

# POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale  
in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

## Propellant estimations for small low-thrust missions to near-Earth asteroids



**Relatore**  
Prof. Lorenzo Casalino

**Candidato**  
Alessandro Bosa

A.A. 2018/19

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>8</b>
1.1	Introduzione agli asteroidi . . . . .	9
1.1.1	Asteroidi near-Earth . . . . .	11
1.2	Importanza di missioni verso asteroidi . . . . .	12
1.2.1	Definizione del rischio . . . . .	13
1.2.2	Mitigazione del pericolo . . . . .	14
1.2.3	Missioni verso asteroidi near-Earth . . . . .	16
1.3	Profilo di missione . . . . .	20
1.4	Modelli di calcolo . . . . .	21
1.4.1	Trasferta a tre impulsi . . . . .	22
1.4.2	Lambert . . . . .	24
1.4.3	Nuclear Electric Propulsion (NEP) . . . . .	24
1.4.4	Solar Electric Propulsion (SEP) . . . . .	25
<b>2</b>	<b>La teoria del modello</b>	<b>26</b>
2.1	Approssimazione di Edelbaum . . . . .	26
2.2	Riformulazione del problema di Edelbaum mediante la teoria del controllo ottimale . . . . .	29
2.2.1	Leggi di controllo ottimale . . . . .	30
2.2.2	Leggi di controllo subottimale . . . . .	31
2.3	Modello a consumo minimo . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Metodologia e procedura</b>	<b>37</b>
3.1	Ripartizioni di $\Delta a$ e $\Delta e$ fra le manovre principali . . . . .	37
3.1.1	Metodo A . . . . .	38
3.1.2	Metodo B . . . . .	40
3.2	Ripartizione di $\Delta i$ fra le manovre principali . . . . .	43
3.3	Implementazione del modello . . . . .	44
3.4	Valutazione dello sfasamento e correzioni del $\Delta V$ . . . . .	47
3.4.1	Soluzione per spinta continua . . . . .	48
3.4.2	Soluzione per archi propulsi alternati a fasi di coasting . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Risultati e confronti</b>	<b>51</b>
4.1	Risultati spinta continua . . . . .	51
4.2	Variazione d'inclinazione . . . . .	55

4.3	Confronto dei risultati al variare del numero di archi . . . . .	64
4.4	Confronto con diverse ripartizioni di $\Delta a$ e $\Delta e$ . . . . .	68
4.5	Confronto con il modello SEP . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>78</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>79</b>

# Elenco delle figure

1.1	Numero di asteroidi della fascia principale in funzione del loro semiasse maggiore. . . . .	10
1.2	Eccentricità ed inclinazione degli asteroidi della fascia principale al variare della distanza dal Sole. Il rosso rappresenta gli asteroidi della regione centrale, il blu tutti gli altri. . . . .	11
1.3	Disegno . . . . .	14
1.4	Orbita dell'asteroide Didymos e dei pianeti nelle vicinanze. . . . .	17
1.5	Spinta massima ed impulso specifico al variare della distanza dal Sole per il modello SEP. Sui grafici vengono evidenziati i valori corrispondenti al momento della partenza, ovvero ad $r = 1$ UA. . . . .	21
1.6	Spinta massima al variare della distanza dal Sole per il modello SEP e per il modello approssimato. . . . .	22
2.1	Angolo nel piano $\alpha$ in funzione della longitudine relativa $\theta - \theta_e$ al variare del rapporto $\lambda_a/\lambda_e$ . . . . .	32
2.2	Modello di traiettoria ottenuto con il metodo approssimato, ipotizzando per semplicità $\Delta e_y = 0$ e $\Delta i = 0$ . . . . .	36
3.1	Ripartizione della variazione di semiasse maggiore fra le due manovre per entrambi i modelli analizzati al variare del $\Delta a$ totale. Gli indici 1, 2 corrispondono, rispettivamente, a manovre al periastro ed all'apoaastro. Gli indici A, B individuano il metodo adottato per la ripartizione. . . . .	42
3.2	Ripartizione della variazione di eccentricità fra le due manovre per entrambi i modelli analizzati al variare del $\Delta a$ totale. Gli indici 1, 2 corrispondono, rispettivamente, a manovre al periastro ed all'apoaastro. Gli indici A, B individuano il metodo adottato per la ripartizione. . . . .	42
3.3	Differenze relative fra le variazioni di parametri orbitali ottenute con i due metodi esposti in relazione alla variazione complessiva della grandezza in esame. . . . .	43
4.1	$\Delta V$ al variare di $\Delta i_p$ per l'asteroide 2016 TB57 . . . . .	56
4.2	$\Delta V$ al variare di $\Delta i_p$ per la manovra al periastro per l'asteroide 2016 TB57 . . . . .	57
4.3	Derivata numerica di $\Delta V_a$ per l'asteroide 2016 TB57 . . . . .	58
4.4	Angolo $\beta$ al variare di $\Delta i_p$ per l'asteroide 2016 TB57 . . . . .	58

4.5	$\Delta V$ al variare di $\Delta i_p$ per l'asteroide 2015 BM510 . . . . .	60
4.6	Angolo $\beta$ al variare di $\Delta i_p$ per l'asteroide 2015 BM510 . . . . .	61
4.7	$\Delta V$ al variare di $\Delta i_p$ per l'asteroide 1999 AO10 . . . . .	62
4.8	Differenza relativa fra $(m_p)_{n=2}$ e $(m_p)_{n=3}$ . . . . .	67

# Elenco delle tabelle

4.1	Lista degli asteroidi ordinati secondo il ranking R del modello SEP. $m_p$ indica la massa di propellente necessaria, $E$ è l'errore percentuale relativo fra il consumo valutato con il modello a spinta continua (SC) e quello valutato con il modello SEP. . . . .	53
4.2	Variazione dei parametri orbitali per l'asteroide 2016 TB57. . . . .	56
4.3	Variazione dei parametri orbitali per l'asteroide 2016 TB57 . . . . .	60
4.4	Variazione dei parametri orbitali per l'asteroide 1999 AO10 . . . . .	62
4.5	Lista degli asteroidi ordinati secondo il ranking R del modello SEP. Per ogni asteroide sono riportati il $\Delta V$ la massa di propellente $m_p$ necessari al variare del numero di archi di manovra, indicato con n per brevità. . . . .	65
4.6	Variazioni dei parametri orbitali, consumi e archi propulsi per le singole manovre al variare del numero di archi (Asteroide 2009 CV). . .	66
4.7	Variazioni dei parametri orbitali, consumi e archi propulsi per le singole manovre al variare del numero di archi n (Asteroide 2006 QV89). . .	68
4.8	Variazioni dei parametri orbitali, consumi e archi propulsi per le singole manovre al variare del numero di archi n (Asteroide 2001 QJ142). . .	69
4.9	Lista degli asteroidi ordinati secondo il ranking R del modello SEP. Per ogni asteroide sono riportati la massa di propellente $m_p$ necessaria e lo sfasamento finale $\Sigma$ per entrambi i metodi presentati. Il modello di traiettoria utilizzato prevede la divisione delle due manovre principali in 3 archi ciascuna. . . . .	71
4.10	Variazioni dei parametri orbitali, consumi e archi propulsi per le singole manovre al variare del metodo adottato (Asteroide 2013 WA44). . .	71
4.11	Variazioni dei parametri orbitali, consumi e archi propulsi per le singole manovre al variare del metodo adottato (Asteroide 2015 BM510). . .	72
4.12	Variazioni dei parametri orbitali, consumi e archi propulsi per le singole manovre al variare del metodo adottato (Asteroide 2014 YD). . .	73
4.13	Lista degli asteroidi ordinati secondo il ranking R del modello SEP. Per ogni asteroide e per ogni metodo sono riportati il rank e gli errori percentuali relativi fra le masse di propellente stimate con il metodo approssimato e con il modello SEP di riferimento. . . . .	75

4.14 Parametri orbitali e orbite intermedie per una missione verso l'asteroide 2015 BM510. Per ogni riga sono riportati il raggio al periastro ed all'apostro dell'orbita risultante al termine della j-esima manovra. SOL 1 indica la missione con partenza al periastro, SOL 2 quella con partenza all'apostro. . . . . 77

## **Astratto**

L'obiettivo di questa tesi consiste nel presentare e validare un metodo, rapido e sufficientemente accurato, in grado di stimare il consumo di propellente di missioni a bassa spinta verso asteroidi near-Earth con piccole variazioni dei parametri orbitali.

Modelli di notevole complessità in grado di fornire soluzioni con un alto livello di precisione sono già stati elaborati; l'elevata accuratezza da cui sono caratterizzati è tuttavia associata ad un elevato costo computazionale, che diventerebbe eccessivo qualora fosse necessario valutare un cospicuo numero di possibili trasferte.

Risulta quindi necessario formulare un modello semplificato che consenta di individuare le missioni più promettenti con un certo grado di precisione e rapidità; una volta ristretto il campo di potenziali trasferte è possibile ricorrere ai modelli più complessi per ottenere valutazioni più accurate.

Il metodo qui presentato, basato sull'approssimazione di Edelbaum, consente di risolvere problemi a consumo minimo mediante leggi di controllo subottimale per trasferte non complanari ad un costo computazionale relativamente basso.

Il modello sarà validato mediante un confronto fra i risultati da esso ottenuti e quelli derivanti da un modello Solar Electric Propulsion (SEP), scelto come riferimento per via della sua completezza da un punto di vista scientifico.

Il confronto verterà in particolare sulla capacità del modello approssimato di identificare le missioni a minor consumo e di fornire stime accettabili sulle masse di propellente ad esse necessarie.

# Capitolo 1

## Introduzione

La propulsione elettrica a bassa spinta rappresenta una valida alternativa alla propulsione chimica grazie alla maggior efficienza che la prima offre, in particolare in termini di consumo di propellente.

Diverse missioni interplanetarie, come la missione Bepi Colombo, la missione Hyabusa, la missione Dawn e la missione SMART1, hanno fatto uso di sistemi propulsivi a bassa spinta, in grado di fornire valori molto ridotti di spinta da applicare con continuità su buona parte della traiettoria dello spacecraft.

Il problema di ottimizzazione della traiettoria risulta notevolmente complesso nel caso di missioni a bassa spinta a causa della natura non impulsiva delle manovre.

Nel corso degli anni sono stati elaborati diversi metodi in grado di trovare una soluzione, più o meno approssimata, a tale problema; i metodi più accurati al momento utilizzati sono classificati come metodi diretti o indiretti a seconda dell'approccio utilizzato.

Entrambe le soluzioni presentano un buon livello di precisione al costo, tuttavia, di lunghi tempi computazionali (in particolare per i metodi diretti) e scarsa robustezza (in particolare per i metodi indiretti).

I metodi diretti infatti, come quello di Sims-Flanagan [10], discretizzano la traiettoria e trasformano il problema di controllo ottimale (OCP) in un problema non lineare (NLP), che può essere risolto agevolmente per via numerica ma ad un elevato costo computazionale.

I metodi indiretti sfruttano invece i principi del calcolo variazionale, sono più rapidi ma necessitano di un'adatta soluzione di tentativo per giungere a convergenza.

La ricerca di tale soluzione richiede un certo grado di esperienza da parte dell'utente e risulta comunque troppo dispendiosa per problemi in cui dev'essere valutato un grande numero di possibili trasferite.

In fase preliminare conviene dunque utilizzare metodi meno accurati ma più rapidi ed automatici, al fine di ottenere una stima iniziale dei parametri caratteristici di ogni missione ( $\Delta V$ , durata, consumi di propellente, ecc.) in modo da selezionare le missioni più promettenti.

A tal punto metodi diretti o indiretti possono essere utilizzati su un campione ridotto di missioni, al fine di ottimizzare le soluzioni più interessanti.

È dunque di fondamentale importanza che il metodo approssimato utilizzato per la fase iniziale sia in grado di fornire soluzioni sufficientemente accurate in modo da individuare correttamente le missioni a più basso costo.

In caso contrario verrebbero sprecate risorse e tempo per analizzare missioni che in realtà non sono così convenienti o, molto più grave, verrebbero scartate missioni di notevole interesse pratico.

L'obiettivo che ci si pone con questo lavoro consiste nell'elaborazione e validazione di un metodo, basato sull'approssimazione di Edelbaum [11], in grado di fornire risultati soddisfacenti nei casi di missioni a consumo minimo.

A tal fine il metodo approssimato verrà utilizzato per valutare il consumo di propellente di missioni con partenza dalla Terra e diretti verso asteroidi near-Earth, con piccole variazioni dei parametri orbitali: quest'ultima specifica è motivata dalle ipotesi fondanti dell'approssimazione di Edelbaum.

I risultati ottenuti verranno successivamente confrontati con quelli derivanti dal metodo diretto di tipo Solar Electric Propulsion (SEP) con effetti della gravità terrestre presentato nell'articolo [13].

Il capitolo 1 si apre con un'introduzione sulla rilevanza delle missioni verso asteroidi, per poi passare al profilo delle missioni analizzate ed ai modelli attualmente esistenti per stimare il costo propulsivo di una missione spaziale.

Nel capitolo 2 viene presentata la teoria di Edelbaum e la sua evoluzione, fino a giungere al modello che è stato elaborato appositamente per il problema in esame.

Nel capitolo 3 sono riportate la metodologia e la procedura con cui il modello presentato è stato implementato.

Nel capitolo 4 è riportata l'analisi dei risultati ottenuti con successivo confronto con i dati derivanti dal modello SEP di riferimento.

Le conclusioni sono infine riportate nel capitolo 5.

## 1.1 Introduzione agli asteroidi

Gli asteroidi [1] sono piccoli corpi celesti di composizione simile ad un pianeta roccioso e generalmente privi di atmosfera.

La maggior parte degli asteroidi è situata nella cosiddetta fascia principale, una regione del sistema solare compresa tra circa 2.1 UA e 3.6 UA dal Sole, collocata quindi grossomodo tra le orbite di Marte e di Giove.

Secondo la teoria di Viktor Sergeevich Safronov<sup>1</sup>, conosciuta come ipotesi planetesimale, l'origine degli asteroidi non è da attribuire ai resti di un pianeta esploso, come si pensava in precedenza, bensì ai componenti di un pianeta "abortito", che non è mai riuscito a formarsi a causa del disturbo gravitazionale provocato dalla presenza di Giove.

Queste perturbazioni gravitazionali avrebbero dotati i planetesimi (corpi rocciosi primordiali di ridotte dimensioni) di un'eccessiva energia orbitale, per cui le collisioni reciproche sarebbero diventate troppo violente per permetterne l'aggregazione e la conseguente formazione di un pianeta.

---

<sup>1</sup>Astronomo russo che ha sviluppato il modello di nebulosa solare per la formazione planetaria (Velikie Luki, 11 ottobre 1917 – Mosca, 18 settembre 1999)

Gli asteroidi sarebbero quindi corpi primordiali che dovrebbero aver subito ben poche modificazioni dall'epoca della loro formazione, avvenuta agli albori del Sistema Solare.

La teoria di Safronov trova una parziale conferma nella presenza delle cosiddette **lacune di Kirkwood**, cali nella distribuzione degli asteroidi in funzione del semiasse maggiore delle loro orbite o, equivalentemente, del loro periodo orbitale.

Tali vuoti corrispondono all'ubicazione delle orbite in risonanza orbitale con Giove, per cui si ipotizza che siano imputabili proprio alla presenza del pianeta gassoso.

Nel grafico riportato in Figura 1.1 sono ben visibili queste lacune in corrispondenza di determinati valori di semiasse maggiore (linee tratteggiate).

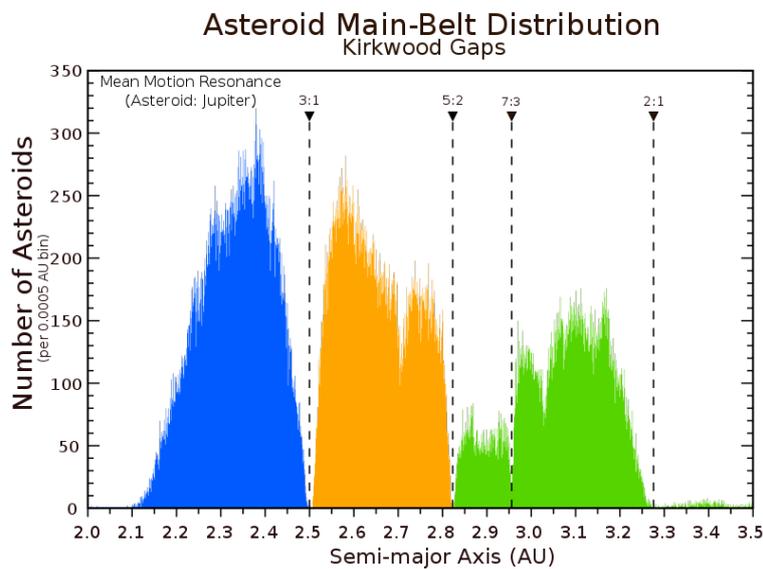


Figura 1.1: Numero di asteroidi della fascia principale in funzione del loro semiasse maggiore.

La maggior parte degli asteroidi della fascia ha un'eccentricità orbitale inferiore a 0.4 e un'inclinazione inferiore a  $30^\circ$ , come riportato in Figura 1.2.

La massima distribuzione orbitale si ha ad un'eccentricità di 0.07 circa e un'inclinazione inferiore a  $4^\circ$ ; tipicamente quindi un asteroide ha un'orbita quasi circolare a bassa inclinazione rispetto all'eclittica, sebbene esistano comunque asteroidi con orbite molto eccentriche ed inclinate.

Per quanto riguarda la composizione chimica si individuano tre categorie di asteroidi:

- Tipo C, ricchi di carbonio e concentrati nelle regioni esterne della fascia degli asteroidi. Costituiscono oltre il 75% degli asteroidi visibili, sono di colore rossastro ed hanno una bassissima albedo. Chimicamente i loro spettri corrispondono alla composizione primordiale del Sistema Solare.

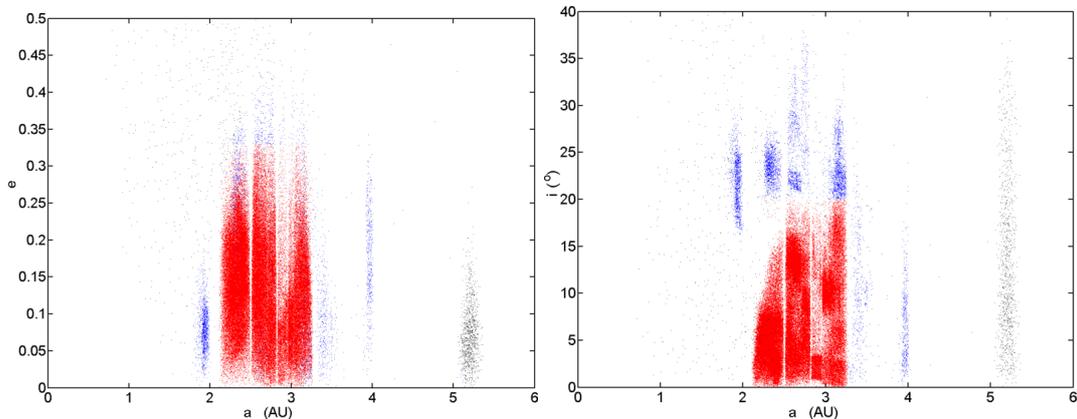


Figura 1.2: Eccentricità ed inclinazione degli asteroidi della fascia principale al variare della distanza dal Sole. Il rosso rappresenta gli asteroidi della regione centrale, il blu tutti gli altri.

- Tipo S, ricchi di silicati e concentrati nella regione interna della fascia. Gli spettri delle loro superfici rivelano la presenza di silicati ed alcuni metalli, mentre la presenza di composti carboniosi è limitata; l'albedo che li caratterizza risulta essere relativamente alta. Questi asteroidi hanno quindi subito significative modificazioni rispetto alla loro composizione primordiale, probabilmente attraverso la fusione. Costituiscono circa il 17% dell'intera popolazione di asteroidi.
- Tipo M, ricchi di metalli, con spettri simili a quelli del ferro-nichel. Costituiscono circa il 10% della popolazione totale e la loro massima distribuzione viene raggiunta ad una distanza dal Sole di 2.7 UA circa.

La temperatura della fascia degli asteroidi è funzione della distanza dal Sole: si passa dunque da una temperatura di 200 K a 2.2 UA ad una di 165 K a 3.2 UA.

La temperatura superficiale dei singoli asteroidi non è però costante ma varia notevolmente a causa della rotazione dello stesso: in un certo istante, la massima temperatura si avrà quindi nelle zone esposte all'irraggiamento solare, la minima in quelle situate dalla parte opposta.

### 1.1.1 Asteroidi near-Earth

A seguito di interazioni con il campo gravitazionale di Giove alcuni asteroidi della fascia principale possono essere guidati al di fuori della stessa, raggiungendo orbite in prossimità della Terra.

Tali asteroidi vengono perciò detti asteroidi near-Earth (o NEA). Possono sopravvivere nelle loro orbite per un periodo di tempo relativamente limitato (da 10 a 100 milioni di anni): vengono infatti eliminati a causa di decadimenti orbitali, collisioni con pianeti interni o perchè ne viene modificata l'orbita a seguito di un passaggio ravvicinato con un pianeta.

A compensare l'eliminazione nel tempo di tali corpi vi è tuttavia il continuo "rifornimento" di asteroidi da parte della fascia principale.

A seconda del semiasse maggiore e dell'eccentricità delle loro orbite gli asteroidi near-Earth vengono collocati in tre diverse categorie:

- **Asteroidi Aten**, con semiasse maggiore inferiore ad 1 UA, mentre l'afelio è generalmente posto al di là dell'orbita terrestre; il valore di eccentricità che compete a tali orbite risulta quindi non trascurabile.
- **Asteroidi Apollo**, con semiasse maggiore superiore ad 1 UA e perielio inferiore a 1.017 UA.
- **Asteroidi Amor**, con semiasse maggiore generalmente compreso tra quello della Terra e quello di Marte e perielio leggermente al di fuori dell'orbita terrestre (compreso tra 1.017 UA e 1.3 UA).

Le potenziali minacce per il nostro pianeta sono quindi costituite prevalentemente dagli asteroidi delle famiglie Aten e Apollo.

La maggior parte degli asteroidi Amor infatti interseca l'orbita marziana ma non quella terrestre.

## 1.2 Importanza di missioni verso asteroidi

Quali sono quindi i fattori che conferiscono notevole importanza alle missioni verso asteroidi?

Uno dei ruoli chiave è sicuramente rappresentato dal progresso scientifico e tecnologico, che è in genere uno degli obiettivi comuni a tutte le missioni spaziali.

Nel caso in esame lo studio e l'esplorazione degli asteroidi permettono infatti di acquisire informazioni su eventi verificatisi in un passato per noi lontano come, ad esempio, la formazione del sistema solare.

Come detto in precedenza gli asteroidi, in fin dei conti, altro non sono che i residui del processo che ha condotto alla formazione dei pianeti; non c'è da stupirsi dunque che da essi siano estrapolabili informazioni in grado di ricostruire la storia del nostro universo.

A tal fine può essere rilevante, ad esempio, mappare le proprietà globali, chimiche e mineralogiche di un asteroide per caratterizzarne la storia geologica e dinamica.

Allo stesso tempo lo studio degli asteroidi potrebbe permetterci di ricavare importanti informazioni sull'origine della vita. Alcuni asteroidi contengono infatti grandi quantità di carbonio in uno stato primordiale, mentre tracce di molecole organiche sono state trovate in alcuni meteoriti e sulle comete.

Tali missioni inoltre possono essere finalizzate alla validazione di nuove soluzioni tecnologiche in ambiente spaziale (come accaduto nella missione Deep Space 1), o al test di sequenze di comandi in vista di obiettivi futuri (missione Stardust).

Un fattore che invece risulta proprio delle missioni verso asteroidi è quello della difesa planetaria: sono migliaia gli asteroidi la cui orbita è vicina a quella della Terra ed alcuni di essi potrebbero costituire una minaccia per il nostro pianeta.

Per attuare azioni preventive risulta necessario innanzitutto definire un programma spaziale serio e ben finanziato con il compito di monitorare gli asteroidi di grosse dimensioni, potenzialmente distruttivi per il nostro pianeta.

Gli asteroidi di piccole dimensioni, infatti, si disintegrano nell'atmosfera al ritmo di uno ogni due settimane circa, a differenza di quelli più grandi che riescono ad oltrepassare l'atmosfera terrestre.

Nei paragrafi successivi vengono presentati i mezzi a nostra disposizione per individuare, classificare e sventare eventuali collisioni; vengono poi riportati esempi di missioni verso asteroidi near-Earth con relativi obiettivi per meglio comprendere i due aspetti precedentemente esposti.

### 1.2.1 Definizione del rischio

Prima di stabilire come un certo problema possa essere risolto è necessario individuarlo e classificarlo.

Come punto di partenza risulta fondamentale predire le date in cui un impatto di un asteroide con la Terra sia possibile e, in tal caso, stabilirne la posizione e le possibili conseguenze.

Il processo di predizione dell'impatto passa attraverso tre fasi principali:

- Scoperta di un asteroide ed iniziale valutazione della sua orbita.
- Osservazioni continue per migliorare la precisione dei dati dell'orbita.
- Calcoli numerici al fine di stabilire se, quando e dove l'orbita dell'asteroide potrebbe intersecare con la Terra.

Esiste un metodo di classificazione del pericolo di impatto associato agli oggetti di tipo NEO (near-Earth object), anche noto come **Scala Torino** [3], che risulta essere un utile strumento per gli scienziati e per il pubblico per visualizzare immediatamente la pericolosità di un eventuale impatto contro la Terra.

La Scala Torino usa una scala di valori da 0 a 10, determinati dalla probabilità statistica d'impatto e dall'energia cinetica sprigionata dallo stesso.

Un valore pari a 0 indica una possibilità pressoché nulla di collisione con la Terra, o con effetti eventualmente comparabili a quelli piuttosto comuni del normale pulviscolo spaziale, troppo piccolo per penetrare l'atmosfera e raggiungere intatto il terreno; un valore pari a 10 indica invece una collisione certa, con effetti su larga scala tali da scatenare un disastro globale sul pianeta.

Nella Figura 1.3 è riportata una più precisa definizione del rischio al variare dei due parametri che definiscono la scala.

Oltre alla Scala Torino esiste un metodo simile, ma più tecnico e complesso, per valutare il rischio di impatto di un oggetto di tipo NEO, detto **Scala Palermo** [4].

Essa consiste in una scala logaritmica che combina in un singolo valore sia la probabilità di impatto, sia l'energia cinetica che verrebbe liberata nell'impatto stesso, e quindi il danno causato.

Il valore  $P$  della Scala Palermo è definito come segue:

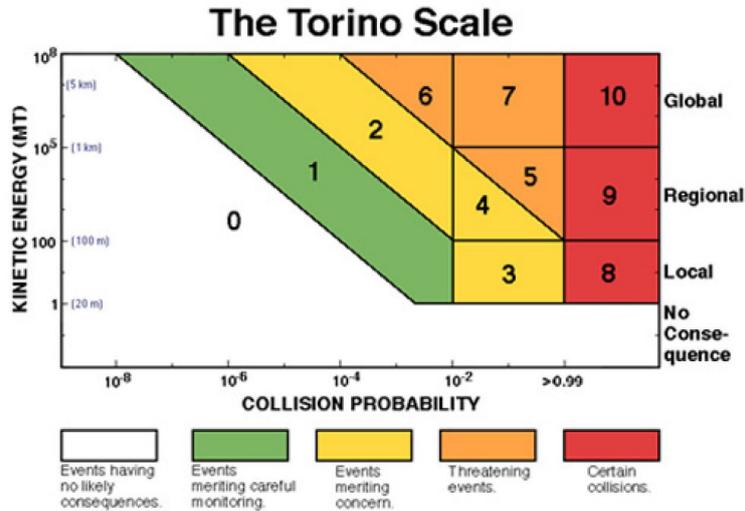


Figura 1.3: Disegno

$$P = \log_{10} \frac{p_i}{f_b T}$$

Con  $p_i$  pari alla probabilità d’impatto,  $T$  pari al tempo che ci separa dal possibile impatto (misurato in anni) ed  $f_b$  pari al rischio di fondo annuo, funzione dell’energia d’impatto.

Il rischio di fondo è definito come il rischio medio che un altro oggetto di maggiore o uguale dimensione possa impattare la Terra nello stesso periodo, cioè fino al tempo del possibile impatto.

Un valore di  $P$  pari 0 indica un rischio equivalente al rischio di fondo, mentre un valore di  $P$  pari, ad esempio, a +2 indica un rischio 100 volte maggiore del rischio di fondo.

### 1.2.2 Mitigazione del pericolo

Per mitigare il pericolo di possibili impatti di asteroidi con la Terra sono necessari studi sui concetti di missione e sugli effetti dell’eventuale impatto, così come una pianificazione della risposta in caso di emergenza.

In accordo con la NASA [5] vi sono differenti metodi, per ora solo teorici, a cui si potrebbe ricorrere per ridurre il rischio d’impatto.

La scelta del metodo è influenzata in particolar modo dalle dimensioni dell’asteroide e dall’istante in cui il pericolo viene individuato.

#### Gravity Tractor

Se un asteroide in avvicinamento venisse rilevato con grande anticipo sarebbe possibile deviarne la traiettoria per mezzo del campo gravitazionale generato da uno spacecraft.

Il mezzo dovrebbe orbitare insieme all'asteroide per un lungo periodo di tempo (da anni a decenni), spostandolo lentamente dalla traiettoria terrestre.

Uno dei problemi più rilevanti nelle interazioni con asteroidi è rappresentato infatti dal modo in cui l'impulso richiesto venga trasmesso ad un corpo di ignota massa, composizione e resistenza meccanica, senza ridurlo in frammenti che rappresenterebbero un potenziale pericolo per la Terra.

Il gravity tractor si presenta come un'ottima soluzione a questo problema grazie alla natura dell'impulso da esso fornito, che viene trasmesso usando il suo solo campo gravitazionale, e dunque senza alcun contatto fisico.

Sarebbe inoltre in grado di funzionare a prescindere dalla forma e dalla composizione dell'asteroide in avvicinamento, anche nel caso in cui fosse soltanto un cumulo di macerie.

L'efficacia di tali strumenti è piuttosto limitata contro asteroidi di oltre 500 metri di diametro, che rappresentano tuttavia le minacce più grande per il pianeta.

I gravity tractors offrono il miglior controllo della traiettoria dell'asteroide e sarebbero addirittura in grado di deviare un asteroide verso altre zone nello spazio in cui potrebbero essere usati per ricerche o a scopi commerciali.

A tal fine potrebbero essere equipaggiati con un transponder, in modo da monitorare continuamente la posizione e la velocità del sistema spacecraft/asteroide, per permettere di conoscere con precisione la traiettoria dell'asteroide a seguito della deviazione.

I limiti di questo metodo riguardano la configurazione dello scarico: è infatti fondamentale che né il veicolo né la massa espulsa vadano in contatto con l'asteroide, per evitare di impartire ad esso una spinta in direzione contraria all'attrazione gravitazionale del gravity tractor.

Queste tecniche non sono mai state testate al momento e sarebbero necessari decenni per costruire, lanciare e pianificare una missione di mitigazione.

### **Kinetic Impactor**

L'impatto di un corpo massivo, come uno spacecraft o anche un altro near-Earth object, con un asteroide in avvicinamento rappresenta un'altra soluzione ad una possibile minaccia per la Terra.

Grazie all'elevata velocità del corpo impattante risulterebbe possibile deviare l'asteroide verso una traiettoria differente, allontanandolo dal suo cammino verso l'orbita terrestre.

I tempi per costruire e lanciare un impattore, raggiungere ed impattare con l'obiettivo sono tuttavia dell'ordine di decenni, in particolare se fosse necessario deviare asteroidi di centinaia di chilometri di diametro, che rappresentano le minacce con potenziali effetti più catastrofici.

Se il pericolo venisse rilevato con largo anticipo sarebbe possibile concepire una missione per studiare l'asteroide da vicino per ottenere informazioni sull'esatta dimensione, forma, composizione chimica e velocità di rotazione.

Una volta giunte le informazioni sulla Terra sarebbe possibile inviare l'impactor, con una possibilità di successo della missione notevolmente aumentata.

La strategia di uso dei kinetic impactor potrebbe non essere tuttavia molto efficace nel cambiare l'orbita di asteroidi di dimensioni molto elevate.

### **Blast Deflection**

La Terra ha un arsenale di esplosivi nucleari e di altro tipo, posseduti da più nazioni in tutto il mondo.

Alcuni esperti hanno proposto di lanciare ordigni nucleari dalla Terra al fine di disgregare, distruggere o deviare un asteroide in avvicinamento.

La strategia proposta potrebbe essere l'unica efficace contro i più grandi e pericolosi asteroidi, di diametro superiore ad 1 km.

La tecnica sarebbe inoltre utilizzabile come ultima risorsa se gli altri approcci dovessero rivelarsi fallimentari.

Uno studio della NASA del 2007 ha concluso che un'esplosione nucleare sarebbe probabilmente il metodo più efficace per deviare un near-Earth object in avvicinamento.

Le esplosioni nucleari rappresentano tuttavia una tecnologia controversa, tecnicamente bandita dall'uso nello spazio esterno, ed è soggetto di molte dispute geopolitiche.

Con questa tecnica inoltre si incorre nel rischio di frammentare l'asteroide in pezzi più piccoli che potrebbero rappresentare ancora una minaccia per la Terra.

La blast deflection tuttavia potrebbe essere più appropriata del kinetic impactor per gestire una rubble pile in avvicinamento, ovvero un corpo celeste costituito da pezzi di roccia che si sono uniti sotto l'influenza della gravità.

### **1.2.3 Missioni verso asteroidi near-Earth**

Nelle pagine seguenti sono riportati, a titolo d'esempio, missioni verso asteroidi near-Earth già concluse, in corso oppure in fase di definizione.

L'idea di fondo è quella di dar modo al lettore di comprendere meglio come si intenda procedere sul fronte della difesa planetaria e quali siano gli obiettivi scientifici attualmente al centro dell'attenzione.

#### **Missione AIDA**

La missione *Asteroid Impact and Deflection Assessment* (AIDA) [6, 7] è un programma di collaborazione internazionale che vede protagonisti, oltre l'ESA, la NASA, l'agenzia Spaziale Tedesca (DLR), l'Applied Physics Laboratory della John Hopkins University (JHU/APL) e l'Osservatorio della Costa Azzurra (OCA), e che ha come obiettivo un NEO, l'asteroide binario denominato Didymos.

Scoperto nel 1996, 65803 Didymos è un asteroide sub-chilometrico della famiglia Apollo-Amor classificato come potenziale pericolo per il nostro pianeta.

Si muove su un'orbita di media eccentricità con perielio pari a 1.0133 UA (di poco inferiore all'afelio della Terra) ed afelio pari a 2.2760 UA.

Rispetto all'orbita terrestre la traiettoria dell'asteroide è inclinata di soli 3.4°, mentre il periodo orbitale è pari a 2.11 anni.

Nella Figura 1.4 sono riportate le orbite di Didymos e dei pianeti circostanti.

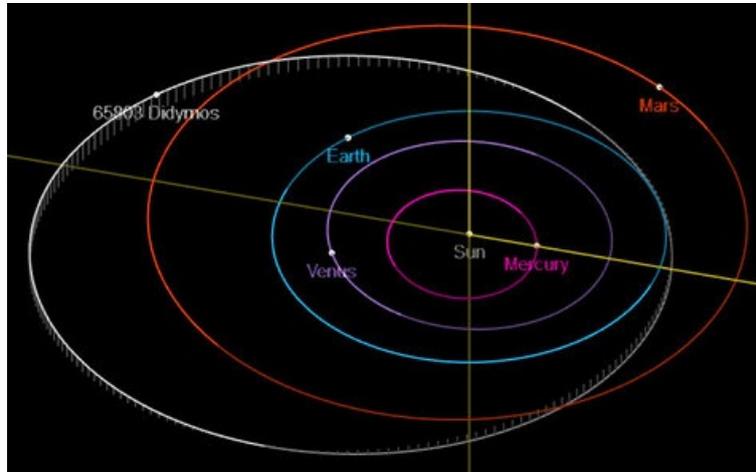


Figura 1.4: Orbita dell'asteroide Didymos e dei pianeti nelle vicinanze.

Si tratta in realtà di un sistema binario composto da due corpi di dimensioni diverse: Didymos A, del diametro di 780 metri, e Didymos B, di 160 metri, che si muove attorno al primo ad una distanza media di 1.2 km.

La missione è costituita da una coppia di sonde spaziali che dovrebbero studiare e dimostrare l'effetto cinetico che scaturisce dall'impatto di uno spacecraft sul satellite di un asteroide.

Lo scopo della missione è infatti quello di verificare se uno spacecraft sia in grado di deviare con successo un asteroide dalla sua rotta di collisione con la Terra.

Il concept of mission prevede l'utilizzo di due spacecraft: Hera (costruito dall'ESA) che orbiterebbe attorno all'asteroide, e Double Asteroid Redirection Test (DART, costruito dalla NASA) che impatterebbe su Didymos B.

L'impatto dello spacecraft DART, di massa pari a 300 kg, avverrebbe alla velocità di 6.25 km/s e produrrebbe una variazione di velocità dell'ordine di 0.4 mm/s, causando un cambiamento significativo nell'orbita dei due asteroidi ed uno minimo nell'orbita eliocentrica del sistema binario.

Le informazioni fornite dalla sonda europea permetterebbero di raffinare i modelli matematici che descrivono come un asteroide reagisca a questo tipo di sollecitazioni dinamiche.

Così facendo sarebbe possibile valutare con maggior precisione l'entità della forza necessaria per modificare l'orbita di un asteroide in avvicinamento alla Terra.

Il lancio della sonda DART è al momento pianificato per il 2021, mentre Hera arriverebbe su Didymos qualche anno dopo l'impatto di DART.

Per massimizzare il successo scientifico della missione il team di AIDA ha proposto di ritardare il lancio di DART, in modo tale che Hera arrivi sull'asteroide prima per essere testimone dell'impatto di DART.

Così facendo, oltre a soddisfare gli obiettivi iniziali di AIDA, sarebbe possibile ottenere, mediante osservazione diretta, dati relativi all'impatto ed alla formazione delle emissioni da esso provocate.

### **Missione OSIRIS-REx**

*Origins Spectral Interpretation Resource Identification Security Regolith Explorer* (OSIRIS-REx) [8] è una missione spaziale sviluppata dalla NASA per l'esplorazione degli asteroidi nell'ambito del Programma New Frontiers.

La missione è stata sviluppata dal Lunar and Planetary Laboratory (LPL) dell'Università dell'Arizona, dal Goddard Space Flight Center della NASA e dalla divisione spaziale della Lockheed Martin.

Il target della missione è l'asteroide 101955 Benu, un asteroide carbonaceo di tipo B appartenente alla famiglia degli asteroidi Apollo, di diametro pari a 560 m.

L'asteroide in questione risulta di notevole interesse scientifico in quanto si ipotizza che abbia subito pochi cambiamenti geologici dalla sua formazione.

Dalle osservazioni telescopiche è stato possibile determinare con sufficiente accuratezza l'orbita di 101955 Benu, da cui è emerso un avvicinamento dell'asteroide al nostro pianeta ogni 6 anni.

Studi successivi<sup>2</sup> hanno individuato una serie di otto potenziali impatti con la Terra in un periodo compreso fra il 2169 ed il 2199.

La probabilità d'impatto dovrebbe essere inferiore allo 0.07 per tutti gli otto incontri: valutazioni più precise richiederebbero una conoscenza più approfondita delle proprietà fisiche dell'asteroide.

La raccolta di queste informazioni rappresenta tuttavia soltanto uno degli scopi prefissati dalla NASA.

Entrando più nello specifico, infatti, gli obiettivi scientifici della missione OSIRIS-REx consistono nel:

- Recuperare un campione incontaminato di regolite carbonacea in una quantità sufficiente a permettere successive analisi dei suoi costituenti e della loro distribuzione.
- Mappare le proprietà globali, chimiche e mineralogiche di un asteroide carbonaceo primordiale per caratterizzare la sua storia geologica e dinamica e fornire un contesto per il campione recuperato.
- Documentare la distribuzione, la morfologia, la geochimica e le proprietà spettrali della regolite al sito in cui sarà prelevato il campione a scale progressivamente inferiori, fino a quelle millimetriche.
- Misurare l'effetto YORP<sup>3</sup> di un asteroide potenzialmente pericoloso e individuare le proprietà dell'asteroide che contribuiscono a tale effetto, in modo tale da determinare con maggiore accuratezza la probabilità d'impatto.

---

<sup>2</sup>Attribuiti all'astronomo italiano Andrea Milani Comparetti e collaboratori, 2009

<sup>3</sup>Ampliamento del più noto effetto Yarkovsky per includere anche altri fattori, oltre all'irraggiamento del calore assorbito dal sole, che influiscono sulla variazione della velocità di rotazione dei corpi di piccole dimensioni del sistema solare, come gli asteroidi.

- Fornire degli utili elementi di confronto per le osservazioni da terra e valutare la loro capacità di caratterizzazione della popolazione di asteroidi carbonacei del sistema solare.

Le fasi attraverso cui passa la realizzazione degli obiettivi di missione possono essere riassunte come segue:

- Rendezvous con l'asteroide 101955 Bennu a poco più di due anni dal lancio, avvenuto con successo l'8 Settembre 2016.
- Osservazione dell'orbita ad una distanza dalla superficie compresa tra 0.7 e 5 km. La massima durata teorica di tale fase è stata fissata a 505 giorni.
- Individuazione del sito da cui prelevare il campione di regolite ed elaborazione di un'adeguata strategia di avvicinamento. A tal fine sono rilevanti i risultati ottenuti dalla fase precedente.
- Prelevamento di un campione incontaminato mediante l'estensione di un braccio robotico.
- Ritorno verso il pianeta Terra, con termine missione previsto per Settembre 2023.

La missione OSIRIS-REx è attualmente in corso: la sonda ha raggiunto la superficie dell'asteroide l'8 Dicembre 2018 dopo una fase di ricerca, con esito negativo, di possibile minacce nella fase di avvicinamento, rappresentate dall'eventuale presenza di satelliti naturali e pennacchi di polvere.

### **Missione M-ARGO**

Prima di passare alla definizione vera e propria del problema analizzato vengono infine riportati i dettagli della missione *Miniaturised Asteroid Remote Geophysical Observer* (M-ARGO) [9], che ha ricoperto un ruolo non trascurabile nello svolgimento di questa tesi.

Il profilo di missione di riferimento, infatti, altro non è che una schematizzazione di quello stabilito per la missione M-ARGO da uno studio interno avvenuto al Concurrent Design Facility dell'ESA.

Gli obiettivi della missione, il cui lancio è previsto per il 2021, possono essere riassunti in tre punti chiave:

- Esecuzione di un rendezvous con un asteroide near-Earth.
- Caratterizzazione delle proprietà fisiche dell'asteroide, nello specifico della sua forma, superficie e massa.
- Valutazione del potenziale di sfruttamento delle risorse disponibili.

Lo spacecraft in questione è un cubesat 12U di dimensioni 226x226x340 mm, con una massa di circa 20 kg.

La spinta è fornita da un propulsore ionico elettrostatico, mentre il sistema di generazione di potenza è costituito da 6 pannelli body mounted, da una batteria Li-ion e da 2 ulteriori pannelli solari wing-deployable.

I valori di spinta e impulso specifico valutati ad una distanza Sole di 1 UA sono, rispettivamente, pari a 1.7 mN e 3050 s (nel caso in cui vengono utilizzati solo 6 pannelli).

Le fasi in cui si articola la missione sono le seguenti:

- Lancio come piggyback verso il punto L2 del sistema Sole-Terra.
- Parcheggio in un'orbita halo<sup>4</sup> in prossimità del punto L2 solare.
- Trasferita interplanetaria verso l'asteroide near-Earth mediante propulsione elettrica solare a bassa spinta.
- Operazioni di telerilevamento in prossimità dell'asteroide, per una durata complessiva pari a sei mesi.

A partire da queste informazioni è possibile elaborare un profilo di missione semplificato che tenga in considerazione le caratteristiche principali della missione.

### 1.3 Profilo di missione

Il profilo di missione su cui si vuole validare il metodo approssimato prevede che lo spacecraft si trovi inizialmente sull'orbita terrestre.

L'orbita di arrivo è quella di un asteroide near-Earth; la missione si conclude dopo l'esecuzione di un rendezvous con lo stesso.

Non tutti gli asteroidi near-Earth sono validi candidati per la missione considerata: le variazioni dei parametri orbitali, in particolare semiasse maggiore, eccentricità ed inclinazione, devono essere inferiori ad una certa soglia oltre la quale l'approssimazione di Edelbaum perde di validità.

Questo vincolo è risulta meno restrittivo di quanto possa sembrare dal momento che, in linea di massima, le missioni a più basso consumo sono quelle con i valori più contenuti di  $\Delta a$ ,  $\Delta e$  e  $\Delta i$ .

La massa iniziale dello spacecraft è fissata a 20 kg, con una massa di propellente (inclusa) al di sotto dei 2.5 kg.

La finestra di lancio è compresa tra l'anno 2020 ed il 2023 incluso, mentre la durata massima della missione viene fissata a  $tof = 3$  anni.

Per quanto riguarda il sistema propulsivo, i valori di potenza in ingresso  $P_{in}$ , la spinta massima  $T_{max}$  e l'impulso specifico  $I_{sp}$  sono generalmente funzioni della distanza dal Sole.

---

<sup>4</sup>Orbita periodica tridimensionale in prossimità del punto di Lagrange L1, L2 o L3 nel problema dei tre corpi della meccanica orbitale

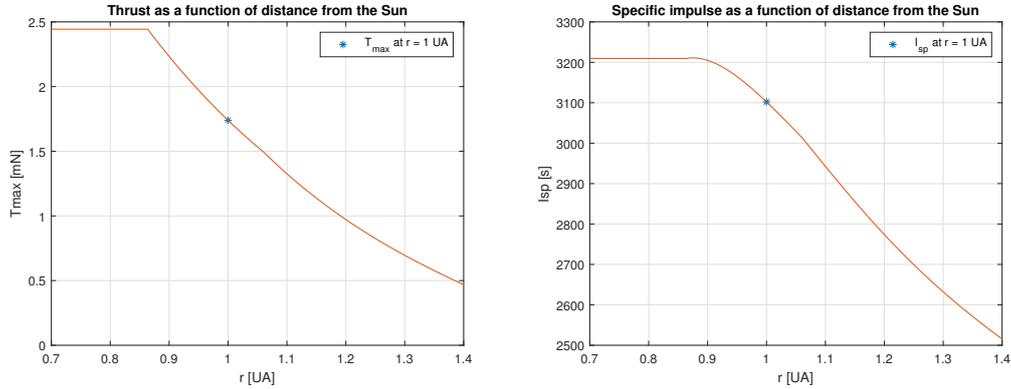


Figura 1.5: Spinta massima ed impulso specifico al variare della distanza dal Sole per il modello SEP.

Sui grafici vengono evidenziati i valori corrispondenti al momento della partenza, ovvero ad  $r = 1$  UA.

Occorre in questo caso fare una distinzione tra il modello di spinta utilizzato dal modello SEP e quello utilizzato dal metodo approssimato.

Per le relazioni  $T_{max} - P_{in}$  e  $I_{sp} - P_{in}$  si rimanda il lettore all'articolo [13]; per completezza vengono riportati in Figura 1.5 gli andamenti di  $T_{max}$  e  $I_{sp}$  in funzione della distanza dal Sole.

Nel metodo approssimato si considera invece, per semplicità, una dipendenza di  $T_{max}$  dal reciproco del quadrato della distanza dal Sole, mentre l'impulso specifico è ritenuto costante.

In Figura 1.6 sono riportati gli andamenti della spinta secondo entrambi i modelli. Nella fascia di maggior interesse ( $0.85 \text{ UA} \leq r \leq 1.15 \text{ UA}$ ) i due modelli prevedono valori di spinta ancora abbastanza simili.

## 1.4 Modelli di calcolo

Diversi sono i modelli di traiettoria che possono essere impiegati per ottenere stime sul  $\Delta V$  della missione, e di conseguenza sul suo consumo in termini di massa di propellente utilizzata.

La scelta del modello a cui affidarsi dev'essere basata sul grado di precisione con cui si vogliono ottenere i risultati.

Non sarebbe infatti conveniente ricorrere a prescindere al modello più accurato: la complessità delle operazioni richieste, e quindi il costo computazionale dell'intero processo, potrebbe non essere giustificato per un problema di cui si richiede soltanto una stima grossolana.

Nel nostro caso, ad esempio, sarebbe impossibile utilizzare il miglior modello a disposizione su tutti gli asteroidi esistenti.

Anche a seguito di una fase iniziale di filtering, basata sugli elementi orbitali di tali asteroidi, il loro numero risulterebbe comunque troppo elevato.

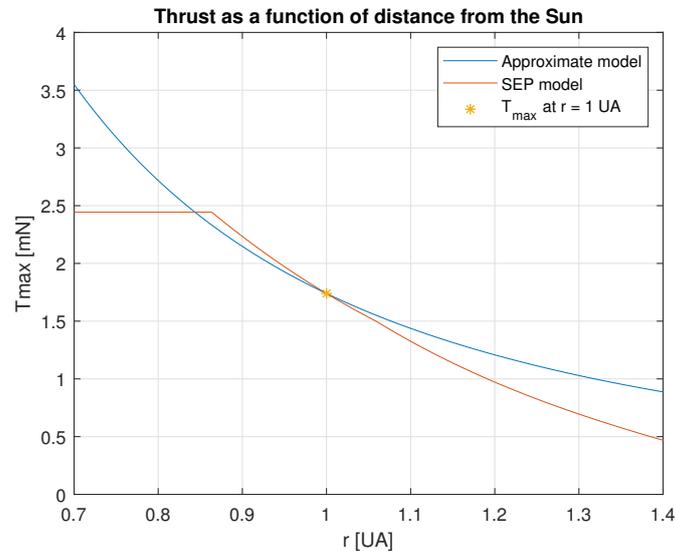


Figura 1.6: Spinta massima al variare della distanza dal Sole per il modello SEP e per il modello approssimato.

Conviene quindi ricorrere a metodi più semplici e veloci per eliminare fin da subito candidati inappropriati, per poi concentrarsi successivamente su quei target che sembrano più promettenti.

D'altro canto sussiste sempre il rischio di scartare soluzioni a prima vista inadeguate, che tuttavia potrebbero rivelarsi di grande interesse se analizzate con un metodo più accurato.

Occorre quindi che i metodi utilizzati per questa prima fase siano in grado di fornire stime con una certa rapidità ed un certo grado di precisione.

Nei paragrafi successivi vengono brevemente descritti i modelli attualmente in uso per il calcolo di traiettorie.

### 1.4.1 Trasferta a tre impulsi

Il modello di traiettoria a tre impulsi prevede una trasferta di Hohmann mediante cui è necessario variare, oltre a semiasse maggiore ed eccentricità, anche l'inclinazione e l'ascensione retta del nodo ascendente (RAAN) dell'orbita.

A termine manovre non è dunque possibile garantito che l'argomento del periastro e l'anomalia media coincidano con quelle assegnate, dunque tale approssimazione risulta essere buona solo quando le orbite sono a bassa eccentricità e la posizione finale dello spacecraft non è rilevante.

La trasferta ottimale viene ottenuta con tre variazioni del vettore velocità, per cui saranno necessarie una manovra per raggiungere l'apoastro dell'orbita finale, una per raggiungerne il periastro ed una per variare l'inclinazione e la RAAN.

Nella pratica risulta conveniente combinare le ultime due manovre per due motivi:

1. La somma di due vettori è minore (o al più uguale) alla somma dei moduli dei vettori.
2. Il cambio di inclinazione è meno costoso se effettuato a velocità minori, dunque in corrispondenza dell'apoastro dell'orbita in cui ci si trova.

Il  $\Delta V$  complessivo della trasferta può essere così valutato:

$$\Delta V = \Delta V_{dep} + \Delta V_{arr}$$

In cui  $\Delta V_{dep}$  è la variazione di velocità ottenuta sull'orbita di partenza, mentre  $\Delta V_{arr}$  è quella ottenuta sull'orbita di arrivo.

L'ordine delle manovre va scelto in base al raggio d'apoastro delle orbite iniziali e finali, al fine di effettuare il cambio di piano nel punto a velocità minima per il motivo spiegato in precedenza.

Vengono quindi brevemente analizzati i due casi che possono presentarsi:

1.  $r_{a1} < r_{a2}$ : Convieni quindi manovrare prima al periaastro per raggiungere l'apoastro dell'orbita del target e successivamente manovrare all'apoastro per correggere il periaastro ed effettuare il cambio di inclinazione e RAAN.

Il  $\Delta V$  dovuto alle singole fasi può essere valutato come segue:

$$\begin{aligned} \Delta V_{dep}/\sqrt{2\mu} &= \sqrt{1/r_{p1} - 1/(r_{p1} + r_{a2})} - \sqrt{1/r_{p1} - 1/(r_{p1} + r_{a1})} \\ V_i/\sqrt{2\mu} &= \sqrt{1/r_{a2} - 1/(r_{p1} + r_{a2})} \\ V_f/\sqrt{2\mu} &= \sqrt{1/r_{a2} - 1/(r_{p2} + r_{a2})} \\ \Delta V_{arr} &= \sqrt{V_i^2 + V_f^2 - 2V_iV_f \cos \Delta i_{rel}} \end{aligned}$$

Con:

$$\cos \Delta i_{rel} = \cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos \Omega_1 \cos \Omega_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos \Omega_1 \cos \Omega_2$$

$r_{p1}$  e  $r_{p2}$  rappresentano il periaastro delle orbite iniziali e finali,  $r_{a1}$  e  $r_{a2}$  il loro apoastro,  $V_i$  e  $V_f$  le velocità prima e dopo l'ultima manovra,  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  l'inclinazione e la RAAN delle orbite iniziali e finali.

2.  $r_{a1} > r_{a2}$ : In questo caso si effettua il cambio di piano all'apoastro dell'orbita di partenza e si raggiunge subito il periaastro dell'orbita finale; la seconda manovra, al periaastro dell'orbita intermedia, permette di raggiungere l'apoastro dell'orbita finale.

Le relazioni risultanti diventano:

$$\begin{aligned} \Delta V_{dep} &= \sqrt{V_i^2 + V_f^2 - 2V_iV_f \cos \Delta i_{rel}} \\ V_i/\sqrt{2\mu} &= \sqrt{1/r_{a1} - 1/(r_{p1} + r_{a1})} \\ V_f/\sqrt{2\mu} &= \sqrt{1/r_{a1} - 1/(r_{p2} + r_{a1})} \\ \Delta V_{arr}/\sqrt{2\mu} &= \sqrt{1/r_{p2} - 1/(r_{p2} + r_{a2})} - \sqrt{1/r_{p2} - 1/(r_{p2} + r_{a1})} \end{aligned}$$

Mentre  $\Delta i_{rel}$  è, ovviamente, lo stesso del caso precedente.

### 1.4.2 Lambert

Il problema di Lambert riguarda la determinazione di un'orbita partendo da due vettori posizione e dal tempo di volo.

La formulazione esatta del problema è la seguente: assegnati due tempi  $t_1$  e  $t_2$  e due vettori posizione  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ , trovare la soluzione  $\mathbf{r}(t)$  che soddisfi il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \\ \mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}(t_2) = \mathbf{r}_2 \end{cases}$$

Nel caso in esame l'obiettivo consiste nel trovare il minimo  $\Delta V$  necessario a passare dall'orbita terrestre a quella dell'asteroide passando per un'orbita di trasferta ellittica.

Il tempo iniziale  $t_1$  e quello finale  $t_2$  non sono più fissati ma possono variare entro un intervallo assegnato dal problema.

Il problema di ottimizzazione da risolvere è quindi il seguente:

$$\mathcal{P}_1 : \begin{cases} \text{trovare:} & t_1 \in [t_{min}, t_{max}], tof \in [tof_{min}, tof_{max}] \\ \text{per minimizzare:} & \Delta V_L \end{cases} \quad (1.1)$$

Con  $\Delta V_L$  pari alla variazione di velocità necessaria per una trasferta in un tempo  $tof$  dalla posizione iniziale  $\mathbf{r}_1(t_1)$  della Terra alla posizione finale  $\mathbf{r}_2(t_1 + tof)$  dell'asteroide.

Nel caso in esame, ad esempio,  $t_1$  è compreso fra l'anno 2020 e l'anno 2023 incluso mentre  $tof$  è compreso fra 0 e 3 anni.

### 1.4.3 Nuclear Electric Propulsion (NEP)

Il modello di traiettoria NEP (Nuclear Electric Propulsion) prevede che il sistema propulsivo dello spacecraft sia in grado di fornire una spinta costante  $T_{max}$  ad un impulso specifico  $I_{sp}$  anch'esso costante.

Le equazioni che descrivono il moto dello spacecraft in un sistema di riferimento inerziale eliocentrico sono:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{u}(t)}{m} \quad (1.2)$$

$$\dot{m} = -\frac{|\mathbf{u}(t)|}{I_{sp}g_0} \quad (1.3)$$

In cui  $\mu \approx 1.327 \cdot 10^{20} m^3/s^2$  è la costante gravitazionale del Sole,  $\mathbf{u}(t)$  è la variabile di controllo del problema e rappresenta il vettore spinta,  $g_0 \approx 9.8066 m/s^2$  è la gravità standard sulla Terra.

Il problema di controllo ottimale (OCP) da risolvere è il seguente:

$$\mathcal{P}_2 : \left\{ \begin{array}{l} \text{trovare:} \quad \mathbf{u}(t) \in \mathcal{F}, t_1 \in [t_{min}, t_{max}], tof \in [tof_{min}, tof_{max}] \\ \text{per massimizzare:} \quad J = m_f = m_i - \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{u}(t)| dt \\ \text{con vincoli:} \\ \quad \mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1, \\ \quad \dot{\mathbf{r}}(t_1) = \mathbf{v}_1, \\ \quad m(t_1) = m_i, \\ \quad \mathbf{r}(t_2) = \mathbf{r}_2, \\ \quad \dot{\mathbf{r}}(t_2) = \mathbf{v}_2, \\ \quad |\mathbf{u}(t)| \leq T_{max} \quad \forall t \in [t_1, t_2], \\ \quad m_f \geq 0. \end{array} \right. \quad (1.4)$$

In cui  $\mathcal{F}$  è un qualche spazio funzionale mentre  $t_2 = t_1 + tof$  è il tempo di arrivo all'orbita finale.

Il modello può essere ulteriormente migliorato tenendo in considerazione l'effetto della gravità terrestre sulla traiettoria.

L'equazione del moto (1.2) viene così modificata e diventa:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{u}(t)}{m} - \mu_e \frac{\mathbf{r}_e}{r_e^3} \quad (1.5)$$

Dove  $\mu_e$  è la costante gravitazionale terrestre e  $r_e$  è la distanza fra lo spacecraft e la Terra.

Problemi di questo tipo vengono in genere risolti mediante metodi diretti (Cf. [10] per maggiori dettagli).

#### 1.4.4 Solar Electric Propulsion (SEP)

Il modello fisicamente più completo è quello di tipo Solar Electric Propulsion, che è quindi stato scelto come modello di riferimento con cui confrontare i risultati ottenuti con il metodo approssimato.

Le equazioni del moto sono le stesse che competono al modello NEP ((1.2) o (1.5)) ed il problema da risolvere è sempre il (1.4); la differenza fondamentale risiede nel differente modello di spinta.

In questo caso i valori di  $T_{max}$  e  $I_{sp}$  non sono più costanti ma sono funzioni della distanza spacecraft-Sole  $r$ ; le diverse relazioni analitiche adottate per le due grandezze sono riportate nel paragrafo 1.3.

## Capitolo 2

# La teoria del modello

La propulsione elettrica è caratterizzata da ridotte accelerazioni e piccole spinte, per cui viene meno il concetto di manovra impulsiva adottato nella propulsione chimica.

Uno dei primi modelli proposti in grado di fornire leggi di controllo e stime del  $\Delta V$  di una missione con propulsione elettrica è stata l'approssimazione di Edelbaum.

Alla luce dei nuovi e più complessi modelli in circolazione, in grado di fornire risultati con un buon grado di precisione, l'approssimazione di Edelbaum non può essere ritenuta sufficientemente precisa per una stima del costo di una missione a consumo minimo.

La formulazione di Edelbaum, come spiegato più in dettaglio nei paragrafi successivi, è utilizzata solitamente per risolvere in modo approssimato un problema a tempo minimo.

Dal punto di vista del consumo, tuttavia, la missione ottimale richiede in genere tempi più lunghi rispetto a tale soluzione, motivo per cui l'approssimazione di Edelbaum fallisce nel dare risposte concrete al problema analizzato.

È proprio dalla comprensione di questa limitazione che nasce l'idea di modificare ed adattare l'approssimazione di Edelbaum al problema considerato.

In questo capitolo sono descritti i diversi modelli in cui si è evoluta la teoria dal momento della sua prima formulazione.

Viene quindi introdotta l'approssimazione di Edelbaum, seguita dalla sua riformulazione mediante la teoria del controllo ottimale per poi terminare con la descrizione del modello adottato in questa tesi per stimare la minima massa di propellente necessaria al compimento della missione.

### 2.1 Approssimazione di Edelbaum

Publicata nel 1961 dall'omonimo scienziato, l'approssimazione di Edelbaum [11] consente di risolvere il problema dell'ottimizzazione di una trasferta a bassa spinta tra due orbite circolari.

Le ipotesi di partenza del metodo possono essere così riassunte:

- Le orbite sono quasi circolari, perciò si ha  $r \approx a \approx p$ ,  $V^2 \approx \frac{\mu}{r}$ ,  $E \approx \nu \approx M$
- Le orbite hanno piccola inclinazione, dunque  $\cos i \approx 1$ ,  $\sin i \approx i$ ,  $\theta = \Omega + \omega + \nu$

- Le spinte e le accelerazioni sono molto piccole, ovvero  $\frac{T}{m} \ll \frac{\mu}{r^2}$

Le equazioni planetarie di Gauss, che descrivono le variazioni temporali dei parametri orbitali, si semplificano e diventano:

$$V \frac{da}{dt} = 2r A_T \quad (2.1a)$$

$$V \frac{de}{dt} = 2 \cos \nu A_T - \sin \nu A_R \quad (2.1b)$$

$$V \frac{di}{dt} = \cos(\omega + \nu) A_W \quad (2.1c)$$

$$eV \frac{d\omega}{dt} = -V \frac{d\Omega}{dt} + 2 \sin \nu A_T - \cos \nu A_R \quad (2.1d)$$

$$iV \frac{d\Omega}{dt} = \sin(\omega + \nu) A_W \quad (2.1e)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \frac{V}{r} \quad (2.1f)$$

Dove  $A_T$ ,  $A_R$  e  $A_W$  rappresentano, rispettivamente, le accelerazioni tangenziale, radiale e fuori dal piano, e sono pari al rapporto fra la spinta in quella direzione e la massa dello spacecraft.

Dalla forma semplificata di tali equazioni si può concludere che:

- Spinte in direzione tangenziale variano  $a$ ,  $e$ ,  $\omega$ .
- Spinte in direzione radiale variano  $e$ ,  $\omega$ .
- Spinte perpendicolari al piano orbitale modificano  $i$ ,  $\Omega$ .

Le equazioni presentano delle singolarità per  $e, i = 0$ , per i quali si ha  $\dot{\omega}, \dot{\Omega} \rightarrow \infty$ : ciò è dovuto al fatto che periastro e nodo ascendente non sono definiti per orbite circolari ad inclinazione nulla.

Nell'approssimazione di Edelbaum le equazioni (2.1d), (2.1e) vengono trascurate dal momento che, per le ipotesi iniziali, rendono il problema non ben definito.

A partire dalle equazioni (2.1a), (2.1b), (2.1c) ci si chiede in quale direzione convenga applicare la spinta per ottimizzare le variazioni di  $a, e, i$  assegnate.

Le componenti dell'accelerazione, da semplici considerazioni trigonometriche, possono essere riscritte come segue:

$$\begin{cases} A_T = \frac{T}{m} \cos \alpha \cos \beta \\ A_R = \frac{T}{m} \sin \alpha \cos \beta \\ A_W = \frac{T}{m} \sin \beta \end{cases}$$

Dove  $\frac{T}{m}$  è il modulo dell'accelerazione,  $\alpha$  è l'angolo nel piano fra il vettore velocità  $\mathbf{V}$  ed il vettore spinta  $\mathbf{T}$  e  $\beta$  è l'angolo compreso tra  $\mathbf{T}$  ed il piano dell'orbita.

Partendo da tutto ciò Edelbaum ha considerato tre differenti problemi:

- Variazione di solo semiasse maggiore.
- Variazione di sola eccentricità.
- Variazione combinata di semiasse ed inclinazione.

Per variazioni di solo semiasse maggiore la soluzione ottimale si ha per  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ , ovvero con spinta solo tangenziale.

Applicando la spinta in modo continuo per un giro completo si ottiene una variazione nulla di eccentricità, mentre la variazione di inclinazione è nulla in ogni punto della traiettoria.

Per variazioni di sola eccentricità la soluzione ottimale si ottiene per  $\beta = 0$ ,  $\tan \alpha = \frac{1}{2} \tan \nu$ .

L'equazione che definisce l'angolo  $\alpha$  risulta ben approssimata se si assume valida la legge  $\alpha = \nu$ .

Da tale approssimazione risulta dunque che la massima variazione di eccentricità si ha applicando la spinta in direzione pressochè perpendicolare alla linea degli apsi.

Anche in questo caso le variazioni di semiasse ed inclinazione sono nulle in un giro completo.

Per variazioni combinate di semiasse ed inclinazione la soluzione ottimale si ha per  $\alpha = 0$ ,  $\beta = k \cos(\omega + \nu)$ , dove  $k$  è una funzione di  $\Delta a$  e  $\Delta i$ .

Anche in questo caso esiste una soluzione approssimata che ben ricalca il comportamento di quella esatta.

Si può infatti ipotizzare che  $\beta$  assuma un valore costante,  $\bar{\beta}$ , e che cambi di segno in base al segno di  $\cos(\omega + \nu)$ :

$$\beta = \begin{cases} \bar{\beta} & \text{se } \cos(\omega + \nu) > 0 \\ -\bar{\beta} & \text{se } \cos(\omega + \nu) < 0 \end{cases}$$

Nel caso di manovre multigiorno si possono avere variazioni consistenti dei parametri orbitali, perciò ad ogni rivoluzione risulta opportuno ridefinire il valore di  $\beta$ .

Risolvendo il problema dell'ottimizzazione di  $\beta$ , ipotizzando traiettorie pressochè circolari con  $\beta$  costante durante ogni rivoluzione, si ottiene:

$$\frac{\sin \beta}{\sqrt{r}} = \text{cost}$$

Da cui si evince che il cambiamento di piano è più conveniente ad alti raggi, dove la velocità è più bassa.

Converrà quindi avere valori di  $\beta$  crescenti all'aumentare del raggio dell'orbita intermedia in cui ci si trova.

Il  $\Delta V$  per variazioni di solo semiasse, eccentricità o inclinazione vale rispettivamente:

$$\begin{aligned} \Delta V_a &= k_a \Delta a = 0.5 \frac{V}{r} \Delta a \\ \Delta V_e &= k_e \Delta e \approx 0.649 V \Delta e \\ \Delta V_i &= k_i \Delta i = \frac{\pi}{2} V \Delta i \end{aligned}$$

Nel caso più generale di variazioni simultanee dei parametri orbitali, il  $\Delta V$  complessivo può essere stimato, in prima approssimazione, come la somma vettoriale dei  $\Delta V$  di ogni singolo cambiamento, considerando quindi fra di loro indipendenti le variazioni  $\Delta a$ ,  $\Delta e$ ,  $\Delta i$ . Ne consegue quindi:

$$\Delta V = \sqrt{(k_a \Delta a)^2 + (k_e \Delta e)^2 + (k_i \Delta i)^2} \quad (2.2)$$

Una delle principali limitazioni dell'approssimazione di Edelbaum è dovuto all'utilizzo delle variazioni medie ottenute in una rivoluzione come base per le stime del consumo finale.

Per missioni brevi tale analisi risulta inaccurata, dal momento che le variazioni di eccentricità e di inclinazione dipendono dalla posizione dello spacecraft lungo l'orbita e non sono quindi funzioni lineari del tempo di volo.

In aggiunta si ricorda che non è stata presa in considerazione l'evoluzione dei parametri  $\Omega$  e  $\omega$  a causa della forma delle equazioni in cui compaiono per il caso in analisi.

## 2.2 Riformulazione del problema di Edelbaum mediante la teoria del controllo ottimale

Le equazioni planetarie di Gauss riportate nel sistema (2.1) sono mal definite per problemi con piccoli valori di eccentricità ed inclinazione, come quello in esame.

In questo caso è possibile adottare un nuovo set di variabili più adatte alla risoluzione del problema.

Vengono quindi introdotte le seguenti variabili:

$$e_x = e \cos(\Omega + \omega), \quad e_y = e \sin(\Omega + \omega), \quad i_x = i \cos \Omega, \quad i_y = i \sin \Omega$$

Le variabili  $e_x$  e  $e_y$  sono legate alla variazione del vettore eccentricità  $\mathbf{e}$ , e dunque alla variazione del valore di eccentricità ed alla rotazione della linea degli apsidi.

Le variabili  $i_x$  e  $i_y$  sono invece legate alla variazione dell'inclinazione ed alla rotazione della linea dei nodi.

Utilizzando la longitudine  $\theta$  come variabile indipendente, il set di equazioni (2.1) può essere riscritto come segue:

$$\frac{da}{d\theta} = 2rA \cos \beta \cos \alpha \quad (2.3a)$$

$$\frac{de_x}{d\theta} = A \cos \beta (2 \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha) \quad (2.3b)$$

$$\frac{de_y}{d\theta} = A \cos \beta (2 \sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha) \quad (2.3c)$$

$$\frac{di_x}{d\theta} = A \sin \beta \cos \theta \quad (2.3d)$$

$$\frac{di_y}{d\theta} = A \sin \beta \sin \theta \quad (2.3e)$$

$$\frac{dt}{d\theta} = \sqrt{\frac{r^3}{\mu}} \quad (2.3f)$$

Dove è stata introdotta l'accelerazione adimensionata  $A = \frac{T/m}{\mu/r^2}$ .

Assumendo appropriati valori medi per  $r$  e  $m$ , le nuove equazioni differenziali non dipendono più dalle variabili di stato, ma solo dalla variabile indipendente  $\theta$ .

### 2.2.1 Leggi di controllo ottimale

Il problema da risolvere partendo dal set di equazioni (2.3) è quello di determinare la legge di controllo che minimizza il tempo necessario per una trasferta fra due determinate orbite, assegnato il tempo iniziale ed assumendo spinta continua per tutta la durata della missione.

Assumendo una velocità angolare costante, il problema può essere risolto minimizzando l'angolo percorso dallo spacecraft o, analogamente, massimizzando  $-\theta_f$  assegnato  $\theta_0$ .

La legge di controllo ottimale può essere ricavata ricorrendo alla teoria del controllo ottimale [12, 15], da cui si ottengono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{2[\lambda_a r + \lambda_e \cos(\theta - \theta_e)]}{X_\alpha} \\ \sin \alpha = \frac{\lambda_e \sin(\theta - \theta_e)}{X_\alpha} \\ \cos \beta = \frac{\sqrt{4[\lambda_a r + \lambda_e \cos(\theta - \theta_e)]^2 + [\lambda_e \sin(\theta - \theta_e)]^2}}{X_\beta} \\ \sin \beta = \frac{\lambda_e \cos(\theta - \theta_e)}{X_\beta} \end{cases} \quad (2.4)$$

In cui sono state introdotte le variabili aggiunte  $\lambda_a$ , relative alla variazione di semiasse,  $\lambda_e$  e  $\theta_e$ , relative alla variazione di eccentricità ed alla rotazione della linea degli apsi,  $\lambda_i$  e  $\theta_i$ , relative alle variazioni di inclinazione e rotazione della linea dei nodi.

Per semplificare la scrittura delle leggi di controllo ottimale sono stati inseriti i termini  $X_\alpha$  e  $X_\beta$  così definiti:

$$\begin{aligned} X_\alpha^2 &= 4[\lambda_a r + \lambda_e \cos(\theta - \theta_e)]^2 + [\lambda_e \sin(\theta - \theta_e)]^2 \\ X_\beta^2 &= 4[\lambda_a r + \lambda_e \cos(\theta - \theta_e)]^2 + [\lambda_e \sin(\theta - \theta_e)]^2 + [\lambda_i \cos(\theta - \theta_i)]^2 \end{aligned}$$

Le variabili aggiunte possono essere riscalate arbitrariamente fissandone il valore di una, per cui il problema può essere risolto determinando il valore di 5 variabili (4 variabili aggiunte e la longitudine finale  $\theta_f$ ) affinché vengano realizzate le variazioni prescritte di  $a$ ,  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $i_x$ ,  $i_y$ .

I problemi analizzati da Edelbaum, riportati nel paragrafo precedente, possono essere ottenuti come casi particolari delle relazioni (2.4).

In generale tuttavia le leggi di controllo ottenute possono essere integrate analiticamente solo in alcuni casi specifici, rendendo la ricerca di una soluzione piuttosto complicata e dispendiosa.

## 2.2.2 Leggi di controllo subottimale

A partire dalle osservazione del paragrafo precedente è possibile trovare un'approssimazione delle leggi di controllo ottimale per rendere analiticamente integrabili il sistema di equazioni (2.3).

Così facendo il costo della trasferta può essere valutato per via algebrica senza dover risolvere un più complesso problema di controllo ottimale.

Per quanto riguarda l'angolo nel piano  $\alpha$ , dalla legge di controllo ottimale si vede come questo dipenda essenzialmente dal rapporto  $\lambda_a/\lambda_e$ , dal segno di  $\lambda_a$  e di  $\lambda_e$  e dall'angolo  $\theta_e$  (Figura 2.1).

Una legge subottimale che ben approssima questo comportamento nell'intervallo  $-\pi \leq \theta - \theta_e \leq \pi$ , è la seguente:

$$\alpha = \begin{cases} \Lambda(\theta - \theta_e) & \text{per } \lambda_a, \lambda_e > 0 \\ \Lambda(\theta - \theta_e) + \pi & \text{per } \lambda_a, \lambda_e < 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

In cui  $\Lambda$  è un valore che dipende dal rapporto  $\lambda_a/\lambda_e$  ed è tale per cui  $0 \leq \Lambda \leq 1$ .

In particolare se  $\Lambda = 0$  la spinta è sempre allineata al vettore velocità ed è dunque puramente tangenziale, mentre se  $\Lambda = 1$  la spinta ha direzione costante.

Come visto nel paragrafo 2.1 i due casi corrispondono, rispettivamente, ad una variazione di solo semiasse maggiore o eccentricità su una rivoluzione completa.

La legge ottimale ottenuta per l'angolo  $\beta$  è invece molto più complessa, dal momento che dipende, oltre che dal rapporto  $\lambda_a/\lambda_e$  e dall'angolo  $\theta_e$ , anche dal rapporto  $\lambda_a/\lambda_i$  e dall'angolo  $\theta_i$ .

In questo caso si ottiene una buona approssimazione assumendo che l'angolo  $\beta$  sia costante a tratti ed assuma quindi due valori differenti a seconda della posizione dello spacecraft lungo l'orbita.

Si consideri ad esempio una trasferta con  $\Delta a, \Delta e_x > 0$ : dove la spinta nel piano è più conveniente, ovvero dove si hanno variazioni concordi di semiasse ed eccentricità,

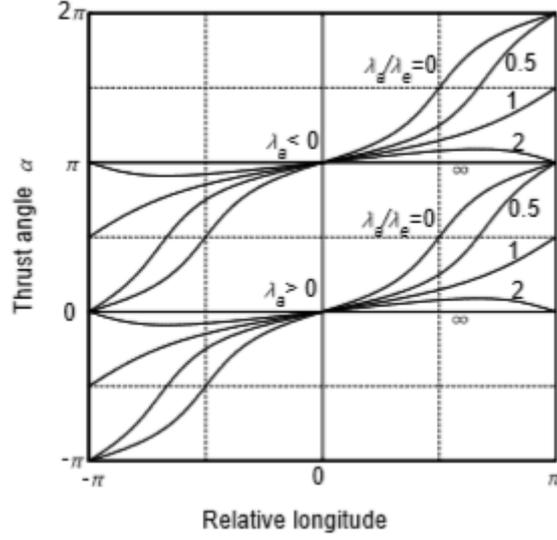


Figura 2.1: Angolo nel piano  $\alpha$  in funzione della longitudine relativa  $\theta - \theta_e$  al variare del rapporto  $\lambda_a/\lambda_e$ .

conviene avere accelerazioni nel piano maggiori; l'opposto vale ovviamente dove le variazioni di semiasse ed eccentricità hanno segno discorde.

L'accelerazione nel piano coincide con il termine  $A \cos \beta$  delle equazioni (2.3), per cui si avranno due angoli  $\beta_s$  e  $\beta_l$ , uno più piccolo ed uno più grande, per avere, rispettivamente, accelerazioni nel piano più elevate o ridotte.

La legge di controllo subottimale in questione è quindi esprimibile come segue:

$$\beta = \begin{cases} \pm\beta_s & \text{per } \theta_e - \pi/2 \leq \theta \leq \theta_e + \pi/2 \\ \pm\beta_l & \text{per } \theta_e + \pi/2 \leq \theta \leq \theta_e + 3\pi/2 \end{cases} \quad (2.6)$$

Il segno di  $\beta_s$  e  $\beta_l$  dipende infine dal segno del termine  $\cos(\theta - \theta_i)$ .

Con l'introduzione delle nuove leggi di controllo le equazioni (2.3a), (2.3b), (2.3c) possono essere riscritte in una forma facilmente integrabile:

$$\frac{da}{d\theta} = 2rA \cos \beta \cos[\lambda(\theta - \theta_e)] \quad (2.7a)$$

$$\frac{de_x}{d\theta} = A \cos \beta \{2 \cos \theta \cos[\lambda(\theta - \theta_e)] + \sin \theta \sin[\lambda(\theta - \theta_e)]\} \quad (2.7b)$$

$$\frac{de_y}{d\theta} = A \cos \beta \{2 \sin \theta \cos[\lambda(\theta - \theta_e)] - \cos \theta \sin[\lambda(\theta - \theta_e)]\} \quad (2.7c)$$

Integrando tali equazioni fra la longitudine iniziale dello spacecraft  $\theta_0$  e quella finale  $\theta_f$  si ottiene:

$$\Delta a = \frac{2rA \cos \beta}{\Lambda} \{ \sin[\Lambda(\theta_f - \theta_e)] - \sin[\Lambda(\theta_0 - \theta_e)] \} \quad (2.8a)$$

$$\begin{aligned} \Delta e_x &= \frac{3A \cos \beta}{2(1-\Lambda)} \{ \sin[(1-\Lambda)\theta_f + \Lambda\theta_e] - \sin[(1-\Lambda)\theta_0 + \Lambda\theta_e] \} + \\ &+ \frac{A \cos \beta}{2(1+\Lambda)} \{ \sin[(1+\Lambda)\theta_f - \Lambda\theta_e] - \sin[(1+\Lambda)\theta_0 - \Lambda\theta_e] \} \end{aligned} \quad (2.8b)$$

$$\begin{aligned} \Delta e_y &= \frac{3A \cos \beta}{2(1-\Lambda)} \{ -\cos[(1-\Lambda)\theta_f + \Lambda\theta_e] + \cos[(1-\Lambda)\theta_0 + \Lambda\theta_e] \} + \\ &+ \frac{A \cos \beta}{2(1+\Lambda)} \{ -\cos[(1+\Lambda)\theta_f - \Lambda\theta_e] + \cos[(1+\Lambda)\theta_0 - \Lambda\theta_e] \} \end{aligned} \quad (2.8c)$$

Le equazioni qui presentate sono valide solo se  $\theta_e - \pi \leq \theta_0$ ,  $\theta_e \leq \theta_e + \pi$ ; in caso contrario è necessario ricondurre l'integrazione all'interno di questi limiti.

Dalle relazioni precedenti è possibile valutare le variazioni dei parametri orbitali lungo una rivoluzione completa ponendo  $\theta_0 = \theta_e - \pi$  e  $\theta_f = \theta_e + \pi$ .

Così facendo le equazioni (2.8) si semplificano ed assumono la forma seguente:

$$(\Delta a)_{2\pi} = \frac{4rA \cos \beta}{\Lambda} \sin(\Lambda\pi) \quad (2.9a)$$

$$(\Delta e_x)_{2\pi} = \left[ \frac{3A}{1-\Lambda} - \frac{A}{1+\Lambda} \right] \cos \beta \sin(\pi\Lambda) \cos \theta_e \quad (2.9b)$$

$$(\Delta e_y)_{2\pi} = \left[ \frac{3A}{1-\Lambda} - \frac{A}{1+\Lambda} \right] \cos \beta \sin(\pi\Lambda) \sin \theta_e \quad (2.9c)$$

$$(\Delta e)_{2\pi} = \left[ \frac{3A}{1-\Lambda} - \frac{A}{1+\Lambda} \right] \cos \beta \sin(\pi\Lambda) \quad (2.9d)$$

Nel caso particolare di spinta tangenziale, ovvero per  $\Lambda = 0$ , si ottiene:

$$(\Delta a)_{2\pi} = 4\pi A \cos \beta r, \quad (\Delta e_x)_{2\pi} = 0, \quad (\Delta e_y)_{2\pi} = 0$$

Si ritrova dunque che con spinta tangenziale per una rivoluzione completa si hanno solo variazioni di semiasse maggiore.

Nel caso particolare di spinta in direzione costante, ovvero per  $\Lambda = 1$ , si ottiene:

$$(\Delta a)_{2\pi} = 0, \quad (\Delta e_x)_{2\pi} = 3\pi A \cos \beta \cos \theta_e, \quad (\Delta e_y)_{2\pi} = 3\pi A \cos \beta \sin \theta_e$$

Per cui l'unica variazione risultante è quella di eccentricità, pari a  $\Delta e = 3\pi A \cos \beta$ .

Per quanto riguarda il moto fuori dal piano è possibile semplificare le equazioni grazie all'ipotesi di  $\beta$  costante e supponendo che sussista una relazione lineare fra il cambio di inclinazione e l'arco percorso durante la trasferta.

Integrando le equazioni (2.3d), (2.3e) con  $\theta_e - \pi/2 \leq \theta \leq \theta_e + \pi/2$  (o analogamente con  $\theta_e + \pi/2 \leq \theta \leq \theta_e + 3\pi/2$ ) si trova che:

$$(\Delta i)_\pi = \left( \sqrt{\Delta i_x^2 + \Delta i_y^2} \right)_\pi = 2A \sin \beta \quad (2.10)$$

Per cui per archi di missione inferiori a mezza rivoluzione, ovvero per  $\Delta\theta \leq \pi$ , con le ipotesi precedenti si ha:

$$\Delta i = 2A \sin \beta (\Delta\theta_f / \pi) \quad (2.11)$$

Per tutta la trattazione l'angolo  $\beta$  è stato ritenuto costante sull'intera rivoluzione: in realtà la legge di controllo (2.6) prevede l'utilizzo di due angoli  $\beta_s$  e  $\beta_l$  ciascuno per mezza rivoluzione.

Tutti gli intervalli di integrazione vanno quindi separati in tutti i punti in cui  $\theta = \theta_e + k\pi/2$  (con  $k$  intero), ovvero dove si hanno discontinuità degli angoli  $\alpha$  o  $\beta$ .

In particolare per quanto riguarda il cambio di inclinazione la (2.11) può essere riscritta affinché sia valida a prescindere dal valore di  $\Delta\theta$ :

$$\Delta i = \frac{2A}{\pi} (\sin \beta_s \Delta\theta_s + \sin \beta_l \Delta\theta_l) \quad (2.12)$$

Con  $\Delta\theta_s$  e  $\Delta\theta_l$  pari, rispettivamente, all'arco percorso con l'angolo  $\beta_s$  e con l'angolo  $\beta_l$ ; ovviamente si ha  $\Delta\theta_s + \Delta\theta_l = \Delta\theta$ .

Il problema così posto richiede dunque la determinazione delle 5 variabili  $\Lambda$ ,  $\theta_e$ ,  $\theta_f$ ,  $\beta_s$  e  $\beta_l$  per soddisfare le variazioni assegnate dei parametri orbitali.

La procedura adottata per la risoluzione del problema viene riportata nel capitolo 3.

## 2.3 Modello a consumo minimo

I modelli descritti nei paragrafi precedenti sono stati formulati per ottenere missioni a tempo minimo per problemi in cui vengono assegnate l'orbita iniziale e quella finale.

La soluzione a tempo minimo richiede che la spinta venga applicata continuamente per tutta la missione: così facendo, tuttavia, il consumo che ne consegue è sicuramente ben lontano dal minimo necessario.

Viene allora spontaneo chiedersi quale sia il modo corretto di eseguire le manovre per ottenere una missione a consumo minimo.

L'idea è quindi quella di osservare le soluzioni fornite da modelli più complessi al fine di capire se l'andamento della spinta segua una qualche regola generale (Cf. [13]).

In generale, si vede come la soluzione ottimale non preveda una spinta continua durante tutta la missione, bensì archi propulsi alternati a fasi di coasting.

Nello specifico gli archi di spinta sono localizzati in prossimità del periastro e dell'apoastro dell'orbita di arrivo: ciò non stupisce dal momento che anche per modelli più semplificati, come quelli a spinta impulsiva, applicare una spinta in tali punti è il modo più semplice ed economico per modificare l'orbita.

Si può quindi pensare di suddividere l'unico arco propulsivo in due archi di spinta fra di loro separati e localizzati rispettivamente al periastro ed all'apoastro dell'orbita di arrivo.

La soluzione così ottenuta risulta migliore di quella precedente, ma non necessariamente vicina a quella ottimale: ciò dipende dal tempo massimo di volo imposto per la missione.

Supponiamo, ad esempio, che il tempo massimo di volo sia fissato a poco più di un anno. In tal caso, con il modello appena descritto, lo spacecraft percorrerebbe all'incirca un po' meno di una rivoluzione intorno al Sole, per una durata complessiva di missione di circa un anno.

In questo caso viene sfruttato tutto il tempo di volo a disposizione, per cui ci si aspetta una soluzione simile a quella ottenuta con modelli più precisi.

Se però il tempo massimo di volo fosse, come nel caso in esame, pari a 3 anni, la missione analizzata con il modello impiegherebbe circa solo un terzo del tempo disponibile.

Ci si chiede quindi se sia possibile trovare una soluzione che impieghi i due anni rimanenti in modo tale da ridurre ulteriormente il costo della missione.

Convieni, in generale, che gli archi di spinta siano concentrati il più possibile attorno ai due punti estremi dell'orbita. Più l'arco di spinta attorno al periastro (o all'apoaastro) è breve e migliore sarà la soluzione ottenuta in termini di consumo di propellente.

Può essere quindi opportuno dividere ulteriormente le due manovre, in modo che le variazioni dei parametri orbitali per ogni manovra siano più contenute e di conseguenza l'arco propulso richiesto sia più ristretto.

Nel nostro caso abbiamo 3 anni a disposizione per compiere la nostra missione: dividendo le due manovre principali in 3 più piccoli archi di manovra sarebbero necessarie, in prima approssimazione, un po' più di due rivoluzioni e mezzo attorno al Sole, dunque il tempo di volo si aggirerebbe intorno ai 3 anni.

In questo caso quindi sarebbe possibile ridurre il consumo di propellente utilizzando tutto il tempo a disposizione per effettuare la trasferta.

In generale si può quindi dire che il numero di archi di spinta ottimali dipenda all'incirca dal rapporto fra il tempo massimo di volo ed il periodo dell'orbita di partenza.

Trasferte con un numero di archi di spinta  $n$  minore di quello ottimale avranno quindi consumi più elevati, mentre trasferte con un numero di archi di spinta maggiore di quello ottimale avrebbero in linea teorica un consumo più basso, ma non rispetterebbero il vincolo imposto sul massimo tempo di volo.

In Figura 2.2 è riportata in termini qualitativi la traiettoria che s'intende simulare per minimizzare il consumo della trasferta.

A questo punto risulta quindi necessario elaborare un modello in grado di ripartire la variazione assegnata dei parametri orbitali fra i diversi archi di spinta ora previsti.

La trattazione, che verrà riportata in tutte le sue varianti nel paragrafo 3.1, prevede che il raggio al periastro (o all'apoaastro) rimanga invariato durante la manovra e che, ovviamente, la somma di tutti i  $\Delta a$ ,  $\Delta e_x$ ,  $\Delta e_y$  di ogni singolo arco siano uguali al  $\Delta a$ ,  $\Delta e_x$ ,  $\Delta e_y$  totale richiesto.

Per semplicità si suppone che tutte le manovre al periastro (o all'apoaastro) prevedano le stesse variazioni dei parametri orbitali.

Così facendo rimane da risolvere il problema di determinare la ripartizione ottimale dell'inclinazione.

L'idea di fondo, introdotta nel paragrafo 3.2 e verificata nel paragrafo 4.2, è che la ripartizione ottimale del  $\Delta i$  totale sia funzione della lunghezza del singolo arco

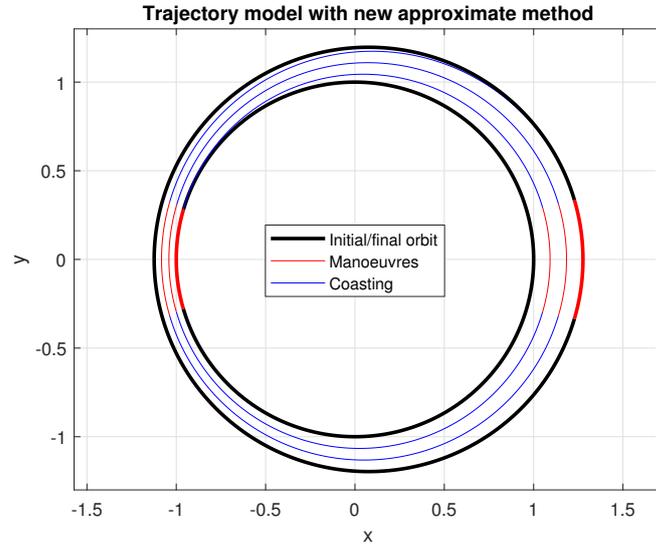


Figura 2.2: Modello di traiettoria ottenuto con il metodo approssimato, ipotizzando per semplicità  $\Delta e_y = 0$  e  $\Delta i = 0$ .

propulso e dunque, indirettamente, delle variazioni di semiasse ed eccentricità, da cui tale lunghezza risulta influenzata.

Una volta determinate le variazioni dei parametri orbitali per le singole manovre è quindi possibile utilizzare il modello descritto nella sezione precedente per risolvere ogni singolo arco.

Il  $\Delta V$  complessivo, da cui sarà possibile ricavare la massa di propellente consumata, sarà pari alla somma dei  $\Delta V$  di ogni singolo arco.

Un'ulteriore vantaggio si ha per quanto riguarda il recupero dello sfasamento finale, che risulta più semplice e meno penalizzante che nel caso a spinta continua. L'argomento verrà introdotto ed approfondito nel paragrafo 3.4.

## Capitolo 3

# Metodologia e procedura

In questo capitolo vengono riportate la metodologia e la procedura con cui è stato implementato il modello a consumo minimo esposto nel capitolo precedente.

Nei primi paragrafi viene descritto il metodo con cui le variazioni dei parametri orbitali sono ripartite fra i singoli archi di manovra.

Per quanto riguarda semiasse maggiore ed eccentricità è stato possibile ricorrere ad un approccio analitico, mentre per l'inclinazione è stato necessario condurre simulazioni ad hoc al fine di trovare la ripartizione ottimale.

La procedura di calcolo e la valutazione e correzione dello sfasamento sono invece riportati nei paragrafi 3.3 e 3.4.

### 3.1 Ripartizioni di $\Delta a$ e $\Delta e$ fra le manovre principali

Prima di procedere alla ripartizione delle variazioni dei parametri orbitali, è opportuno riscrivere le equazioni che definiscono il semiasse maggiore e l'eccentricità dell'orbita in una forma più maneggevole per i nostri conti.

Le orbite iniziali e finali hanno, rispettivamente, semiasse maggiore pari a  $a_1 = \frac{r_{p1} + r_{a1}}{2}$ ,  $a_2 = \frac{r_{p2} + r_{a2}}{2}$ , per cui si ha:

$$\Delta a = a_2 - a_1 = \frac{r_{p2} - r_{p1}}{2} + \frac{r_{a2} - r_{a1}}{2} = \frac{\Delta r_p + \Delta r_a}{2} \quad (3.1)$$

Dalla conoscenza del raggio al periastro e del semiasse maggiore è possibile risalire all'eccentricità dell'orbita:

$$\begin{aligned} r_{p1} &= a_1(1 - e_1) \rightarrow e_1 = 1 - \frac{r_{p1}}{a_1} \\ r_{p2} &= a_2(1 - e_2) \rightarrow e_2 = 1 - \frac{r_{p2}}{a_2} \end{aligned}$$

Perciò la variazione di eccentricità può essere così scritta:

$$\Delta e = e_2 - e_1 = 1 - \frac{r_{p2}}{a_2} - 1 + \frac{r_{p1}}{a_1} = \frac{r_{p1}a_2 - r_{p2}a_1}{a_1a_2} \quad (3.2)$$

A questo punto, ricordando che  $a_2 = a_1 + \Delta a$ ,  $r_{p2} = r_{p1} + \Delta r_p$  e sostituendo nella (3.2), si ottiene:

$$\begin{aligned}
\Delta e &= \frac{r_{p1}a_1 + r_{p1}\Delta a - (r_{p1}a_1 + \Delta r_p a_1)}{a_1(a_1 + \Delta a)} \\
&= \frac{r_{p1}\Delta a - \Delta r_p a_1}{a_1(a_1 + \Delta a)} \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Per cui le variazioni complessive  $\Delta a$  e  $\Delta e$ , assegnate, dipendono dall'orbita iniziale tramite  $r_{p1}$  e  $a_1$  e dalle variazioni  $\Delta r_p$  e  $\Delta r_a$ .

La ripartizione di  $\Delta a$  e  $\Delta e$  avviene su due manovre, una centrata al periastro ed una all'apoaastro, per cui si suppone che la variazione, rispettivamente, di raggio al periastro e raggio all'apoaastro sia nulla.

Si hanno quindi due uniche variabili  $\Delta r_a^*$  e  $\Delta r_p^*$ , che rappresentano la variazione di raggio all'apoaastro dovuto alla manovra al periastro, e variazione di raggio al periastro dovuto alla manovra all'apoaastro.

Al fine di semplificazione la notazione, si pone  $\Delta p = \Delta r_p^*$ ,  $\Delta k = \Delta r_a^*$ ,  $r = r_{p1}$ ,  $a = a_1$ .

Le equazioni (3.1) e (3.3) vengono quindi riscritte come:

$$\Delta a = \frac{\Delta p + \Delta k}{2} \tag{3.4}$$

$$\Delta e = \frac{r\Delta a - a\Delta p}{a(a + \Delta a)} \tag{3.5}$$

Servono ora due equazioni per rendere il sistema determinato. Tali equazioni sono molto semplicemente:

$$\begin{cases} \Delta a = \Delta a_1 + \Delta a_2 \\ \Delta e = \Delta e_1 + \Delta e_2 \end{cases} \tag{3.6}$$

In cui  $\Delta a_1$ ,  $\Delta e_1$ ,  $\Delta a_2$ ,  $\Delta e_2$  e possono essere riscritte come caso specifico delle (3.1), (3.3), annullando uno alla volta le variazioni  $\Delta r_p$  e  $\Delta r_a$ . L'indice 1 è relativo alla manovra al periastro, l'indice 2 a quella all'apoaastro.

Dalla risoluzione del sistema (3.6) si ricavano i valori di  $\Delta p$  e  $\Delta k$ , dai quali è possibile risalire alle variazioni  $\Delta a_1$ ,  $\Delta e_1$ ,  $\Delta a_2$ ,  $\Delta e_2$  mediante le equazioni (3.1), (3.3).

Nei paragrafi successivi il problema della ripartizione viene risolto sotto differenti ipotesi iniziali, a cui conseguono diversi gradi di accuratezza della soluzione.

### 3.1.1 Metodo A

Il primo caso che verrà analizzato è quello ottenuto con il maggior numero di approssimazioni.

La variazione di semiasse maggiore viene assunta trascurabile rispetto agli altri termini; l'orbita di partenza è circolare e ha semiasse unitario; viene inoltre trascurata la variazione di  $a$  fra una manovra e l'altra, dunque l'ordine delle manovre non è rilevante.

Le ipotesi possono essere così riassunte:

$$\begin{cases} |\Delta a| \ll 1 \\ a = r = \text{cost} = 1 \end{cases}$$

Per cui la (3.5) può essere riscritta come:

$$\Delta e = \Delta a - \Delta p = \frac{\Delta k - \Delta p}{2} \quad (3.7)$$

Per la manovra al periastro ( $\Delta r_p = 0$ ) dalle (3.4) e (3.7) si ottiene:

$$\Delta a_1 = \frac{\Delta k}{2}, \quad \Delta e_1 = \frac{\Delta k}{2}$$

Per la manovra all'apoastro ( $\Delta r_a = 0$ ) si ottiene:

$$\Delta a_2 = \frac{\Delta p}{2}, \quad \Delta e_2 = -\frac{\Delta p}{2}$$

Perciò, sostituendo nel sistema di equazioni (3.6), si ha:

$$\begin{cases} \Delta a = \frac{\Delta k + \Delta p}{2} \\ \Delta e = \frac{\Delta k - \Delta p}{2} \end{cases} \quad (3.8)$$

La soluzione può essere ricavata immediatamente sommando e sottraendo le due equazioni:

$$\begin{cases} \Delta k = \Delta a + \Delta e \\ \Delta p = \Delta a - \Delta e \end{cases} \quad (3.9)$$

Per cui le variazioni dei parametri orbitali ad ogni manovra sono:

$$\begin{cases} \Delta a_1 = \frac{\Delta a + \Delta e}{2} \\ \Delta e_1 = \frac{\Delta a + \Delta e}{2} \\ \Delta a_2 = \frac{\Delta a - \Delta e}{2} \\ \Delta e_2 = \frac{\Delta e - \Delta a}{2} \end{cases} \quad (3.10)$$

In sintesi, ad ogni manovra le variazioni richieste di semiasse ed eccentricità hanno stesso modulo e stesso segno per manovre al periastro, stesso modulo ma segno opposto per manovre all'apoastro.

Nel caso particolare di  $\Delta a = \pm \Delta e$ , la soluzione prevede un'unica manovra centrata al periastro o all'apoastro a seconda del segno della relazione.

In generale è facile vedere come i moduli delle due grandezze influenzino il segno delle variazioni durante le manovre.

Se  $|\Delta a| > |\Delta e|$  entrambe le manovre porteranno ad aumento ( $\Delta a > 0$ ) o diminuzione ( $\Delta a < 0$ ) di semiasse maggiore; in caso contrario, il semiasse verrà aumentato e poi diminuito (o viceversa) per ottenere la variazione complessiva assegnata.

### 3.1.2 Metodo B

In questo caso, più complesso ma accurato, la variazione di semiasse non viene più trascurata; l'orbita di partenza è ellittica, mentre si chiede che la trattazione valga anche per orbite di partenza diverse da quella terrestre; l'ordine delle manovre risulta ancora ininfluenza sul risultato finale.

Le ipotesi sono riassumibili come:

$$\begin{cases} |\Delta a| > 0 \\ a \neq r \neq 1 \\ a, r = \text{cost} \end{cases}$$

Per la manovra al periastro ( $\Delta r_p = 0$ ) dalle (3.4) e (3.7) si ottiene:

$$\Delta a_1 = \frac{\Delta k}{2}, \quad \Delta e_1 = \frac{r \frac{\Delta k}{2}}{a(a + \frac{\Delta k}{2})}$$

Per la manovra all'apoaastro ( $\Delta r_a = 0$ ) si ottiene:

$$\Delta a_2 = \frac{\Delta p}{2}, \quad \Delta e_2 = \frac{r \frac{\Delta p}{2} - a \Delta p}{a(a + \frac{\Delta p}{2})}$$

Perciò, sostituendo nel sistema di equazioni (3.6), si ha:

$$\begin{cases} \Delta a = \frac{\Delta k + \Delta p}{2} \\ \Delta e = \frac{r \frac{\Delta k}{2} (a + \frac{\Delta p}{2}) + r \frac{\Delta p}{2} (a + \frac{\Delta k}{2}) - a \Delta p (a + \frac{\Delta k}{2})}{a(a + \frac{\Delta k}{2})(a + \frac{\Delta p}{2})} \end{cases} \quad (3.11)$$

Sostituendo e svolgendo i calcoli nella seconda equazione, si ottiene:

$$\begin{cases} \Delta k = 2\Delta a - \Delta p \\ \Delta e = 2 \frac{ar(\Delta k + \Delta p) + (r - a)2\Delta k\Delta p - 2a^2\Delta p}{a(2a + \Delta k)(2a + \Delta p)} \end{cases} \quad (3.12)$$

Sostituendo la prima equazione nella seconda, svolgendo i calcoli ed ordinando secondo le potenze di  $\Delta p$  si ottiene un'equazione di secondo grado:

$$A\Delta p^2 + B\Delta p + C = 0$$

Con:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\Delta e}{4} + \frac{r}{2a} - \frac{1}{2} \\ B &= \Delta a \left( \frac{\Delta e}{2} - \frac{r}{a} + 1 \right) + a \\ C &= (a^2 - a\Delta a)\Delta e - r\Delta a \end{aligned}$$

Nel caso particolare di partenza dall'orbita terrestre, considerando  $a = r_p = 1$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\Delta e}{4} \\ B &= \frac{\Delta a \Delta e}{2} + 1 \\ C &= (1 + \Delta a)\Delta e - \Delta a \end{aligned}$$

L'equazione di secondo grado in  $\Delta p$ , da un punto di vista matematico, presenta due soluzioni:

$$\Delta p_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Da un punto di vista pratico, tuttavia, solo la soluzione con segno  $+$  è degna di nota; l'altra soluzione, infatti, prevede variazioni dei parametri orbitali così elevate che non solo violano le ipotesi dell'approssimazione di Edelbaum, ma risultano anche impossibili da punto di vista fisico e, in ogni caso, per nulla convenienti.

Ricavato il valore di  $\Delta p$  è dunque possibile sostituire nella prima equazione del sistema (3.12) per ottenere  $\Delta k$ ; note le due variazioni  $\Delta p$  e  $\Delta k$  si risale ai valori di  $\Delta a_1$ ,  $\Delta e_1$ ,  $\Delta a_2$ ,  $\Delta e_2$  come nel caso precedente.

In Figura 3.1 e Figura 3.2 sono riportati gli andamenti delle variazioni dei parametri orbitali ottenute con i due modelli di calcolo illustrati, assumendo  $\Delta e = 0.108$  e  $\Delta a$  variabile.

Com'era prevedibile il modello semplificato ricalca fedelmente il modello più accurato nella parte iniziale dei grafici, ovvero dove  $\Delta a \approx 0$ , per poi discostarsi dalla soluzione più precisa al crescere di  $\Delta a$ .

In Figura 3.3 sono invece valutate le differenze relative fra i parametri orbitali previsti dai due metodi. Tali differenze sono definite come:

$$\text{diff}_{\Delta x_j} = \frac{\Delta x_{j,B} - \Delta x_{j,A}}{\Delta x_{tot}}$$

Con  $\Delta x$  ad indicare la variazione di semiasse maggiore  $\Delta a$  o di eccentricità  $\Delta e$ , mentre l'indice  $j$  vale 1 per manovre al periastro e 2 per manovre all'apoaastro.

Fissato il valore di  $\Delta e_{tot}$  la differenza relativa fra i  $\Delta a_j$  ha un valore ridotto e praticamente costante al variare di  $\Delta a_{tot}$ , mentre la differenza relativa fra i  $\Delta e_j$  aumenta al crescere della variazione complessiva di semiasse maggiore.

Sebbene le differenze relative fra i  $\Delta a$  e  $\Delta e$  dei due modelli risultino limitati nel campo di interesse, nella pratica occorrerà valutare il  $\Delta V$  e la massa di propellente

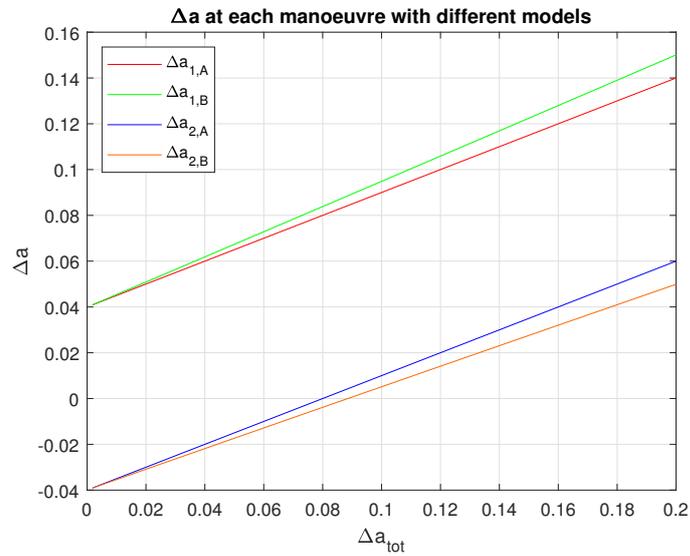


Figura 3.1: Ripartizione della variazione di semiasse maggiore fra le due manovre per entrambi i modelli analizzati al variare del  $\Delta a$  totale. Gli indici 1, 2 corrispondono, rispettivamente, a manovre al periastro ed all'apoastro. Gli indici A, B individuano il metodo adottato per la ripartizione.

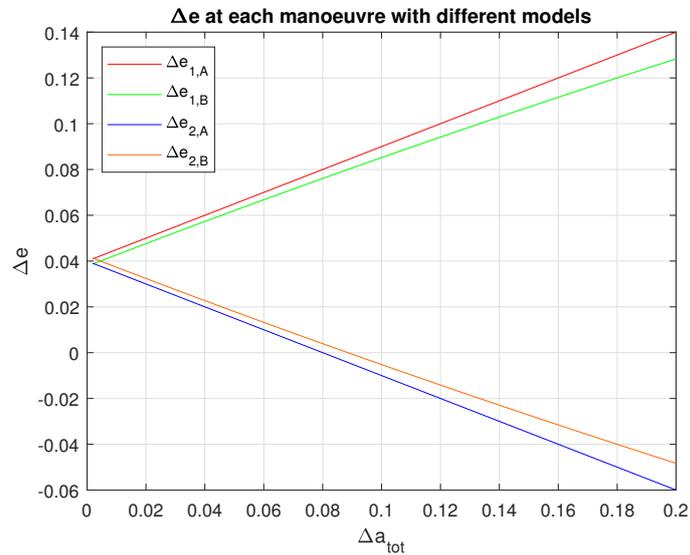


Figura 3.2: Ripartizione della variazione di eccentricità fra le due manovre per entrambi i modelli analizzati al variare del  $\Delta a$  totale. Gli indici 1, 2 corrispondono, rispettivamente, a manovre al periastro ed all'apoastro. Gli indici A, B individuano il metodo adottato per la ripartizione.

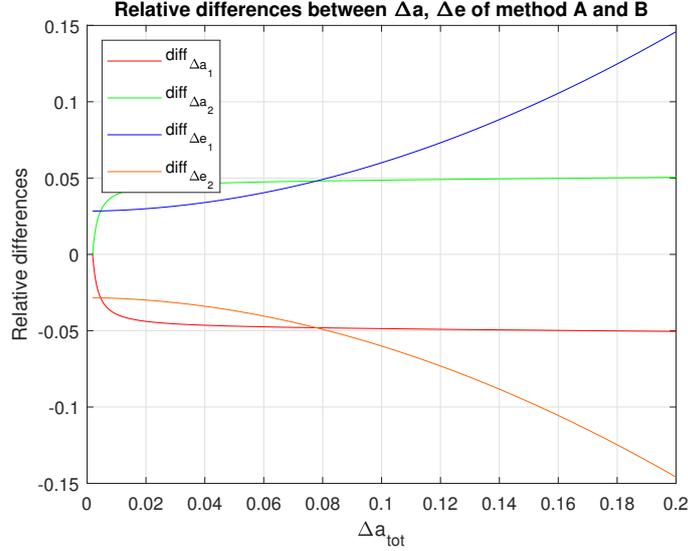


Figura 3.3: Differenze relative fra le variazioni di parametri orbitali ottenute con i due metodi esposti in relazione alla variazione complessiva della grandezza in esame.

applicando entrambi i metodi; solo sulla base dei risultati ottenuti sarà possibile effettuare considerazioni più significative sulla validità del modello semplificato.

Va infine ricordato che entrambi i modelli non tengono conto delle variazioni di semiasse maggiore durante le singole manovre.

L'approssimazione può dare risultati soddisfacenti solo finché tali variazioni sono relativamente piccole, ovvero finché le orbite intermedie possono essere confuse con quella di partenza.

All'aumentare del  $\Delta a$  e del  $\Delta e$  complessivo tale ipotesi viene meno e dunque il modello adottato non è più in grado di approssimare la soluzione esatta con sufficiente accuratezza.

### 3.2 Ripartizione di $\Delta i$ fra le manovre principali

Rimane da risolvere il problema legato all'ottimizzazione della ripartizione della variazione di inclinazione, al fine di ottenere il minimo  $\Delta V$  possibile.

L'idea di fondo è quella di effettuare, per ogni manovra, cambi di inclinazione proporzionali alle variazioni degli altri parametri orbitali.

La lunghezza dei singoli archi propulsi è infatti legata alle variazioni di semiasse ed eccentricità: maggiore sono tali variazioni e maggiore dovrà essere l'arco in cui applicare la spinta, e dunque anche il tempo di volo propulso ed il  $\Delta V$  aumentano.

Come si è visto nel paragrafo 2.2, l'accelerazione nel piano dipende, oltre che dall'accelerazione adimensionata  $A$ , anche dall'angolo  $\beta$  attraverso il termine  $\cos \beta$ .

Fissati  $\Delta a$  e  $\Delta e$ , il minimo angolo propulso ottenibile è quello con  $\beta = 0$ , che si ottiene solo quando la variazione assegnata di inclinazione è nulla.

All'aumentare del cambio di inclinazione è necessario aumentare il valore dell'angolo  $\beta$ , per cui la spinta nel piano diminuisce e l'arco necessario a variare i parametri orbitali aumenta di conseguenza.

Per grandi variazioni di inclinazione (rispetto a quelle nel piano) l'angolo  $\beta$  assume valori prossimi a  $90^\circ$  e la spinta fuori dal piano raggiunge il suo valore massimo.

Per cambi ancora più elevati non è più possibile risolvere il problema semplicemente aumentando l'angolo  $\beta$ , per cui risulta necessario aumentare ulteriormente la lunghezza dell'arco.

Ci si aspetta quindi che nell'intorno di questa condizione la curva  $\Delta V - \Delta i$  presenti andamenti differenti.

Ciò detto, il problema analizzato deve suddividere il  $\Delta i$  totale fra due manovre differenti, il cui  $\Delta V$ , per quanto detto, assumerà il suo valore minimo per  $\Delta i_j = 0$  ed il suo valore massimo per  $\Delta i_j = \Delta i$ .

Non essendo possibile ricorrere ad un approccio analitico, data la complessità del modello utilizzato, è stato necessario condurre simulazioni numeriche ad hoc.

Fissato un generico asteroide target, il modello è stato testato con ripartizioni di  $\Delta i$  differenti fra le due manovre, fermo restando che la somma delle due ripartizioni dia ancora la variazione di inclinazione totale.

Successivamente sono state valutate le singole soluzioni a periastro ed apoastro, nonché la soluzione complessiva, al fine di verificare se quanto detto ad inizio paragrafo circa la ripartizione ottimale sia corretto.

Nel paragrafo 4.2 sono riportati i risultati ottenuti per alcuni asteroidi in particolare, in modo da validare il modello per casi differenti.

In particolare mediante le curve  $\Delta V - \Delta i$  è stato possibile formulare una legge in grado di individuare con ottima precisione la ripartizione ottimale del  $\Delta i$ , a cui corrisponde il minimo del consumo di propellente.

### 3.3 Implementazione del modello

In questo paragrafo viene descritta la procedura seguita per implementare e risolvere problemi a consumo minimo adottando il modello descritto nel paragrafo 2.2 ed apportando le modifiche riportate nel paragrafo 2.3.

Una volta definite le variazioni dei parametri orbitali per ogni manovra (paragrafi 3.1 e 3.2) si ricorre ad una procedura iterativa che, mediante le equazioni (2.8) e (2.12), permette di ottenere i valori di  $\Lambda$ ,  $\theta_e$ ,  $\Delta\theta$ ,  $\beta_s$  e  $\beta_l$  per i quali si ottengono le variazioni  $\Delta a$ ,  $\Delta e_x$ ,  $\Delta e_y$  e  $\Delta i$  assegnate.

La procedura richiede una soluzione di tentativo da cui iniziare.

Una stima iniziale dell'angolo  $\beta$  può essere ricavata a partire dall'equazione (2.2), per cui si ha:

$$\beta = \arcsin \frac{k_i \Delta i}{\Delta V} \quad (3.13)$$

A partire da questo valore vengono definiti gli angoli  $\beta_s$  e  $\beta_l$ , fra i quali si ipotizza valida la relazione parametrica:

$$\sin \beta_s = (1 - f) \sin \beta_l \quad (3.14)$$

Il valore iniziale assunto per l'angolo  $\theta_e$  è invece valutato a partire dalle variazioni del vettore eccentricità:

$$\theta_e = \arctan \frac{\Delta e_y}{\Delta e_x} \quad (3.15)$$

Ipotizzando una dipendenza lineare delle variazioni dei parametri orbitali rispetto all'angolo  $\Delta\theta$  è possibile stimare la lunghezza dell'arco di missione e  $\Lambda$ .

Si considerino valide dunque le relazioni seguenti:

$$\Delta a = (\Delta a)_{2\pi} \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{4rA \cos \beta}{\Lambda} \sin(\Lambda\pi) \frac{\Delta\theta}{2\pi} \quad (3.16)$$

$$\Delta e = (\Delta e)_{2\pi} \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \left[ \frac{3A}{1-\Lambda} - \frac{A}{1+\Lambda} \right] \cos \beta \sin(\pi\Lambda) \frac{\Delta\theta}{2\pi} \quad (3.17)$$

Con  $(\Delta a)_{2\pi}$  e  $(\Delta e)_{2\pi}$  riportati nelle equazioni (2.9).

Un valore di tentativo per  $\Delta\theta$  può essere ottenuto esplicitando la variabile nella prima equazione; la variabile  $\Lambda$  può essere invece stimata valutando il rapporto  $\Delta e/\Delta a$  e risolvendo un'equazione di secondo grado in  $\Lambda$ , ottenendo:

$$\Lambda = \frac{-1 + \sqrt{1 + 16r(\Delta e/\Delta a)[1 + r(\Delta e/\Delta a)]}}{4[1 + r(\Delta e/\Delta a)]} \quad (3.18)$$

Per l'ipotesi di orbite quasi circolari è possibile definire alcuni variabili del problema come valor medi di altre grandezze.

Definendo il valor medio del semiasse maggiore come  $a_{avg} = \frac{a_1 + a_2}{2}$ , con  $a_1$  e  $a_2$  pari al semiasse maggiore dell'orbita terrestre e di quella dell'asteroide, si assume:

$$r = a_{avg}, \quad \omega = \sqrt{\frac{\mu}{a_{avg}^3}}$$

In realtà conviene utilizzare diversi valori di  $a_{avg}$  per valutare  $\omega$  in modi differenti a seconda della manovra considerata, in modo da tener conto della diversa velocità angolare a periastro ed apoastro.

La durata della missione, la massa finale ed il  $\Delta V$  vengono stimati come segue:

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} \quad (3.19)$$

$$m_f = m_0 - \Delta t(T/c) \quad (3.20)$$

$$\Delta V = \Delta t(T/m) \quad (3.21)$$

Con  $m$  pari alla massa media fra inizio e fine manovra, dunque  $m = (m_0 + m_f)/2$ .

L'accelerazione adimensionale  $A$  viene calcolata in riferimento alla massa media.

A partire da queste informazioni è possibile calcolare le corrispondenti variazioni dei parametri orbitali per il caso piano mediante le equazioni (2.8); tali valori vengono successivamente confrontati con quelli assegnati per valutare gli errori  $\mathbf{E}$ .

In seguito i parametri  $\mathbf{p} = (\Lambda \theta_e \Delta\theta)^T$  vengono variati di una piccola quantità ( $10^4$  nel nostro caso) per valutare le derivate degli errori  $\partial\mathbf{E}/\partial\mathbf{p}$  mediante uno schema alle differenze centrate.

I parametri sono poi corretti al fine di annullare gli errori  $\mathbf{E}$ :

$$\Delta \mathbf{p} = -K \left[ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{p}} \right]^{-1} \mathbf{E} \quad (3.22)$$

Con  $K$  fattore di rilassamento pari a  $1/20$ , utilizzato per evitare problemi di convergenza; ciò aumenta il numero di iterazioni e quindi il tempo computazionale della procedura ma garantisce una maggior robustezza della stessa.

L'angolo  $\beta_l$  – e dunque anche  $\beta_s$ , data la relazione (3.14) – viene determinato in modo tale da soddisfare il  $\Delta i$  richiesto:

$$\beta_l = \arcsin \frac{\pi \Delta i}{2A(\Delta \theta_l + f \Delta \theta_s)} \quad (3.23)$$

Vengono quindi rivalutati  $\Delta t$ ,  $m_f$  e  $\Delta V$  con le equazioni (3.19), (3.20), (3.21) e si riparte con una nuova iterazione utilizzando i valori precedentemente calcolati.

La legge di controllo per l'angolo  $\alpha$  viene inizialmente scelta in base al segno di  $\Delta a$ ; se non si raggiunge la convergenza entro 1000 iterazioni si effettuano altrettante iterazioni con la legge di controllo alternativa.

Le iterazioni si fermano quando la norma degli errori calcolata è inferiore ad una certa soglia prefissata ( $10^{-6}$  nel nostro caso).

L'intera procedura viene ripetuta per diversi valori del parametro  $f$ , dunque per diversi valori iniziali di  $\beta_s$  e  $\beta_l$ , alla ricerca della soluzione a consumo minimo.

Un ciclo temporale esterno permette di effettuare tutti i calcoli al variare dell'istante iniziale, che può assumere valori compresi fra il 01/01/2020 ed il 31/12/2020, con un numero di passi fissato; al termine di ogni iterazione temporale il  $\Delta V$  viene confrontato con il minimo ottenuto fino a quel momento e la miglior soluzione viene salvata.

La finestra di lancio considerata ha durata pari ad un solo anno perchè, essendo l'orbita di partenza quella terrestre, dopo un anno intero lo spacecraft si ritrova nella stessa posizione.

L'asteroide invece si muove su un'orbita con periodo differente, dunque per valutare lo sfasamento sarà necessario tenere in considerazione l'intero intervallo 2020-2023.

L'intera procedura viene ripetuta per entrambe le manovre al periastro ed all'apoastro; al termine dei conti il  $\Delta V$  totale viene ottenuto come la somma dei  $\Delta V$  delle due manovre principali, mentre la massa finale viene valutata ricorrendo all'equazione di Tsiolkovsky:

$$m_f = m_0 e^{-\frac{\Delta V}{c}} \quad (3.24)$$

Viene infine effettuata una valutazione approssimata dello sfasamento  $\Sigma$  fra spacecraft ed asteroide con il metodo descritto nel paragrafo successivo.

Il tempo totale di missione viene valutato come somma dei tempi associati agli archi propulsi e quelli associati alla fasi di coasting; la stessa procedura viene adottata per il calcolo del  $\Delta \theta$  totale percorso dallo spacecraft.

Noto l'istante finale valutato nel range 01/01/2020 - 31/12/2020 è possibile valutare la posizione dell'asteroide anche per gli anni successivi, semplicemente sommando multipli di un anno alla data trovata.

Ricorrendo alla trigonometria sferica viene infine calcolato l'angolo percorso dall'asteroide target, per cui si hanno tutti gli elementi per valutare lo sfasamento.

Per valutare lo sfasamento minimo, e quindi la data di lancio migliore, vengono considerate missioni sia con partenza al periastro sia all'apoastro.

La procedura utilizzata per una manovra non tiene conto degli effetti dovuti all'altra (diminuzione di massa, presenza di orbite intermedie, ecc.), dunque la soluzione finale viene ottenuta semplicemente come sovrapposizione delle due singole soluzioni.

Tale approssimazione risulta plausibile dal momento che stiamo trattando trasferite con piccole variazioni degli elementi orbitali, dunque le stime ottenute non dovrebbero discostarsi eccessivamente dal caso reale.

La presenza di archi di spinta multipli può essere tuttavia contemplata all'interno di ogni singola manovra principale, modificando la (3.20) come segue:

$$m_f = m_0 - \Delta t(T/c)n \quad (3.25)$$

Moltiplicando per il numero di archi  $n$  il termine  $\Delta t(T/c)$  viene tenuta in considerazione la diminuzione della massa media durante le  $n$  manovre, per cui alla manovra successiva si avrà un'accelerazione maggiore ed un consumo di propellente minore.

Così facendo è possibile stimare l'effetto della variazione della massa senza dover necessariamente utilizzare l'intera procedura per più volte.

Anche nel calcolo del  $\Delta V$  associato al singolo arco di manovra viene quindi tenuta in considerazione la progressiva diminuzione della massa: il  $\Delta V$  dipende infatti dalla massa media, come riportato nell'equazione (3.21).

I valori di  $\Delta V$ ,  $\Delta t$  e  $\Delta\theta$  associati a ciascuna manovra principale vengono infine ottenuti moltiplicando i valori corrispondenti a ciascun arco per il numero di archi.

### 3.4 Valutazione dello sfasamento e correzioni del $\Delta V$

Fino ad ora nella presentazione della procedura è stato tralasciato il problema del rendezvous fra spacecraft ed asteroide target, concentrandosi soltanto sulla stima del costo della trasferta fra due orbite assegnate ad un dato tempo iniziale.

Al fine di eseguire un rendezvous, tuttavia, è necessario che, al tempo finale, la posizione e la velocità dello spacecraft e del target coincidano.

Una volta raggiunta l'orbita finale nulla ci garantisce, allo stato attuale, che lo spacecraft si trovi nello stesso punto in cui si trova dell'asteroide.

Viene definito sfasamento, indicato con la lettera  $\Sigma$ , la distanza angolare, valutata nel piano dell'orbita di arrivo, fra spacecraft e target al tempo finale.

Tale angolo può essere ricavato come differenza fra gli angoli che descrivono, rispettivamente, la posizione di spacecraft e asteroide rispetto ad un riferimento iniziale, che per comodità viene fatto coincidere con la semiretta che unisce Sole e spacecraft al momento della partenza.

Il primo di questi angoli coincide quindi con il  $\Delta\theta$  della missione; il secondo può essere invece ricavato dalla trigonometria sferica:

$$\cos \Delta\theta_{target} = \sin b_1 \sin b_2 + \cos b_1 \cos b_2 \cos (l_2 - l_1) \quad (3.26)$$

Dove  $b$  è la longitudine eclittica e  $l$  la latitudine eclittica, con il Sole al centro del sistema di coordinate eclittiche.

Le grandezze relative allo spacecraft all'istante iniziale sono contrassegnate dall'indice 1, quelle relative all'asteroide all'istante finale dall'indice 2.

Lo sfasamento  $\Sigma$  risulta quindi pari a:

$$\Sigma = \Delta\theta - \Delta\theta_{target} \quad (3.27)$$

Una corretta valutazione dello sfasamento prevede che l'angolo  $\Sigma$  sia ricondotto nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ .

Per convenzione lo sfasamento è considerato positivo se lo spacecraft si trova in anticipo di fase rispetto al target e negativo in caso contrario.

Dovrebbe essere possibile, in linea di massima, trovare un certo tempo iniziale per cui lo sfasamento  $\Sigma$  fra i due corpi sia nullo: in tal caso il modello finora descritto risulterebbe soddisfacente per una stima del costo della missione.

Nei problemi reali, tuttavia, il tempo iniziale non può variare liberamente, ma si ritrova ad essere vincolato fra due estremi per ragioni pratiche.

In tal caso è possibile che lo sfasamento minimo ottenibile non sia nullo, motivo per cui risulta opportuno applicare delle correzioni alle stime ottenute, in modo da tenere conto del costo aggiuntivo necessario all'esecuzione del rendezvous.

Vengono di seguito presentate le soluzioni, adottate o proposte, per tener conto dello sfasamento nel calcolo del  $\Delta V$  totale per missioni a spinta continua (paragrafo 3.4.1) e missioni con archi propulsi alternati a fasi di coasting (paragrafo 3.4.2).

L'incremento del  $\Delta V$  della missione sarà, in generale, piuttosto contenuto per valori di  $\Sigma$  ridotti, mentre potrebbe risultare molto più ingente in caso di alti valori di sfasamento.

### 3.4.1 Soluzione per spinta continua

Una procedura in grado di valutare la correzione da applicare al  $\Delta V$  è stata elaborata in precedenza nell'articolo [14].

Il costo complessivo del rifasamento può essere stimato dall'espressione sottostante:

$$\Delta V_{rv}/\Delta V = 1 + C_1 C_2 C_3 (\Delta V_\Sigma/\Delta V) \quad (3.28)$$

Con  $\Delta V_{rv}$  che indica il  $\Delta V$  totale necessario al rendezvous, mentre  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  sono fattori correttivi pari a:

$$C_1 = \frac{1 + 0.5 \text{sign}(\Sigma \Delta a)(k_a \Delta a)}{\sqrt{(k_a \Delta a)^2 + (k_e \Delta e)^2}} \quad (3.29)$$

$$C_2 = \begin{cases} 1 - 0.8(16/9)(k_i \Delta i / \Delta V_0)^2 & \text{se } |k_i \Delta i / \Delta V_0| \leq 0 \\ 1 - 0.8(16)(1 - k_i \Delta i / \Delta V_0)^2 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3.30)$$

$$C_3 = 0.96 + (\Sigma/0.2)^2 \quad (3.31)$$

Il termine  $\Delta V_\Sigma/\Delta V$  è invece valutabile come:

$$\Delta V_\Sigma/\Delta V = \frac{\sqrt{1+4K}-1}{2}$$

$$\text{Con } K = (4/3)(\Sigma/\Delta\theta)(v_{avg}/\Delta V)$$

E coincide con una stima iniziale del rapporto fra il  $\Delta V$  necessario al solo rifasamento ed il  $\Delta V$  della missione senza rendezvous.

### 3.4.2 Soluzione per archi propulsi alternati a fasi di coasting

In questo caso non è possibile adottare il metodo precedentemente esposto per penalizzare il  $\Delta V$  in funzione dello sfasamento, dal momento che tale modello assume spinta continua per tutta la missione.

Ciò non deve spaventare, anzi: avendo a disposizione più archi di spinta è possibile ripartire in modo conveniente le variazioni di semiasse, eccentricità ed inclinazione fra i diversi archi al periastro (o all'apoaastro), al fine di ridurre lo sfasamento fra spacecraft e asteroide target.

Per comprendere meglio tutto ciò ricorriamo ad un esempio pratico.

Detta  $\Delta a_1$  la variazione complessiva di semiasse maggiore associata alle manovre al periastro, il modello ripartisce tale variazione in 3 variazioni identiche pari quindi a  $\frac{\Delta a_1}{3}$  ed al termine della procedura descritta nel paragrafo 3.3 viene valutato lo sfasamento totale spacecraft-asteroide.

Supponiamo che lo spacecraft, a fine missione, sia in ritardo rispetto all'asteroide. Sarebbe possibile ridurre tale sfasamento semplicemente cambiando la ripartizione di  $\Delta a_1$  fra i tre archi di spinta.

Durante le fasi di coasting lo spacecraft si muove su orbite intermedie il cui periodo dipende dal semiasse maggiore.

Assumendo per ciascuna fase una velocità angolare costante la durata di ogni fase di coasting risulta pari ad una frazione del periodo dell'orbita in cui ci si trova: l'entità di tale frazione dipenderà ovviamente anche da  $\Delta\theta$ , come riportato nell'equazione (3.19).

Essendo il periodo orbitale pari a  $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$ , maggiore è il semiasse dell'orbita intermedia e maggiore è il tempo impiegato a percorrerla.

Se  $\Delta a_1$  venisse ripartita, ad esempio, nei rapporti  $0.23\Delta a_1$ ,  $0.33\Delta a_1$ ,  $0.44\Delta a_1$  fra i 3 archi, il tempo complessivo della missione sarebbe minore rispetto al caso di equa ripartizione, dunque sarebbe possibile recuperare il ritardo che si ha rispetto all'asteroide.

Una soluzione analoga potrebbe essere adottata in caso lo spacecraft fosse in anticipo rispetto all'asteroide, ripartendo in questo caso il  $\Delta a_1$  in modo tale da avere una variazione di semiasse decrescente dal primo all'ultimo arco.

Variando leggermente il  $\Delta a$  di ogni singolo arco di manovra dovrebbe quindi essere possibile recuperare lo sfasamento senza incrementi significativi del  $\Delta V$  totale.

Nel caso di elevati valori di sfasamento quest'analisi qualitativa potrebbe non risultare più valida, per cui sarebbe necessario elaborare un metodo in grado di

valutare la penalizzazione da applicare al  $\Delta V$  come già fatto nel caso di spinta continua.

## Capitolo 4

# Risultati e confronti

Il metodo approssimato descritto nei capitoli precedenti è stato implementato ed utilizzato per valutare il  $\Delta V$  e la massa di propellente necessaria per diverse missioni verso asteroidi near-Earth.

Nei paragrafi che seguono sono riportati e confrontati i risultati ottenuti per ogni variante del metodo.

In particolare il primo paragrafo è dedicato alle stime derivanti dal modello a spinta continua, che ha rappresentato il punto di partenza dell'intero lavoro.

Vengono poi riportati i risultati ottenuti nello studio della ripartizione ottimale del  $\Delta i$ , dalla cui analisi è stato possibile ricavare una legge in grado individuare con precisione la posizione del minimo del consumo.

La formulazione di tale legge è di notevole importanza per poter ottenere risultati significativi con il metodo descritto nel paragrafo 2.2.

Successivamente vengono confrontate le stime ottenute al variare del numero di archi propulsi e del metodo di ripartizione dei parametri orbitali adottato.

Per finire vengono confrontati i risultati del modello SEP di riferimento con quelli dei modelli che dalle analisi precedenti si sono rivelati a più basso consumo.

### 4.1 Risultati spinta continua

Il primo modello considerato per la valutazione del costo della missione è quello a spinta continua.

E' stato quindi valutato innanzitutto il  $\Delta V$  per una trasferta dall'orbita terrestre a quella dell'asteroide target con un singolo arco propulso; successivamente è stata applicata la penalizzazione descritta nel paragrafo 3.4.1 per una trasferta con rendezvous.

Nella Tabella 4.1 vengono riportati, per ogni asteroide, il  $\Delta V$  e la massa di propellente necessaria allo svolgimento della missione.

$R^{SEP}$	Asteroide	$\Delta V^{SC}$	$m_p^{SC}$	$m_p^{SEP}$	E[%]	Rank <sup>SC</sup>
1	<b>2016 TB57</b>	0.103	1.92	0.79	143.2	2
2	<b>2013 WA44</b>	0.096	1.80	1.07	68.1	1

3	<b>2013 BS45</b>	0.140	2.56	1.16	121.1	23
4	<b>2016 CF137</b>	0.106	1.97	1.19	65.2	3
5	<b>2014 YD</b>	0.106	1.98	1.22	61.9	4
6	<b>2015 BM510</b>	0.217	3.83	1.32	190.3	56
7	<b>2014 SD304</b>	0.135	2.47	1.35	83.0	18
8	<b>2012 EC</b>	0.134	2.45	1.35	81.8	16
9	<b>2009 CV</b>	0.129	2.38	1.42	67.5	13
10	<b>2009 OS5</b>	0.184	3.29	1.47	124.0	48
11	<b>2004 JN1</b>	0.129	2.38	1.49	59.8	12
12	<b>2003 SM84</b>	0.115	2.14	1.50	42.4	6
13	<b>N(478784)</b>	0.108	2.01	1.53	31.5	5
14	<b>N(225312)</b>	0.125	2.31	1.53	50.9	10
15	<b>2017 BF29</b>	0.136	2.50	1.55	61.0	20
16	<b>2001 QJ142</b>	0.120	2.22	1.56	42.1	7
17	<b>2013 EM89</b>	0.152	2.76	1.56	77.1	28
18	<b>2012 HK31</b>	0.127	2.35	1.61	45.8	11
19	<b>2013 PA7</b>	0.132	2.43	1.61	50.7	15
20	<b>2015 PL57</b>	0.122	2.25	1.65	36.5	8
21	<b>2016 TB18</b>	0.202	3.59	1.69	112.2	53
22	<b>2012 UW68</b>	0.138	2.53	1.70	48.7	21
23	<b>2017 HK1</b>	0.123	2.27	1.73	31.4	9
24	<b>2004 VJ1</b>	0.302	5.12	1.73	196.2	60
25	<b>2015 TZ24</b>	0.142	2.60	1.74	49.2	25
26	<b>1999 AO10</b>	0.213	3.77	1.75	115.3	55
27	<b>2014 YN</b>	0.263	4.55	1.76	158.3	58
28	<b>2007 TF15</b>	0.134	2.46	1.78	38.3	17
29	<b>2001 CQ36</b>	0.139	2.55	1.80	41.7	22
30	<b>N(459872)</b>	0.176	3.17	1.81	75.0	46
31	<b>2010 HA</b>	0.193	3.45	1.85	86.6	51
32	<b>2005 TG50</b>	0.135	2.48	1.85	33.9	19
33	<b>2008 TX3</b>	0.162	2.93	1.93	52.0	36
34	<b>2006 FH36</b>	0.131	2.40	1.96	22.6	14
35	<b>2007 UY1</b>	0.141	2.58	1.97	30.8	24
36	<b>2013 XY20</b>	0.146	2.67	1.98	35.0	27
37	<b>2015 VV</b>	0.145	2.64	1.99	32.8	26
38	<b>2006 QV89</b>	0.175	3.16	2.03	55.6	45
39	<b>2000 AE205</b>	0.159	2.89	2.08	39.0	32
40	<b>2007 DD</b>	0.161	2.92	2.08	40.6	33
41	<b>2014 MF18</b>	0.165	2.98	2.08	43.4	39
42	<b>2009 RT1</b>	0.161	2.93	2.09	40.0	34
43	<b>2016 FY2</b>	0.163	2.96	2.12	39.5	37
44	<b>2003 LN6</b>	0.167	3.01	2.12	42.2	40
45	<b>2013 HP11</b>	0.168	3.03	2.12	42.8	41

46	<b>2014 UY</b>	0.155	2.82	2.13	32.3	31
47	<b>2017 EB3</b>	0.203	3.60	2.13	69.2	54
48	<b>2009 HC</b>	0.178	3.20	2.18	47.0	47
49	<b>2014 QH33</b>	0.154	2.80	2.25	24.5	30
50	<b>2001 QE71</b>	0.170	3.07	2.25	36.6	42
51	<b>2011 AA37</b>	0.338	5.64	2.28	147.5	61
52	<b>2017 HZ4</b>	0.164	2.96	2.28	29.9	38
53	<b>2001 BB16</b>	0.172	3.11	2.31	34.5	43
54	<b>2012 UY68</b>	0.185	3.31	2.32	42.6	49
55	<b>2012 WH</b>	0.198	3.53	2.32	52.3	52
56	<b>2016 UE</b>	0.492	7.65	2.33	228.4	63
57	<b>2015 FG36</b>	0.161	2.92	2.35	24.2	35
58	<b>2006 XP4</b>	0.192	3.42	2.35	45.7	50
59	<b>2013 RV9</b>	0.174	3.14	2.35	33.5	44
60	<b>2010 WR7</b>	0.268	4.62	2.40	92.7	59
61	<b>2017 BF30</b>	0.229	4.02	2.40	67.3	57
62	<b>2011 CG2</b>	0.152	2.77	2.41	14.9	29
63	<b>2016 TP11</b>	0.471	7.39	2.44	203.0	62

Tabella 4.1: Lista degli asteroidi ordinati secondo il ranking R del modello SEP.  $m_p$  indica la massa di propellente necessaria,  $E$  è l'errore percentuale relativo fra il consumo valutato con il modello a spinta continua (SC) e quello valutato con il modello SEP.

Come si vede il modello non è in grado di stimare con una certa accuratezza i consumi associati alla missione.

In nessun caso infatti la massa di propellente stimata si avvicina a quella valutata con il modello di riferimento; diversi sono gli asteroidi per cui si ha addirittura che  $m_p^{SC} > 2m_p^{SEP}$ .

Queste enormi discrepanze fra i due metodi sono direttamente imputabili alla formulazione degli stessi: mentre per il modello di riferimento il problema di controllo ottimale prevede la massimizzazione della massa finale (e dunque la minimizzazione della massa di propellente) la riformulazione di Edelbaum a spinta continua punta ad individuare la missione a tempo minimo.

Come anticipato nel paragrafo 2.3, la minimizzazione della massa di propellente e quella del tempo di missione sono due obiettivi fra di loro contrastanti, per cui non si può pretendere di ottenere risultati simili con due modelli così intrinsecamente differenti.

Il tempo di missione, così come viene valutato con il modello corrente, risulta proporzionale all'arco percorso dallo spacecraft.

Dal momento che, per ridurre al minimo il tempo di volo, la spinta è continua su tutto l'arco di missione, la manovra che è necessario compiere è sicuramente non ideale in termini di consumo.

È infatti noto dalla teoria che conviene concentrare le manovre attorno a punti ben definiti dell'orbita:

- Attorno al periastro per variazioni di semiasse ed eccentricità di segno concorde;
- Attorno all'apoaastro per variazioni di semiasse ed eccentricità di segno discorde;
- Attorno ai nodi o agli antinodi, rispettivamente, per variazioni di inclinazione o di RAAN.

Essendo la spinta continua per tutta la missione non risulta possibile quindi ricorrere a manovre più localizzate come quelle appena descritte.

Il modello prevede inoltre la valutazione di un unico valore di  $\Lambda$  da utilizzare per un arco relativamente esteso; essendo la legge di controllo subottimale sempre la stessa a prescindere dalla posizione in cui ci si trova risulta difficile manovrare nel modo più economico per tutta la missione.

Le differenze fra il modello in esame e quello di riferimento vengono ulteriormente accentuate dalla correzione del  $\Delta V$  a cui è necessario ricorrere in caso di sfasamento  $\Sigma$  non nullo.

In una missione a spinta continua risulta infatti difficoltoso eseguire un rendezvous in presenza di sfasamenti consistenti: la penalizzazione del  $\Delta V$  che ne consegue è quindi di entità non trascurabile.

Per meglio comprendere questi due aspetti ricorriamo ad alcuni esempi di soluzioni numeriche; i valori riportati corrispondono alla miglior missione possibile, ovvero quella con il  $\Delta V$  più basso.

Per l'asteroide 2016 TB57 la data di lancio trovata corrisponde al 22/07/2023, mentre il tempo di volo di poco superiore ad un anno (contro i tre anni disponibili per la trasferta); lo sfasamento finale risulta praticamente nullo (pari a circa  $0.2^\circ$ ), dunque il  $\Delta V$  valutato senza e con correzione è praticamente lo stesso ( $\Delta V = 0.102$  senza correzione,  $\Delta V = 0.103$  con correzione).

In questo caso quindi tra le possibili trasferte con tempo iniziale compreso fra il 2020 ed il 2023 ne esiste almeno una per cui si ottiene un rendezvous senza necessità di manovre aggiuntive di rifasamento.

Non sempre siamo così fortunati: per l'asteroide 2013 BS45, ad esempio, il  $\Delta V$  valutato prima della correzione sembra piuttosto promettente ( $\Delta V = 0.064$ ).

In questo caso però lo spacecraft si trova con un ritardo rispetto all'asteroide di circa  $29^\circ$ , che possono essere recuperati con un consumo relativamente elevato di propellente.

A seguito della correzione si trova infatti  $\Delta V = 0.140$ , un valore pari a più del doppio di quello di partenza!

Risulta evidente quindi che l'approccio di spinta continua rende troppo penalizzante il recupero dello sfasamento, per cui è stato necessario elaborare un modello con cui sia possibile ottenere un rendezvous a costi decisamente minori.

Per quanto riguarda il rank delle missioni, ovvero la loro posizione in ordine di consumi, si vede che nonostante tutte le imprecisioni il modello riesce ad individuare correttamente alcune delle missioni più convenienti.

La penalizzazione dovuta allo sfasamento, tuttavia, non permette di mettere in luce alcune missioni verso asteroidi (2013 BS45 e 2015 BM510 in particolare), che risultano invece molto promettenti dalle stime con il modello di riferimento.

Per quanto osservato finora conviene dividere la traiettoria in più fasi propulse e, stabilite le variazioni dei parametri orbitali per ciascuna, valutare una diversa legge di controllo subottimale per ogni manovra.

In particolare alternando fasi di spinta a fasi di coasting è possibile eseguire le singole manovre nelle zone in cui risulta più conveniente; dividendo poi ulteriormente le manovre è possibile manovrare su archi più corti e centrati, ottenendo le stesse variazioni complessive dei parametri orbitali con un consumo di propellente minore.

## 4.2 Variazione d'inclinazione

Le caratteristiche del modello modificato per consumo minimo sono già state espone nei capitoli precedenti; per ridurre ulteriormente il costo della missione è stato necessario valutare la ripartizione ottimale della variazione d'inclinazione fra le manovre.

L'idea iniziale era che il minimo del consumo fosse ottenibile suddividendo il  $\Delta i$  in modo proporzionale rispetto alla variazione di semiasse maggiore della specifica manovra.

Per confermare quest'ipotesi sono state condotte simulazioni numeriche su diversi asteroidi facendo variare i valori di  $\Delta i_p$  e  $\Delta i_a$ , ovvero le variazioni di inclinazione assegnate, rispettivamente, per la manovra al periastro e per quella all'apoaastro, considerando per ciascuna manovra una suddivisione in 3 archi.

Le ripartizione di  $\Delta a$  e  $\Delta e$  fra le due manovre è stata effettuata con il metodo presentato nel paragrafo 3.1.1.

Si ha ovviamente che  $\Delta i_p + \Delta i_a = \Delta i$ , quindi le due variazioni sono frazioni del  $\Delta i$  complessivo della trasferta.

Di seguito vengono riportati ed analizzati i grafici  $\Delta V - \frac{\Delta i_p}{\Delta i}$  di alcuni asteroidi con caratteristiche differenti.

Il  $\Delta V$  finale calcolato è quello necessario alla trasferta dall'orbita iniziale a quella finale (trascurando per ora il problema del rendezvous); inoltre, sebbene tutte le simulazioni siano state condotte dividendo ogni manovra in 3 archi, nei grafici vengono presentate le variazioni complessive delle manovre (pari al prodotto fra il numero di archi e la variazione singola) per poter operare confronti in modo più semplice.

Si consideri, ad esempio, l'asteroide 2016 TB57, le cui variazioni associate dei parametri orbitali sono riportate in Tabella 4.2; in Figura 4.1 è invece riportato il  $\Delta V$  complessivo e delle singole manovre al variare del  $\Delta i_p$ .

Per le singole manovre il  $\Delta V$  minimo e massimo si ottiene, rispettivamente, per  $\Delta i_j = 0$  e per  $\Delta i_j = \Delta i$ .

È già noto d'altronde che un'assegnata variazione di inclinazione comporta un aumento dell'arco di missione rispetto al caso piano.

La curva  $\Delta V_p - \Delta i_p$  presenta un'andamento parabolico (Figura 4.2): tramite interpolazione polinomiale si trova infatti un polinomio di secondo grado che si sovrappone perfettamente alla curva in esame; il massimo errore relativo fra l'andamento

2016 TB57	
$\Delta a[\text{UA}]$	0.102
$\Delta e$	0.108
$\Delta i[^\circ]$	0.297
$\Delta a_p[\text{UA}]$	0.105
$\Delta e_p$	0.105
$\Delta a_a[\text{UA}]$	-0.003
$\Delta e_a$	0.003

Tabella 4.2: Variazione dei parametri orbitali per l'asteroide 2016 TB57.

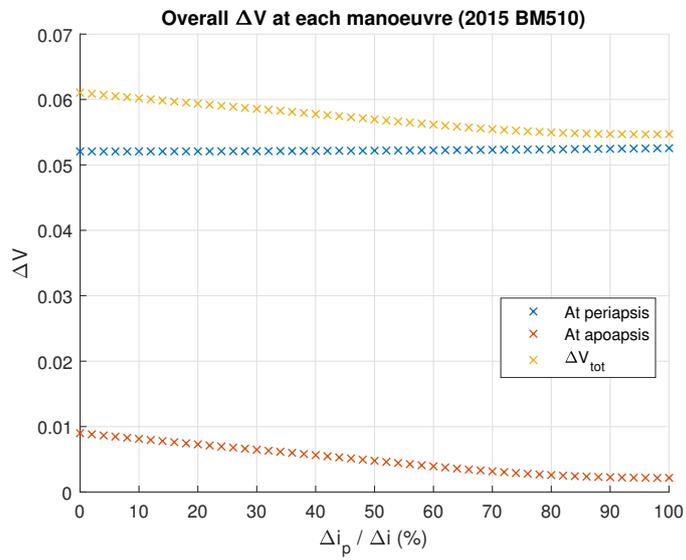


Figura 4.1:  $\Delta V$  al variare di  $\Delta i_p$  per l'asteroide 2016 TB57

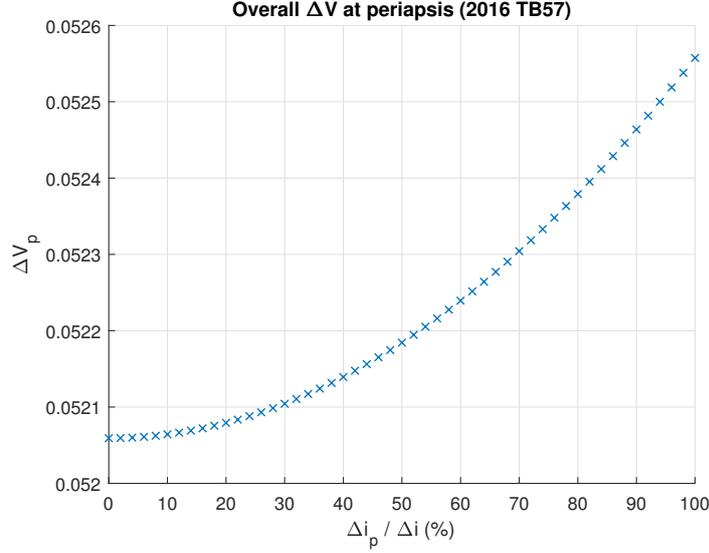


Figura 4.2:  $\Delta V$  al variare di  $\Delta i_p$  per la manovra al periastro per l'asteroide 2016 TB57

reale e quello interpolante, valutato nei punti di interpolazione, è infatti inferiore allo 0.001%.

Nel caso in esame tuttavia le variazioni di  $\Delta V_p$  sono esigue a causa del basso valore complessivo di  $\Delta i$ , quindi si commette un errore minimo assumendo un consumo costante per questa manovra.

Lo stesso discorso non vale invece per la curva  $\Delta V_a - \Delta i_p$ , in cui sembrano essere presenti più andamenti differenti.

Valutando numericamente la derivata della curva con un metodo alle differenze centrate si ottiene il grafico riportato in Figura 4.3.

Sembrano essere presenti quindi tre andamenti differenti: uno leggermente parabolico, uno quasi rettilineo ed uno parabolico.

Essendo il  $\Delta V$  strettamente legato al  $\Delta \theta$  della missione (equazioni (3.19) e (3.21)) bisogna ricercare le possibili cause della discontinuità di tale andamento.

Valutando l'angolo  $\beta$  per ogni ripartizione di  $\Delta i_p$  si nota un comportamento interessante: anche in questo caso, per la manovra all'apoastro, sembrano esistere tre andamenti differenti. I primi due, così come nel caso della derivata di  $\frac{d\Delta V_a}{d\Delta i_p}$ , potrebbero essere imputabili a soli errori numerici e ricondotti quindi ad un'unico andamento.

Questo comportamento è ben visibile dal grafico riportato in Figura 4.4

Succede in pratica che per valori di  $\Delta i_a$  contenuti il  $\Delta \theta$  risente dell'angolo  $\beta$  solo a causa della diminuzione di spinta nel piano, e dunque servirà un arco leggermente più lungo per soddisfare tutte le variazioni richieste.

Ad un certo punto viene raggiunto un valore di  $\Delta i_a$  che per il dato problema richiederebbe una spinta fuori dal piano che non può essere ottenuta nemmeno con

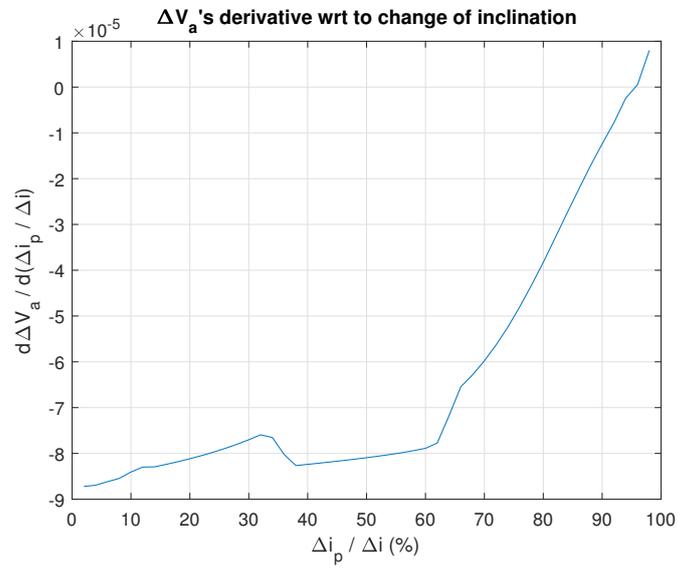


Figura 4.3: Derivata numerica di  $\Delta V_a$  per l'asteroide 2016 TB57

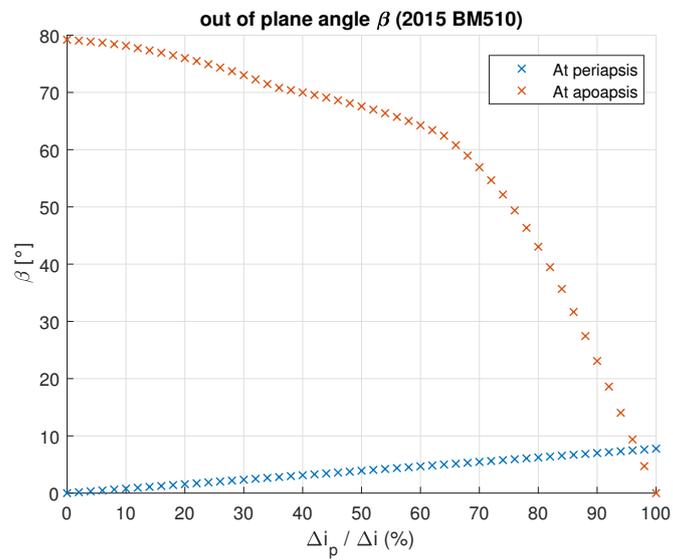


Figura 4.4: Angolo  $\beta$  al variare di  $\Delta i_p$  per l'asteroide 2016 TB57

un angolo  $\beta = 90^\circ$ : questo valore dipende essenzialmente dall'entità delle variazioni  $\Delta a_a$  e  $\Delta e_a$ .

Maggiori sono le variazioni richieste nel piano e maggiore è l'arco di missione e dunque minore è l'angolo  $\beta$  necessario ad ottenere un certo  $\Delta i$ .

Riformulando diversamente tale concetto, al crescere di  $\Delta a$  e  $\Delta e$  con lo stesso valore di  $\beta$  possono essere ottenute variazioni di inclinazione maggiori.

Raggiunta la condizione limite l'unico modo per ottenere il  $\Delta i$  richiesto è quello di aumentare l'arco di missione proporzionalmente all'aumento del cambio di inclinazione: le variazioni di  $\beta$  fra due casi simili saranno molto più ridotte rispetto a prima, perchè ora tale variazione ha essenzialmente lo scopo di diminuire l'accelerazione nel piano per ottenere i  $\Delta a$  e  $\Delta e$  assegnati su un arco più lungo.

L'angolo  $\beta$  non raggiunge mai il valore di  $90^\circ$  perchè in tal caso la spinta nel piano sarebbe nulla e non sarebbe possibile realizzare le variazioni  $\Delta a$  e  $\Delta e$  assegnate.

In realtà nella pratica dei conti non si arriva ad ottenere nemmeno  $\beta \approx 90^\circ$ , in quanto durante le iterazioni l'arco di missione viene prolungato già per valori di  $\beta$  più piccoli.

Nello specifico quando la spinta fuori dal piano richiesta è eccessiva ( $\sin \beta > 1$ ) il  $\Delta \theta$  viene incrementato per ritrovare una soluzione con  $\sin \beta < 1$ , ovvero tale per cui esista un angolo  $\beta$  in grado di realizzare il  $\Delta i$  assegnato.

Per l'asteroide 2016 TB57 abbiamo visto che le variazioni di semiasse ed eccentricità richieste all'apoastro sono relativamente esigue; l'orbita dell'asteroide tuttavia ha una piccolissima inclinazione rispetto all'orbita terrestre, quindi la condizione limite non sopraggiunge fino a che  $\Delta i_p > 0.65\Delta i$  circa, ovvero per  $\Delta i_a < 0.35\Delta i$ : oltre tale valore si instaura il fenomeno descritto e l'andamento della curva diventa quasi rettilineo.

Per una buona parte di asteroidi si ha  $\Delta a_p \gg \Delta a_a$ , dunque il comportamento descritto riguarda spesso solo la manovra all'apoastro.

Ciò non toglie che in casi in cui  $\Delta a_p \sim \Delta a_a$  (o addirittura  $\Delta a_p \ll \Delta a_a$ ) il fenomeno non possa manifestarsi per la sola manovra al periastro o per entrambe.

Tornando al problema di ricerca della ripartizione ottimale, dal grafico riportato in Figura 4.1 il valore minimo del  $\Delta V$  si trova per  $\Delta i_p \approx 0.95\Delta i$ .

Un'ottima approssimazione viene fornita da una legge che assume la ripartizione proporzionale alla variazione relativa di semiasse:

$$(\Delta i_p)_{ott} = \frac{|\Delta a_p|}{|\Delta a_p| + |\Delta a_a|} \Delta i \quad (4.1)$$

Per l'asteroide 2016 TB57, i cui i dati sono riportati in Tabella 4.2, si ottiene  $(\Delta i_p)_{ott} = 0.97\Delta i$ , quindi il consumo che si ottiene coincide praticamente con il minimo possibile.

Si nota comunque che essendo la variazione di inclinazione molto contenuta, il  $\Delta V$  complessivo risulta debolmente dipendente dal modo in cui il  $\Delta i$  viene ripartito fra le manovre.

Si prenda in considerazione ora una missione verso l'asteroide 2015 BM510; si faccia riferimento alla Tabella 4.3 per le variazioni dei parametri orbitali ed alla Figura 4.5 per i valori di  $\Delta V$  al variare di  $\Delta i_p$ .

2015 BM510	
$\Delta a$ [UA]	-0.053
$\Delta e$	0.137
$\Delta i$ [ $^\circ$ ]	1.588
$\Delta a_p$ [UA]	0.042
$\Delta e_p$	0.042
$\Delta a_a$ [UA]	-0.095
$\Delta e_a$	0.095

Tabella 4.3: Variazione dei parametri orbitali per l'asteroide 2016 TB57

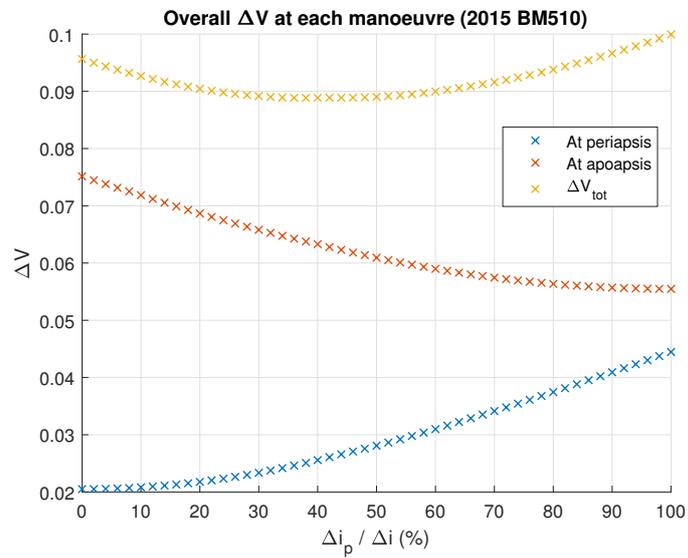


Figura 4.5:  $\Delta V$  al variare di  $\Delta i_p$  per l'asteroide 2015 BM510

Nel caso in cui  $\Delta a < 0$  (e  $\Delta e > 0$ , ma questa condizione è praticamente sempre verificata visto che si parte da un'orbita quasi circolare) la maggior parte della variazione di semiasse ed eccentricità viene assegnata alla manovra all'apoastro, come mostrato in Tabella 4.3.

Essendo il  $\Delta i$  assegnato di media entità (nei limiti di validità del modello utilizzato) ci si aspetta che per almeno una delle due manovre – quella con  $\Delta a_j$  e  $\Delta e_j$  minori, in questo caso quella al periastro – possa verificarsi un cambio di andamento della curva.

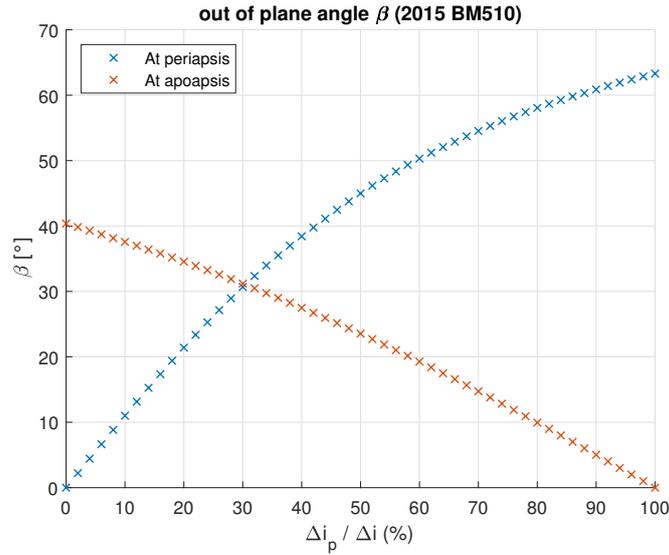


Figura 4.6: Angolo  $\beta$  al variare di  $\Delta i_p$  per l'asteroide 2015 BM510

Ricorrendo anche in questo caso alla curva  $\beta - \Delta i_p$  (Figura 4.6), si nota che per la manovra al periastro l'angolo  $\beta$  raggiunge valori elevati per alti  $\Delta i_p$ , nell'intorno dei quali la crescita di tale angolo subisce un rallentamento.

All'apoastro invece l'andamento di  $\beta$  è lineare per gran parte della curva, salvo poi per  $\Delta i_a$  più elevati in cui diventa leggermente parabolico.

Valutando la posizione dell'ottimo si ottiene in questo caso  $(\Delta i_p)_{ott} = 0.31\Delta i$ , mentre dal grafico si vede che il minimo del  $\Delta V$  si ha per  $\Delta i_p \approx 0.45\Delta i$ : la legge (4.1) non riesce quindi ad approssimare bene la ripartizione ottimale nel caso in cui non valga la relazione  $\Delta a_a \ll \Delta a_p$ .

Nel caso in esame in realtà la differenza fra i consumi relativi alle due ascisse è praticamente trascurabile; non è possibile però garantire un comportamento simile anche per altri asteroidi.

Per l'asteroide 1999 AO10 (Tabella 4.4 e Figura 4.7) quasi tutta la variazione di semiasse ed eccentricità avviene all'apoastro, per cui dalla legge (4.1) si ottiene  $\Delta i_p = 0.15\Delta i$ , mentre il minimo è collocato a  $\Delta i_p \approx 0.32\Delta i$ .

L'errore commesso sul  $\Delta V$  è circa del 3%, quindi in prima approssimazione la relazione trovata funziona ancora.

1999 AO10	
$\Delta a[\text{UA}]$	-0.088
$\Delta e$	0.124
$\Delta i[^\circ]$	2.662
$\Delta a_p[\text{UA}]$	0.018
$\Delta e_p$	0.018
$\Delta a_a[\text{UA}]$	-0.106
$\Delta e_a$	0.106

Tabella 4.4: Variazione dei parametri orbitali per l'asteroide 1999 AO10

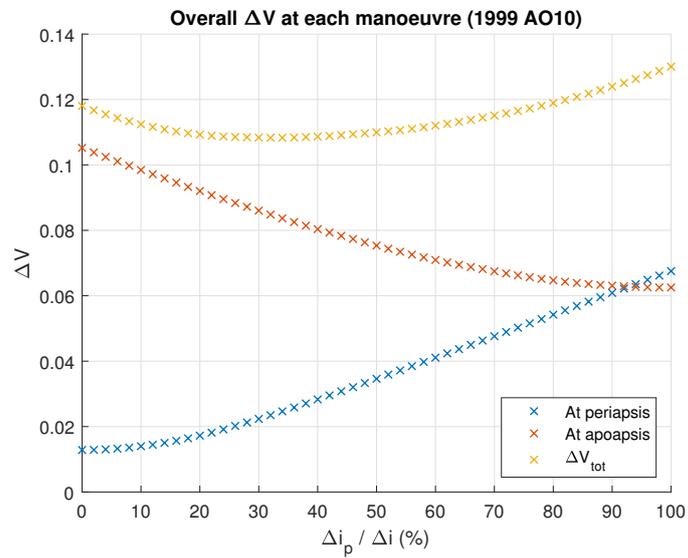


Figura 4.7:  $\Delta V$  al variare di  $\Delta i_p$  per l'asteroide 1999 AO10

Volendo però ottenere valori più precisi, si può pensare ad un modo per modificare la legge tenendo conto che:

- La relazione (4.1) fornisce risultati soddisfacenti per  $\Delta a_p \gg \Delta a_a$ .
- Il  $\Delta i_p/\Delta i$  di ottimo è sempre maggiore di quella calcolato, ovvero conviene sempre cambiare un po' più d'inclinazione al periastro rispetto a quanto predetto.

Per quanto riguarda il secondo punto, tale effetto è imputabile alla differente velocità angolare che compete ad archi centrati al periastro ed all'apoastro.

Dall'equazione (3.20) si ha infatti che il consumo dipende dal tempo di manovra: supponendo che le due manovre abbiano la stessa durata, il consumo ad esse associato sarà dunque il medesimo.

Dall'equazione (3.19), con  $\Delta t$  fissato, si avrà un  $\Delta\theta$  maggiore al periastro e uno minore all'apoastro per via della differente velocità angolare  $\omega$ .

Dove l'arco di manovra è più esteso sarà quindi possibile effettuare, a parità di consumo, una variazione d'inclinazione maggiore rispetto all'altro caso.

Riformulando diversamente il concetto lo stesso  $\Delta i$  può essere fornito manovrando al periastro con un consumo minore rispetto ad un'analoga manovra all'apoastro.

Dalle osservazioni espone risulta quindi motivata la diversa posizione del minimo del  $\Delta V$  rispetto a quanto predetto dalla relazione (4.1).

Si può quindi pensare di modificare la relazione precedente aggiungendo un termine che tenga conto del rapporto  $\Delta a_a/\Delta a_p$ , in modo da spostare il  $(\Delta i_p)_{ott}$  calcolato verso valori più alti quando non vale  $\Delta a_p \gg \Delta a_a$ .

Tale modifica consiste nel moltiplicare il membro di destra per un fattore correttivo  $f = (1 + k|\frac{\Delta a_a}{\Delta a_p}|)$ , con  $k = 0.2$ , per cui si ha:

$$(\Delta i_p)_{ott} = f \frac{|\Delta a_p|}{|\Delta a_p| + |\Delta a_a|} \Delta i \quad (4.2)$$

Il fattore correttivo vale circa 1 per  $\Delta a_p \gg \Delta a_a$ , per cui si ritrovano risultati molto simili per i casi in cui la relazione (4.1) si mostrava corretta.

Rivalutando la posizione dell'ottimo per i tre asteroidi finora considerati, si ottiene:

$$\left(\frac{\Delta i_p}{\Delta i}\right)_{2016TB57} = 0.98, \left(\frac{\Delta i_p}{\Delta i}\right)_{2015BM510} = 0.45, \left(\frac{\Delta i_p}{\Delta i}\right)_{1999AO10} = 0.32$$

Siamo dunque situati proprio in corrispondenza del valore minimo del  $\Delta V$ .

Ripetendo le analisi per un numero consistente di asteroidi si vede come la legge (4.2) è in grado di valutare correttamente il valore ottimale di ripartizione del  $\Delta i$ .

L'approssimazione utilizzata inoltre risulta ottima anche se le manovre vengono suddivise in 2 o 4 archi. Se invece si ha un solo arco per la manovra al periastro e quella all'apoastro il modello perde di significato dal momento che il  $\Delta\theta$  di una o di entrambe le manovre diventa troppo grande (maggiore di  $2\pi$  in diversi casi).

### 4.3 Confronto dei risultati al variare del numero di archi

Vengono ora presentati i risultati ottenuti al variare del numero di archi in cui vengono suddivise le due manovre principali.

In realtà date le restrizioni temporali della missione tutte le suddivisioni che prevedono più di 3 archi non sono attuabili per il problema considerato, essendo il tempo di volo, in questi casi, superiore ai 3 anni.

Ciò nonostante è stato ritenuto opportuno riportare i risultati ottenuti per un numero di archi  $n = 4$ , per stabilire se si ottiene un miglioramento significativo del consumo rispetto al caso  $n = 3$ .

$R^{SEP}$	Asteroide	$\Delta V$			$m_p$		
		$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
1	<b>2016 TB57</b>	0.056	0.055	0.055	1.08	1.04	1.04
2	<b>2013 WA44</b>	0.082	0.080	0.080	1.55	1.51	1.51
3	<b>2013 BS45</b>	0.054	0.053	0.053	1.03	1.02	1.01
4	<b>2016 CF137</b>	0.079	0.077	0.076	1.49	1.44	1.43
5	<b>2014 YD</b>	0.060	0.059	0.058	1.14	1.11	1.11
6	<b>2015 BM510</b>	0.093	0.089	0.088	1.73	1.67	1.66
7	<b>2014 SD304</b>	0.115	0.108	0.108	2.13	2.00	2.00
8	<b>2012 EC</b>	0.091	0.082	0.081	1.71	1.55	1.52
9	<b>2009 CV</b>	0.089	0.083	0.081	1.67	1.55	1.53
10	<b>2009 OS5</b>	0.093	0.089	0.087	1.75	1.67	1.63
11	<b>2004 JN1</b>	0.098	0.092	0.091	1.83	1.73	1.71
12	<b>2003 SM84</b>	0.102	0.098	0.096	1.91	1.82	1.80
13	<b>N(478784)</b>	0.091	0.089	0.088	1.70	1.66	1.65
14	<b>N(225312)</b>	0.130	0.125	0.125	2.39	2.30	2.30
15	<b>2017 BF29</b>	0.127	0.117	0.116	2.34	2.17	2.15
16	<b>2001 QJ142</b>	0.098	0.096	0.095	1.84	1.79	1.78
17	<b>2013 EM89</b>	0.123	0.114	0.113	2.27	2.11	2.10
18	<b>2012 HK31</b>	0.094	0.090	0.089	1.75	1.69	1.67
19	<b>2013 PA7</b>	0.128	0.123	0.122	2.35	2.27	2.25
20	<b>2015 PL57</b>	0.096	0.090	0.088	1.80	1.68	1.65
21	<b>2016 TB18</b>	0.056	0.055	0.055	1.07	1.06	1.05
22	<b>2012 UW68</b>	0.100	0.092	0.090	1.86	1.72	1.69
23	<b>2017 HK1</b>	0.103	0.096	0.096	1.92	1.80	1.80
24	<b>2004 VJ1</b>	0.108	0.102	0.100	2.01	1.90	1.87
25	<b>2015 TZ24</b>	0.146	0.137	0.135	2.66	2.50	2.47
26	<b>1999 AO10</b>	0.114	0.108	0.107	2.12	2.01	1.99
27	<b>2014 YN</b>	0.109	0.100	0.100	2.03	1.87	1.87
28	<b>2007 TF15</b>	0.129	0.127	0.126	2.38	2.33	2.32
29	<b>2001 CQ36</b>	0.115	0.107	0.106	2.14	1.99	1.97
30	<b>N(459872)</b>	0.134	0.134	0.133	2.46	2.45	2.45
31	<b>2010 HA</b>	0.126	0.118	0.116	2.32	2.19	2.15

32	<b>2005 TG50</b>	0.111	0.106	0.105	2.07	1.96	1.95
33	<b>2008 TX3</b>	0.124	0.107	0.103	2.28	1.99	1.92
34	<b>2006 FH36</b>	0.120	0.112	0.110	2.22	2.08	2.04
35	<b>2007 UY1</b>	0.118	0.109	0.107	2.19	2.03	2.00
36	<b>2013 XY20</b>	0.104	0.100	0.100	1.94	1.87	1.86
37	<b>2015 VV</b>	0.131	0.125	0.123	2.40	2.30	2.27
38	<b>2006 QV89</b>	0.146	0.114	0.109	2.66	2.11	2.03
39	<b>2000 AE205</b>	0.151	0.141	0.138	2.76	2.59	2.53
40	<b>2007 DD</b>	0.093	0.092	0.091	1.75	1.72	1.71
41	<b>2014 MF18</b>	0.137	0.124	0.122	2.51	2.29	2.25
42	<b>2009 RT1</b>	0.143	0.134	0.132	2.62	2.47	2.42
43	<b>2016 FY2</b>	0.158	0.135	0.131	2.86	2.48	2.42
44	<b>2003 LN6</b>	0.169	0.138	0.134	3.06	2.52	2.46
45	<b>2013 HP11</b>	0.158	0.145	0.141	2.87	2.65	2.58
46	<b>2014 UY</b>	0.139	0.125	0.120	2.55	2.30	2.22
47	<b>2017 EB3</b>	0.121	0.116	0.115	2.24	2.15	2.12
48	<b>2009 HC</b>	0.116	0.113	0.113	2.15	2.10	2.09
49	<b>2014 QH33</b>	0.137	0.127	0.125	2.51	2.34	2.30
50	<b>2001 QE71</b>	0.126	0.120	0.117	2.33	2.21	2.17
51	<b>2011 AA37</b>	0.116	0.115	0.115	2.14	2.13	2.12
52	<b>2017 HZ4</b>	0.163	0.142	0.138	2.96	2.60	2.53
53	<b>2001 BB16</b>	0.172	0.143	0.138	3.11	2.62	2.53
54	<b>2012 UY68</b>	0.155	0.129	0.123	2.82	2.37	2.28
55	<b>2012 WH</b>	0.169	0.157	0.153	3.05	2.85	2.79
56	<b>2016 UE</b>	0.077	0.075	0.074	1.46	1.42	1.40
57	<b>2015 FG36</b>	0.142	0.132	0.129	2.60	2.43	2.38
58	<b>2006 XP4</b>	0.194	0.154	0.148	3.46	2.80	2.70
59	<b>2013 RV9</b>	0.144	0.126	0.122	2.63	2.32	2.25
60	<b>2010 WR7</b>	0.141	0.130	0.127	2.59	2.39	2.33
61	<b>2017 BF30</b>	0.119	0.116	0.115	2.21	2.15	2.13
62	<b>2011 CG2</b>	0.130	0.115	0.110	2.40	2.12	2.04
63	<b>2016 TP11</b>	0.116	0.110	0.108	2.15	2.04	2.00

Tabella 4.5: Lista degli asteroidi ordinati secondo il ranking R del modello SEP. Per ogni asteroide sono riportati il  $\Delta V$  la massa di propellente  $m_p$  necessari al variare del numero di archi di manovra, indicato con n per brevità.

Dalla Tabella 4.5 si vede come all'aumentare del numero di archi diminuisce il  $\Delta V$  complessivo e quindi la massa di propellente richiesta.

Analizziamo, ad esempio, le soluzioni relative all'asteroide 2016 CF137.

Nella Tabella 4.6 sono riportate le variazioni dei parametri orbitali ed i consumi per le singole manovre al variare del numero di archi.

2009 CV					
Overall variations					
	$\Delta a[\text{UA}]$	$\Delta e$	$\Delta i[^\circ]$		
	0.116	0.155	0.943		
n = 2					
	$\Delta a[\text{UA}]$	$\Delta e$	$\Delta i[^\circ]$	$\Delta V$	$\Delta \theta$
Periapsis	0.068	0.068	0.424	0.038	2.943
Apoapsis	-0.010	0.010	0.047	0.006	0.393
n = 3					
Periapsis	0.045	0.045	0.283	0.023	1.804
Apoapsis	-0.006	0.006	0.032	0.004	0.260
n = 4					
Periapsis	0.034	0.034	0.212	0.017	1.333
Apoapsis	-0.005	0.005	0.024	0.003	0.194

Tabella 4.6: Variazioni dei parametri orbitali, consumi e archi propulsi per le singole manovre al variare del numero di archi (Asteroide 2009 CV).

Al crescere del numero di archi  $n$  ad ogni singola manovra viene quindi associata una variazione dei parametri orbitali sempre minore.

Per ottenere le variazioni assegnate lo spacecraft percorrerà per ogni manovra un arco sempre più piccolo (ovviamente il numero di manovre necessarie aumenta).

Se il  $\Delta \theta$  fosse direttamente proporzionale alle variazioni dei parametri orbitali si avrebbe una relazione iperbolica del tipo  $k(\Delta \theta)_{n=k} = cost$ .

Ciò tuttavia non avviene perchè le manovre risultano tanto più economiche quanto più risultano concentrate in prossimità dei punti estremi dell'orbita: ci si attende quindi una diminuzione progressiva del consumo all'aumentare del numero di archi di manovra.

I risultati riportati nella Tabella 4.6 confermano quanto detto finora: in particolare si nota che vale la relazione:

$$2(\Delta \theta)_{n=2} > 3(\Delta \theta)_{n=3} > 4(\Delta \theta)_{n=4}$$

Per cui la missione più conveniente è quella con il maggior numero di archi che, tuttavia, risulta essere anche la più lunga.

In generale si nota come la diminuzione del consumo fra il caso a 2 archi e quello a 3 archi sia più consistente rispetto a quella fra il caso a 3 archi e quello a 4 archi.

Le maggiori discrepanze fra i risultati ottenuti con  $n = 2$  e  $n = 3$  si hanno in quei casi in cui le variazioni di semiasse ed eccentricità da realizzare sono più elevate, come riportato in Figura 4.8.

Si vede infatti come gli errori più consistenti si abbiano per l'asteroide 2006 QV89 ( $\Delta a = 0.192$ ,  $\Delta e = 0.217$ ), l'asteroide 2006 XP4 ( $\Delta a = -0.127$ ,  $\Delta e = 0.232$ ), e l'asteroide 2003 LN6 ( $\Delta a = -0.144$ ,  $\Delta e = 0.197$ ).

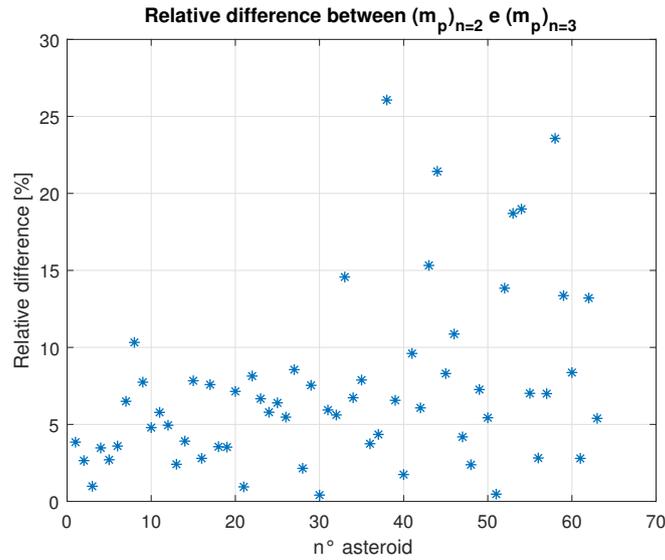


Figura 4.8: Differenza relativa fra  $(m_p)_{n=2}$  e  $(m_p)_{n=3}$

A causa delle grandi variazioni di semiasse ed eccentricità, i singoli archi di una delle due manovre (al periastro o all'apoaastro), per  $n = 2$ , risultano eccessivamente lunghi, quindi le fasi di coasting hanno breve durata e in una rivoluzione completa la fase propulsa è quella dominante.

Come al solito meno la manovra è concentrata nei punti d'interesse e meno sarà efficiente: ciò giustifica la differenza fra le due soluzioni in esame.

Ad esempio per l'asteroide 2006 QV89 si ottengono i risultati riportati in Tabella 4.7.

Come si vede la manovra al periastro è quella che risulta più critica data la ripartizione dei  $\Delta a$  e  $\Delta e$  totali.

Nel caso  $n = 2$  tale manovra si estende per quasi  $320^\circ$ , per cui fra le manovre al periastro e quelle all'apoaastro ci sarà una brevissima fase di coasting per un arco corrispondente a poco più di una decina di gradi.

In realtà vista l'estensione della prima manovra non ha nemmeno più senso ritenerla collocata al periastro, per cui l'idea a fondamento del modello perde di significato.

Nel caso  $n = 3$  la manovra più lunga copre un angolo di circa  $160^\circ$ , che risulta ancora piuttosto elevato; il  $\Delta\theta$  di tale manovra risulta però dimezzato rispetto al caso precedente, per cui si ottiene un netto risparmio di propellente.

In pratica gli estremi dell'arco propulso, ovvero i punti più lontani dal periastro, sono quelle più penalizzanti per il consumo: tanto più ci si allontana dalla zona in cui conviene manovrare e tanto più il costo della missione aumenta.

Aumentando il numero di archi (e diminuendo quindi la lunghezza di ciascuno) è come se avessimo eliminato le parti meno convenienti della manovra.

2006 QV89					
Overall variations					
	$\Delta a$ [UA]	$\Delta e$	$\Delta i$ [°]		
	0.192	0.217	1.072		
n = 2					
	$\Delta a$ [UA]	$\Delta e$	$\Delta i$ [°]	$\Delta V$	$\Delta \theta$
Periapsis	0.102	0.102	0.512	0.068	5.566
Apoapsis	-0.006	0.006	0.024	0.004	0.261
n = 3					
Periapsis	0.068	0.068	0.341	0.035	2.874
Apoapsis	-0.004	0.004	0.016	0.003	0.189
n = 4					
Periapsis	0.051	0.051	0.256	0.025	2.053
Apoapsis	-0.003	0.003	0.012	0.002	0.151

Tabella 4.7: Variazioni dei parametri orbitali, consumi e archi propulsi per le singole manovre al variare del numero di archi  $n$  (Asteroide 2006 QV89).

Se consideriamo il caso  $n = 4$  si vede che l'arco di manovra è ulteriormente diminuito (120° circa). Il risparmio è però più contenuto rispetto al caso precedente perchè "le parti eliminate" erano relativamente più vicine al periastro e quindi meno penalizzanti per il  $\Delta V$ .

Ripetendo lo stesso ragionamento è semplice comprendere i casi in cui invece le variazioni di  $\Delta V$  fra le tre soluzioni sono contenute.

Nella Tabella 4.8 sono riportati, a titolo d'esempio, i dettagli della missione verso l'asteroide 2001 QJ142.

In questo caso il risparmio all'aumentare del numero di archi è molto più contenuto perchè già per  $n = 2$  la manovra risulta molto più localizzata rispetto a quanto visto per l'asteroide precedente: l'errore relativo fra  $(m_p)_{n=2}$  e  $(m_p)_{n=3}$  è infatti pari soltanto al 2.6% (asteroide 16 nel grafico in Figura 4.8).

In conclusione si può dire che la missione ottimale preveda una suddivisione delle due manovre principali in tre archi, dal momento che rappresenta il miglior compromesso fra consumo e tempo di volo (che, ricordiamo, deve avere durata massima pari a 3 anni per i vincoli imposti dal problema).

#### 4.4 Confronto con diverse ripartizioni di $\Delta a$ e $\Delta e$

Nel paragrafo 3.1 sono stati proposti due metodi per ripartire le variazioni di semiasse ed eccentricità fra la manovra al periastro e quella all'apoastro.

In questo paragrafo vengono quindi confrontati i risultati ottenuti con le due differenti ripartizioni al fine di comprendere in quali casi risulti più conveniente l'una piuttosto che l'altra.

2001 QJ142					
Overall variations					
	$\Delta a[\text{UA}]$	$\Delta e$	$\Delta i[^\circ]$		
	0.062	0.100	3.104		
n = 2					
	$\Delta a[\text{UA}]$	$\Delta e$	$\Delta i[^\circ]$	$\Delta V$	$\Delta \theta$
Periapsis	0.041	0.041	1.315	0.040	2.904
Apoapsis	-0.010	0.010	0.237	0.009	0.563
n = 3					
Periapsis	0.027	0.027	0.877	0.026	1.875
Apoapsis	-0.006	0.006	0.158	0.006	0.375
n = 4					
Periapsis	0.020	0.020	0.658	0.019	1.393
Apoapsis	-0.005	0.005	0.118	0.004	0.282

Tabella 4.8: Variazioni dei parametri orbitali, consumi e archi propulsi per le singole manovre al variare del numero di archi  $n$  (Asteroide 2001 QJ142).

Per semplicità si farà riferimento a metodo "A" per indicare il metodo del paragrafo 3.1.1 (in cui si assume  $\Delta a \ll 1$ ) ed a metodo "B" per quello del paragrafo 3.1.2.

La Tabella 4.9 riporta le stime conseguite con entrambi i modelli con un numero di archi  $n = 3$ .

Anche per il modello B studi sulla ripartizione del  $\Delta i$  hanno confermato la validità della relazione (4.2) per la condizione di ottimo.

$R^{\text{SEP}}$	Asteroid	$m_p$			$\Sigma[^\circ]$	
		A	B	SEP	A	B
1	<b>2016 TB57</b>	1.04	1.03	0.79	-19.3	-18.0
2	<b>2013 WA44</b>	1.51	1.42	1.07	3.1	2.8
3	<b>2013 BS45</b>	1.02	1.18	1.16	-44.0	-45.1
4	<b>2016 CF137</b>	1.44	1.39	1.19	-8.8	-9.9
5	<b>2014 YD</b>	1.11	1.10	1.22	-10.0	-8.9
6	<b>2015 BM510</b>	1.67	1.89	1.32	32.6	34.4
7	<b>2014 SD304</b>	2.00	1.75	1.35	22.7	24.7
8	<b>2012 EC</b>	1.55	1.49	1.35	-19.0	-14.4
9	<b>2009 CV</b>	1.55	1.56	1.42	-13.9	-17.1
10	<b>2009 OS5</b>	1.67	1.41	1.47	-38.3	-35.5
11	<b>2004 JN1</b>	1.73	1.80	1.49	28.2	-1.7
12	<b>2003 SM84</b>	1.82	1.70	1.50	-23.0	-22.7
13	<b>N(478784)</b>	1.66	1.78	1.53	7.2	8.8
14	<b>N(225312)</b>	2.30	2.02	1.53	5.4	8.8
15	<b>2017 BF29</b>	2.17	1.89	1.55	34.0	33.7

16	<b>2001 QJ142</b>	1.79	1.80	1.56	0.4	0.2
17	<b>2013 EM89</b>	2.11	1.83	1.56	5.4	-3.5
18	<b>2012 HK31</b>	1.69	1.71	1.61	-3.1	-3.4
19	<b>2013 PA7</b>	2.27	2.12	1.61	2.9	-2.7
20	<b>2015 PL57</b>	1.68	1.68	1.65	-13.8	-11.6
21	<b>2016 TB18</b>	1.06	0.98	1.69	-53.6	-54.7
22	<b>2012 UW68</b>	1.72	1.71	1.70	-19.0	-22.4
23	<b>2017 HK1</b>	1.80	2.02	1.73	17.1	19.7
24	<b>2004 VJ1</b>	1.90	2.20	1.73	45.9	47.6
25	<b>2015 TZ24</b>	2.50	2.25	1.74	-28.1	34.1
26	<b>1999 AO10</b>	2.01	2.14	1.75	41.4	43.1
27	<b>2014 YN</b>	1.87	2.10	1.76	39.1	41.4
28	<b>2007 TF15</b>	2.33	2.28	1.78	1.2	-1.9
29	<b>2001 CQ36</b>	1.99	2.32	1.80	-8.3	-20.5
30	<b>N(459872)</b>	2.45	2.46	1.81	21.5	21.4
31	<b>2010 HA</b>	2.19	2.45	1.85	17.0	19.0
32	<b>2005 TG50</b>	1.96	2.13	1.85	-7.1	-6.0
33	<b>2008 TX3</b>	1.99	1.90	1.93	23.0	17.3
34	<b>2006 FH36</b>	2.08	2.39	1.96	1.1	-14.5
35	<b>2007 UY1</b>	2.03	2.39	1.97	-13.2	-7.2
36	<b>2013 XY20</b>	1.87	1.73	1.98	-38.0	-43.0
37	<b>2015 VV</b>	2.30	2.18	1.99	17.6	16.8
38	<b>2006 QV89</b>	2.11	2.12	2.03	-21.0	-19.3
39	<b>2000 AE205</b>	2.59	2.41	2.08	-19.4	-26.0
40	<b>2007 DD</b>	1.72	1.81	2.08	-77.1	-77.0
41	<b>2014 MF18</b>	2.29	2.46	2.08	4.6	-2.8
42	<b>2009 RT1</b>	2.47	2.32	2.09	-18.3	-16.4
43	<b>2016 FY2</b>	2.48	2.74	2.12	32.9	36.1
44	<b>2003 LN6</b>	2.52	2.83	2.12	7.7	10.1
45	<b>2013 HP11</b>	2.65	2.42	2.12	-0.3	4.4
46	<b>2014 UY</b>	2.30	2.13	2.13	-9.0	-18.1
47	<b>2017 EB3</b>	2.15	2.27	2.13	46.7	48.8
48	<b>2009 HC</b>	2.10	2.14	2.18	-25.6	-25.3
49	<b>2014 QH33</b>	2.34	2.44	2.25	-12.2	-9.8
50	<b>2001 QE71</b>	2.21	2.28	2.25	40.6	43.6
51	<b>2011 AA37</b>	2.13	2.09	2.28	-80.1	-80.6
52	<b>2017 HZ4</b>	2.60	2.96	2.28	6.4	9.2
53	<b>2001 BB16</b>	2.62	2.85	2.31	-37.8	-38.6
54	<b>2012 UY68</b>	2.37	2.44	2.32	-22.7	-16.9
55	<b>2012 WH</b>	2.85	2.99	2.32	37.5	39.6
56	<b>2016 UE</b>	1.42	1.50	2.33	109.0	107.1
57	<b>2015 FG36</b>	2.43	2.49	2.35	13.6	12.9
58	<b>2006 XP4</b>	2.80	3.21	2.35	-32.3	-27.1

59	<b>2013 RV9</b>	2.32	2.35	2.35		8.4	14.6
60	<b>2010 WR7</b>	2.39	2.63	2.40		-47.4	-45.5
61	<b>2017 BF30</b>	2.15	2.20	2.40		88.5	88.1
62	<b>2011 CG2</b>	2.12	1.98	2.41		20.4	22.5
63	<b>2016 TP11</b>	2.04	2.25	2.44		76.6	76.1

Tabella 4.9: Lista degli asteroidi ordinati secondo il ranking R del modello SEP. Per ogni asteroide sono riportati la massa di propellente  $m_p$  necessaria e lo sfasamento finale  $\Sigma$  per entrambi i metodi presentati. Il modello di traiettoria utilizzato prevede la divisione delle due manovre principali in 3 archi ciascuna.

Nonostante il metodo B preveda meno approssimazioni del metodo A non sempre i risultati da esso forniti sono migliori.

Sono diversi gli asteroidi per cui il costo valutato con il metodo A è minore di quello conseguito con il metodo B, per cui la ripartizione dell'ultimo metodo non risulta efficace in tutti i casi.

Nel tentativo di comprendere le cause dietro a ciò analizziamo i dettagli di alcune missioni nello specifico.

Si prenda ad esempio una missione verso l'asteroide 2013 WA44, i cui dettagli sono riportati in Tabella 4.10.

<b>2013 WA44</b>					
<b>Overall variations</b>					
	$\Delta a$ [UA]	$\Delta e$	$\Delta i$ [°]		
	0.100	0.072	2.303		
<b>A Method</b>					
	$\Delta a$ [UA]	$\Delta e$	$\Delta i$ [°]	$\Delta V$	$\Delta \theta$
Periapsis	0.029	0.029	0.682	0.023	1.642
Apoapsis	0.005	-0.005	0.086	0.004	0.241
<b>B Method</b>					
Periapsis	0.030	0.273	0.709	0.022	1.607
Apoapsis	0.003	-0.003	0.058	0.003	0.173

Tabella 4.10: Variazioni dei parametri orbitali, consumi e archi propulsi per le singole manovre al variare del metodo adottato (Asteroide 2013 WA44).

In questo caso con il metodo B si ha un risparmio di propellente rispetto al metodo A.

Tale risparmio è imputabile a manovre più localizzate ai punti di estremo – gli archi  $\Delta \theta$  di entrambe le manovre sono minori rispetto a quelli dell'altro caso – per cui si ha una diminuzione del consumo per entrambe le manovre principali.

In particolare si nota che, essendo  $|\Delta a| > |\Delta e|$ , le variazioni previste di semiasse maggiore fra le due manovre hanno segno concorde.

La missione prevede quindi incrementi continui del valore di semiasse fino al raggiungimento del valore finale prescritto.

Nel caso dell'asteroide 2015 BM510 (Tabella 4.11) la situazione è invece ben diversa dalla precedente: il modello B infatti fornisce risultati peggiori rispetto al metodo A.

2015 BM510					
Overall variations					
	$\Delta a$ [UA]	$\Delta e$	$\Delta i$ [°]		
	-0.053	0.137	1.588		
A Method					
	$\Delta a$ [UA]	$\Delta e$	$\Delta i$ [°]	$\Delta V$	$\Delta \theta$
Periapsis	0.014	0.014	0.235	0.009	0.657
Apoapsis	-0.032	0.032	0.294	0.021	1.226
B Method					
Periapsis	0.013	0.012	0.230	0.009	0.682
Apoapsis	-0.030	0.034	0.299	0.024	1.442

Tabella 4.11: Variazioni dei parametri orbitali, consumi e archi propulsi per le singole manovre al variare del metodo adottato (Asteroide 2015 BM510).

Per entrambe le manovre si osserva che i valori di  $\Delta \theta$  (e quindi anche il  $\Delta V$ ) sono più alti rispetto all'altro caso.

Questa volta le variazioni di semiasse fra le due manovre risultano discordi: la manovra al periastro incrementa semiasse ed eccentricità, mentre quella all'apoastro riduce il semiasse fino a raggiungere l'orbita finale.

Questa situazione si presenta per tutte le missioni con  $|\Delta a| < |\Delta e|$ : è proprio in questi casi che la bontà della ripartizione suggerita dal metodo B tende a venir meno.

Ad esempio anche per l'asteroide 2004 JN1, la cui missione prevede un  $\Delta a$  positivo con, tuttavia,  $\Delta a < \Delta e$ , il metodo B comporta un peggioramento del consumo.

Quando invece si ha  $\Delta a \approx \Delta e$ , come per l'asteroide 2014 YD (Tabella 4.12), le stime ottenute con i due metodi sono molto simili.

In questo caso infatti, sebbene si abbia  $\Delta a_p \Delta a_a < 0$ , la variazione di semiasse all'apoastro è molto prossima allo zero, quindi il diverso segno di  $\Delta a_p$  e  $\Delta a_a$  non comporta peggioramenti significativi della stima ottenuta con il metodo B.

La ripartizione prevista dal metodo B rimane comunque la migliore se si vogliono ottenere valori di  $\Delta r_p$  o  $\Delta r_a$  molto prossimi a 0; nel modello A infatti tali grandezze sono trascurabili ma non nulle a causa degli errori di approssimazione.

Il fatto che il modello B non fornisca le stime più basse per tutte le missioni analizzate implica che non sempre la soluzione migliore prevede manovre a  $\Delta r_p$  o  $\Delta r_a$  nulli.

2014 YD					
Overall variations					
	$\Delta a$ [UA]	$\Delta e$	$\Delta i$ [ $^\circ$ ]		
	0.072	0.077	1.737		
A Method					
	$\Delta a$ [UA]	$\Delta e$	$\Delta i$ [ $^\circ$ ]	$\Delta V$	$\Delta \theta$
Periapsis	0.025	0.025	0.565	0.019	1.374
Apoapsis	-0.001	0.001	0.013	0.001	0.045
B Method					
Periapsis	0.026	0.024	0.548	0.018	1.298
Apoapsis	-0.002	0.002	0.031	0.002	0.096

Tabella 4.12: Variazioni dei parametri orbitali, consumi e archi propulsi per le singole manovre al variare del metodo adottato (Asteroide 2014 YD).

## 4.5 Confronto con il modello SEP

Tutti le analisi precedenti avevano lo scopo di definire ed individuare il metodo in grado di fornire i migliori risultati in termini di consumo di propellente.

Nel paragrafo 4.1 è stata analizzata e scartata l'idea di una missione a spinta continua; nel paragrafo 4.2 è stata valutata la ripartizione ottimale della variazione d'inclinazione; nel paragrafo 4.3 è stato dimostrato che la missione ideale prevede una suddivisione delle manovre principali in 3 archi; nel paragrafo 4.4, infine, sono stati confrontati i risultati dei metodo A e di quello B, arrivando a concludere che nessuno dei due può essere ritenuto generalmente più adeguato dell'altro.

In quest'ultimo paragrafo vengono quindi confrontate le stime ottenute con i due modelli di missione più promettenti con quelle di riferimento valutate con un modello SEP.

Per i risultati si fa nuovamente riferimento alla Tabella 4.9, mentre gli errori rispetto al modello di riferimento sono riportati nella Tabella 4.13.

$R^{SEP}$	Asteroid	Error[%]		$\Sigma$ [ $^\circ$ ]		Rank	
		A	B	A	B	A	B
1	<b>2016 TB57</b>	32.1	30.7	-19.3	-18.0	2	2
2	<b>2013 WA44</b>	40.7	32.9	3.1	2.8	7	7
3	<b>2013 BS45</b>	-12.2	1.9	-44.0	-45.1	1	4
4	<b>2016 CF137</b>	21.4	17.0	-8.8	-9.9	6	5
5	<b>2014 YD</b>	-8.7	-9.9	-10.0	-8.9	4	3
6	<b>2015 BM510</b>	26.2	43.0	32.6	34.4	12	23
7	<b>2014 SD304</b>	48.5	29.6	22.7	24.7	27	16
8	<b>2012 EC</b>	14.5	10.7	-19.0	-14.4	8	8
9	<b>2009 CV</b>	9.5	9.6	-13.9	-17.1	9	10
10	<b>2009 OS5</b>	13.3	-3.7	-38.3	-35.5	11	6

11	<b>2004 JN1</b>	16.1	20.6		28.2	-1.7		17	18
12	<b>2003 SM84</b>	21.5	13.3		-23.0	-22.7		20	12
13	<b>N(478784)</b>	8.7	16.2		7.2	8.8		10	17
14	<b>N(225312)</b>	50.2	32.1		5.4	8.8		45	26
15	<b>2017 BF29</b>	39.9	21.7		34.0	33.7		39	22
16	<b>2001 QJ142</b>	14.8	15.6		0.4	0.2		18	19
17	<b>2013 EM89</b>	35.5	17.3		5.4	-3.5		34	21
18	<b>2012 HK31</b>	4.7	6.4		-3.1	-3.4		14	13
19	<b>2013 PA7</b>	41.0	31.6		2.9	-2.7		42	31
20	<b>2015 PL57</b>	1.8	1.8		-13.8	-11.6		13	11
21	<b>2016 TB18</b>	-37.5	-41.9		-53.6	-54.7		3	1
22	<b>2012 UW68</b>	1.0	0.4		-19.0	-22.4		15	14
23	<b>2017 HK1</b>	4.3	16.9		17.1	19.7		19	27
24	<b>2004 VJ1</b>	9.6	27.3		45.9	47.6		23	37
25	<b>2015 TZ24</b>	43.9	29.2		-28.1	34.1		56	39
26	<b>1999 AO10</b>	14.9	22.3		41.4	43.1		28	35
27	<b>2014 YN</b>	6.4	19.3		39.1	41.4		22	29
28	<b>2007 TF15</b>	31.0	28.0		1.2	-1.9		48	43
29	<b>2001 CQ36</b>	10.7	29.0		-8.3	-20.5		26	45
30	<b>N(459872)</b>	35.5	35.9		21.5	21.4		53	54
31	<b>2010 HA</b>	18.2	32.6		17.0	19.0		40	55
32	<b>2005 TG50</b>	6.2	15.1		-7.1	-6.0		24	32
33	<b>2008 TX3</b>	3.2	-1.4		23.0	17.3		25	24
34	<b>2006 FH36</b>	6.0	22.2		1.1	-14.5		31	47
35	<b>2007 UY1</b>	3.2	21.3		-13.2	-7.2		29	48
36	<b>2013 XY20</b>	-5.7	-12.8		-38.0	-43.0		21	15
37	<b>2015 VV</b>	15.5	9.4		17.6	16.8		46	36
38	<b>2006 QV89</b>	3.9	4.5		-21.0	-19.3		33	30
39	<b>2000 AE205</b>	24.5	15.7		-19.4	-26.0		58	49
40	<b>2007 DD</b>	-17.4	-13.2		-77.1	-77.0		16	20
41	<b>2014 MF18</b>	10.3	18.5		4.6	-2.8		43	53
42	<b>2009 RT1</b>	18.0	10.8		-18.3	-16.4		54	44
43	<b>2016 FY2</b>	16.8	29.1		32.9	36.1		55	58
44	<b>2003 LN6</b>	19.0	33.4		7.7	10.1		57	59
45	<b>2013 HP11</b>	24.8	14.4		-0.3	4.4		61	50
46	<b>2014 UY</b>	7.8	0.0		-9.0	-18.1		44	33
47	<b>2017 EB3</b>	1.0	6.7		46.7	48.8		37	41
48	<b>2009 HC</b>	-3.5	-2.0		-25.6	-25.3		32	34
49	<b>2014 QH33</b>	4.1	8.6		-12.2	-9.8		49	52
50	<b>2001 QE71</b>	-1.8	1.2		40.6	43.6		41	42
51	<b>2011 AA37</b>	-6.7	-8.5		-80.1	-80.6		36	28
52	<b>2017 HZ4</b>	14.1	30.0		6.4	9.2		59	61
53	<b>2001 BB16</b>	13.3	23.5		-37.8	-38.6		60	60

54	<b>2012 UY68</b>	2.2	5.1		-22.7	-16.9	50	51
55	<b>2012 WH</b>	22.8	28.7		37.5	39.6	63	62
56	<b>2016 UE</b>	-39.3	-35.8		109.0	107.1	5	9
57	<b>2015 FG36</b>	3.4	6.1		13.6	12.9	52	56
58	<b>2006 XP4</b>	19.2	36.5		-32.3	-27.1	62	63
59	<b>2013 RV9</b>	-1.2	0.0		8.4	14.6	47	46
60	<b>2010 WR7</b>	-0.3	9.8		-47.4	-45.5	51	57
61	<b>2017 BF30</b>	-10.3	-8.2		88.5	88.1	38	38
62	<b>2011 CG2</b>	-11.9	-17.7		20.4	22.5	35	25
63	<b>2016 TP11</b>	-16.6	-8.0		76.6	76.1	30	40

Tabella 4.13: Lista degli asteroidi ordinati secondo il ranking R del modello SEP. Per ogni asteroide e per ogni metodo sono riportati il rank e gli errori percentuali relativi fra le masse di propellente stimate con il metodo approssimato e con il modello SEP di riferimento.

Entrambi i modelli hanno qualche difficoltà a stimare correttamente la massa di propellente dei primi asteroidi della lista, ovvero di quelli con il consumo minore.

Probabilmente la particolare convenienza di queste missioni può essere individuata solo da modelli particolarmente completi che includono nella fisica del problema l'effetto della gravità terrestre, trascurato nell'approssimazione utilizzata.

Pur ottenendo errori percentuali piuttosto consistenti i due modelli proposti collocano correttamente tali missioni in cima al ranking, riconoscendone quindi la convenienza da un punto di vista del consumo.

Le prime posizioni del ranking sono quindi occupate dai primi asteroidi della lista, ad eccezione di qualche posizione che, per le stime attuali, viene assegnato ad asteroidi con un rank SEP più basso.

In realtà tali discrepanze con il modello di riferimento sono attribuibili all'elevato sfasamento finale che si ha fra spacecraft e target.

Il modello attuale infatti è solamente in grado di stimare il valore di  $\Sigma$  senza però correggere di conseguenza il valore del  $\Delta V$  necessario.

Ad esempio l'asteroide 2016 TB18 occupa la prima posizione del ranking con il metodo B; rispetto al modello di riferimento la massa di propellente valutata è nettamente inferiore (l'errore è del 42% circa), tuttavia lo spacecraft si trova in ritardo rispetto all'asteroide di circa  $55^\circ$ .

Il recupero di tale sfasamento comporterà sicuramente un aumento del consumo, per cui ci si attende che le stime a seguito correzione ricollochino la missione in una posizione più corretta.

Per i casi in cui lo sfasamento finale è trascurabile, e quindi facilmente recuperabile senza penalizzazioni significanti, il metodo che meglio approssima la soluzione di riferimento è determinato dalle considerazioni effettuate nel paragrafo 4.4.

Un'altra fonte di errore rispetto al modello di riferimento può esser rappresentata dall'aver stimato il costo di ogni arco di manovra partendo sempre dall'orbita terrestre e non dall'orbita intermedia in cui ci si trova al momento della manovra.

Il  $\Delta V$  necessario infatti è valutato in funzione, oltre che di altri parametri, del tempo di volo e del semiasse medio fra orbita iniziale e finale. Il tempo di volo è calcolato a partire dal  $\Delta\theta$  e dalla velocità angolare media fra le due orbite.

Dal momento che il modello adottato non tiene conto delle orbite intermedie le grandezze vengono sempre mediate a partire dalle orbite iniziali e finali, mentre sarebbe più corretto utilizzare valori mediati specifici per ogni singolo arco propulso.

Tenendo conto delle orbite intermedie l'intera procedura di calcolo andrebbe ripetuta per un numero di volte pari a  $2n$ , richiedendo quindi circa  $n$  volte il tempo computazionale dell'attuale procedura.

Sarebbe tuttavia possibile ottenere risultati più accurati e l'ordine delle manovre diventerebbe rilevante in quanto le soluzioni non verrebbero più semplicemente sovrapposte.

Si consideri, ad esempio, l'asteroide 2015 BM510 e si ipotizzi di effettuare manovre al periastro ed all'apoastro fra di loro alternate.

Non si considera il caso di più manovre dello stesso tipo consecutive per via delle limitazioni imposte sul massimo tempo di volo: fra due successive manovre al periastro, ad esempio, intercorre un tempo di circa un anno, per cui il tempo complessivo di missione sarebbe troppo elevato.

Nella tabella Tabella 4.14 sono riportati i parametri orbitali delle orbite intermedie ottenute con il metodo B, considerando i due casi di partenza con manovra al periastro o all'apoastro.

In linea di massima risulta più conveniente manovrare a raggi bassi: dato che entrambe le soluzioni prevedono, in questo caso, manovre al periastro con  $r_p < 1$ , ci si aspetta una diminuzione del consumo nel caso reale.

Fra le due soluzioni proposte, invece, la seconda sembra più promettente: tutte le manovre vengono infatti eseguite a raggi minori o al più uguali rispetto all'altro caso.

Si vede quindi con una prima analisi l'importanza dell'ordine in cui vengono eseguite le manovre.

2015 BM510				
Overall variations				
$\Delta a$ [UA]	$\Delta e$		$\Delta i$ [°]	
-0.053	0.137		1.588	
Intermediate orbits				
	SOL 1		SOL 2	
	$r_p$ [UA]	$r_a$ [UA]	$r_p$ [UA]	$r_a$ [UA]
Start	0.983	1.017	0.983	1.017
Manoeuvre 1	1.006	1.019	0.952	0.987
Manoeuvre 2	0.953	1.012	0.953	1.012
Manoeuvre 3	0.953	1.037	0.891	1.013
Manoeuvre 4	0.891	1.038	0.891	1.038
Manoeuvre 5	0.891	1.063	0.832	1.037
Manoeuvre 6	0.832	1.062	0.832	1.062

Tabella 4.14: Parametri orbitali e orbite intermedie per una missione verso l'asteroide 2015 BM510.

Per ogni riga sono riportati il raggio al periastro ed all'apoastro dell'orbita risultante al termine della j-esima manovra.

SOL 1 indica la missione con partenza al periastro, SOL 2 quella con partenza all'apoastro.

## Capitolo 5

# Conclusioni

Un nuovo metodo approssimato in grado di stimare la massa di propellente per missioni a consumo minimo è stato introdotto ed analizzato.

Il modello si basa sull'approssimazione di Edelbaum e ricorre a leggi di controllo subottimale che consentono l'integrazione analitica delle equazioni differenziali che descrivono il problema.

Non essendo necessario ricorrere all'integrazione numerica il costo computazionale associato al metodo è di ordini di grandezza inferiori rispetto ai metodi di ottimizzazione classici.

Il modello è inoltre in grado di fornire stime attendibili per buona parte delle missioni considerate, mentre per alcuni asteroidi i risultati ottenuti si discostano maggiormente da quelli derivanti dal modello SEP di riferimento.

Al fine di aumentare ulteriormente la precisione delle stime sul consumo il modello potrebbe essere migliorato su due fronti in particolare:

- Elaborazione di un metodo per penalizzare il  $\Delta V$  in funzione dello sfasamento fra spacecraft e target; qualora il costo finale risultasse troppo elevato sarebbe possibile cercare una soluzione ad un altro istante iniziale, il cui  $\Delta V$  pre-correzione sia un po' più grande di quello minimo finora trovato ma con uno sfasamento  $\Sigma$  facilmente recuperabile.
- Introduzione delle orbite intermedie per meglio approssimare la soluzione reale; questa modifica incrementa tuttavia il costo computazionale in quanto richiede multiple ripetizioni della stessa procedura.

Potrebbe inoltre essere interessante indagare più a fondo su quali siano i motivi per cui le stime fornite dal modello approssimato non sempre siano accurate.

A tal fine il modello qui presentato potrebbe essere confrontato con varianti particolari del modello SEP di riferimento, in cui, ad esempio, venga trascurato l'effetto della gravità terrestre, oppure in cui venga utilizzato lo stesso modello di spinta del metodo approssimato.

Così facendo sarebbe possibile individuare con maggior precisione le cause di errori fra il metodo approssimato e quello di riferimento.

# Bibliografia

- [1] NASA – Jet Propulsion Laboratory. *Asteroids*, 13/09/2010.
- [2] Matt Williams. *What is the Asteroid Belt?*. Universe Today, 23/08/2015.
- [3] NASA/JPL. *The Torino impact hazard scale*. Near-Earth Object Program Office, 13/04/2005.
- [4] NASA/JPL. *The Palermo technical impact hazard scale*. Near-Earth Object Program Office, 31/08/2005.
- [5] NASA - Asteroid Grand Challenge. *How Do We Mitigate the Hazard of Possible Asteroid Impacts?*. 16/03/2015.
- [6] Chris Bergin. *Hera adds objectives to planetary defense test mission*. NASASpaceFlight.com, 07/01/2019.
- [7] Ian Carnelli. *The Hera Mission Study*. ESA, 11/10/2017.
- [8] NASA. *OSIRIS-REx: Asteroid Sample Return Mission*. 08/2016.
- [9] R. Walker, D. Koschny, C. Bramanti & ESA CDF study team. *Miniaturised Asteroid Remote Geophysical Observer (M-ARGO): a stand-alone deep space CubeSat system for lowcost science and exploration missions*. 6th Interplanetary CubeSat Workshop, Cambridge, UK,30 /05/2017.
- [10] Chit Hong Yam, Dario Izzo, Francesco Biscani. *Towards a high fidelity direct transcription method for optimisation of low-thrust trajectories*. 26/04/2010.
- [11] T.N. Edelbaum. *Propulsion Requirements for Controllable Satellites*. ARS Journal, Vol. 31, No. 8, 1961, pp. 1079-1089.
- [12] Jean Albert Kechichian. *Reformulation of Edelbaum's Low-Thrust Transfer Problem Using Optimal Control Theory*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 20, No. 5 (1997), pp. 988-994.
- [13] Alessio Mereta, Dario Izzo. *Target selection for a small low-thrust mission to near-Earth asteroids*. 09/2018, Volume 2, Issue 3, pp 249–263.
- [14] Giacomo Gatto, Lorenzo Casalino. *Fast Evaluation and Optimization of Low-Thrust Transfers to Multiple Targets*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 38, No. 8 (2015), pp. 1525-1530.

- [15] Lorenzo Casalino. *Approximate Optimization of Low-Thrust Transfers Between Low-Eccentricity Close Orbits*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 37, No. 3 (2014), pp. 1003-1008.
- [16] Lorenzo Casalino, Matthew A. Vavrina. *Optimal power partitioning for electric thrusters*, AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, 17/05/2018.