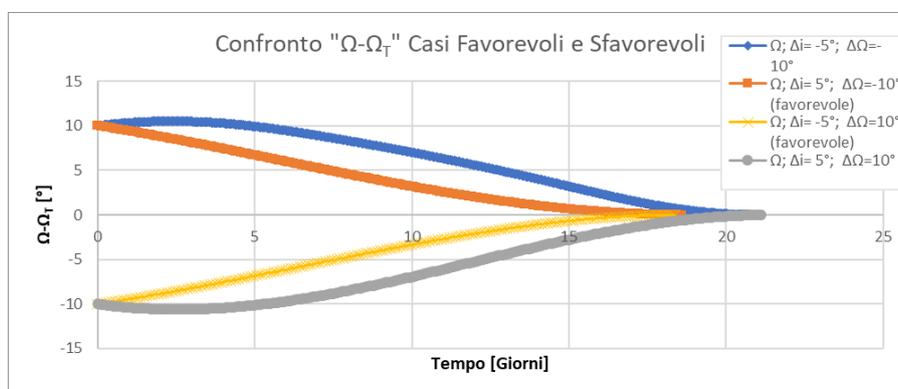


Figura 3.51: Confronto  $\Omega - \Omega_T$  nei casi favorevoli e sfavorevoli

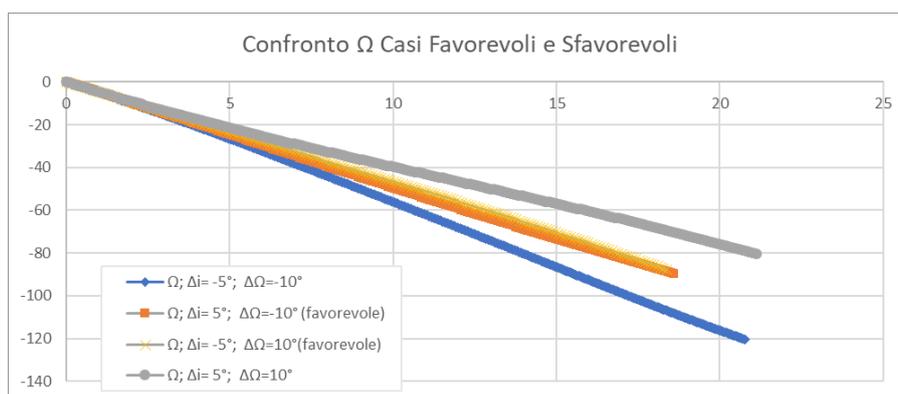


Figura 3.52: Confronto della pendenza di  $\Omega$  nei casi favorevoli e sfavorevoli

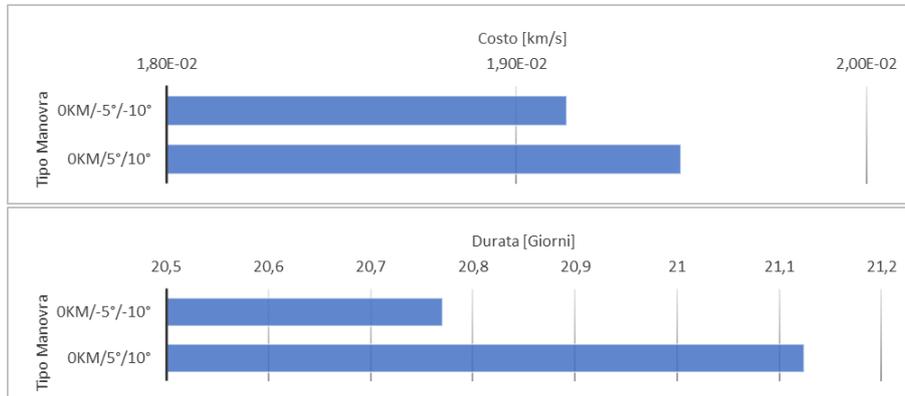


Figura 3.53: Confronto tempo e durata delle manovre

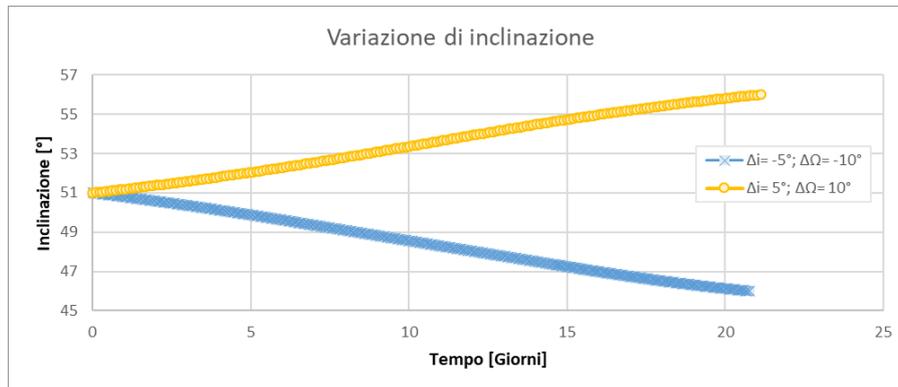


Figura 3.54: Confronto andamento inclinazione

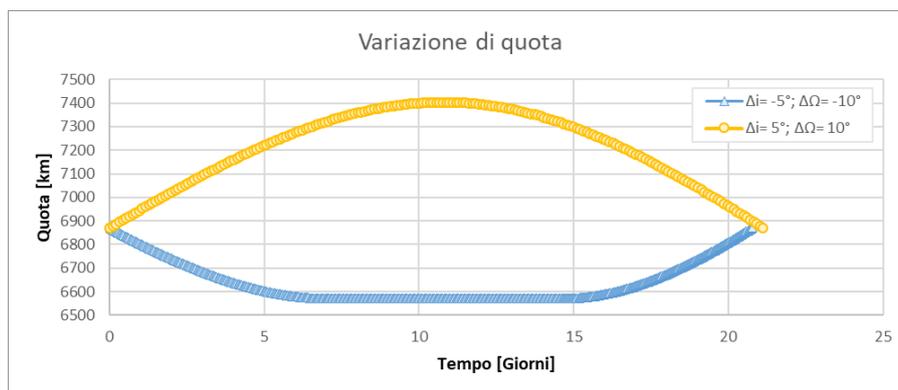
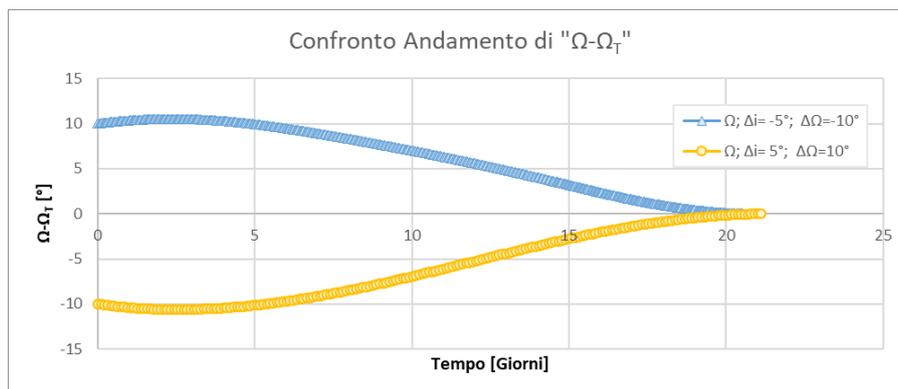


Figura 3.55: Confronto andamento quota

Figura 3.56: Confronto andamento  $\Omega - \Omega_T$ 

### 3.2.8 Confronto $|200\text{km}/-5^\circ| |200\text{km}/5^\circ| |-200\text{km}/-5^\circ| |-200\text{km}/5^\circ|$ per $\Delta i=0$

Questo confronto è stato realizzato per paragonare i comportamenti delle manovre a variazione di quota con quelli a variazione di inclinazione visti in precedenza, attraverso manovre con  $\Delta a$  positivo e negativo e variazione  $\Delta i$  nulla.

Sono state considerate quattro manovre, le due favorevoli (quindi costo minore) sono risultate essere quelle con segni tra  $\Delta a$  e  $\Delta \Omega$  opposti, comportamento che conferma ciò che è stato ottenuto nei paragrafi precedenti.



Figura 3.57: Confronto costo delle manovre

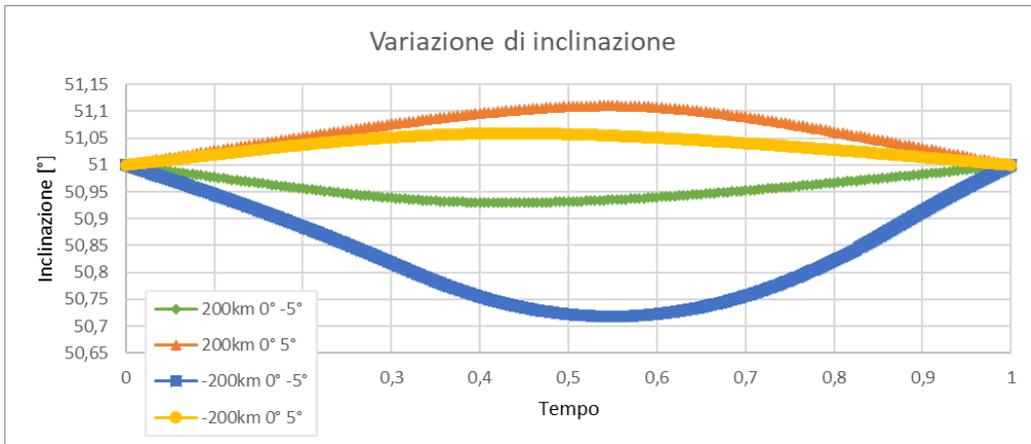


Figura 3.58: Confronto andamento inclinazione

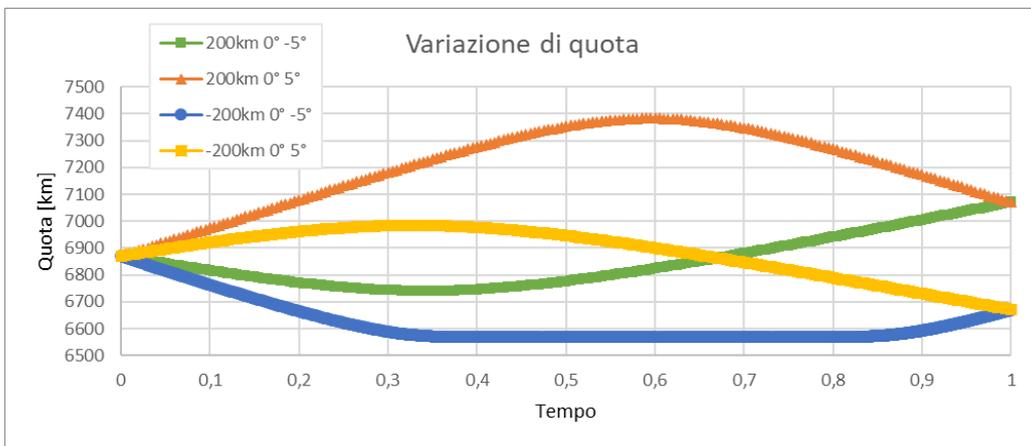


Figura 3.59: Confronto andamento quota

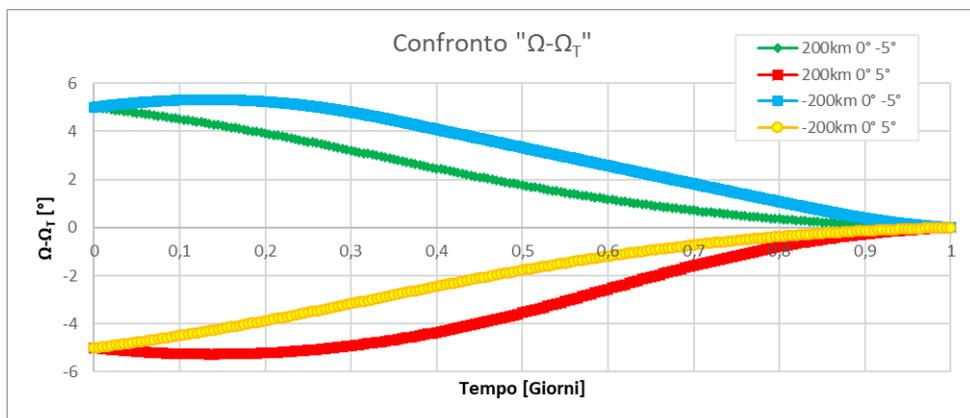


Figura 3.60: Confronto andamento  $\Omega - \Omega_T$

### 3.2.9 Confronto variazione di $\Delta\Omega_0$

Nell'ultimo confronto viene presa in considerazione la manovra con variazioni nulle, ( $\Delta a = 0$ ;  $\Delta i = 0$ ), realizzata con quattro diversi valori di  $\Delta\Omega_0$ . I diagrammi relativi alle variazioni di semiasse e inclinazione durante la manovra hanno mostrato andamenti analoghi.

Considerando la figura 3.61 si nota come il tempo della manovra aumenti all'aumentare di  $|\Delta\Omega_0|$ . Manovre con  $\Delta\Omega_0 < 0$  presentano una durata minore delle rispettive di segno opposto. Nel caso fosse stata considerata una manovra con variazioni negative il comportamento sarebbe stato opposto. La maggiore durata è dovuta al maggiore sfasamento tra i piani. Aumentando il valore di  $|\Delta\Omega_0|$  si nota anche un aumento dell'escursione di quota e inclinazione effettuata. Questo andamento è dovuto alla diversa durata della manovra.

Il diagramma 3.61 riporta in ordinate il valore di  $quota = h(t) - h_0$ , dove:

$$h(t) = [R_{terra} + h_0 + da(t)]/R_{terra}$$

Il diagramma 3.62 riporta, in ordinate, i valori di  $i(t) - i_0$ , espressi in radianti.

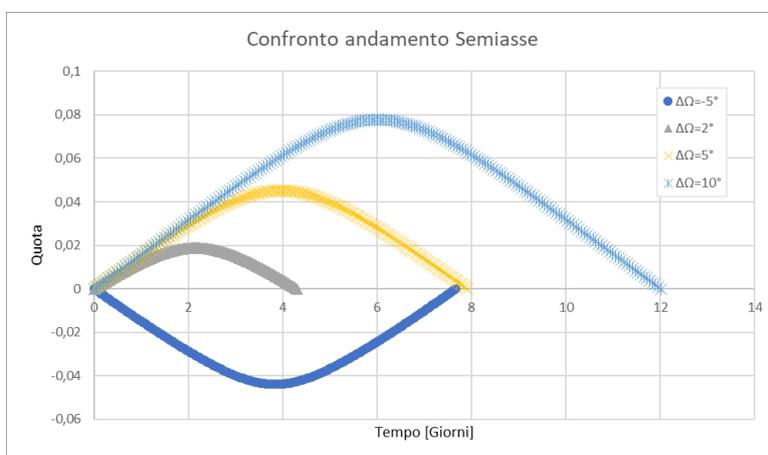


Figura 3.61: Confronto andamento quota

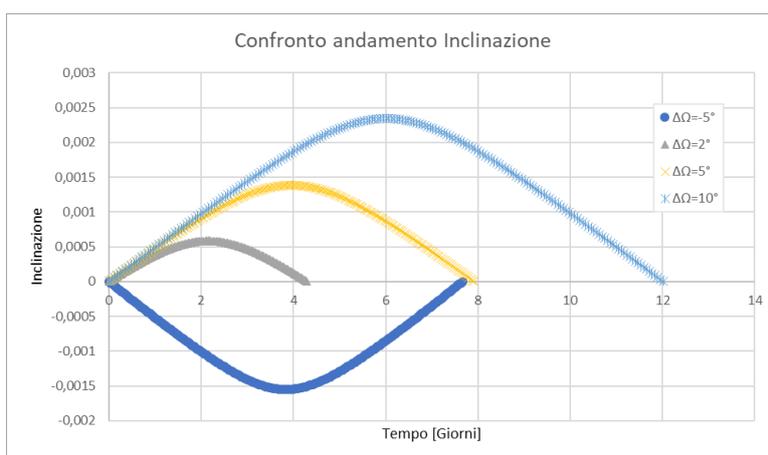


Figura 3.62: Confronto andamento inclinazione

### 3.2.10 Conclusioni

Sono stati effettuati dei confronti tra manovre in punti caratteristici. Questi sono stati scelti in modo tale da poter osservare i singoli effetti dovuti alla variazione di quota, di inclinazione e di  $\Delta\Omega_0$ . In ogni confronto sono stati visualizzati i diagrammi delle variazioni dei parametri orbitali relativi al semiasse, all'inclinazione e all'ascensione retta. Manovre a variazione di quota nulla hanno comunque avuto una variazione intermedia di questo parametro, andamento analogo per l'inclinazione. Scegliendo un valore di  $\Delta\Omega_0$  negativo le curve presentano concavità verso l'alto, segno che la manovra lavora con quota (e/o inclinazione) minore del valore iniziale. Discorso inverso per  $\Delta\Omega_0$  positivo. Queste concavità influiscono sulle perturbazioni. Il vincolo dell'ingresso in atmosfera è stato visualizzato mediante una zona lineare presente in alcuni diagrammi della variazione di semiasse. In base alle relazioni matematiche utilizzate, un aumento di quota o di inclinazione porta una diminuzione dell'effetto perturbativo, che si manifesta con una diminuzione di pendenza della curva  $\Omega$ . Una diminuzione di quota o inclinazione porta all'aumento della perturbazione.

$$\dot{\Omega} = \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} \left( \frac{R_{terra}}{p} \right)^2 n J_2 \cos(i)$$

Esistono condizioni favorevoli e sfavorevoli, descritte rispettivamente dalla tendenza all'avvicinamento e all'allontanamento tra le curve  $\Omega$  e  $\Omega_T$  nel tempo. I confronti 3, 4 e 8 hanno dimostrato che queste condizioni sono analoghe sia nel caso di variazione di semiasse che di inclinazione, le due situazioni variano in base al segno della variazione. In caso di variazione  $\Delta a > 0$  o  $\Delta i > 0$ , si punta a una zona con perturbazioni minori, quindi la curva  $\Omega_T$  sarà meno inclinata del caso con variazione uguale e segno negativo. In questo caso risulta favorevole operare con un  $\Delta\Omega_0 < 0$ , in questo modo la curva di  $\Omega$  parte da un valore di ordinata maggiore di  $\Omega_T$ . Aumentando  $|\dot{\Omega}_T|$ , quindi aumentando le perturbazioni, si intercetta con più facilità  $\Omega_T$ . Le manovre più economiche sono quelle con variazioni intermedie di quota o inclinazione negative (concavità verso l'alto) In caso di variazione di quota o inclinazione negativa vale il discorso inverso, si punta verso zone con maggiore perturbazione, quindi conviene operare con  $\Delta\Omega_0 > 0$  e risultano più economiche manovre con  $|\dot{\Omega}|$  minore. Schematizzando i concetti in una tabella:

Situazioni favorevoli	Variazioni positive	Variazioni negative
Quota	$\Delta\Omega_0 < 0$	$\Delta\Omega_0 > 0$
Inclinazione	$\Delta\Omega_0 < 0$	$\Delta\Omega_0 > 0$
Miglioramento manovra	Se $ \dot{\Omega} $ aumenta	Se $ \dot{\Omega} $ diminuisce

Tabella 3.8: Schema riepilogativo situazioni favorevoli

I confronti 3-4-5 hanno evidenziato che una manovra sfavorevole comporta una variazione maggiore di quota rispetto alla corrispondente favorevole.

Il confronto 7 ha permesso di evidenziare la diversa forma delle curve nelle situazioni favorevoli e sfavorevoli, nel primo caso si avranno delle curve con pendenza costante, mentre nel secondo la pendenza varia, segno che occorre spendere di più per compensare l'allontanamento del target.

In caso di manovre combinate, valgono le considerazioni fatte nella sezione precedente.

### 3.3 Variazione delle condizioni iniziali

Nella prima parte del lavoro sono state mantenute le condizioni iniziali inalterate, l'orbita di partenza considerata è stata sempre caratterizzata da:  $a_0 = 500\text{km}$ ;  $i_0 = 51^\circ$ ;  $\Omega_0 = 0^\circ$ . In questa sezione vengono analizzati i cambiamenti che si ottengono variando queste condizioni. Sono state prese in considerazione le medesime manovre di variazione di  $\Delta a$  e  $\Delta i$  viste nella sezione precedente. Le condizioni iniziali considerate sono state:

Caso	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a_0$ [km]	500	500	500	750	750	750	1000	1000	1000
$i_0$ [°]	41	51	61	41	51	61	41	51	61

Tabella 3.9: Valori di semiasse e inclinazione iniziali considerati

Ogni condizione iniziale ha previsto il calcolo del  $\Delta V$  delle seguenti manovre:

$\Delta a$ [km]	$\Delta i$ [°]	$\Delta a$ [km]	$\Delta i$ [°]	$\Delta a$ [km]	$\Delta i$ [°]
-300	0	700	0	0	-2
-200	0	800	0	0	-1
-100	0	900	0	0	1
0	0	1000	0	0	2
100	0	0	-8	0	3
200	0	0	-7	0	4
300	0	0	-6	0	5
400	0	0	-5	0	6
500	0	0	-4	0	7
600	0	0	-3	0	8

Tabella 3.10: Manovre considerate

L'analisi ha permesso la creazione di un database dei costi  $\Delta V$  delle varie condizioni iniziali. Da questo sono stati scelti dei particolari diagrammi per permettere l'osservazione delle differenze tra le varie condizioni.

Nei paragrafi successivi vengono riportati i soli diagrammi relativi al  $\Delta V$ . I diagrammi relativi alla durata della manovra hanno lo stesso andamento ed evoluzione al variare delle condizioni iniziali, è risultato sufficiente riportare una sola grandezza.

A livello di effetto perturbativo si ricorda quanto detto nella figura 1.8 del paragrafo 1.3.1, si avranno perturbazioni maggiori al diminuire di  $a_0$  e  $i_0$ .

### 3.3.1 Confronto Variazioni Nulle

Considerando la manovra a variazioni nulle,  $\Delta a=0$  e  $\Delta i=0$ , sono stati effettuati dei confronti per valutare i cambiamenti in base alle condizioni di partenza. In particolare sono stati presi in esame i diagrammi:

- $\Delta a = 0km$  ;  $\Delta i = 0^\circ$  ;  $a_0 = 500km$ ;                       $i_0 = [41^\circ; 51^\circ; 61^\circ]$ ;
- $\Delta a = 0km$  ;  $\Delta i = 0^\circ$  ;  $a_0 = 1000km$ ;                       $i_0 = [41^\circ; 51^\circ; 61^\circ]$ ;
- $\Delta a = 0km$  ;  $\Delta i = 0^\circ$  ;  $i_0 = 41^\circ$ ;                       $a_0 = [500km; 750km; 1000km]$ ;
- $\Delta a = 0km$  ;  $\Delta i = 0^\circ$  ;  $i_0 = 61^\circ$ ;                       $a_0 = [500km; 750km; 1000km]$ .

I primi due diagrammi, 3.63 e 3.64, hanno mostrato comportamenti simili al variare dell'inclinazione iniziale, di conseguenza, nei successivi confronti, è stato sufficiente prendere in considerazione il solo caso relativo a  $a_0 = 500km$ . Discorso analogo per i diagrammi a inclinazione iniziale  $i_0$  costante.

Dall'analisi effettuata risulta che il costo di una manovra a variazione di quota e inclinazione nulla aumenta se si opera in condizioni iniziali di quota o inclinazione maggiori, nei diagrammi questo fenomeno si evidenzia attraverso un restringimento delle curve. L'effetto risulta più evidente nei casi con  $a_0$  costante, questo è dovuto al fatto che una variazione di  $10^\circ$  di  $i_0$  provoca una variazione maggiore di  $\dot{\Omega}$  rispetto alla variazione di  $a_0$  di 250 km (figura 1.8). Le due orbite si trovano già nelle stesse condizioni di quota e inclinazione, sono solamente sfasate. Questo sfasamento viene annullato prima per valori bassi di  $i_0$  e  $a_0$  dove le perturbazioni sono più intense, la differenza di durata della manovra porta ad una differenza di costo.

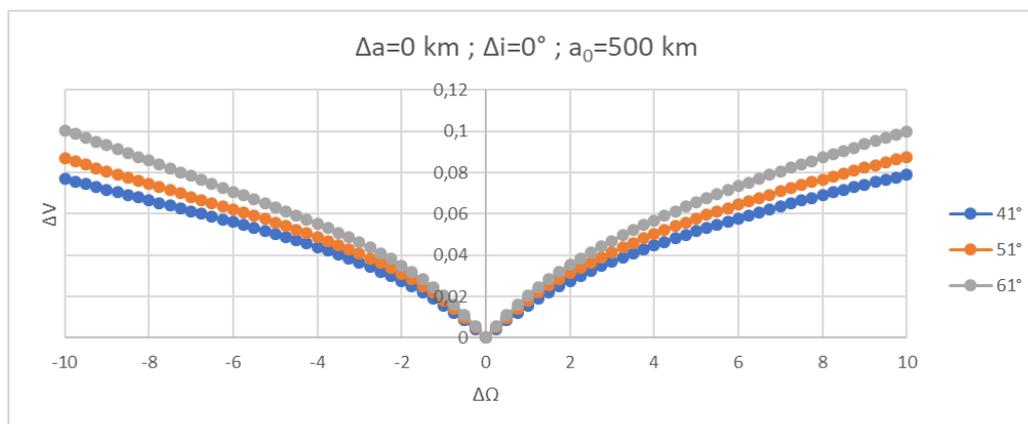


Figura 3.63: Variazioni di costo a quota iniziale costante caso 500km

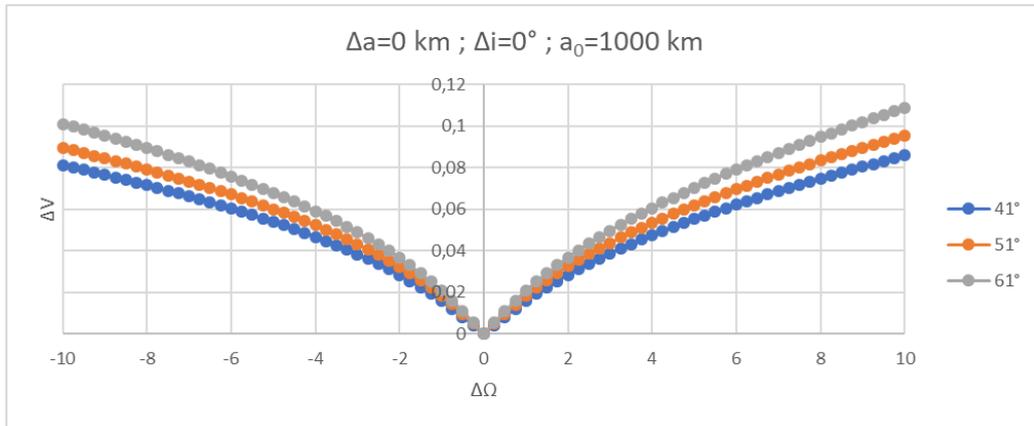


Figura 3.64: Variazioni di costo a quota iniziale costante caso 1000km

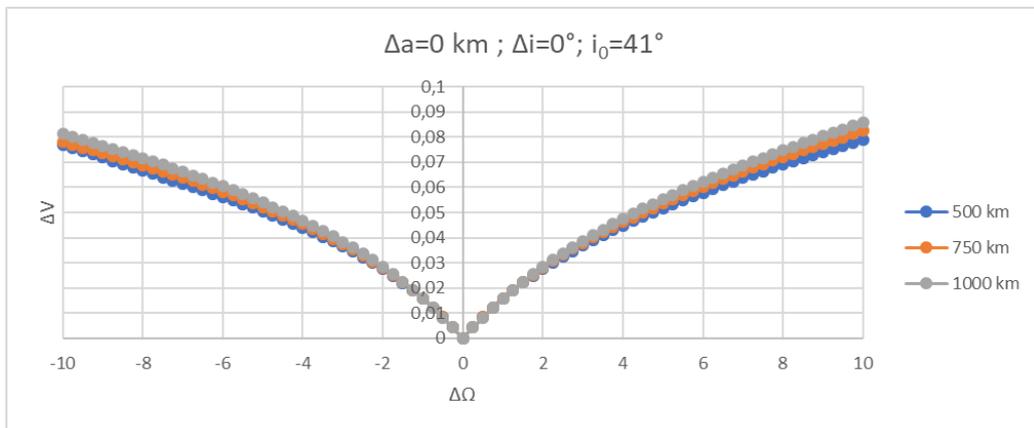


Figura 3.65: Variazioni di costo a inclinazione iniziale costante caso 41°

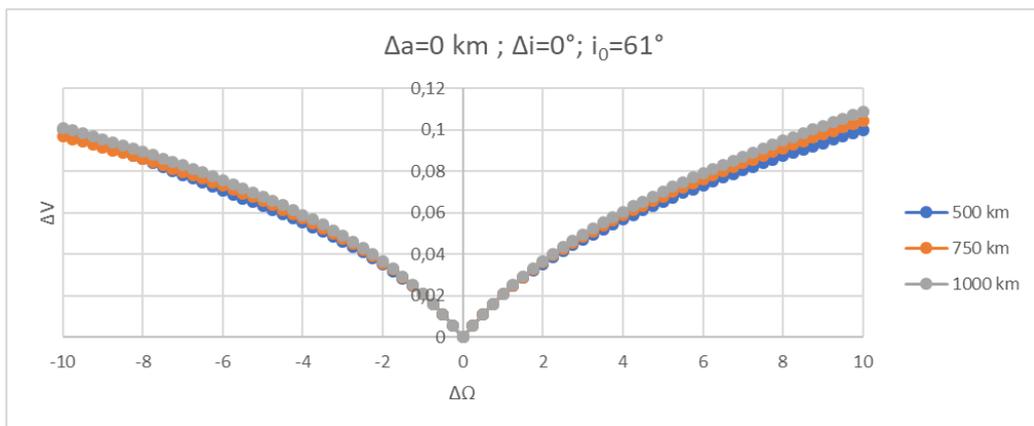


Figura 3.66: Variazioni di costo a inclinazione iniziale costante caso 61°

### 3.3.2 Confronto Variazioni Non Nulle

Sono stati presi in considerazione i seguenti diagrammi:

- $\Delta a = 300km$  ;  $\Delta i = 0^\circ$  ;  $a_0 = 500km$ ;  $i_0 = [41^\circ; 51^\circ; 61^\circ]$ ;
- $\Delta a = 300km$  ;  $\Delta i = 0^\circ$  ;  $i_0 = 41^\circ$ ;  $a_0 = [500km; 750km; 1000km]$ ;
- $\Delta a = 0km$  ;  $\Delta i = 3^\circ$  ;  $a_0 = 500km$ ;  $i_0 = [41^\circ; 51^\circ; 61^\circ]$ ;
- $\Delta a = 0km$  ;  $\Delta i = 3^\circ$  ;  $i_0 = 41^\circ$ ;  $a_0 = [500km; 750km; 1000km]$ ;
- $\Delta a = 0km$  ;  $\Delta i = -3^\circ$  ;  $a_0 = 500km$ ;  $i_0 = [41^\circ; 51^\circ; 61^\circ]$ ;
- $\Delta a = 0km$  ;  $\Delta i = -3^\circ$  ;  $i_0 = 41^\circ$ ;  $a_0 = [500km; 750km; 1000km]$ .

A parità di manovra, mantenendo la quota iniziale costante, si osserva il restringimento delle curve all'aumentare dell'inclinazione. Il punto di minimo rimane costante nelle tre curve. Mantenendo l'inclinazione iniziale costante si osserva lo stesso restringimento visto in precedenza, in questo caso il minimo si sposta verso valori di costo più bassi. Il  $\Delta\Omega_0$  relativo al minimo si sposta verso valori minori in modulo in caso di variazioni di quota o inclinazione sia positive che negative (avvicinamento verso l'asse delle ordinate).

I diagrammi 3.73 3.74 3.75 3.76 si concentrano sulla zona di minimo costo e permettono una migliore osservazione della medesima, in modo tale da evidenziare il comportamento appena descritto.

A seguito dell'analisi è possibile affermare che:

- operando con quota iniziale fissa il costo aumenta sempre se si aumenta l'inclinazione iniziale;
- operando con inclinazione iniziale fissa esiste un intervallo di  $\Delta\Omega$  dove il costo diminuisce all'aumentare della quota.

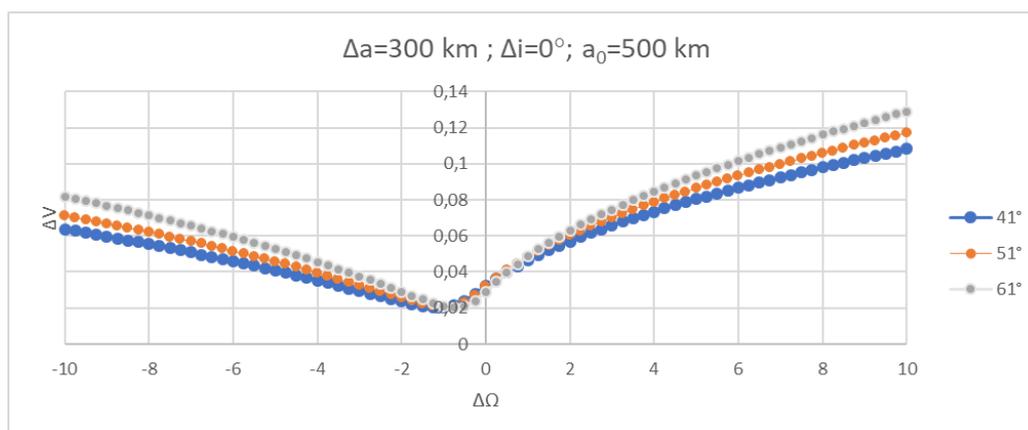


Figura 3.67: Variazioni di costo a quota iniziale costante caso 500km

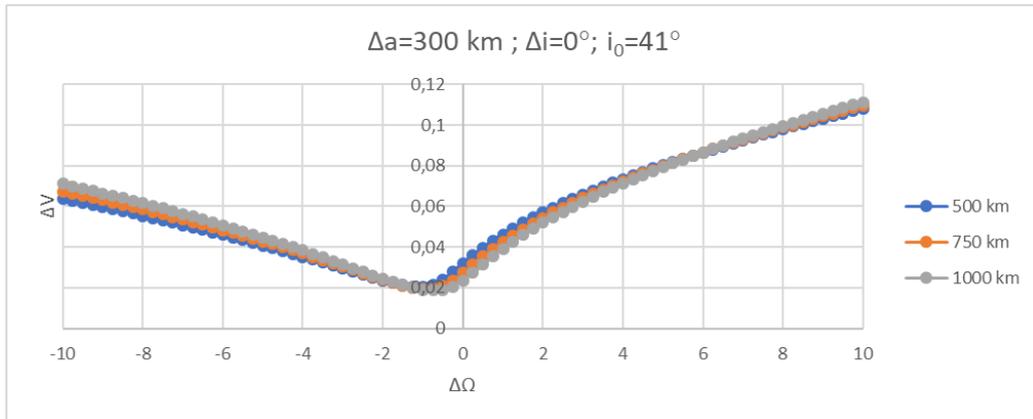


Figura 3.68: Variazioni di costo a inclinazione iniziale costante caso  $41^\circ$

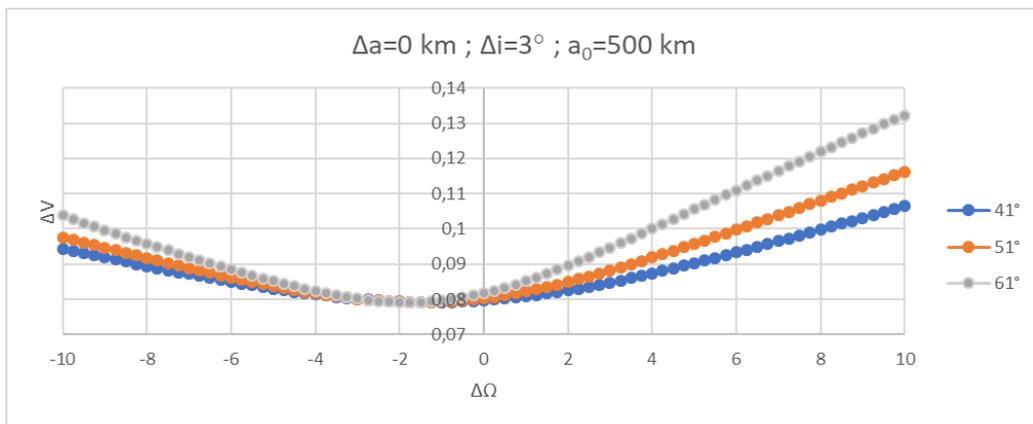


Figura 3.69: Variazioni di costo a quota iniziale costante caso 500km

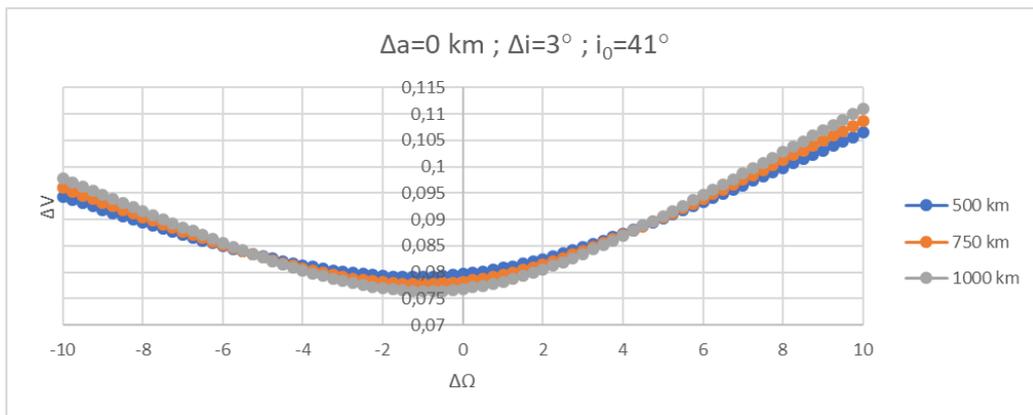


Figura 3.70: Variazioni di costo a inclinazione iniziale costante caso  $41^\circ$

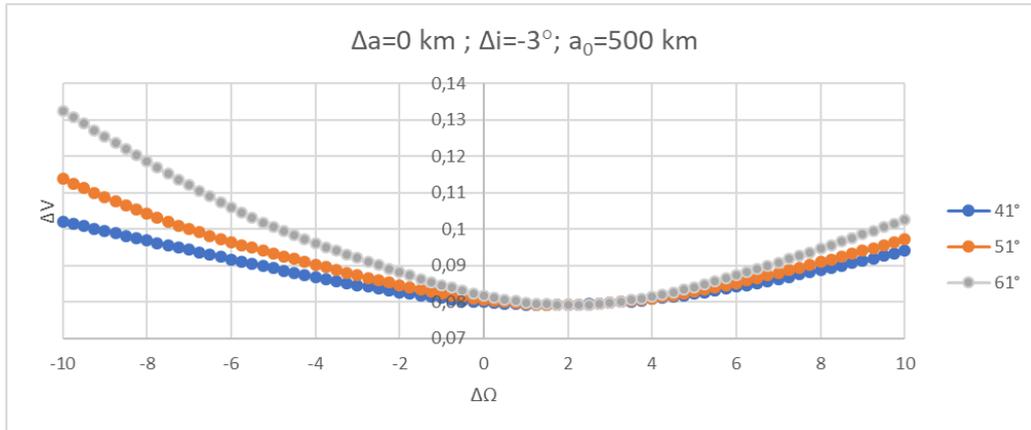


Figura 3.71: Variazioni di costo a quota iniziale costante caso 500km

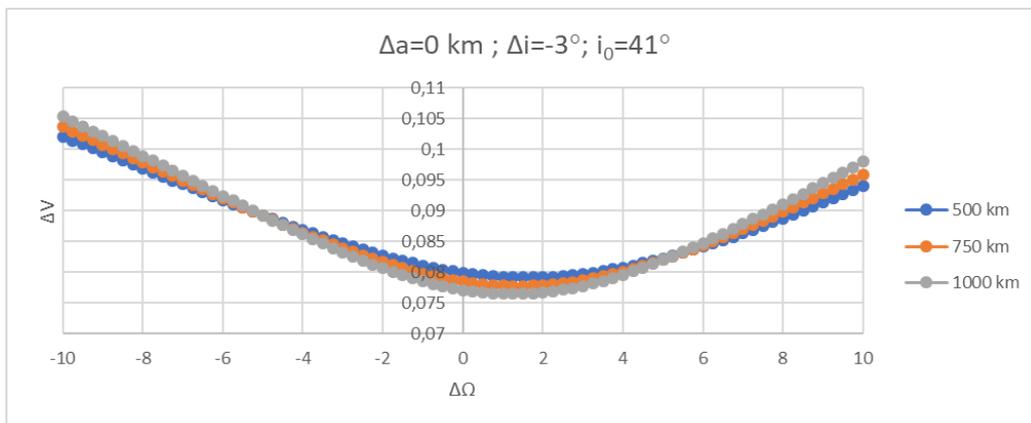


Figura 3.72: Variazioni di costo a inclinazione iniziale costante caso 41°

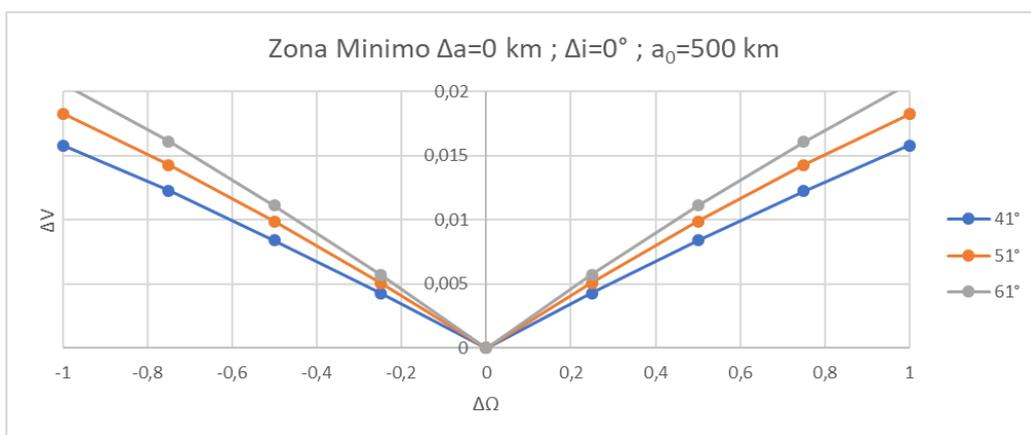


Figura 3.73: Zona di minimo variazioni nulle

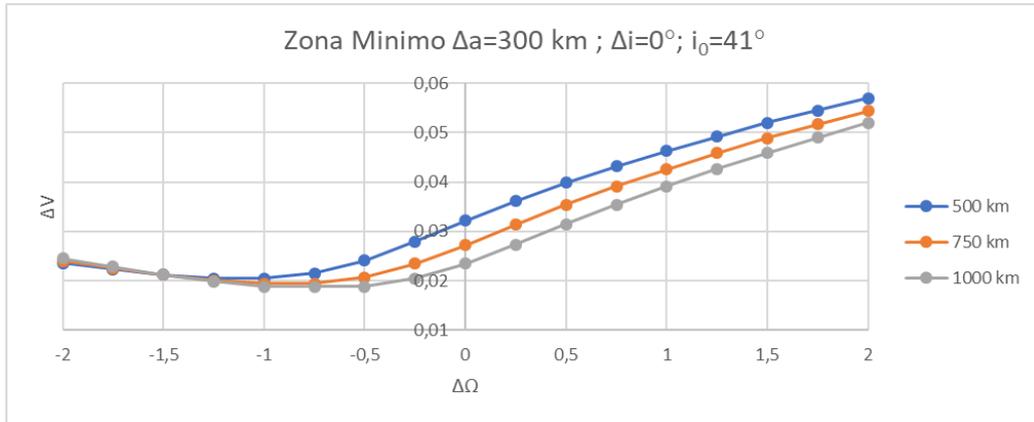


Figura 3.74: Zona di minimo variazione di quota positiva

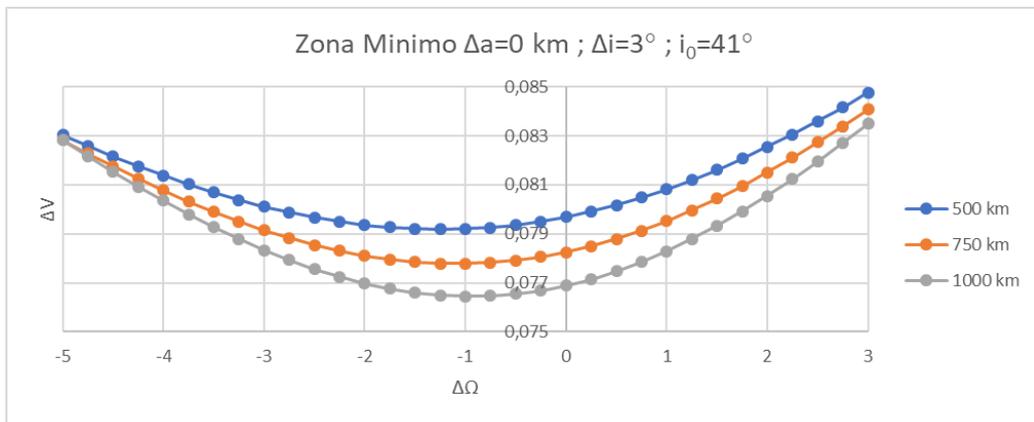


Figura 3.75: Zona di minimo variazione di inclinazione positiva

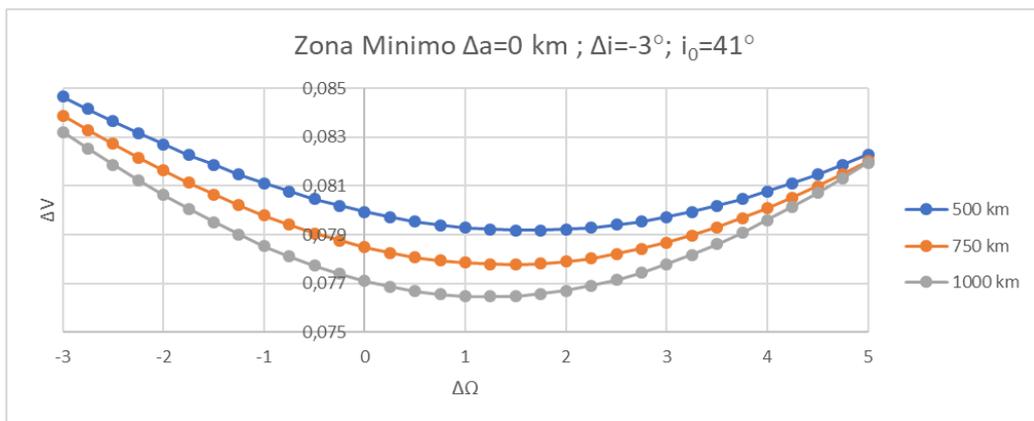


Figura 3.76: Zona di minimo variazione di inclinazione negativa

### 3.3.3 Confronto per $\Delta\Omega_{ottimo}$

Nei successivi diagrammi viene mostrato l'andamento del costo al variare delle condizioni iniziali, con una traslazione orizzontale dei grafici in modo tale da far coincidere il punto di minimo costo, corrispondente a  $\Delta\Omega_{ottimo}$ , dei tre casi considerati. In questo modo è possibile apprezzare in maniera maggiore gli effetti della variazione di quota e inclinazione. L'analisi di queste curve permette di affermare che:

- il costo minimo di una manovra diminuisce all'aumentare della quota, l'aumento dell'inclinazione iniziale, invece, non comporta variazioni al  $\Delta V$  minimo;
- il  $\Delta\Omega_{ottimo}$  ha valori negativi per variazioni positive, viceversa per variazioni negative. Questo comportamento conferma quanto visto nelle precedenti sezioni;
- la variazione di  $a_0$  e  $i_0$  comporta una variazione della posizione del  $\Delta\Omega_{ottimo}$ . Nel caso di  $\Delta a > 0$  il  $\Delta\Omega_{ottimo}$  si sposta verso valori di  $\Delta\Omega$  maggiori, quindi verso "destra", all'aumentare di  $a_0$  e  $i_0$ ;
- per  $\Delta i > 0$  il  $\Delta\Omega_{ottimo}$  si sposta verso valori più negativi, quindi verso "sinistra", aumentando  $i_0$ , mentre verso valori più positivi all'aumentare di  $a_0$ . Comportamento opposto nel caso di  $\Delta i < 0$ .

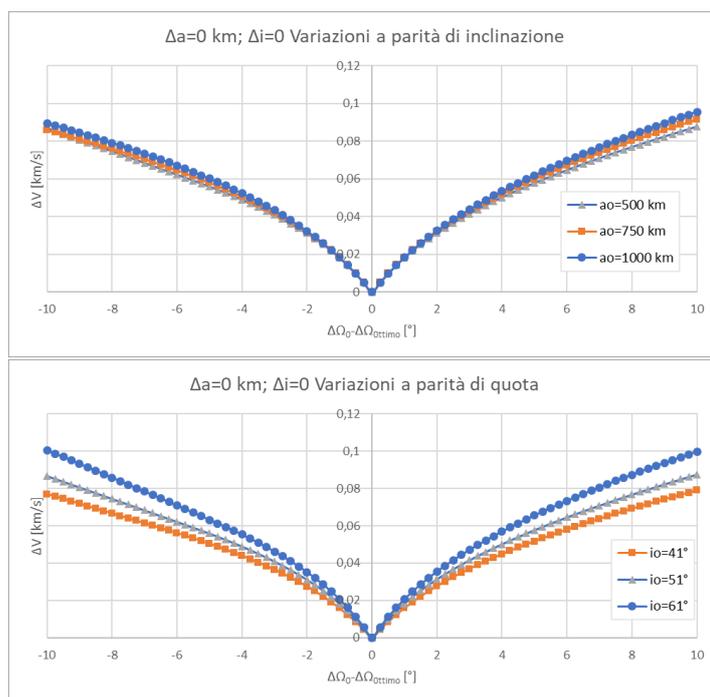


Figura 3.77: Confronto per manovre a variazione nulla

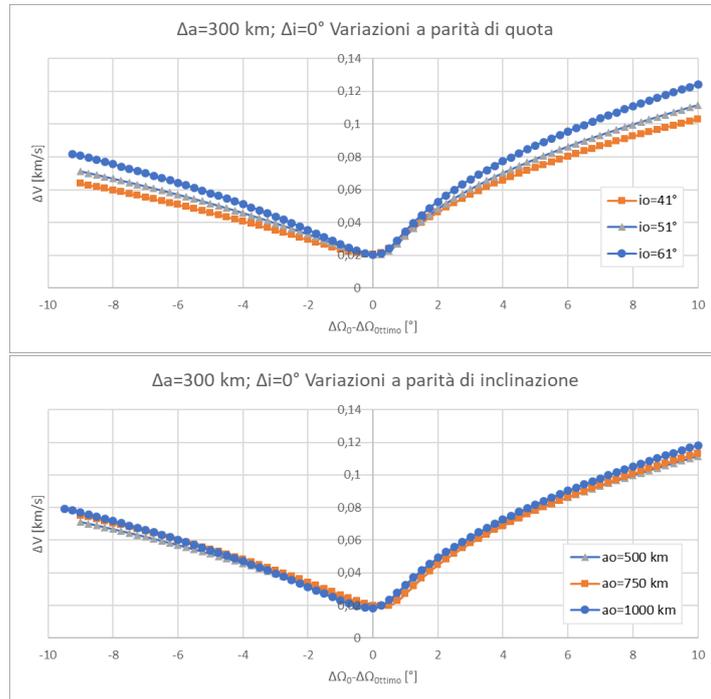


Figura 3.78: Confronto per manovre con  $\Delta a = 300km$

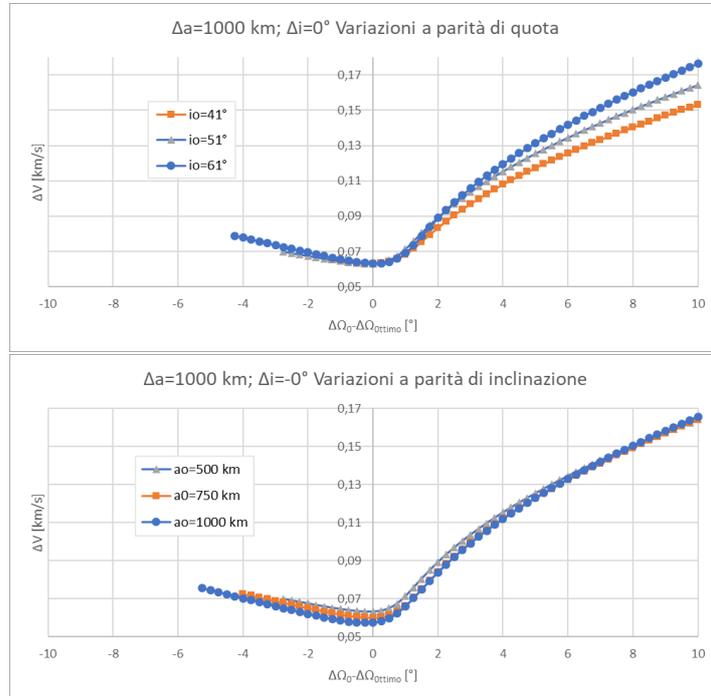


Figura 3.79: Confronto per manovre con  $\Delta a = 1000km$

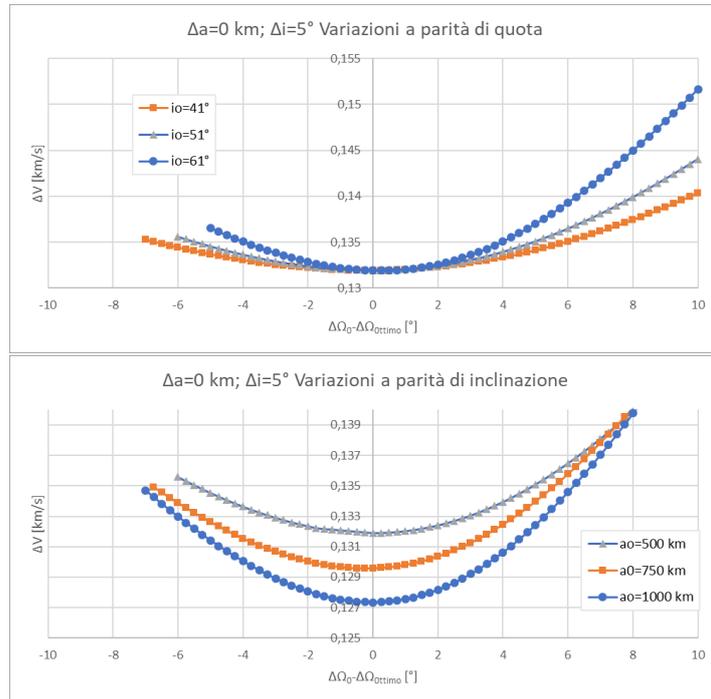


Figura 3.80: Confronto per manovre con  $\Delta i = 5^\circ$

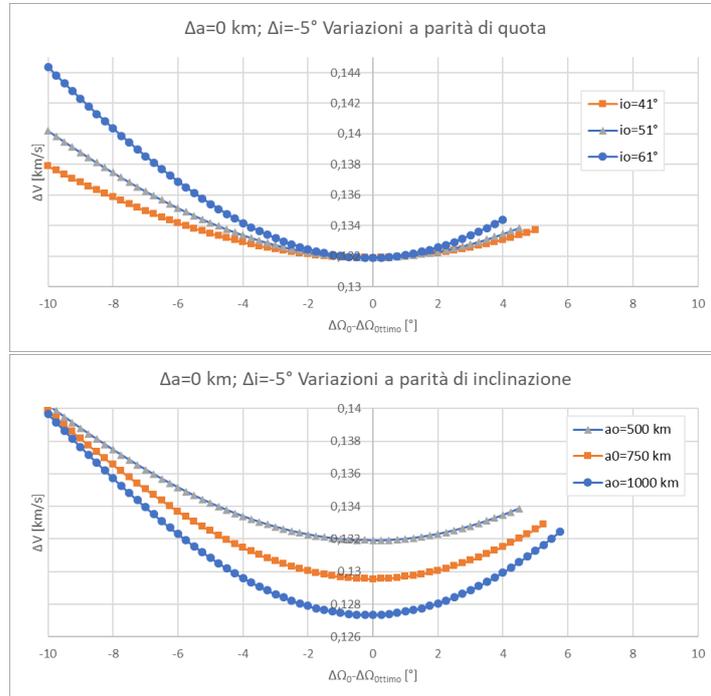


Figura 3.81: Confronto per manovre con  $\Delta i = -5^\circ$

### 3.3.4 Conclusioni

Sono state prese in considerazione manovre con differenti condizioni iniziali. Il primo confronto è stato realizzato tra manovre con variazioni  $\Delta a = 0; \Delta i = 0$ , in questa condizione il punto di minimo  $\Delta V$  rimane costante variando le condizioni iniziali, in quanto esso ha valore nullo poichè l'orbita di partenza e di arrivo coincidono. Nel caso di orbite sfasate il costo della manovra aumenta all'aumentare sia di  $a_0$  che di  $i_0$ , questo effetto si manifesta a livello grafico attraverso un restringimento delle curve ed è una conseguenza dell'allungamento dei tempi di manovra dovuti alle minori perturbazioni presenti.

Nel caso di variazioni non nulle di  $\Delta a = 0$  e  $\Delta i = 0$  è stata individuata una fascia di  $\Delta\Omega_0$  di convenienza, dove aumentando la quota si riesce a effettuare la manovra con un minore  $\Delta V$ . Il valore di minimo  $\Delta V$  non varia al variare di  $i_0$ , mentre diminuisce all'aumentare di  $a_0$ .

Nell'ultimo confronto sono stati evidenziati gli effetti della variazione delle condizioni iniziali sul  $\Delta\Omega_{ottimo}$ .

## 3.4 Andamento Parametri Orbitali per Condizioni Iniziali Differenti

In maniera analoga a quanto visto nella sezione 3.2 sono stati analizzati gli andamenti dei parametri orbitali nel tempo in specifiche manovre per poter giustificare i diversi comportamenti delle curve riportate in precedenza.

I casi presi in considerazione sono stati:

$a_0$ [km]	$i_0$ [°]	$\Delta a$ [km]	$\Delta i$ [°]	$\Delta\Omega$ [°]
500; 1000	51	0	0	2; 10
500; 1000	51	0	3	0; 10
500; 1000	51	0	-3	0; 10

Tabella 3.11: Manovre caratteristiche considerate

Per il primo compito sono stati utilizzati i programmi *edelbaumj2* ed *edelbaumj2-1000*, il quale rappresenta lo stesso programma, ma con condizioni iniziali di quota pari a 1000km. La validità dei calcoli è stata verificata mediante il confronto del  $\Delta V$  calcolato con quello ottenuto nel “database”. Sono state graficate in funzione del tempo: quota, inclinazione e  $\dot{\Omega}$  con  $\dot{\Omega}_T$ .

Le manovre con  $\Delta a = 0$ ,  $\Delta i = 0$  e  $\Delta\Omega_0 = 0$  non hanno permesso un confronto in quanto non è stato possibile effettuare il calcolo. Solo per questo caso sono stati considerati i punti con  $\Delta\Omega_0 = 2^\circ$ .

Per un confronto uniforme delle quote è stato necessario sottrarre a ogni valore il suo valore iniziale, quindi  $a_i(t) = a(t) - a_0$ .

I confronti sono stati suddivisi in tre parti, a seconda del tipo di manovra.

### Premessa teorica

A livello teorico viene presa in considerazione la relazione della variazione di  $\Omega$  nel tempo dovuta alle perturbazioni:

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} J_2 \sqrt{\mu} R_E^2 a^{-7/2} \cos i = -k \left( \frac{\mu}{a} \right)^{7/2} \cos i \quad (3.8)$$

Ciò permette di osservare la dipendenza del  $\cos i$  e di  $a$  sulla perturbazione, la variazione globale di  $\Omega$  può essere vista come somma dei singoli effetti dovuti alla variazione di semiasse e di inclinazione:

$$\dot{\Omega}_{J_2} \propto \frac{\cos i}{a^{7/2}} \quad (3.9)$$

$$d\dot{\Omega}_{J_2} = \left( \frac{d\dot{\Omega}}{da} da + \frac{d\dot{\Omega}}{di} di \right) \quad (3.10)$$

$$\frac{d\dot{\Omega}_{J_2}}{da} \propto -\frac{\cos i}{a^{9/2}} \frac{7}{2} da; \quad \frac{d\dot{\Omega}_{J_2}}{di} \propto -\frac{\sin i}{a^{7/2}} \quad (3.11)$$

Le ultime due relazioni mostrano l'importanza della quota e dell'inclinazione iniziale nella convenienza delle manovre. L'obiettivo è massimizzare, in base alle condizioni iniziali, la variazione di  $\Omega$ .

Nel caso di basse inclinazioni si osserva un contributo dovuto all'inclinazione,  $\frac{d\dot{\Omega}}{di}$ , basso o addirittura nullo nel caso di  $i_0 = 0^\circ$ . Variare l'inclinazione in queste condizioni sarà più costoso e meno efficace, ciò porta ad avere una maggiore variazione del parametro orbitale  $a$ . La trattazione in base alla quota viene effettuata introducendo il legame di proporzionalità tra la velocità e il semiasse:

$$\frac{da}{a} = 2 \frac{dv}{v} \Rightarrow v \propto a^{-1/2} \Rightarrow \frac{da}{dv} = 2a^{3/2} \quad (3.12)$$

Il cambio di piano ha un costo minore a quote più alte, in quanto le velocità sono più basse e di conseguenza è minore il costo necessario per ruotare il vettore velocità. In presenza della perturbazione J2, tuttavia è possibile sfruttare le perturbazioni per cambiare il piano e quindi vi è convenienza nell'operare a quote basse

$$\frac{d\dot{\Omega}_{J_2}}{dv} = \frac{d\dot{\Omega}_{J_2}}{da} \frac{da}{dv} \propto a^{-5/2} a^{3/2} = a^{-1} \quad (3.13)$$

Quote differenti portano alla conseguenza di ratei di avvicinamento tra le orbite differenti. A bassa quota le perturbazioni sono più intense, in caso di situazione favorevole, in termini di segno di  $\Delta\Omega_0$  le due orbite si avvicinano più rapidamente. A quote più alte l'effetto si attenua e i tempi di manovra si allungano, questo porta a un maggiore costo  $\Delta V$ . Nonostante ciò, in situazioni di  $\Delta\Omega_0$  favorevoli, è presente una zona di costo inferiore rispetto al caso di orbite basse, questa zona è una conseguenza delle minori perturbazioni presenti ad alta quota e di condizioni di avvicinamento tra i piani particolarmente favorevoli.

### 3.4.1 Manovre a variazioni nulle

$a_0$ [km]	$i_0$ [°]	$\Delta a$ [km]	$\Delta i$ [°]	$\Delta\Omega$ [°]	$\Delta V$ [km/s]	Tempo [giorni]
500	51	0	0	2	0,0313	4,296
1000	51	0	0	2	0,0325	4,459
500	51	0	0	10	0,0876	12,017
1000	51	0	0	10	0,0955	13,111

Tabella 3.12: Confronto costi e durate variazioni nulle

La prima manovra analizzata è stata quella a variazione di semiasse e inclinazione nulla. Lo studio è stato effettuato su quattro punti caratteristici, l'obiettivo è stato quello di osservare i cambiamenti dovuti alla variazione della quota iniziale e del  $\Delta\Omega_0$  tra le due orbite. In questo primo caso si osservano andamenti simili nei diagrammi di semiasse e inclinazione. Le due manovre a costo maggiore prevedono una escursione più grande dei due valori. La manovra effettuata a quota iniziale 1000 km risulta sempre più costosa del caso 500 km, anche se a  $\Delta\Omega_0 = 2^\circ$  le differenze tra i due casi sono molto piccole, esse si amplificano operando a  $\Delta\Omega_0 = 10^\circ$ . Viene confermato il discorso della concavità della curva del semiasse per  $\Delta\Omega_0 > 0$  visto nella sezione 3.2.

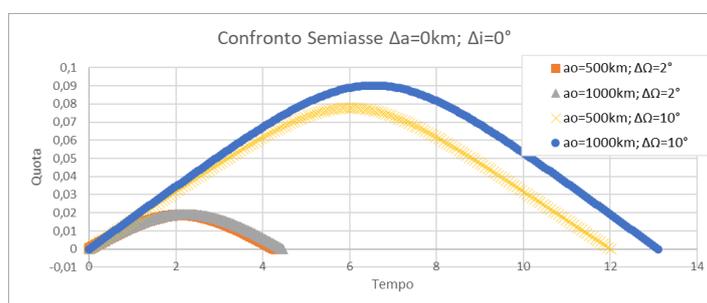


Figura 3.82: Andamento del semiasse nelle manovre

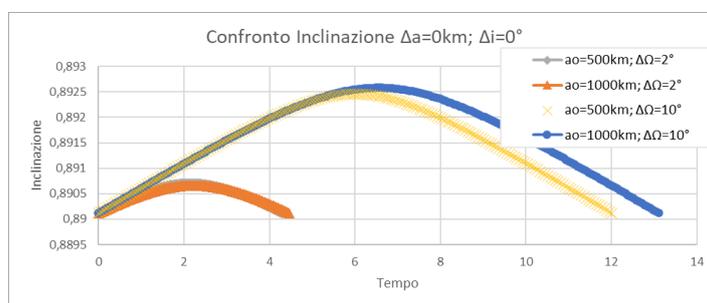


Figura 3.83: Andamento dell'inclinazione nelle manovre

### 3.4.2 Manovre con variazione di inclinazione positiva

$a_0$ [km]	$i_0$ [°]	$\Delta a$ [km]	$\Delta i$ [°]	$\Delta\Omega$ [°]	$\Delta V$ [km/s]	$Tempo$ [giorni]
500	51	0	3	0	0,0803	11,023
1000	51	0	3	0	0,0774	10,625
500	51	0	3	10	0,1162	15,948
1000	51	0	3	10	0,123	16,739

Tabella 3.13: Confronto costi e durate variazioni positive

Nel diagramma della sezione precedente è stato osservato che, per variazioni non nulle, esiste un intervallo di  $\Delta\Omega_0$  entro il quale conviene operare a quote più alte. Sono state analizzate due manovre, la prima con variazione di inclinazione positiva, per giustificare questo andamento.

Nel diagramma di variazione del semiasse si nota una differenza di andamento rispetto al caso con variazione nulla, la curva relativa al caso 1000km a  $\Delta\Omega_0 = 0^\circ$  risulta essere più bassa di quella con  $a_0 = 500km$ . Questa differenza si riflette sul costo e sul tempo della manovra con  $a_0 = 1000km$   $\Delta\Omega_0 = 0^\circ$ , i quali sono inferiori rispetto alla manovra  $a_0 = 500km$ .

Il caso  $\Delta\Omega_0 = 10^\circ$  risulta uguale al caso precedente.

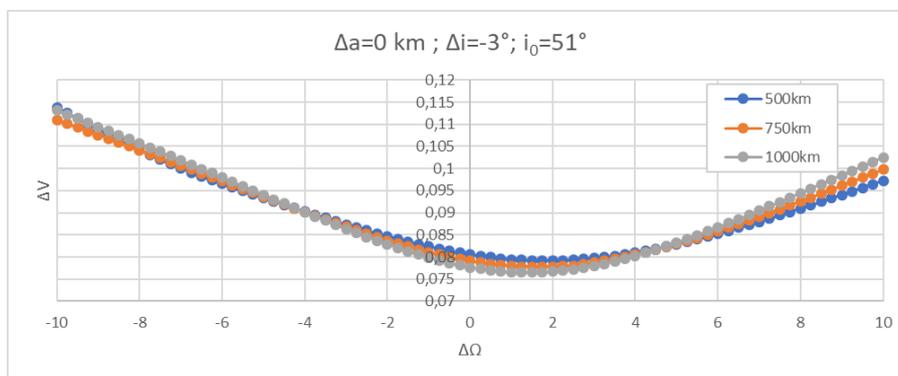


Figura 3.84: Andamento del costo con inclinazione iniziale costante

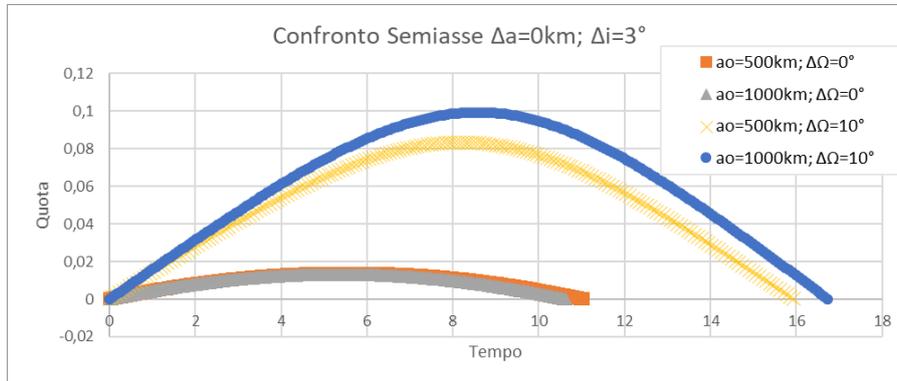


Figura 3.85: Andamento del semiassse nelle manovre

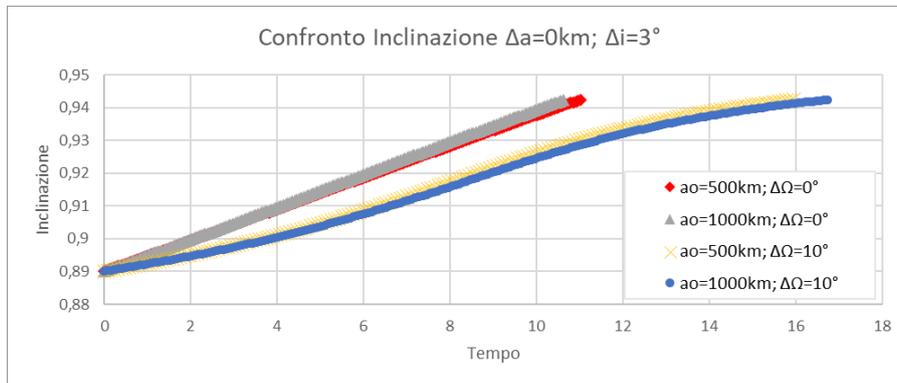


Figura 3.86: Andamento dell'inclinazione nelle manovre

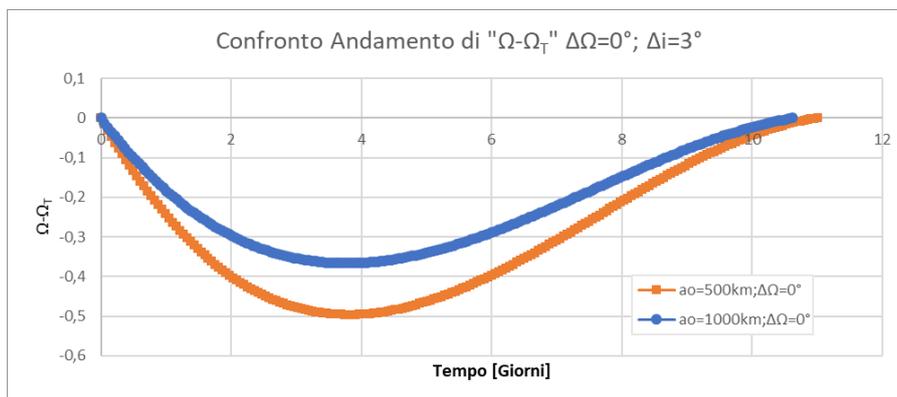
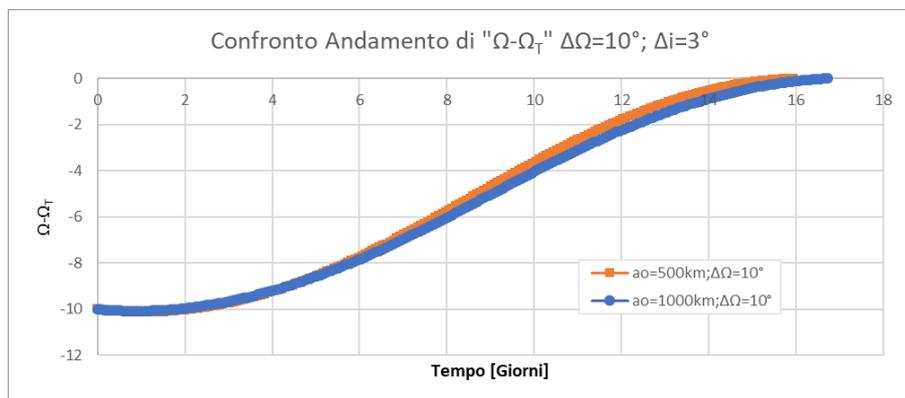


Figura 3.87: Confronto  $\Omega - \Omega_T$  per  $\Delta\Omega_0 = 0^\circ$

Figura 3.88: Confronto  $\Omega - \Omega_T$  per  $\Delta\Omega_0 = 10^\circ$ 

### 3.4.3 Manovre con variazione di inclinazione negativa

$a_0$ [km]	$i_0$ [°]	$\Delta a$ [km]	$\Delta i$ [°]	$\Delta\Omega$ [°]	$\Delta V$ [km/s]	Tempo [giorni]
500	51	0	-3	0	0,0806	11,058
1000	51	0	-3	0	0,0777	10,658
500	51	0	-3	10	0,0972	13,347
1000	51	0	-3	10	0,1025	14,071

Tabella 3.14: Confronto costi e durate variazioni negative

La manovra con variazione di inclinazione negativa prevede lo stesso andamento del caso precedente, sarà quindi sempre presente la fascia di convenienza per valori di  $|\Delta\Omega_0|$  bassi. Particolarità di questo caso è la differenza di concavità, visibile nel diagramma del semiasse e in quello di  $\Omega - \Omega_T$ , tra le manovre effettuate a  $\Delta\Omega_0$  diversi.

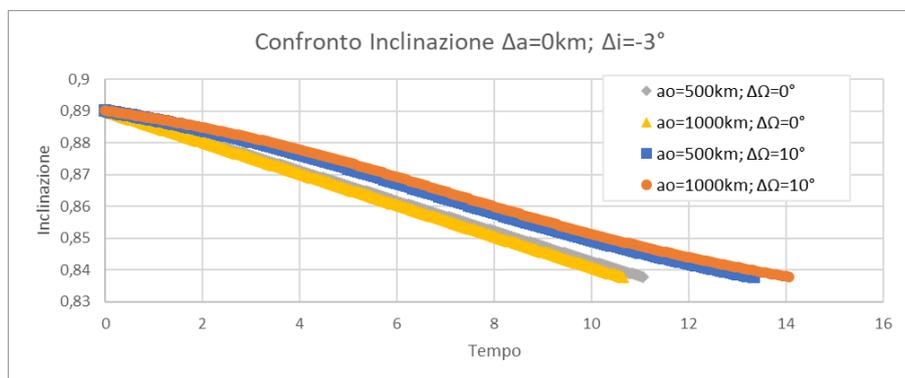


Figura 3.90: Andamento dell'inclinazione nelle manovre

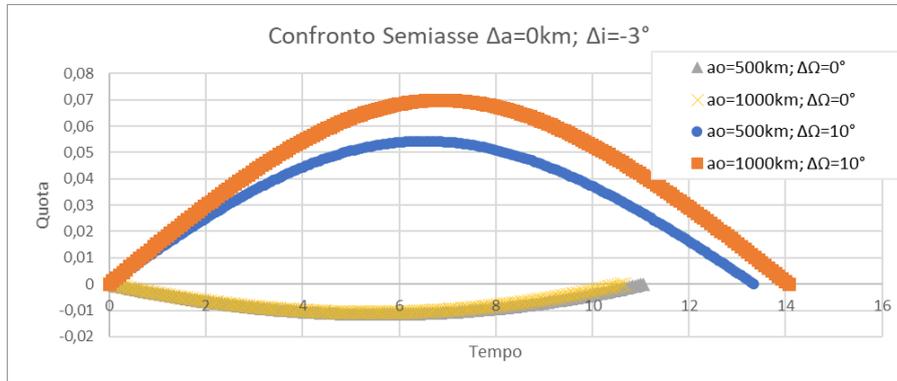


Figura 3.89: Andamento del semiassse nelle manovre

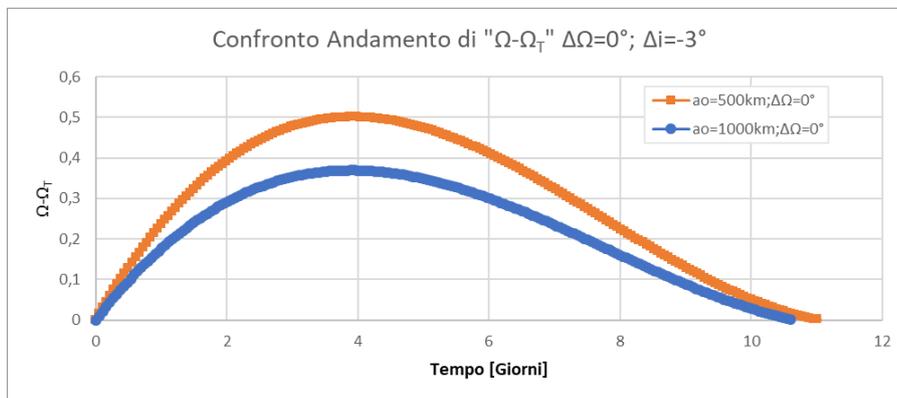


Figura 3.91: Confronto  $\Omega - \Omega_T$  per  $\Delta\Omega_0 = 0^\circ$

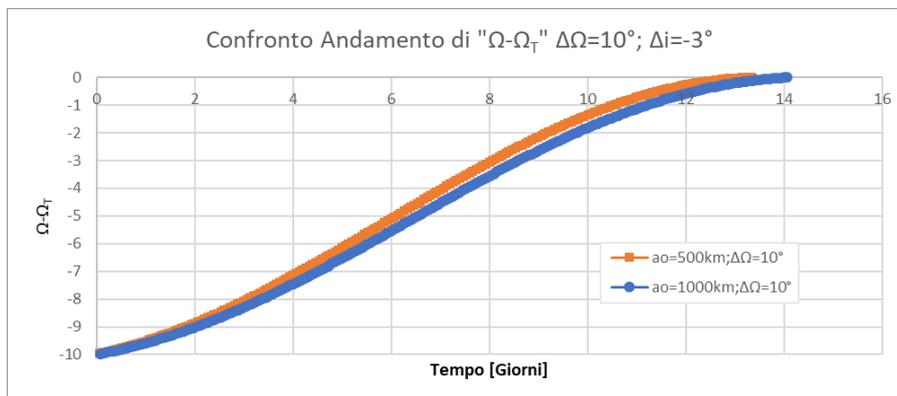


Figura 3.92: Confronto  $\Omega - \Omega_T$  per  $\Delta\Omega_0 = 10^\circ$

### 3.4.4 Effetti grandezze su $\Omega$ e $\Omega_T$

Le curve relative a  $\Omega$  e  $\Omega_T$ , determinate in questa sezione, sono state raccolte in due diagrammi, in modo tale da apprezzare gli effetti delle variazioni delle grandezze.

Nel diagramma relativo a  $\Omega_T$ , l'aumento di  $\Delta\Omega_0$  (a parità di manovra) comporta una traslazione verticale della curva, non si hanno variazioni della sua pendenza.

Una variazione positiva di inclinazione porta a una diminuzione di pendenza, rispetto al caso con variazione nulla, viceversa si osserva un aumento di pendenza per variazioni negative.

Nel diagramma relativo a  $\Omega$  si osserva un effetto relativo al  $\Delta\Omega_0$ : un suo aumento, a parità di manovra, comporta una diminuzione della pendenza della curva. La variazione delle altre grandezze porta agli stessi comportamenti osservati nel diagramma precedente.

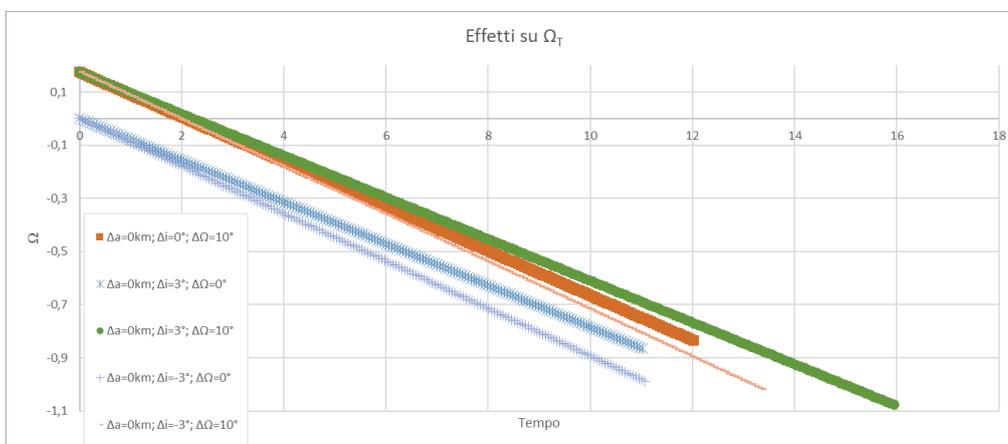


Figura 3.93: Effetti delle diverse manovre sulla pendenza di  $\Omega_T$

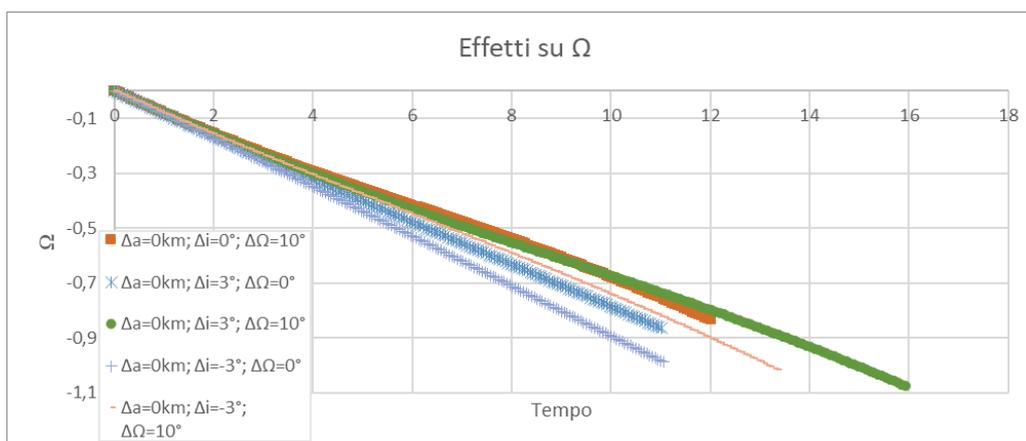


Figura 3.94: Effetti delle diverse manovre sulla pendenza di  $\Omega$

### 3.4.5 Conclusioni

Sono stati considerati gli andamenti dei parametri orbitali per due quote iniziali diverse, 500 km e 1000 km e per valori diversi di  $\Delta\Omega_0$ . Questi ultimi sono stati scelti in modo tale da analizzare il comportamento dei parametri sia nell'intervallo dove l'aumento di quota provoca un abbassamento del costo  $\Delta V$  che in quello dove l'aumento di quota provoca un aumento del costo.

Il caso con variazioni nulle non ha permesso di evidenziare la fascia di convenienza, ma solo l'effetto dovuto alla variazione di  $\Delta\Omega_0$ , all'aumentare di questo parametro le due orbite sono più sfasate, è quindi necessario più tempo per poter farle coincidere.

Nel caso di variazioni non nulle la manovra effettuata a quota più alta risulta conveniente per  $\Delta\Omega_0$  bassi, per effetto delle minori perturbazioni.

Il confronto dei valori di  $\Omega_T$  ha permesso di notare come, a parità di  $\Delta\Omega_0$ , una variazione di inclinazione positiva porti a pendenze minori, mentre una negativa a pendenze maggiori. A parità di  $\Delta i$ , le curve hanno una pendenza minore se realizzate a  $\Delta\Omega_0$  maggiori. Analoghi comportamenti sono stati osservati nel diagramma relativo a  $\Omega$ .

## 3.5 Analisi Inclinazioni Iniziali

$a_0$ [km]	$i_0$ [°]	$\Delta a$ [km]	$\Delta i$ [°]	$\Delta\Omega$ [°]
500	10; 80	0	0	2; 10
500	10; 80	0	3	0; 10
500	10; 80	0	-3	0; 10

Tabella 3.15: Punti caratteristici considerati

Sono stati analizzati tre ulteriori casi relativi a manovre effettuate a inclinazioni iniziali molto diverse tra loro, in modo tale da osservare l'effetto della grandezza nella relazione vista in precedenza:

$$\dot{\Omega} = \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} \left( \frac{R_{terra}}{p} \right)^2 n J_2 \cos(i) \quad (3.14)$$

Per il secondo studio, relativo all'analisi dei parametri orbitali, sono stati creati due programmi appositi: *edelbaumj2 - i10* ed *edelbaumj2 - i80*. Non avendo a disposizione un database è stato necessario costruirne uno nuovo con il *cedj2*. Grazie a questa nuova lista di valori è stato possibile effettuare dei confronti tra i costi delle manovre realizzate a  $i_0=10^\circ$  e  $i_0=80^\circ$ .

Indipendentemente dal valore della variazione, è stato osservato un andamento quasi costante operando con inclinazioni iniziali di  $10^\circ$ . Le manovre con  $i_0=80^\circ$  hanno un intervallo di variazione del costo maggiore. Queste ultime manovre risultano inoltre sempre più costose del caso  $i_0=10^\circ$ . Questo comportamento è giustificato dalla diversa durata della manovra, con perturbazioni minori si hanno tempi più lunghi e quindi  $\Delta V$  maggiori.

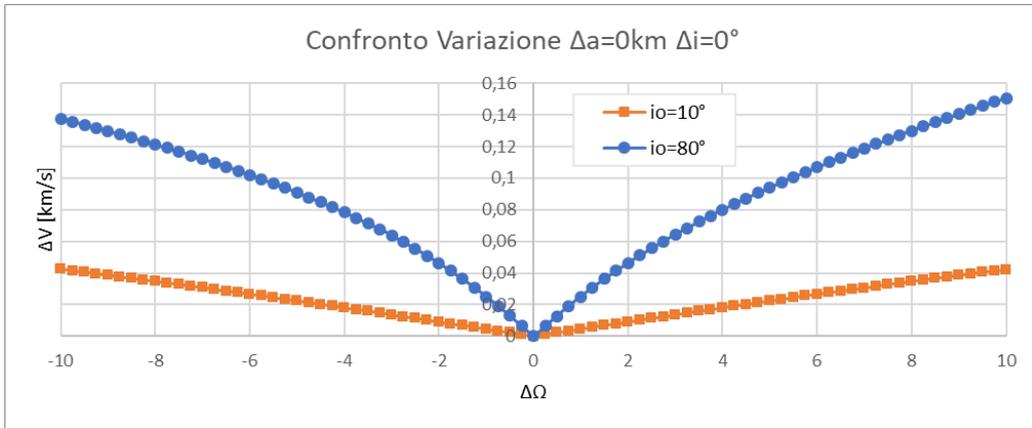


Figura 3.95: Andamento del costo per variazioni nulle

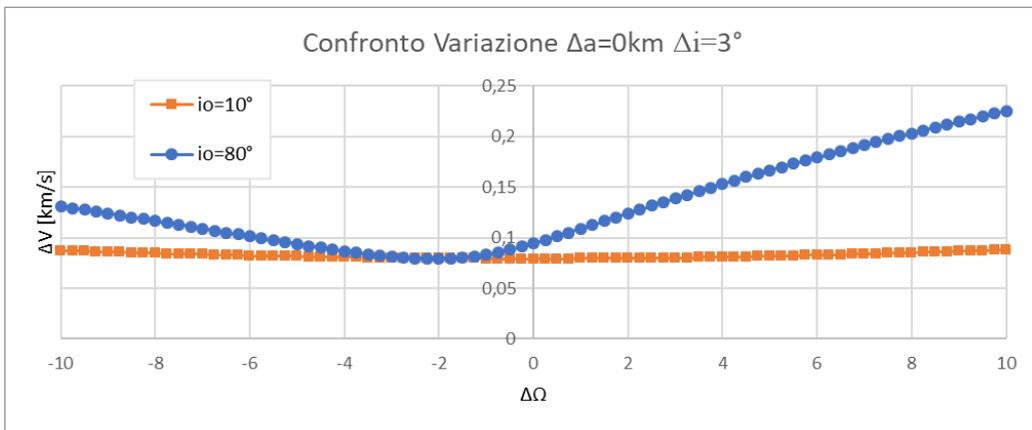


Figura 3.96: Andamento del costo per variazioni positive

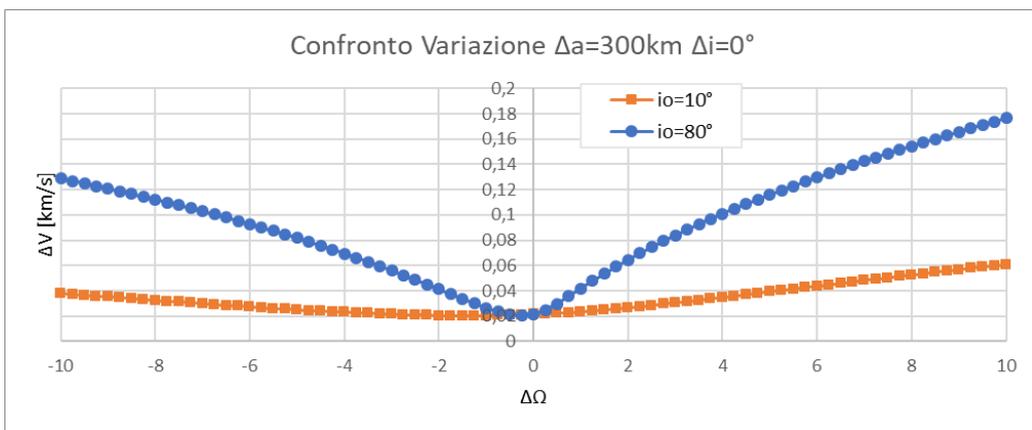


Figura 3.97: Andamento del costo per variazioni negative

### 3.5.1 Analisi intervallo inclinazione

L'ultima fase del lavoro ha previsto l'analisi delle manovre in un range più ampio di  $i_0$ , da  $1^\circ$  a  $85^\circ$ .

I dati relativi alla variazione di inclinazione e semiasse sono stati raccolti nei diagrammi 3.99 e 3.100. Il diagramma relativo alla variazione di inclinazione durante la manovra prevede un progressivo aumento dell'intervallo di variazione all'aumentare di  $i_0$ , mentre la variazione del semiasse non presenta lo stesso andamento.

Questo comportamento viene giustificato tramite le relazioni viste in precedenza:

$$\dot{\Omega}_{J2} \propto \frac{\cos i}{a^{7/2}}$$

$$d\dot{\Omega}_{J2} = \left( \frac{d\dot{\Omega}}{da} da + \frac{d\dot{\Omega}}{di} di \right)$$

$$\frac{d\dot{\Omega}_{J2}}{da} \propto -\frac{\cos i}{a^{9/2}} \frac{7}{2} da; \quad \frac{d\dot{\Omega}_{J2}}{di} \propto -\frac{\sin i}{a^{7/2}}$$

In questo caso la quota iniziale è costante, quindi si lavora solo su  $i_0$ , l'obiettivo è quello di ottimizzare i due termini nella relazione precedente, in modo tale da ottenere una grande variazione di  $\Omega$  in maniera efficace, per piccoli valori di  $i_0$  risulta preferibile agire sulla variazione del semiasse, in quanto il contributo dell'inclinazione dipende dal  $\sin i$ . Discorso inverso per alte inclinazioni.

L'evoluzione delle curve del diagramma 3.100 è dovuta alla maggiore durata della manovra all'aumentare di  $i_0$ , ciò porta a un picco più alto delle curve fino al valore di  $i_0 = 70^\circ$ , oltre questo valore si ha una progressiva diminuzione di questo picco, in quanto risulta più efficace variare  $\Omega$  sfruttando la variazione di inclinazione, piuttosto che quella del semiasse.

Il confronto relativo all'andamento della pendenza di  $\Omega_T$ , al variare di  $i_0$ , ha permesso di confermare la relazione teorica di inizio sezione 3.14. All'aumentare dell'inclinazione iniziale si osserva una progressiva diminuzione della pendenza della curva, segno delle minori perturbazioni presenti.

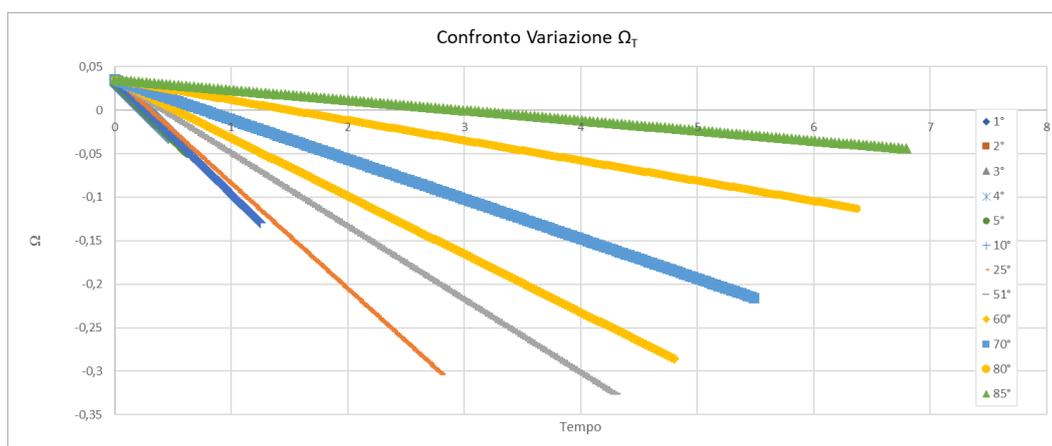


Figura 3.98: Variazione della pendenza di  $\Omega_T$  al variare di  $i_0$

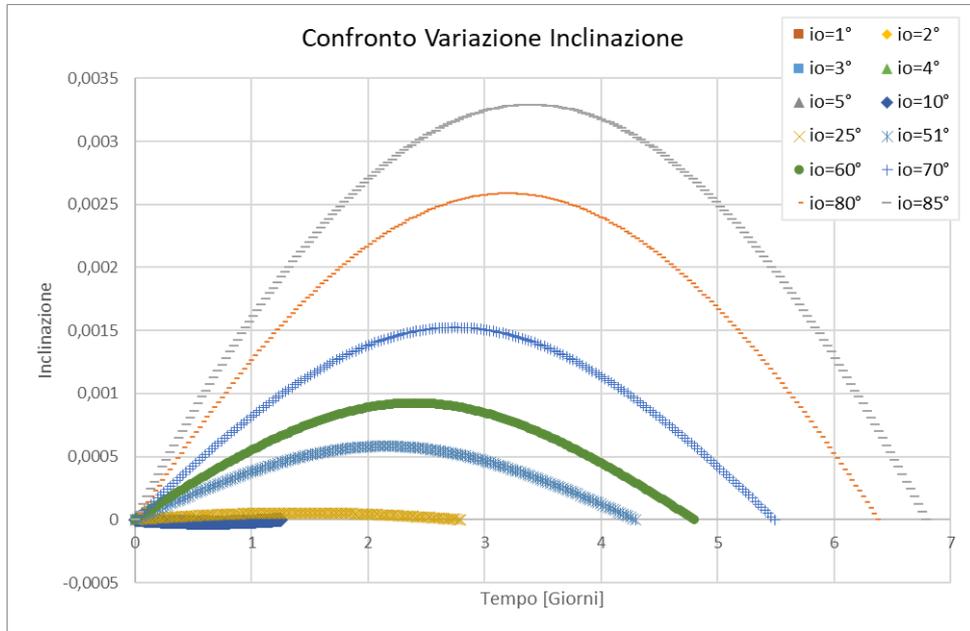


Figura 3.99: Variazione dell'inclinazione al variare di  $i_0$

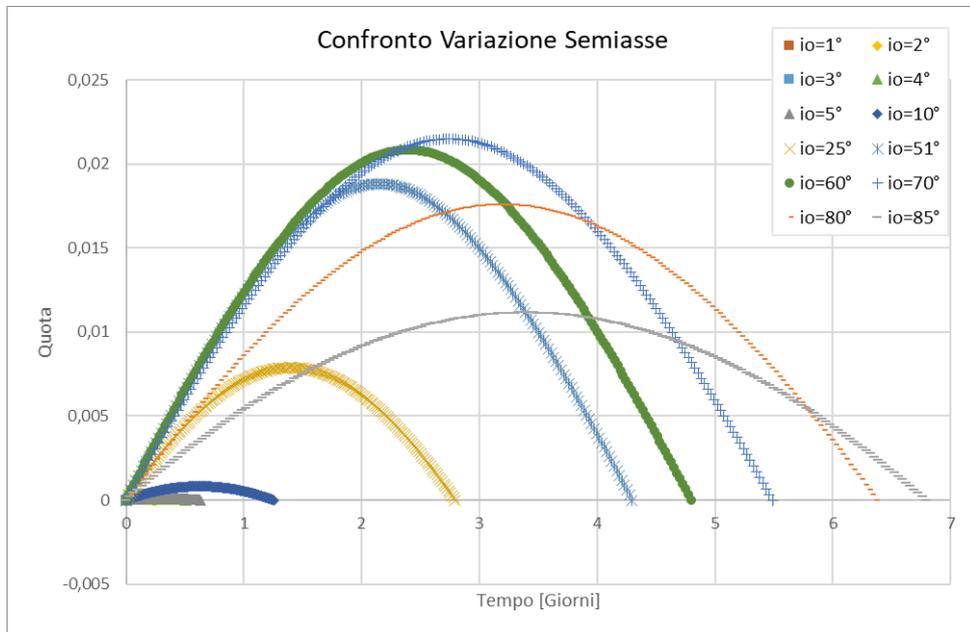


Figura 3.100: Variazione del semiasse al variare di  $i_0$

### 3.5.2 Conclusioni

In questa ultima fase sono state analizzate manovre con condizioni iniziali di inclinazione molto diverse tra loro. Nella prima parte sono stati confrontati i costi delle manovre a  $i_0=10^\circ$  e  $i_0=80^\circ$ , nel primo caso esse sono state realizzate con maggiori effetti di perturbazione rispetto al secondo caso. Il costo delle manovre a  $i_0=10^\circ$  è risultato essere sempre minore o pari al caso  $i_0=80^\circ$ .

Nella seconda parte sono stati analizzati gli andamenti dei parametri orbitali durante le manovre considerando l'intervallo di inclinazioni iniziali da  $1^\circ$  a  $85^\circ$ . L'aumento di  $i_0$  ha portato ad un aumento del tempo di manovra, di conseguenza è aumentata anche la variazione temporanea dell'inclinazione. Il diagramma relativo alla variazione del semiasse ha mostrato un'evoluzione non progressiva all'aumentare di  $i_0$ , le manovre per  $i_0=80^\circ;85^\circ$  hanno richiesto una variazione minore di quota rispetto alle manovre con  $i_0$  leggermente inferiori.

## 3.6 Considerazioni Conclusive

La tesi ha analizzato delle manovre di trasferimento con propulsione elettrica tra orbite LEO circolari in presenza della perturbazione dovuta a J2. La fase di analisi è stata suddivisa in una prima parte relativa agli andamenti complessivi del costo  $\Delta V$  e della durata per un certo intervallo di  $\Delta\Omega_0$  e una seconda parte relativa al comportamento dei parametri orbitali durante le singole manovre. Nella prima parte del lavoro sono state utilizzate condizioni iniziali di quota e inclinazione fisse, lo studio è stato poi ripetuto variando queste condizioni.

Nel problema sono stati considerati gli effetti della perturbazione relativa alla non sfericità e non omogeneità della Terra, in particolare quelli relativi all'armonica J2. Nella singola manovra il cambiamento di  $\Omega$  è stato più o meno favorito dalle diverse intensità di perturbazione, le quali possono portare ad un avvicinamento o allontanamento delle due orbite. Questa variazione di intensità è stata realizzata anche attraverso la variazione temporanea dei parametri orbitali del semiasse  $a$  e dell'inclinazione  $i$ , a seconda dei casi è stata osservata una diversa variazione dell'uno rispetto all'altro, comportamento visibile dalle relazioni di Edelbaum in quanto la variazione di  $\Omega$  rispetto alla variazione di quota e inclinazione dipende dalle condizioni iniziali in cui viene svolta. A bassi valori di  $a_0$  e  $i_0$  si osserva una variazione in misura maggiore del semiasse, ad alte  $i_0$  una maggiore variazione temporanea della inclinazione.

Nel terzo capitolo sono stati riportati e commentati i risultati ottenuti dalle varie analisi. Nella prima sezione sono state analizzate manovre con condizioni iniziali fisse. Sono stati evidenziati intervalli di  $\Delta\Omega_0$  favorevoli per effettuare una manovra con variazione di quota, a livello grafico questo intervallo si manifesta attraverso un addensamento delle curve relative a manovre diverse. Nel caso di manovre con variazione di inclinazione si perde l'importanza del tempo, in quanto le curve mostrano un andamento più lineare. Sono stati, inoltre, evidenziati i vantaggi che si hanno realizzando manovre combinate.

Nella seconda sezione sono stati presi in considerazione gli andamenti dei parametri orbitali per alcune manovre caratteristiche. Il costo di una manovra è legato alla sua durata, la quale dipende anche dal rateo di avvicinamento delle due orbite, per questo motivo gli andamenti del costo sono risultati analoghi a quelli della durata. Durante le manovre sono state visualizzate variazioni temporanee di quota e inclinazione, in misura diversa in base alla richiesta della variazione di orbita. La concavità di queste curve di variazione dipende dai valori di  $\Delta a$  e  $\Delta i$  e dal  $\Delta\Omega_0$  utilizzato, il quale rappresenta la condizione di anticipo o ritardo dell'orbita di partenza rispetto a quella di arrivo. Queste due condizioni hanno permesso la definizione di situazioni favorevoli o sfavorevoli in termini di  $\Delta V$ . Sono stati realizzati confronti tra le varie manovre in modo tale da esaminare le varie combinazioni possibili di variazioni, infine sono stati approfonditi gli effetti di sfasamento tra le orbite, all'aumentare del quale i diagrammi hanno mostrato un aumento del tempo di manovra e di conseguenza una maggiore variazione temporanea di quota e inclinazione. Queste due grandezze hanno presentato un comportamento analogo al variare del  $\Delta\Omega_0$ .

Nella terza e nella quarta sezione sono state effettuate analisi analoghe ai casi precedenti, ma considerando le variazioni delle condizioni iniziali  $a_0$  e  $i_0$ . Nel caso di variazioni nulle, quindi con orbite solamente sfasate tra loro, l'aumento di  $a_0$  e  $i_0$  ha portato un aumento del costo, mentre nel caso di variazioni non nulle è stata visualizzata una zona di costo minore. L'andamento di questa fascia di convenienza è stata analizzata in un paragrafo a parte, il quale ha permesso di evidenziare il comportamento del punto di ottimo, corrispondente al minimo costo, al variare delle condizioni iniziali.

Lo scopo dell'ultima parte del lavoro è stato quello di visualizzare gli andamenti dei costi al variare dell'inclinazione iniziale  $i_0$  per un intervallo di valori più ampio rispetto al caso precedente, da  $1^\circ$  a  $85^\circ$ . I risultati sono stati analoghi, con un aumento del costo all'aumentare di  $a_0$  e  $i_0$ , tuttavia i diagrammi di confronto dei parametri orbitali hanno permesso di evidenziare un comportamento diverso tra l'inclinazione e il semiasse.

Nel corso del lavoro è stato realizzato un database delle manovre, il quale potrebbe essere in futuro utilizzato per la creazione di una ipersuperficie con  $a_0; i_0; \Delta a; \Delta i; \Delta\Omega_0$  in grado di approssimare il valore di  $\Delta V$ . Un secondo futuro sviluppo del lavoro potrebbe essere legato alla implementazione, nel calcolo, della possibilità di arresto temporaneo della spinta. Una terza possibilità è legata alla ripetizione dell'analisi per orbite retrograde.

# Bibliografia

- [1] J.D. Aziz, J. S. Parker, D. J. Scheeres, and J. A. Englander. Low-thrust many-revolution trajectory optimization via differential dynamic programming and a sundman transformation. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 65(2):205–228, 2018.
- [2] M.M. Castronuovo. Active space debris removal—a preliminary mission analysis and design. *Acta Astronautica*, 69(9-10):848–859, 2011.
- [3] M. Cerf. Low-thrust transfer between circular orbits using natural precession. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 39(10):2232–2239, 2016.
- [4] H. D. Curtis. *Orbital mechanics for engineering students*. Elsevier aerospace engineering series. Butterworth-Heinemann, Amsterdam, 2nd ed. edition, 2010.
- [5] T. N. Edelbaum. Propulsion requirements for controllable satellites. *ARS Journal*, 31(8):1079–1089, 1961.
- [6] J.-C. Liou, N. L. Johnson, and N. M. Hill. Controlling the growth of future leo debris populations with active debris removal. *Acta Astronautica*, 66(5-6):648–653, 2010.
- [7] H. Shen, T. Zhang, L. Casalino, and D. Pastrone. Optimization of active debris removal missions with multiple targets. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 55(1):181–189, 2018.
- [8] D. A. Vallado and W. D. McClain. *Fundamentals of astrodynamics and applications*. Space technology series. McGraw-Hill Companies, Inc, New York, 1997.