

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Civile



Tesi di Laurea Magistrale

Sviluppo ed applicazione a casi reali di software di analisi
modale sperimentale

Relatore:

Prof. Rosario Ceravolo

Relatore aziendale:

Ing. Alberto Morino

Candidato:

Maurizio Dromí

Anno accademico: 2019/2020

Sommario

Abstract.....	1
Introduzione.....	2
1. Monitoraggio strutturale.....	4
1.1. Stato dell'arte.....	4
1.2. Definizione di <i>Structural Health Monitoring</i>	6
1.3. Obiettivi del monitoraggio strutturale.....	7
1.4. Requisiti di un sistema di monitoraggio.....	8
1.5. Metodologie di monitoraggio.....	9
1.5.1. Monitoraggio statico.....	9
1.5.2. Monitoraggio dinamico.....	10
2. Identificazione dinamica analitica.....	11
2.1. Premessa.....	11
2.2. Modello a tempo discreto.....	12
3. Analisi modale sperimentale.....	13
3.1. Premessa.....	13
3.2. Frequency Domain Decomposition (FDD).....	16
3.2.1. Teoria di base.....	16
3.2.2. Algoritmo di identificazione dinamica.....	18
3.2.3. Impostazione dell'algoritmo su Python.....	21
3.3. Stochastic Subspace Identification (SSI).....	28
3.3.1. Teoria di base.....	28
3.3.2. Definizione parametri e Fast Multi-Order SSI.....	31
3.3.3. Impostazione dell'algoritmo su Python.....	33
4. Applicazione degli algoritmi a casi reali.....	39
4.1. Analisi dinamica di una trave in calcestruzzo armato precompresso.....	39
4.1.1. Descrizione del sistema.....	39
4.1.2. Risultati sperimentazione originale.....	43
4.1.3. Modello agli elementi finiti.....	43
4.1.4. Analisi con algoritmo FDD.....	46
4.1.5. Analisi con algoritmo SSI.....	50
4.1.6. Correzione del modello FE.....	54
4.1.7. Confronto SSI – FDD.....	55
4.2. Analisi dinamica di un telaio in acciaio.....	58
4.2.1. Descrizione del sistema.....	58
4.2.2. Risultati sperimentazione originale.....	60

4.2.3.	Modello agli elementi finiti	61
4.2.4.	Analisi con algoritmo FDD	66
4.2.5.	Analisi con algoritmo SSI.....	70
4.2.6.	Correzione del modello FE.....	74
4.2.7.	Confronto SSI – FDD	76
4.3.	Resoconto applicazioni	78
5.	Campo prove - Tensostruttura Fiera di Genova	79
5.1.	Descrizione e finalità del campo prove.....	79
5.2.	Calcolo del tiro: <i>Unified Practical Formulas</i>	80
5.2.1.	Vincoli: <i>cerniera – cerniera</i>	81
5.2.2.	Vincoli: <i>incastro – incastro</i>	81
5.2.3.	Vincoli: <i>incastro – cerniera</i>	82
5.3.	Proprietà dello strallo e condizioni di vincolo	83
5.4.	Descrizione del sistema di monitoraggio.....	86
5.4.1.	Sistema di monitoraggio dinamico	86
5.4.2.	Sistema di monitoraggio statico	86
5.5.	Costruzione modello FE	88
5.5.1.	Geometria del modello	88
5.5.2.	Taratura del modello.....	89
5.6.	Analisi dati: confronto monitoraggio dinamico – statico	93
	Conclusioni.....	100
	Appendice: Principi dell'analisi dinamica analitica	101
A1.	Soluzione oscillatore a più gradi di libertà	101
A2.	Analisi modale	103
A2.1.	Ortogonalità dei modi di vibrare	103
A2.2.	Analisi modale per sistemi non smorzati.....	104
A2.3.	Analisi modale per sistemi smorzati.....	105
A2.4.	Disaccoppiamento modale nello spazio delle fasi.....	105
	Bibliografia e sitografia	107

Abstract

La tesi è stata svolta presso l'azienda GD Test S.r.l. che opera ormai da anni nel campo del monitoraggio strutturale e geotecnico. La branca dell'ingegneria che si occupa di monitoraggio è cresciuta molto negli ultimi anni in quanto è cresciuta la consapevolezza della necessità di un monitoraggio continuo delle infrastrutture ed in generale delle grandi opere che troppo spesso versano in condizioni di degrado avanzato. Una delle principali tecniche di monitoraggio è rappresentata dall'identificazione dinamica sperimentale delle strutture che consente di definire i parametri dinamici partendo dalle sole registrazioni degli accelerometri posti sulla struttura. Tali parametri dipendono dalle caratteristiche intrinseche della struttura e dunque mediante la variazione di tali parametri è possibile fare della diagnostica ed individuare i danneggiamenti. Oggetto della tesi è l'implementazione di due tecniche di identificazione dinamica operativa mediante il codice di programmazione Python. Le due tecniche che sono state implementate sono: Frequency Domain Decomposition (FDD) e Stochastic Subspace Identification (SSI). Una volta implementati gli algoritmi si è passato alla validazione degli stessi applicandoli a dei casi reali di cui sono noti i risultati da ottenere, i risultati ottenuti sono stati confrontati anche con quelli dei modelli agli elementi finiti realizzati. Le applicazioni considerate sono state due: trave in calcestruzzo armato precompresso e telaio in acciaio. Il lavoro di tesi si è concluso con la realizzazione di un campo prove sito alla Fiera di Genova. Sono stati posti degli accelerometri sullo strallo di una tensostruttura al fine di ricavarne le frequenze modali mediante gli algoritmi implementati e di conseguenza ricavarne il tiro sfruttando il metodo della Unified Practical Formulas. Per capire se il sistema adoperato è funzionante o meno sono state poste anche delle celle di carico ad un'estremità dello strallo che consentono di ricavare il valore preciso del tiro. L'analisi dei dati dunque ha previsto la valutazione delle frequenze, il calcolo del tiro mediante la prova dinamica ed il confronto con la prova statica.

Introduzione

Il presente lavoro di tesi è stato svolto presso l'azienda GD Test S.r.l., azienda sita in Torino che opera da decenni nel campo del monitoraggio strutturale e geotecnico. L'azienda citata collabora con Flex Patch System per lo sviluppo di un sensore che sia adatto al monitoraggio strutturale statico e dinamico continuo, utilizzando una soluzione wi-fi.



Il sensore restituisce informazioni riguardanti: deformazione e tensione, tilt, temperatura ed accelerazioni.

Negli ultimi anni uno dei temi principali che ha riguardato l'ingegneria civile è stato quello del monitoraggio, definito più in generale come *Structural Health Monitoring* (SHM). L'SHM può essere definita come un processo di implementazione di strategie per l'individuazione del danno. Questo processo prevede quattro passaggi fondamentali:

- Valutazione operativa: fase in cui si definisce il tipo di monitoraggio da adottare, si ha dunque una sorta di progettazione del monitoraggio tenendo conto della struttura, del tipo di danno e delle limitazioni ambientali;
- Scelta del tipo di sensori, del numero di sensori e la posizione degli stessi sulla struttura, tenendo conto di quanto definito al punto precedente;
- Acquisizione, fusione e pre-trattamento dei dati. Molto importante è la modalità di raccolta dei dati (es. sistemi di acquisizione wireless). Una volta che i dati vengono raccolti si deve capire come unirli in quanto ovviamente si hanno più sensori. L'ultimo passo è quello della pulizia del dato (pre-trattamento del dato);
- Estrazione delle informazioni: questa è l'area del SHM che riceve più attenzione in letteratura ed è la parte che evidenzia le tecniche necessarie per ricavare delle informazioni che abbiano un significato fisico dai dati;
- Elaborazione delle informazioni: fase forse più importante che consente di definire, mediante esperienza ed opportune tecniche, se la struttura è danneggiata [1].

La crescita dell'importanza del presente argomento è legata allo stato delle strutture e delle infrastrutture, spesso in condizioni di degrado avanzato. La branca dell'ingegneria relativa al monitoraggio è sicuramente uno strumento importante per individuare la necessità di intervenire con manutenzioni speciali e quindi di garantire il corretto funzionamento in esercizio delle opere.

Lo scopo della tesi è quello di sviluppare la base di partenza per il software aziendale che dovrà essere utilizzato per l'elaborazione dei dati derivanti dal monitoraggio dinamico (accelerazioni) e quindi per l'identificazione strutturale. La scelta è stata quella di implementare, mediante il codice di programmazione *Python*, due algoritmi per l'identificazione dinamica:

- *Frequency Domain Decomposition* (FDD);
- *Stochastic Subspace Identification* (SSI).

Le due tecniche di identificazione dinamica operano in due domini differenti, rispettivamente frequenza e tempo. Il secondo step è stato quello di trovare un modo per validare i due algoritmi una volta implementati. A tal proposito sono stati utilizzati dei dati relativi a delle sperimentazioni precedentemente effettuate di cui, dunque, si conoscevano già i parametri modali da ottenere: frequenze, forme modali e smorzamenti. Per la validazione sono stati utilizzati i dati relativi a due sperimentazioni distinte:

- Analisi di una trave in calcestruzzo;
- Analisi di un telaio in acciaio.

Oltre a confrontare i risultati ottenuti con i risultati delle sperimentazioni originali, sono stati realizzati dei modelli agli elementi finiti per avere un'ulteriore conferma di quello che è stato ottenuto dall'analisi modale sperimentale. Per la realizzazione dei modelli agli elementi finiti è stato utilizzato il software *Midas Civil*.

L'ultimo punto della tesi è quello riguardante un campo prove dove sono stati utilizzati gli algoritmi implementati per l'analisi delle accelerazioni e la definizione delle frequenze modali. Il campo prove citato riguarda l'analisi della trazione negli stralli partendo dalle frequenze individuate. La struttura in esame, sita alla Fiera di Genova, è una tensostruttura la cui copertura è sorretta da stralli collegati a degli alti piloni. Si è notato nel tempo un detensionamento degli stralli che vanno dunque periodicamente ritesati. Lo scopo del campo prove è quello di poter definire la trazione in maniera semplice e continua, a tal proposito sono stati installati tre accelerometri su uno strallo (adottando una soluzione wireless) che registrano, con una frequenza di campionamento fissa, le vibrazioni dello stesso. Partendo dalle accelerazioni, e definite le frequenze modali, si valuta il tiro nel cavo sfruttando un metodo trovato in letteratura che è il seguente: *Unified Practical Formulas*. Il vantaggio di questo metodo è che la definizione del tiro è fatta senza l'intervento di alcun operatore in quanto la trasmissione del dato avviene mediante un sistema wireless. Per la verifica del tiro stimato sono state poste due celle di carico alle estremità dello strallo che saranno rimosse al termine del campo prove.

1. Monitoraggio strutturale

1.1. Stato dell'arte

Il deterioramento delle infrastrutture civili in Nord America, Europa e Giappone è stato ben documentato. Negli Stati Uniti circa il 50% dei ponti è stato costruito prima del 1940 ed approssimativamente il 42% presenta un danneggiamento strutturale significativo [2]. Anche in Italia la situazione delle infrastrutture civili non è ottimale e la loro costruzione risale alla seconda metà del secolo scorso. Dei circa 1.5 milioni di ponti e viadotti presenti in Italia, di cui una buona parte è stata costruita tra il 1955 ed il 1980, solo 60 mila sono monitorati ed oltre 10 mila presentano un degrado tale da essere considerati a rischio [3]. Simbolo della necessità di monitorare le infrastrutture è il crollo del ponte Morandi a Genova ed il Decreto che ne è conseguito con la nascita dell'Archivio Informativo Nazionale delle Opere Pubbliche (AINOP) per il monitoraggio delle opere in Italia e l'interoperabilità delle amministrazioni coinvolte.



Figura 1: Crollo Ponte Morandi – foto da www.basilicata24.it

Sicuramente, nei prossimi decenni, la gestione dell'insieme dei ponti italiani richiederà uno sforzo ingegneristico e finanziario molto importante per svolgere le attività di monitoraggio, manutenzione e riabilitazione. Infatti, il monitoraggio delle infrastrutture svolge un importante ruolo considerando gli alti costi necessari per garantire il loro corretto funzionamento e livello di sicurezza. Le infrastrutture sono opere molto complesse, che nel tempo sono soggette a deterioramento e dunque ad alterazione delle proprie caratteristiche statiche e dinamiche che ne possono compromettere le prestazioni in esercizio. Il controllo e la manutenzione consentono di prevenire queste problematiche. I moderni sistemi di monitoraggio svolgono un importante ruolo in quanto consentono di monitorare in continuo o meno lo stato di salute della struttura, segnalando in anticipo le condizioni che potrebbero portare ad un dissesto o collasso [4]. Ciò comporta un'importante riduzione dei costi di manutenzione, in particolar modo di quella ordinaria.

Si possono sicuramente adottare diverse tipologie di monitoraggio che dipendono dallo scopo dello stesso. La complessità di un sistema di monitoraggio è direttamente correlata

alla natura ed alla dimensione della struttura o infrastruttura che si va a monitorare, ed alla necessità di mantenere un monitoraggio costante o meno. In ogni caso, la realizzazione di un sistema di SHM non è mai semplice in quanto, oltre al posizionamento dei sensori ed all'elaborazione dei dati, è necessario conoscere la tipologia della struttura, i meccanismi di degrado ed i criteri per la valutazione del suo stato.

Per quanto riguarda la strategia di monitoraggio da adottare si distinguono sicuramente: monitoraggio statico e dinamico. Il monitoraggio statico è volto alla valutazione, nel lungo periodo, di variazioni delle grandezze misurate che possono essere inclinazioni, spostamenti, aperture delle fessure mentre il monitoraggio dinamico è mirato principalmente all'identificazione dinamica della struttura e quindi alla definizione dei parametri modali della stessa. Cambiando la strategia di monitoraggio adottata, cambiano gli strumenti ed i sensori che vengono utilizzati.

Le tecniche di identificazione dinamica rappresentano uno dei più importanti strumenti non distruttivi per definire il comportamento di una struttura in esercizio. Le tecniche di identificazione dinamica vennero sviluppate per la prima volta nel campo aeronautico ed aerospaziale a metà del secolo scorso. Da lì in poi vennero condotti diversi studi (in particolare negli anni '70) e con l'avvento dei trasduttori e dei sistemi di acquisizione dei dati furono definite le prime prove dinamiche sperimentali mirate all'identificazione. Le prime applicazioni al campo civile risalgono agli anni '80. I riscontri riguardanti tale tipo di prova sono molto positivi in quanto consentono di ottenere informazioni riguardanti danneggiamenti locali o globali della struttura ed ormai la letteratura è ricca di applicazioni e differenti tecniche che hanno avuto esiti positivi.

Le principali applicazioni di identificazione dinamica riguardano il campo delle grandi opere: infrastrutture, ponti, dighe, centrali nucleari, impianti offshore. Tanto più è importante l'opera che si considera e tanto più importante diventa il sistema di monitoraggio richiesto.

Per quanto riguarda la strumentazione che viene adottata per il monitoraggio dinamico, negli ultimi decenni si ha avuto un grande sviluppo tecnologico legato sia alle componenti degli accelerometri in sé sia ai sistemi di acquisizione dei dati. Riguardo la tecnologia degli accelerometri, ormai è consolidato l'uso dei *mems*: elementi molto piccoli con funzionamento elettro-meccanico che consentono di valutare le accelerazioni in tre direzioni (accelerometri triassiali) con frequenze di campionamento altissime (anche 1024 Hz). Riguardo i sistemi di acquisizione dei dati, la maggior parte delle applicazioni vede l'utilizzo di sistemi cablati: tutti gli accelerometri sono collegati ad una centralina che registra i dati. Questo sistema è consolidato e funziona ma già si iniziano a vedere i primi sistemi con trasmissione radio che quindi non necessitano di essere cablati al registratore. Ovviamente questi sistemi presentano ancora dei limiti rispetto ai sistemi cablati per quanto riguarda la mole di dati che riescono a trasmettere, la qualità della trasmissione e delle registrazioni.

1.2. Definizione di *Structural Health Monitoring*

Il processo di implementazione di una strategia di individuazione del danno su una struttura o infrastruttura civile, meccanica o aerospaziale è oggi definito come *Structural Health Monitoring* (SHM). I sistemi di SHM consentono di monitorare in maniera continua lo stato di salute delle strutture e quindi di programmare al meglio gli interventi di manutenzione ottimizzando tempistiche e costi.

Il danno può essere invece definito come un'alterazione del sistema strutturale che va ad influenzare in maniera negativa le prestazioni in esercizio dello stesso. Se una struttura è danneggiata significa che c'è stata una variazione del sistema dallo stato iniziale, stato considerato non danneggiato. Il danno strutturale, se degenera può causare dal non più corretto funzionamento della struttura fino alla riduzione della vita utile o addirittura al collasso. Lo scopo delle tecniche di SHM è proprio quello di individuare le variazioni del comportamento della struttura (in particolare se si parla di monitoraggio dinamico) ed in base a queste variazioni definire l'entità del danno, se presente e se la sensibilità delle misure è sufficiente.

L'SHM segue un modello che può essere rappresentato mediante quattro fasi: valutazione operativa, acquisizione, fusione e pre-trattamento dei dati, estrazione delle informazioni ed elaborazione delle stesse mediante opportuni modelli [1].

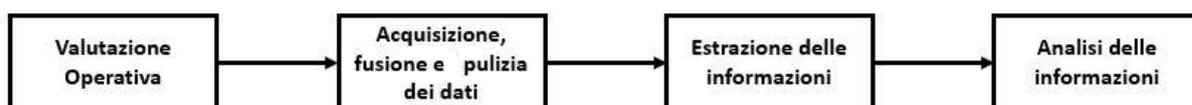


Figura 2: Fasi del monitoraggio [1]

La prima fase, relativa alla valutazione operativa, è fondamentale perché si va a definire come monitorare la struttura tenendo conto di vari aspetti, quali: il tipo di danno che maggiormente condiziona la funzione della struttura, quali strumenti usare per quantificare il danno, le condizioni operative ed ambientali. Questa fase può essere considerata come la parte progettuale del monitoraggio durante la quale si individua la struttura, si fa un'analisi riguardante sul tipo di danno e su come potrebbe essere monitorato.

La seconda fase prevede l'individuazione della tipologia dei sensori, della tipologia del sistema di lettura dei dati, del numero di sensori, della posizione dei sensori e della frequenza di acquisizione del dato. Ovviamente, la scelta di quanto appena detto è fatta sulla base di quello che viene definito nella prima fase. Una volta che viene definito come acquisire i dati, si deve definire come unirli. Per unione o fusione dei dati si intende: l'integrazione dei dati derivanti da una moltitudine di sensori al fine di definire un criterio per l'identificazione del danneggiamento. Il pre-trattamento del dato riguarda invece una sua 'pulizia', cioè andare a scartare i dati che non sono rappresentativi della realtà.

La terza fase riguarda l'estrazione di informazioni che abbiano un significato fisico partendo dai dati acquisiti, uniti e puliti. Questo processo ci permette di identificare, mediante opportune tecniche, delle proprietà sensibili al danno derivanti dalla risposta del sistema che consentano di distinguere una struttura danneggiata da una non danneggiata. Ad esempio, i parametri modali sono, in qualche misura, sensibili al danneggiamento (frequenze e forme modali) e dunque cambieranno nel momento in cui la struttura si danneggia.

L'ultima fase riguarda l'elaborazione delle informazioni ottenute mediante opportuni modelli statistici: fase che finora ha ricevuto minor attenzione in letteratura.

1.3. Obiettivi del monitoraggio strutturale

L'obiettivo del monitoraggio strutturale è lo studio delle condizioni strutturali dell'opera in esame e soprattutto la definizione dell'evoluzione nel tempo dei parametri e delle grandezze fisiche tenute sotto osservazione.

La sfida principale nel campo del monitoraggio strutturale sta nel fatto che tutte le strutture sono uniche, non è possibile, quindi, utilizzare statisticamente le osservazioni effettuate su oggetti tutti uguali per elaborare previsioni di danno. Per la precedente ragione è fondamentale la fase di caratterizzazione della struttura. Dunque, una peculiarità dei sistemi di monitoraggio per le infrastrutture e strutture civili è che la maggior parte dei sistemi devono essere orientati verso un monitoraggio di lungo termine per valutare le prestazioni nello stato di salute della struttura, ciò implica la necessità di stabilire criteri di priorità come ben evidenziato nelle recenti linee guida per la sicurezza dei ponti esistenti emanate dal CSLP.

In definitiva, con il termine monitoraggio si indica l'attività incentrata sui seguenti obiettivi:

- Definizione della variazione del comportamento strutturale;
- Definizione del danno sulla base delle variazioni individuate;
- Definizione degli effetti del danno sulle prestazioni;
- Definizione effetti del degrado.

La definizione del livello di danno non è sicuramente un'operazione semplice. *Worden* definisce due grandi classi di metodi per l'individuazione del danno:

- *Model-Driven Approach*: l'identificazione del danno è studiata come un problema inverso. Si parte da un modello rappresentativo della struttura (modello agli elementi finiti – FEM) considerato come privo di danno ed in base alle variazioni delle caratteristiche dinamiche della struttura misurate si definisce il danno;
- *Data-Driven Approach*: l'identificazione del danno è studiata come un problema di riconoscimento di un modello di riferimento funzionale. Si assegna una classe di danno alla struttura in funzione di quello che è stato misurato, tenendo conto, per confronto, di altri eventi osservati e misurati in precedenza sullo stesso oggetto, si ha dunque un riferimento non rappresentativa della natura fisico-meccanica della struttura ma solo della relazione azioni-risposte (è basato su raccolte dati disponibili negli archivi).

1.4. Requisiti di un sistema di monitoraggio

Quando si progetta un sistema di monitoraggio si deve sempre tener conto di diversi aspetti che possono influenzarne la realizzazione ed il corretto funzionamento. Questi aspetti sono:

- Condizioni ambientali: innanzitutto si deve tener conto dell'accessibilità o meno delle posizioni in cui vanno installati gli strumenti in quanto questo può influenzare la scelta del tipo di sistema adottato (ad es. wireless o cablato), si deve tener conto del livello di protezione degli strumenti, di eventuali rumori elettrici e del rumore ambientale a seconda dell'applicazione;
- Affidabilità: il grado di affidabilità richiesto è sempre alto e fondamentale per un corretto funzionamento del sistema. È anche importante poter definire se un sensore è danneggiato o meno;
- Accuratezza: per ogni strumento è richiesto un certo grado di accuratezza che dipende dall'applicazione e per ogni strumento dev'essere garantita la presenza di un certificato di taratura;
- Flessibilità: anche l'eventuale possibilità di aggiornare il sistema (es. introdurre nuovi strumenti) o sostituire strumenti danneggiati è importante;
- Manutenzione: è necessario programmare delle manutenzioni periodiche per verificare che il tutto funzioni correttamente, in particolare dopo eventi eccezionali.

1.5. Metodologie di monitoraggio

Monitoraggio statico e dinamico rappresentano i più comuni metodi di monitoraggio strumentale, ai quali andrebbero affiancate le tecniche di monitoraggio geomatico [5], infatti anche i metodi della geomatica sono impiegati per il monitoraggio strutturale, basti pensare al laser a scansione, alle stazioni totali motorizzate o alle tecniche fotogrammetriche digitali.

1.5.1. Monitoraggio statico

Il monitoraggio statico consiste nel misurare le variazioni nel tempo di grandezze considerate significative nello specifico caso. Questo metodo restituisce delle misure puntuali e non globali della struttura e quindi è idoneo se vi vuole valutare la variazione nel tempo di danneggiamenti localizzati come ad esempio l'apertura di una fessura.

Tra i vari sensori che possono essere adottati per il monitoraggio statico troviamo:

- Clinometri: consentono di valutare variazioni di inclinazioni;
- Fessurimetri: consentono di valutare aperture di fessure o spostamenti localizzati;
- Celle di carico: consentono di definire tensioni e carichi;
- Strain-gauges: consentono di definire deformazioni;
- Misure di spostamento relativo ed assoluto.



Figura 3: a sx: celle di carico - a dx: fessurimetri

Nonostante la misurazione di questo tipo di sensori sia locale è necessaria una corretta architettura del sistema in maniera tale che ogni strumento impiegato sia funzionale agli altri e non fine a sé stesso, così facendo sarà possibile utilizzare tutte le informazioni raccolte in maniera efficiente.

In ogni caso il progetto del sistema di monitoraggio e la strumentazione da utilizzare per un determinato sistema di controllo vanno opportunamente valutati tenendo conto dello scopo del monitoraggio stesso e dell'importanza dell'opera.

1.5.2. Monitoraggio dinamico

Il monitoraggio dinamico è invece mirato alla misura delle vibrazioni della struttura mediante il posizionamento, di un opportuno numero ed in opportune posizioni, di accelerometri, velocimetri o sismometri. Dalle registrazioni degli accelerometri, tramite le tecniche di analisi modale sperimentale (EMA – *Experimental Modal Analysis*) o operativa (OMA – *Operational Modal Analysis*) è possibile ricavare i parametri modali (frequenze, forme modali e smorzamenti). Questo processo di identificazione dinamica della struttura è molto importante in quanto, mediante l'aggiornamento dei modelli (*Model Updating*), in caso di analisi MODEL DRIVEN, ed altre tecniche si può fare diagnostica della struttura e definire in quali zone è concentrato il danneggiamento della stessa.



Figura 4: Accelerometro con tecnologia MEMS

In generale la definizione dei parametri modali, e quindi l'identificazione dinamica, basata sulla risposta strutturale, è indicata come analisi modale sperimentale. Nel tempo sono state definite numerose tecniche per l'identificazione dinamica che hanno portato alla nascita di una nuova sottoclasse chiamata analisi modale operativa. La differenza tra EMA ed OMA sta nella natura delle tecniche adottate: *input-output* per l'EMA ed *output-only* per l'OMA.

Un vantaggio del monitoraggio dinamico rispetto a quello statico è che i parametri che si ottengono sono rappresentativi della risposta globale della struttura. In ogni caso, è sempre opportuno affiancare ad un sistema di monitoraggio dinamico un sistema di monitoraggio statico, in particolare se si individuano delle zone con danneggiamento localizzato.

Le due grandi differenze tra monitoraggio statico e dinamico sono:

- Il monitoraggio statico è caratterizzato da una frequenza di campionamento dei sensori molto bassa rispetto al monitoraggio dinamico dove gli accelerometri campionano, in determinate finestre temporali, ad alte frequenze. Questo comporta anche una mole di dati differenti;
- Dal monitoraggio statico, come già detto, si ottiene una determinata misura locale mentre dal monitoraggio dinamico si può ottenere una risposta globale della struttura.

2. Identificazione dinamica analitica

2.1. Premessa

L'analisi dinamica della struttura è generalmente sviluppata mediante l'analisi modale in quanto è uno strumento analitico consolidato che consente di semplificare il problema anche nel momento in cui la struttura in esame è complessa.

L'approccio analitico si basa sulla conoscenza della geometria, delle condizioni al contorno e dei materiali impiegati, della distribuzione delle masse, delle rigidità e degli smorzamenti della struttura. Note le caratteristiche definite in precedenza è possibile ricavare i parametri dinamici della struttura mediante la risoluzione di un problema agli autovalori.

L'approccio sperimentale, che verrà discusso nei capitoli successivi, si basa sulla conoscenza dell'input che genera una determinata risposta della struttura (tecniche *Input-Output*) o della sola risposta strutturale (tecniche *Output-Only*).

Generalizzando, quindi, per identificazione dinamica si intendono tutte quelle tecniche, analitiche e sperimentali, che consentono di individuare la risposta dinamica della struttura (frequenze proprie, modi di vibrare e coefficienti di smorzamento).

Il grande interesse ed impiego dell'analisi modale è dovuto al fatto che il comportamento dinamico della struttura è come una *carta d'identità* della stessa che dipende da proprietà intrinseche (rigidità, masse...) e non dal carico applicato, dunque se non si ha un degrado della struttura le sue proprietà dinamiche non cambiano, viceversa, se c'è un degrado della struttura si avrà una variazione dei parametri dinamici.

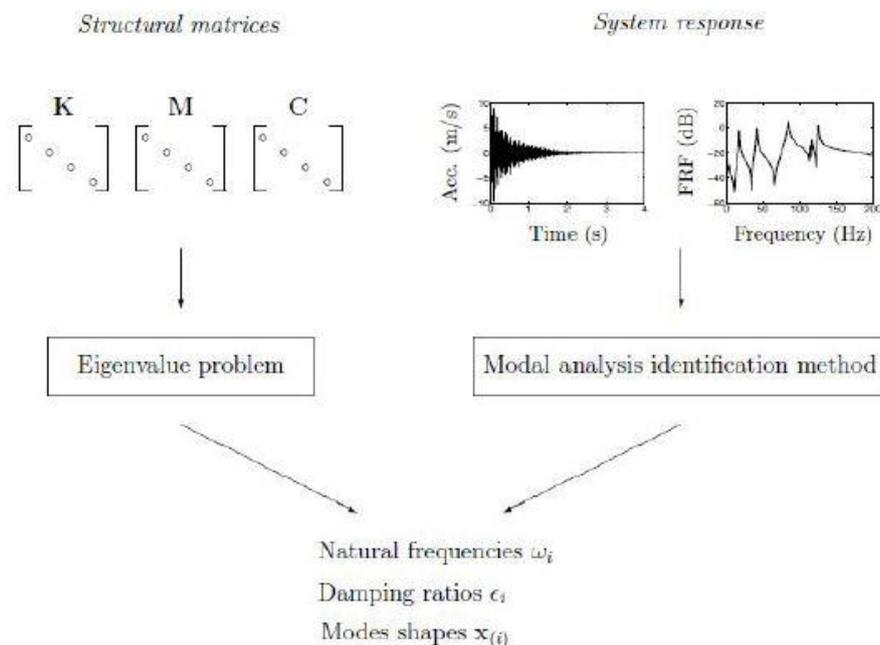


Figura 5: analisi modale analitica e sperimentale

Partendo dalla soluzione di un oscillatore a più gradi di libertà si può definire il significato di analisi modale, ossia analisi dei modi di vibrare di una struttura. Si rimanda all'appendice del testo per la formulazione matematica dei principi dell'analisi dinamica.

2.2. Modello a tempo discreto

Quando si lavora in campo sperimentale i dati sono campionati e dunque non si avrà una misurazione per ogni istante di tempo del range di misura ma i dati saranno disponibili ad istanti di tempo discreti distanti Δt , dove Δt è il tempo di campionamento (inverso della frequenza di campionamento). Per tale motivo è importante definire la forma del problema anche a tempo discreto.

Considerando le condizioni iniziali $x(t_0)$ per l'istante iniziale t_0 , la soluzione del problema può essere definita come:

$$\{x(t)\} = e^{[A'](t-t_0)}\{x(t_0)\} + \int_{t_0}^t e^{[A'](t-\tau)}[B']\{\delta(\tau)\} d\tau;$$

In cui i due termini rappresentano, rispettivamente, la risposta alle condizioni iniziali e quella alle azioni dinamiche imposte.

Per passare al modello discreto si effettuano le seguenti sostituzioni:

$$t = (k + 1)\Delta t; \quad \text{con } k \in \mathbb{N}$$

$$t_0 = k\Delta t;$$

Si ottiene:

$$\{x((k + 1)\Delta t)\} = e^{[A']\Delta t}\{x(t_0)\} + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{[A']((k+1)\Delta t-\tau)}[B']\{\delta(\tau)\} d\tau;$$

Si assume un input $\{\delta(\tau)\}$ costante durante l'intervallo di tempo che intercorre tra $k\Delta t$ e $(k + 1)\Delta t$ e si assume che $\tau' = (k + 1)\Delta t - \tau$:

$$\{x((k + 1)\Delta t)\} = e^{[A']\Delta t}\{x(t_0)\} + \left[\int_0^{\Delta t} e^{[A']\tau'}[B'] d\tau \right] \{\delta(k\Delta t)\};$$

Si introducono ora le notazioni necessarie per descrivere il modello a tempo discreto nello spazio delle fasi:

$$[A] = e^{[A']\Delta t};$$

$$[B] = - \int_0^{\Delta t} e^{[A']\tau'} d\tau;$$

$$x(k + 1) = \{x((k + 1)\Delta t)\};$$

$$\{\delta(k)\} = \{\delta(k\Delta t)\};$$

Si ottiene così il modello al tempo discreto:

$$\{x(k + 1)\} = [A]\{x(k)\} + [B]\{\delta(k)\};$$

$$\{y(k)\} = [C]\{x(k)\} + [D]\{\delta(k)\}.$$

3. Analisi modale sperimentale

3.1. Premessa

L'analisi modale sperimentale è uno strumento sempre più utilizzato nel campo dell'ingegneria civile per definire il comportamento delle strutture e delle infrastrutture in opera. Come già indicato nel capitolo precedente, lo studio della dinamica delle strutture può seguire due approcci [7]:

- Approccio analitico: questo è l'approccio classico che si risolve con un problema agli autovalori. Conoscendo tutte le caratteristiche della struttura (masse, rigidità, geometria...) è possibile costruire un sistema matriciale accurato che, mediante il disaccoppiamento modale, consente di ricavare i parametri modali (frequenze, smorzamenti relativi, forme modali);
- Approccio sperimentale: in questo caso si sfruttano le registrazioni delle vibrazioni delle strutture ad un input noto o meno e partendo da queste risposte, mediante opportune operazioni, si ricavano i parametri modali. Il vantaggio di questo approccio è che si va a definire il reale comportamento della struttura partendo da ciò che è stato registrato.

In generale si indicano come *identificazione dinamica* tutte quelle tecniche, analitiche e sperimentali, che consentano la definizione dei parametri dinamici di una struttura.

Nel caso in cui si conosce l'input e si conosce la struttura si parla di problema *diretto* mentre nel caso di analisi modale sperimentale si parla di problema *inverso*. Si parla di problema inverso in quanto si parte dalla risposta strutturale per definire i parametri che la influenzano.

Nonostante la sempre più importante tecnologia che consente di utilizzare software agli elementi finiti con elevate prestazioni, l'analisi modale sperimentale è sempre più impiegata per definire il comportamento reale della struttura. Questo è dovuto a diversi fattori:

- L'analisi agli elementi finiti è basata su una discretizzazione della realtà e quindi si vanno ad introdurre già degli errori sistematici che non possono essere evitati;
- Incertezze sulla stima degli smorzamenti da utilizzare per il modello;
- Eventuali incongruenze tra la geometria definita dal progettista e la geometria effettiva;
- Incertezza sulla rigidità dei vincoli e dei nodi.

Per colmare quindi le differenze tra il modello agli elementi finiti e la realtà si ricorre a tecniche sperimentali che consentono di definire i parametri modali, sui quali sarà tarato il modello FE.

Una prima distinzione tra le varie tecniche di identificazione dinamica sperimentale va fatta per quanto riguarda il dominio in cui operano, infatti si riconoscono tre differenti soluzioni:

- Soluzioni nel dominio del tempo (*SSI, ERA ...*);
- Soluzioni nel dominio delle frequenze (*FDD...*);
- Soluzioni nel dominio misto tempo – frequenza (*TFIE...*).

Le tecniche di identificazione dinamica possono ancora essere distinte in funzione della conoscenza o meno dell'input che genera una determinata risposta:

- Tecniche Input – Output: le tecniche di questo tipo richiedono che per la definizione dei parametri modali, e quindi l'identificazione strutturale, sia noto sia l'input che causa la vibrazione che l'output (risposta strutturale). Queste tecniche rientrano nella categoria di analisi modale sperimentale (EMA);
- Tecniche Output – Only: le tecniche appartenenti a questa categoria sono delle tecniche che hanno trovato una grande applicazione perché più economiche e più semplici da utilizzare rispetto alle precedenti. Il vantaggio principale è che non è necessario conoscere l'input che genera la vibrazione ma solo la risposta strutturale. La non necessità di registrare e di eccitare la struttura con apposite attrezzature è un grande vantaggio economico ed applicativo. Questi metodi si basano sull'ipotesi che l'input che genera la risposta strutturale sia rumore bianco Gaussiano. Queste tecniche rientrano nella categoria di analisi modale operativa o operativa (OMA).

L'analisi modale sperimentale è di difficile applicazione su molte strutture in quanto è necessario applicare un input noto e quindi spesso si opta per l'analisi modale operativa, evitando così il ricorso a particolari attrezzature necessarie per registrare ed applicare una vibrazione alla struttura in esame. Optando per l'OMA si hanno diversi vantaggi:

- La prova è di semplice esecuzione una volta che sono installati gli accelerometri;
- La prova è economica e non distruttiva;
- Si ottengono i parametri dinamici nelle reali condizioni di utilizzo della struttura;
- La prova è non invasiva.

Un altro vantaggio di queste tecniche è che, essendo non distruttive, possono essere applicate a strutture di nuova costruzione o esistenti, in particolare hanno trovato grande applicazione su edifici storici.

L'idea fondamentale delle tecniche output-only è dunque che la struttura esaminata sia eccitata da un certo tipo di azione che abbia approssimativamente le caratteristiche del rumore bianco. Il rumore bianco ha una potenza spettrale distribuita su un'ampia banda di frequenza che copre il range di frequenze delle caratteristiche modali della struttura. Non è condizionante il fatto che effettivamente la struttura non sia eccitata da un'azione che rispetti le caratteristiche del rumore bianco, in quanto quello che è veramente importante è che tutti i modi di interesse siano propriamente eccitati così che il loro contributo possa essere colto dalle misurazioni [8].

Quando si interpretano i risultati dell'analisi modale, si deve considerare che non tutti i modi che vengono individuati sono dei modi di vibrare reali della struttura: alcuni modi derivano dal fatto che l'eccitazione della struttura sia *colorata* (non è mai realmente rumore bianco), altri possono essere dovuti al rumore...

Nella pratica si ottengono molti più modi di vibrare di quelli fisici che ci si aspetta e si deve trovare un modo per indicare quali modi sono effettivamente dei modi di vibrare del sistema strutturale e quali non lo sono.

Scopo del presente lavoro di tesi è proprio quello di implementare due tecniche di identificazione dinamica sperimentale *Output-Only* ed applicarle a dei casi reali. Il codice di programmazione scelto per l'implementazione dei due codici è *Python* [13].



Le due tecniche implementate sono:

- *Frequency Domain Decomposition (FDD)*;
- *Stochastic Subspace Identification (SSI)*.

Si è scelto di optare per due metodi definiti in domini differenti, frequenza il primo e tempo il secondo, in maniera tale da ottenere gli stessi risultati dalle applicazioni partendo da due basi teoriche differenti (validazione degli algoritmi).

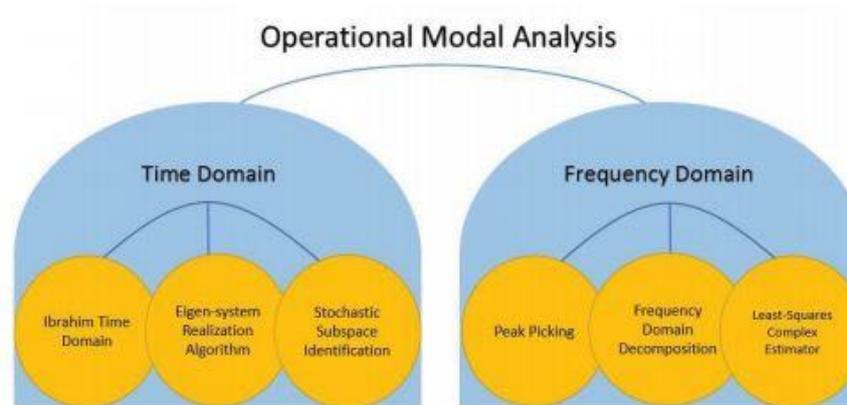


Figura 6: Classificazione tecniche di identificazione dinamica *Output-Only*

Nei paragrafi successivi sono riportati in dettaglio le due tecniche di identificazione dinamica sopra citate.

3.2. Frequency Domain Decomposition (FDD)

Come già anticipato, il metodo FDD è una tecnica di identificazione modale basata su un sistema output-only che opera nel dominio delle frequenze. In questi casi, quando l'identificazione è portata avanti tenendo conto esclusivamente della risposta strutturale, è necessario che l'eccitazione copra un'ampia porzione dello spettro di frequenza in maniera tale da andare ad eccitare i modi della struttura. La tecnica di *Frequency Domain Decomposition* [9] nasce dalla tecnica di *Basic Frequency Domain* ormai meglio definita come tecnica di *Peak Picking*. La BFD fornisce dei buoni risultati se i modi di vibrare sono separati in maniera netta ma possono sorgere dei problemi nell'identificazione se due modi hanno frequenze molto vicine, di conseguenza le frequenze stimate sono limitate, inoltre la stima dello smorzamento non è propriamente corretta. La tecnica FDD consente di evitare le problematiche di cui abbiamo parlato presenti nel metodo BFD.

3.2.1. Teoria di base

La relazione tra l'input ignoto $x(t)$ e la risposta strutturale $y(t)$ può essere definita mediante la seguente relazione [10]:

$$G_{yy}(j\omega) = \bar{H}(j\omega) \cdot G_{xx}(j\omega) \cdot H(j\omega)^T; \text{ [Bendat \& Piersol]}$$

- $G_{yy}(j\omega)$ = matrice PSD delle risposte $y(t)$. Le dimensioni sono $[m \times m]$ con m numero di risposte;
- $G_{xx}(j\omega)$ = matrice PSD dell'input $x(t)$. Le dimensioni sono $[r \times r]$ con r numero di input;
- $H(j\omega)$ = matrice FRF (matrice delle funzioni di risposta in frequenza). Le dimensioni sono $[m \times r]$;
- $\bar{H}(j\omega)$ = complesso coniugato di $H(j\omega)$.

La PSD (*Power Spectral Density Matrix*) rappresenta la matrice di densità spettrale di potenza. In generale la PSD da un'indicazione di come la potenza di un segnale è distribuita sullo spettro di frequenza. La matrice PSD che entra in gioco nella tecnica di *Frequency Domain Decomposition* è una matrice a tre dimensioni dove due entrate rappresentano i segnali e la terza entrata rappresenta la frequenza.

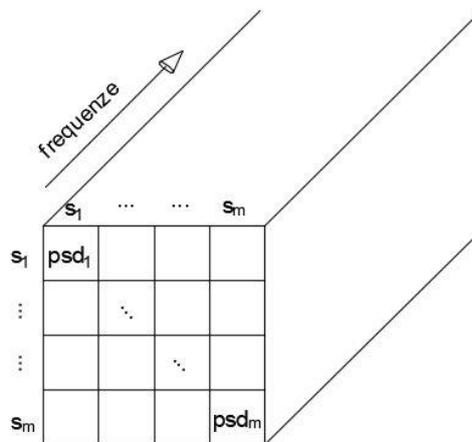


Figura 7: Costruzione matrice PSD

Per ogni frequenza, sulla diagonale della suddetta matrice si troveranno le densità spettrale di potenza dei segnali, mentre fuori dalla diagonale si troveranno le densità spettrali di potenza incrociate (*Cross Spectral Density*) dei segnali interessati.

Sfruttando la forma polo/residuo, si può scrivere la matrice FRF come:

$$H(j\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{j\omega - \lambda_k} + \frac{\overline{R_k}}{j\omega - \overline{\lambda_k}};$$

con:

- n = numero dei modi di vibrare;
- R_k = residuo;
- λ_k = polo;

Nel rispetto dell'ipotesi che l'input sia rappresentato da rumore bianco, la matrice PSD degli ingressi è una matrice costante:

$$G_{xx}(j\omega) = C;$$

Sostituendo quanto definito nella relazione iniziale si ottiene:

$$G_{yy}(j\omega) = \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \left\{ \left[\frac{R_k}{j\omega - \lambda_k} + \frac{\overline{R_k}}{j\omega - \overline{\lambda_k}} \right] \cdot C \cdot \left[\frac{R_s}{j\omega - \lambda_s} + \frac{\overline{R_s}}{j\omega - \overline{\lambda_s}} \right]^H \right\};$$

Dopo qualche passaggio matematico:

$$G_{yy}(j\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{j\omega - \lambda_k} + \frac{\overline{A_k}}{j\omega - \overline{\lambda_k}} + \frac{B_k}{-j\omega - \lambda_k} + \frac{\overline{B_k}}{-j\omega - \overline{\lambda_k}};$$

con A_k residuo della matrice PSD degli output $y(t)$.

È stato definito che per una certa frequenza solo un numero limitato di modi possono contribuire in maniera significativa, generalmente uno o due modi. Questo gruppo di modi è definito $Sub(\omega)$ e dunque, nel caso di struttura poco smorzata, la PSD delle risposte può essere definita come:

$$G_{yy}(j\omega) = \sum_{k \in Sub(\omega)} \frac{d_k \varphi_k \varphi_k^T}{j\omega - \lambda_k} + \frac{\overline{d_k} \overline{\varphi_k} \overline{\varphi_k}^T}{j\omega - \overline{\lambda_k}};$$

L'operazione che è stata fatta corrisponde ad una suddivisione del dominio delle frequenze in intervalli $Sub(\omega)$, per questo motivo si parla di tecnica di decomposizione del dominio delle frequenze.

3.2.2. Algoritmo di identificazione dinamica

Viene specificato ora l'aspetto più pratico del problema andando a definire un algoritmo da seguire per l'utilizzo della presente tecnica di identificazione dinamica.

Il primo step consiste sicuramente nella definizione della matrice di densità spettrale degli output $G_{yy}(j\omega)$ tramite le note relazioni per la definizione della densità spettrale di potenza e della densità spettrale di potenza incrociata. Queste funzioni (tenendo sempre conto che siamo in campo discreto e non continuo) sono organizzate in una matrice tridimensionale come descritto al punto precedente: si ottiene così la matrice PSD degli output (registrazioni degli accelerometri).

Il secondo passaggio consiste nella decomposizione della matrice $G_{yy}(j\omega)$ ai valori singolari, si applica dunque la SVD (*Singular Values Decomposition*) [11]:

$$G_{yy}(j\omega_i) = U_i \cdot S_i \cdot U_i^H;$$

- U_i = matrice unitaria contenente i vettori u_{ij} ;
- S_i = matrice singolare contenente i valori singolari s_{ij} ;

Questa scomposizione va fatta per ogni frequenza dello spettro in maniera tale da ottenere un andamento dei valori singolari in funzione della frequenza.

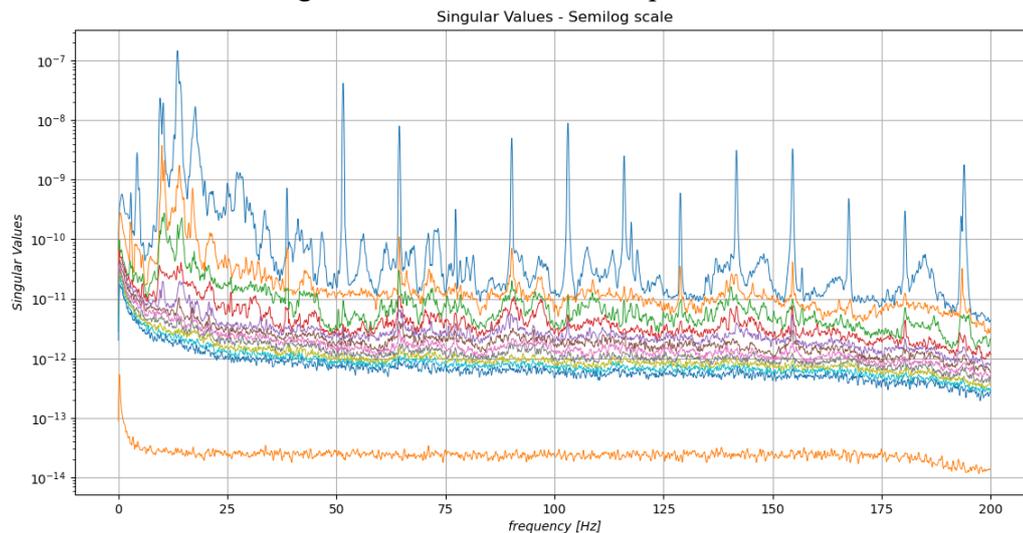


Figura 8: Andamento dei valori singolari in funzione della frequenza

I valori singolari sono organizzati in ordine decrescente sulla diagonale della matrice S (questo è fatto per ogni frequenza).

In corrispondenza delle frequenze relative ai modi di vibrare della struttura analizzata si avrà un picco dovuto al fatto che quel modo, nell'intervallo di frequenza prossimo al picco, è dominante. In questo caso si ha dunque che la frequenza è definita dal picco individuato (frequenza corrispondente al picco) mentre la forma modale è individuata mediante il vettore singolare corrispondente al picco (ad ogni valore singolare corrisponde un vettore singolare). Si ha dunque una fase di individuazione dei picchi (*Peak Picking*) in cui vengono evidenziati i picchi relativi ai modi di vibrare e si determinano di conseguenza le forme modali. Per questa fase ci si riferisce al primo valore singolare (il più grande in quanto sono ordinati in ordine decrescente).

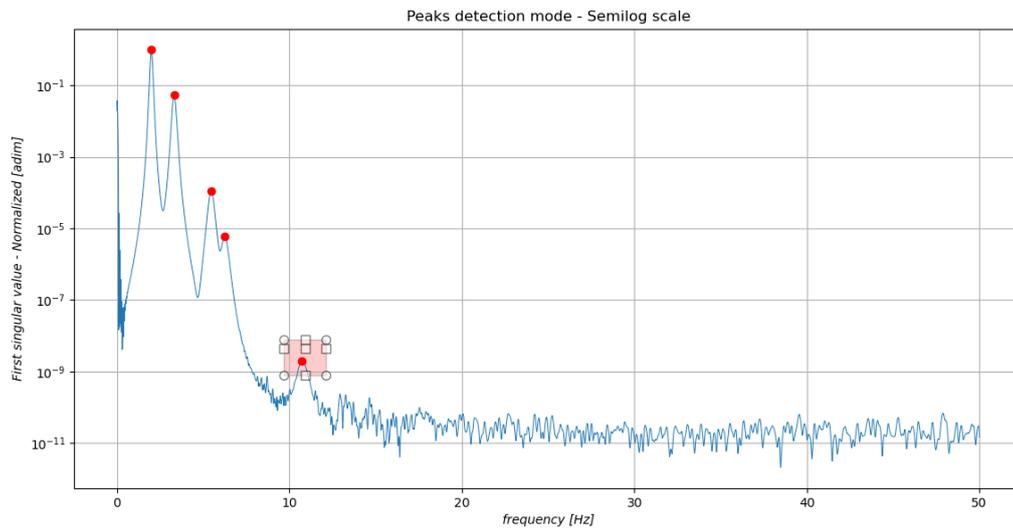
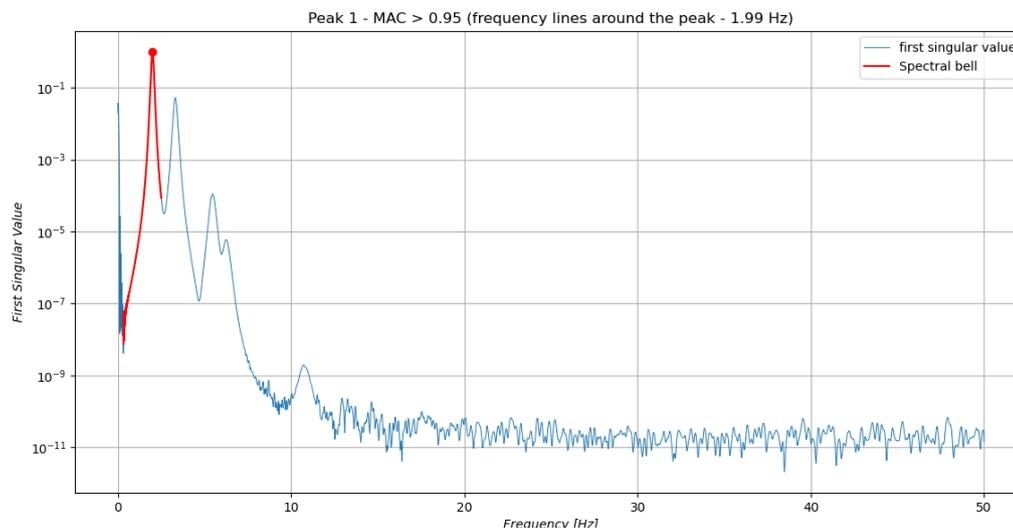


Figura 9: Fase di Peak Picking

Bisogna fare però attenzione al fatto che non tutti i picchi rappresentano dei reali modi di vibrare ma alcuni picchi possono essere dovuti al rumore o al fatto che l'input non sia propriamente rumore bianco.

Si è ottenuto per ora una stima della frequenza e della forma modale ma non si hanno ancora informazioni relative allo smorzamento [12]. Per la definizione dello smorzamento si fa riferimento alla decomposizione del dominio delle frequenze. Si confronta la forma modale corrispondente al valore di picco con le forme modali (vettori singolari) corrispondenti alle linee di frequenza intorno al picco: finchè il MAC (*Modal Assurance Cryteryon*) valutato tra le due forme modali è superiore ad un valore minimo, il corrispondente valore singolare appartiene alla funzione di densità del relativo SDOF del modo di vibrare individuato, tutti gli altri valori dello spettro di frequenza sono posti uguali a zero.

Dalla definizione totale o parziale della funzione di densità dello SDOF si possono ricavare frequenza e smorzamento: applicando l'inversa della trasformata di Fourier (*iFFT*) si torna nel dominio del tempo ottenendo una sorta di funzione di libero decadimento (*free-decay*). Avendo il tale funzione dello SDOF si può ricavare la frequenza tramite la tecnica di zero crossing e lo smorzamento tramite la tecnica di decremento logaritmico.



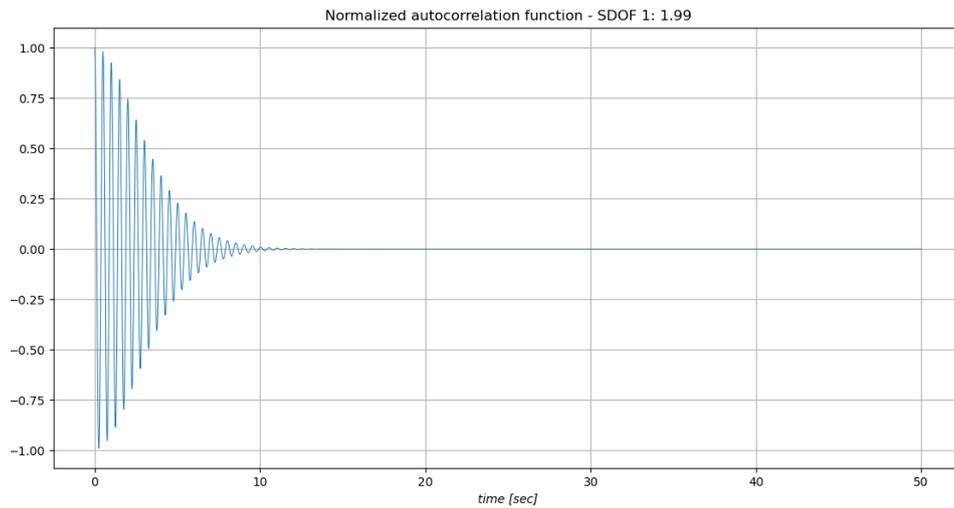


Figura 10: In alto: SDOF density function del picco evidenziato; In basso: Autocorrelation function ottenuta dalla iFFT

Si riporta di seguito un grafico dove viene mostrato come è stimato lo smorzamento mediante regressione lineare:

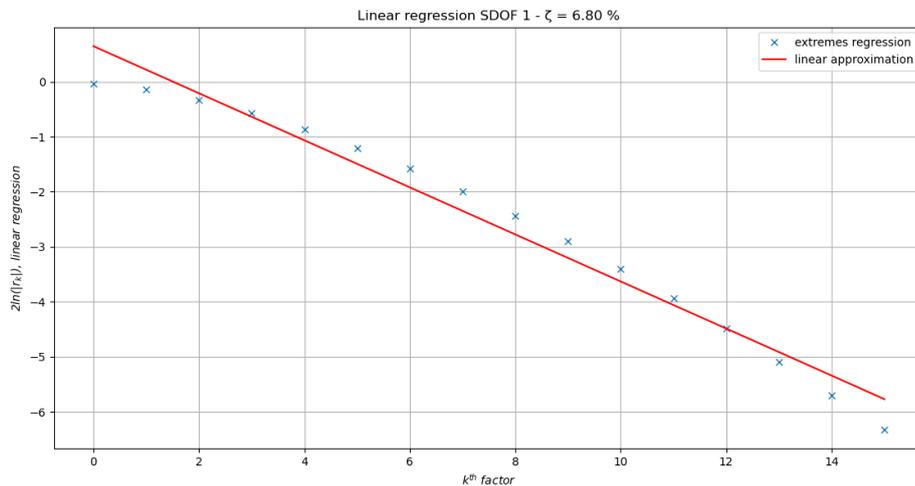


Figura 11: Regressione lineare per la stima dello smorzamento

La figura successiva mostra uno schema riassuntivo dei vari passaggi che interessano la tecnica FDD:

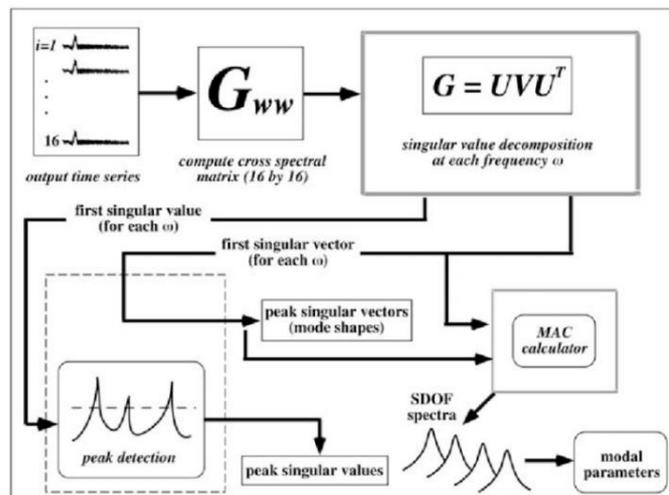


Figura 12: schema algoritmo FDD

3.2.3. Impostazione dell'algoritmo su Python

Per l'implementazione dell'algoritmo FDD è stato utilizzato il codice di programmazione *Python* (ver. 3.6) [13]. Nel presente paragrafo è illustrata l'impostazione dello script.

Il primo passo è la lettura dei dati di input e quindi delle registrazioni degli accelerometri. Le accelerazioni sono lette da *Python* direttamente da un file con estensione *.csv* dove sono organizzate in colonne.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	3.56E-04	1.70E-04	3.45E-04	-1.19E-04	2.27E-04	4.61E-04	-2.40E-04	4.02E-04	2.16E-05	-1.21E-04	2.48E-04	3.24E-05	
2	4.34E-04	2.54E-04	2.56E-04	-1.51E-04	3.26E-04	4.02E-04	-2.24E-04	4.15E-04	2.97E-05	-2.13E-04	2.62E-04	-1.08E-04	
3	4.34E-04	2.64E-04	2.51E-04	-2.40E-04	3.80E-04	3.34E-04	-2.86E-04	3.53E-04	6.74E-05	-3.37E-04	2.99E-04	2.16E-05	
4	3.43E-04	2.62E-04	3.10E-04	-2.18E-04	2.94E-04	2.78E-04	-2.35E-04	4.99E-04	9.71E-05	-5.10E-04	3.05E-04	5.39E-05	
5	3.32E-04	3.18E-04	2.56E-04	-2.27E-04	3.18E-04	3.37E-04	-2.18E-04	5.07E-04	4.59E-05	-2.29E-04	2.78E-04	0.00E+00	
6	3.43E-04	2.27E-04	2.72E-04	-1.54E-04	2.81E-04	3.53E-04	-1.81E-04	5.26E-04	1.51E-04	-2.51E-04	2.27E-04	2.16E-05	
7	4.69E-04	1.08E-04	3.43E-04	-1.11E-04	2.27E-04	5.02E-04	-2.24E-04	4.67E-04	7.28E-05	-1.40E-04	2.45E-04	-5.39E-05	
8	4.13E-04	1.56E-04	3.51E-04	-5.13E-05	2.99E-04	4.29E-04	-2.16E-04	3.64E-04	9.71E-05	-1.67E-04	2.62E-04	-8.63E-05	
9	3.67E-04	2.43E-04	2.62E-04	-1.81E-04	2.27E-04	4.42E-04	-1.89E-04	4.05E-04	6.47E-05	-2.89E-04	2.54E-04	0.00E+00	
10	4.10E-04	2.89E-04	1.81E-04	-1.92E-04	3.34E-04	3.48E-04	-1.92E-04	4.05E-04	4.05E-05	-1.94E-04	3.26E-04	3.24E-05	
11	3.61E-04	2.81E-04	1.78E-04	-1.73E-04	4.05E-04	3.56E-04	-2.37E-04	4.26E-04	9.71E-05	-4.07E-04	3.10E-04	-5.39E-05	
12	3.05E-04	2.83E-04	1.67E-04	-1.51E-04	2.59E-04	3.67E-04	-1.73E-04	4.59E-04	9.44E-05	-4.23E-04	3.13E-04	-1.08E-05	
13	4.02E-04	2.78E-04	2.13E-04	-1.35E-04	2.18E-04	4.10E-04	-1.78E-04	4.40E-04	1.05E-04	-2.35E-04	2.51E-04	1.08E-05	
14	3.48E-04	2.35E-04	2.48E-04	-1.05E-04	2.64E-04	4.34E-04	-1.70E-04	3.91E-04	1.29E-04	-2.43E-04	2.32E-04	-1.29E-04	
15	4.26E-04	2.40E-04	2.56E-04	-7.55E-05	1.46E-04	4.61E-04	-2.10E-04	2.40E-04	1.13E-04	-2.40E-04	3.07E-04	-3.24E-05	

Figura 13: accelerazioni in file *.csv*

Nel file sopracitato non è presente la colonna temporale in quanto sarà poi automaticamente creata in funzione della frequenza di campionamento e del numero di campioni (numero di righe del file). È importante, ovviamente, che tutte le colonne abbiano lo stesso numero di righe e che i segnali siano allineati nel tempo.

Per il corretto funzionamento dello script è inoltre necessario compilare un altro file con estensione *.csv* dove vengono inserite le informazioni che sono riportate di seguito.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Nodes	x[m]	y[m]	z[m]	dx	dy	dz	Sensors	x	y	z	Reg x	Reg y	Reg z
2	1	2.44	0	0	N	N	N	-	0	0	0	-	-	-
3	2	0	0	0	N	N	N	-	0	0	0	-	-	-
4	3	2.44	35	0	N	N	N	-	0	0	0	-	-	-
5	4	0	35	0	N	N	N	-	0	0	0	-	-	-
6	5	2.44	3.5	0	Y	N	Y	S9	0	0	1	-	-	10
7	6	0	3.5	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
8	7	2.44	7	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
9	8	0	7	0	Y	N	Y	S8	1	0	1	11	-	9
10	9	2.44	10.5	0	Y	N	Y	S7	0	0	1	-	-	8
11	10	0	10.5	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
12	11	2.44	14	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
13	12	0	14	0	Y	N	Y	S6	0	0	1	-	-	7
14	13	2.44	17.5	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
15	14	0	17.5	0	Y	N	Y	S5	-1	0	1	5	-	6
16	15	2.44	21	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
17	16	0	21	0	Y	N	Y	S4	0	0	1	-	-	4
18	17	2.44	24.5	0	Y	N	Y	S3	0	0	1	-	-	12
19	18	0	24.5	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
20	19	2.44	28	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
21	20	0	28	0	Y	N	Y	S2	-1	0	1	3	-	2
22	21	2.44	31.5	0	Y	N	Y	S1	0	0	1	-	-	1
23	22	0	31.5	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
24														
25														

Figura 14: file *model_nodes.csv*

Le colonne presenti nel file sono:

- *Nodes*: in questa colonna viene riportata la numerazione dei nodi dove sono posizionati i sensori e degli altri nodi che saranno poi necessari per la corretta rappresentazione della struttura e della sua forma modale (gli spostamenti dei punti che non sono strumentati sono ricavati per interpolazione facendo delle ipotesi in base al tipo di struttura);
- $x [m]$, $y [m]$, $z [m]$: in queste tre colonne vengono inserite le coordinate dei nodi che sono stati specificati nella prima colonna;
- dx , dy , dz : in queste tre colonne viene specificato quali sono i gradi di libertà dei singoli nodi in termini di solo spostamento e non rotazioni (Y = spostamento libero, N = spostamento vincolato). Ad esempio, se un nodo è incastrato si dovrà inserire ‘N’ in tutti e tre i campi;
- *Sensors*: in questa colonna viene indicato il nome del sensore in corrispondenza del nodo in cui è posizionato;
- x , y , z : in queste tre colonne vengono indicate le direzioni di misurazione ed il verso della terna locale dello strumento rispetto a quella globale adottata dall’utente. Si indica con ‘1’ se il verso dell’asse coincide con quello del sistema di riferimento globale, ‘-1’ se il verso è contrario o ‘0’ se lo strumento non misura in quella direzione.
- *Reg x*, *Reg y*, *Reg z*: in questi campi va indicata la corrispondenza tra le registrazioni dei sensori e le colonne del file delle accelerazioni (indice della colonna). Questo passaggio è fondamentale per il corretto plot delle forme modali.

Compilati questi due file è possibile lanciare il codice ed ottenere i risultati dell’OMA ma per avere una più significativa rappresentazione dei modi di vibrare è stato realizzato un terzo file con estensione .csv (la compilazione è facoltativa) dove è possibile inserire i nodi che vogliamo collegare mediante delle connessioni monodimensionali. Così facendo si ha la possibilità di *‘disegnare’* una qualsiasi struttura mediante nodi ed elementi monodimensionali.

	A	B	C	D
1	link	Node 1	Node 2	
2	1	1	2	
3	2	3	4	
4	3	5	6	
5	4	7	8	
6	5	9	10	
7	6	11	12	
8	7	13	14	

Figura 15: link nel file .csv

È stata scelta questa strada per il plot della struttura in quanto è la stessa impostazione del software agli elementi finiti *Midas Civil* dove sono presenti: una tabella con i nodi (e le specifiche coordinate) ed una tabella con gli elementi monodimensionali che li uniscono.

Dopo aver compilato i precedenti file di input, è possibile lanciare lo script. La prima cosa che viene richiesta è la frequenza di campionamento:

```
Loading data . . .
+++++ INPUT DATA +++++
Sampling frequency [Hz]:
```

Figura 16: Inserimento frequenza di campionamento

Una volta che viene inserita, viene costruito il vettore temporale e si ha la possibilità di visualizzare il grafico delle accelerazioni nel tempo.

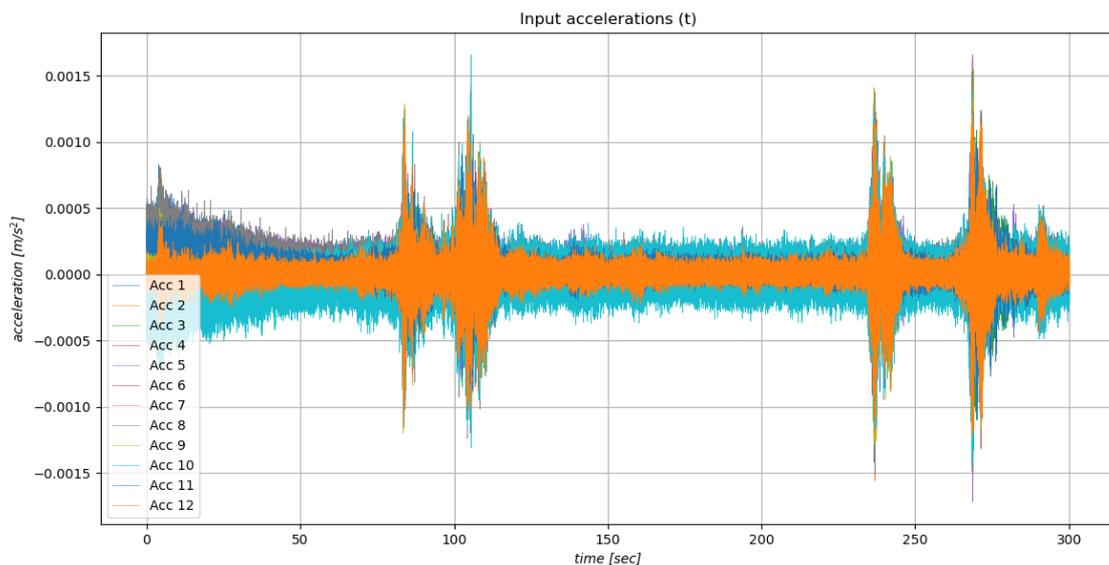


Figura 17: Grafico accelerazioni di input

Il passo successivo è rappresentato dal calcolo della matrice PSD delle risposte strutturali e della scomposizione ai valori singolari. Prima di questa operazione il segnale è filtrato mediante una funzione *finestra*, questo aspetto è molto importante quando si opera nel dominio delle frequenze.

Nel caso in esame si è scelto di operare mediante una finestra di *Hann*, che ha la forma riportata nella figura seguente:

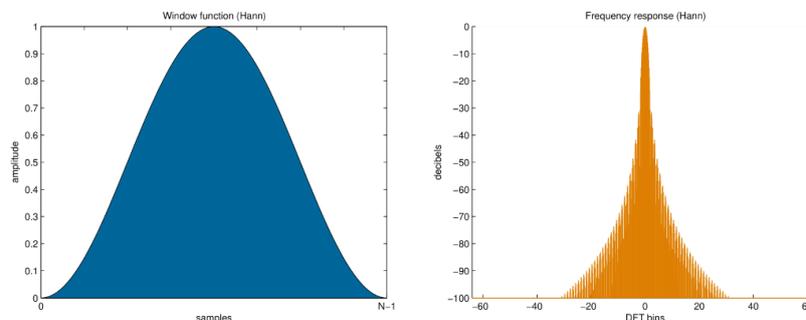


Figura 18: finestra di Hann

La corretta lunghezza della finestra è stata definita mediante un'analisi di sensibilità operando su un coefficiente secondo la seguente relazione:

$$N = \text{int} \left(\frac{f_s}{c} \right);$$

Il coefficiente c ottimale è stato individuato intorno a 0.05 ma può comunque essere modificato dall'utente. N rappresenta il numero di elementi che costituiscono il vettore finestra. La scelta della relazione precedente si basa sul fatto che: la lunghezza dello spettro di frequenza dipende dalla frequenza di campionamento f_s , questo nel rispetto del criterio di Nyquist. Per quanto possano essere le misurazioni, si ha sempre a che fare con un segnale campionato e non si lavora mai con un segnale continuo (non si parla mai di funzioni ma di vettori). Si riporta di seguito la relazione che descrive la trasformata di Fourier di un segnale campionato:

$$X_\delta(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_s);$$

La relazione precedente mostra come la trasformata di un segnale campionato restituisca una sequenza infinita di repliche della trasformata che si vuole ottenere.

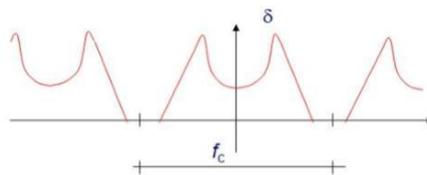


Figura 19: repliche spettro di frequenza

Se la frequenza di campionamento è troppo piccola si parla di sottocampionamento e si ha una sovrapposizione delle repliche delle trasformate con conseguente perdita di informazioni (*aliasing*). Il criterio di Nyquist consente di evitare questo problema definendo una frequenza minima di campionamento definita come:

$$f_s = \frac{1}{t_s} > 2B_f;$$

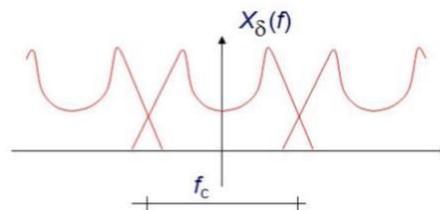


Figura 20: Aliasing

Dove B_f definisce la banda di frequenza. Ovviamente si può ragionare anche in maniera inversa definendo la banda di frequenza che è possibile ottenere in funzione della frequenza di campionamento:

$$B_f = \frac{f_s}{2};$$

Sulla base di questo criterio sappiamo sempre la frequenza massima che possiamo individuare nello spettro. Nota la frequenza di campionamento f_s e nota la lunghezza del vettore frequenze della FFT (impostata sempre in funzione della frequenza in maniera tale da avere una precisione del millesimo) è stato tarato il coefficiente c .

```

43 ## Power Spectral Density Matrix
44
45 #Definizione della csdm
46 def cross_spectral_density(M1, I1): #M1 = acc_num, I1 = fs
47     c = 0.05
48     vect = signal.get_window('hann', int(I1/c))
49     F, _ = signal.csd(M1[:,0],M1[:,1],I1, window = vect, nfft = int(I1/0.001))
50     a = np.shape(F) [0]
51     b = np.shape(M1) [1]
52     PSD = np.zeros((a, b, b), dtype = "complex_")
53     for i in range(np.shape(M1) [1]):
54         for j in range(np.shape(M1) [1]):
55             f, PSD[:, i, j] = signal.csd(M1[:,i],M1[:,j],I1, window = vect, nfft = int(I1/0.001))
56     return f, PSD
59 ## Scomposizione della PSD Matrix (SVD)
60
61 #Funzione per scomposizione SVD
62 def singular_value_decomposition(M1, V1, M2): #M1 = PSD, V1 = f, M2 = acc_num
63     a = np.shape(V1) [0]
64     b = np.shape(M2) [1]
65     U = np.zeros((a, b, b), dtype = "complex_")
66     S = np.zeros((a, b))
67     for i in range(np.shape(M1) [0]):
68         U[i,:,:], S[i,:], _ = np.linalg.svd(M1[i,:,:])
69     return U, S

```

Figura 21: Porzione di codice per la definizione della matrice PSD

Definita la matrice PSD e decomposta secondo la SVD, quello che segue è la fase di individuazione dei picchi. Questa fase è fondamentale ed è l'unica parte del codice manuale in quanto si è optato per una scelta non automatica dei picchi.

Compare la seguente schermata dove ci sono le indicazioni per la selezione dei picchi:

```

Loading data . . .
+++++ INPUT DATA ++++++
Sampling frequency [Hz]: 400
+++++ PEAKS DETECTION MODE ++++++
Draw a rectangle around the desired peak and press 'W' when
you are sure about your selection. The key 'w' allows you to
save the coordinates of the peak (frequency and singular value).
Press 'Q' when you selected all the peaks.

```

Figura 22: peak detection mode

Subito dopo la comparsa delle indicazioni sulla schermata di Python, si apre un grafico che rappresenta il primo valore singolare normalizzato in scala semilogaritmica.

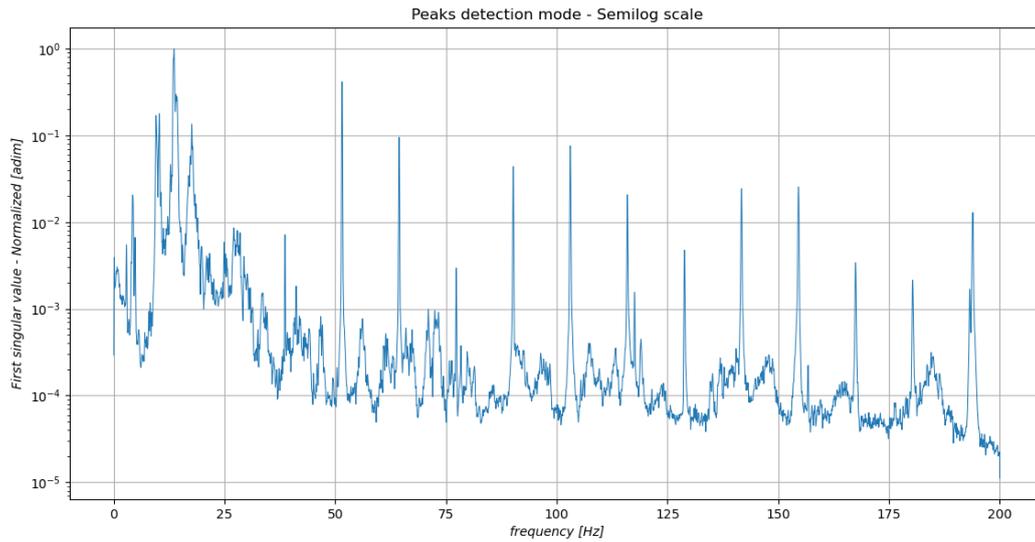
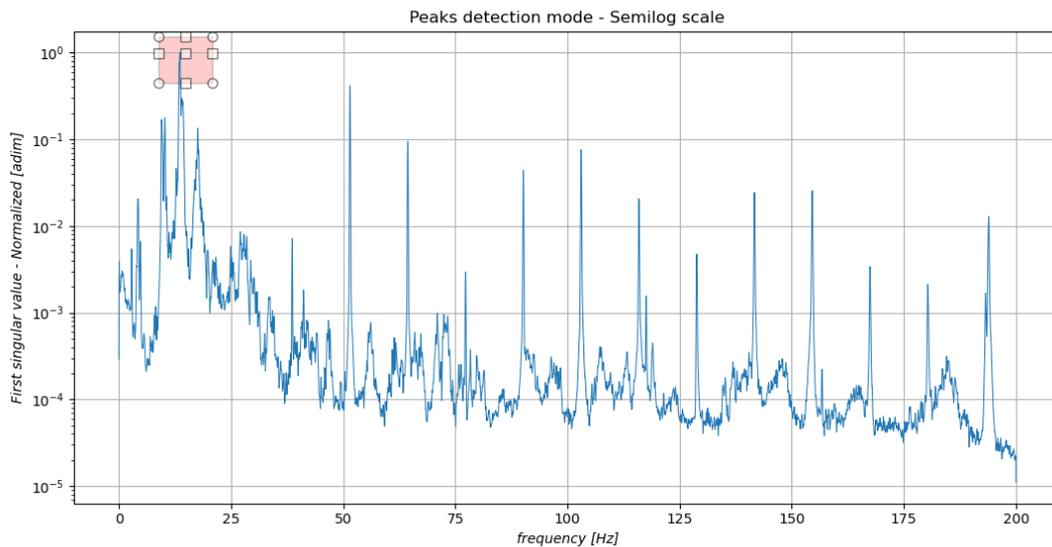


Figura 23: peak detection mode – spettro

Dal grafico si andranno a selezionare manualmente i picchi seguendo la procedura:

- Tracciamento riquadro intorno al picco che si vuole evidenziare;



- Selezione del picco mediante il tasto **W**;
- Selezionato il picco comparirà un'indicazione sullo schermo che dirà se il picco è stato individuato correttamente;

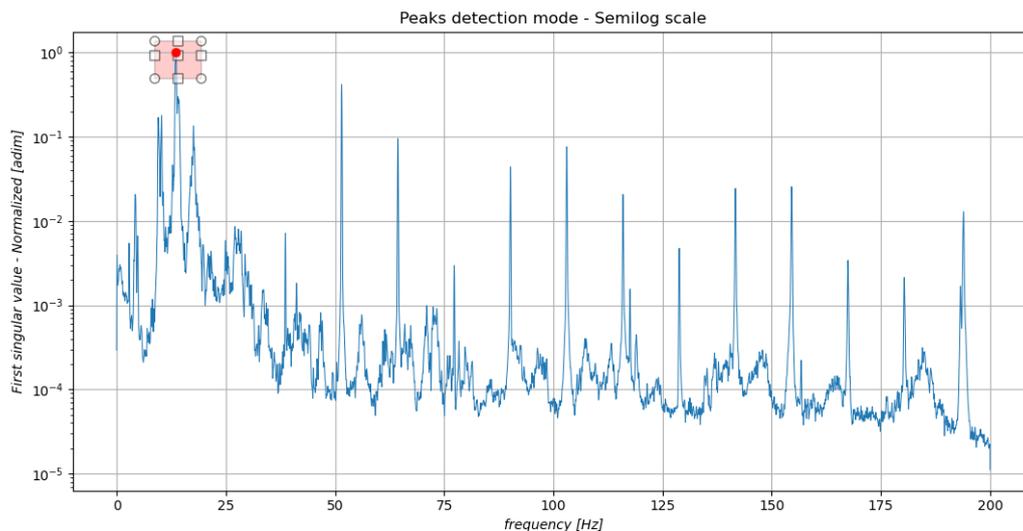


Figura 24: picco selezionato

- Nel momento in cui tutti i picchi desiderati sono stati selezionati, si preme **Q** e si chiude la modalità di individuazione dei picchi.

Vengono subito pubblicati i risultati e valutati gli smorzamenti secondo le modalità descritte nel paragrafo precedente.

```

Estimated frequencies and damping by FDD:

Mode 1: f = 10.28 Hz   ζ = 2.18 %
Mode 2: f = 13.61 Hz   ζ = 1.57 %
Mode 3: f = 17.58 Hz   ζ = 0.95 %
Mode 4: f = 38.64 Hz   ζ = 0.31 %
Mode 5: f = 51.53 Hz   ζ = 0.25 %

Number of modes that you want to save:

```

Figura 25: pubblicazione risultati

Come si nota dalla figura precedente, si può indicare il numero di modi di cui si vogliono salvare i risultati. Indicato il numero di modi che ci interessa, i risultati (frequenze, smorzamenti e forme modali) vengono salvati in un file *.csv* denominato *results_FDD*.

Il file è impostato come segue:

	A	B	C	D	E	F
1	f [Hz]	10.28	13.61	17.58	38.64	51.53
2	damp [%]	2.184667	1.56913	0.950657	0.306812	0.245008
3	S9-Z	-0.53397	0.739784	-0.24255	0.232498	-1
4	S8-X	1	-0.01173	-0.34107	-0.49589	0.020369
5	S8-Z	0.515396	0.962445	0.101615	0.063531	0.239772
6	S7-Z	-0.73019	0.901967	-0.35733	0.095992	0.380297
7	S6-Z	0.617837	0.458788	0.285576	0.034928	0.014305
8	S5-X	0.546989	-0.03335	1	1	0.166059

Figura 26: impostazione risultati nel file *.csv*

Nella prima riga troviamo le frequenze, nella seconda gli smorzamenti e nelle successive gli spostamenti modali (normalizzati rispetto al valore massimo) associati ai sensori di riferimento ed alla direzione di misurazione che si trovano nella prima colonna.

3.3. Stochastic Subspace Identification (SSI)

Questa è una tecnica che opera nel dominio del tempo e che ha trovato grande approvazione nella comunità ingegneristica dopo la pubblicazione del libro di van Orverschee & De Moor nel 1996 [14]. La *Data-Driven Stochastic Subspace Identification* è considerata una delle classi più potenti di tecniche di identificazione dinamica Output-Only, basate quindi sull'ipotesi che l'input sia rappresentato da rumore ambientale. Lo svantaggio di questa tecnica è che la teoria sulla quale si basa è matematicamente molto complessa. Una spiegazione del metodo dal punto di vista ingegneristico è stata comunque fornita da una pubblicazione di Rune Brincker [15].

3.3.1. Teoria di base

Si consideri la risposta strutturale registrata dagli strumenti (al tempo continuo):

$$y(t) = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{Bmatrix};$$

Il sistema può essere considerato tramite la classica formulazione matriciale di un sistema a più gradi di libertà (MDOF):

$$[M]\ddot{y}(t) + [C]\dot{y}(t) + [K]y(t) = f(t);$$

L'equazione è stata già descritta nel capitolo relativo all'analisi modale analitica. Per passare dalla formulazione al continuo a quella discreta, la soluzione più semplice è quella di introdurre la soluzione nello spazio delle fasi (passaggio da equazioni del II ordine ad equazioni differenziali del I ordine):

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B f(t);$$

$$y(t) = C x(t);$$

Dove la matrice di sistema A_c al continuo e la matrice dei carichi B sono date da:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix};$$

Il vantaggio di questa formulazione è che la soluzione è nota (Kailath [16]):

$$x(t) = \exp(A_c t) x(0) + \int_0^t \exp(A_c(t - \tau)) B f(\tau) d\tau;$$

Per passare dalla soluzione sopra descritta al tempo discreto si impone che:

$$y_k = y(k\Delta t);$$

La risposta strutturale al tempo discreto è normalmente rappresentata da una matrice del tipo:

$$[Y] = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_N];$$

con N che rappresenta il numero di campionamenti.

Un passo fondamentale del metodo è la definizione della matrice di Hankel. La matrice di Hankel che è definita nel metodo SSI è semplicemente una raccolta di matrici che sono create traslando la matrice Y degli output:

$$[Y_h] = \begin{bmatrix} Y_{1:N-2s} \\ Y_{2:N-2s+1} \\ \vdots \\ Y_{2s:N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{hp} \\ Y_{hf} \end{bmatrix};$$

La parte superiore della matrice Y_{hp} è definita ‘passato’ mentre la parte inferiore della matrice Y_f è definita ‘futuro’. Il numero totale di traslazioni (*shift*) nella matrice è $2s$ ed è definito come numero di *blocchi* di righe. Per ogni blocco di righe si avranno tante righe quanti sono gli output (numero di accelerometri installati sulla struttura - M), dunque la matrice avrà dimensione $[2sM \times N-2s]$.

Il passaggio successivo è il più complesso dal punto di vista del significato ed è la proiezione del futuro sul passato. Questo passaggio è spiegato nel libro di van Overschee & De Moor [14] per via geometrica. Facendo riferimento al metodo *Data-Driven SSI*, la proiezione può essere definita come:

$$[H] = E(Y_{hf}|Y_{hp}) = [Y_{hf}][Y_{hp}]^T \left([Y_{hp}][Y_{hp}]^T \right)^{-1} [Y_{hp}];$$

La matrice $[H]$ rappresenta la matrice del sottospazio (*Subspace Matrix*) ed ha dimensioni $[sM \times sM]$. Le colonne della suddetta matrice rappresentano dei liberi decadimenti del sistema per delle condizioni iniziali che sono ancora incognite. La generica colonna della matrice $[H]$ può essere definita come:

$$\{H_{col}\} = [O]\{x_0\};$$

con $[O]$ che è la matrice di osservabilità (*observability matrix*), definita come:

$$[O] = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{s-1} \end{bmatrix};$$

In generale, si può scrivere:

$$[H] = [O][X_0];$$

La matrice $[X_0]$ contiene gli *stati di Kalman* all’istante di tempo iniziale t_0 per tutte le colonne della matrice di osservabilità. Per conoscere gli stati di Kalman, se non è nota la matrice $[O]$, si opta per la scomposizione ai valori singolari (SVD) della matrice $[H]$:

$$[H] = [U][S][V]^T;$$

La stima della matrice $[O]$ e della matrice $[X_0]$ può essere definita:

$$[\hat{O}] = [U][S]^{\frac{1}{2}};$$

$$[\hat{X}_0] = [S]^{\frac{1}{2}}[V]^T;$$

Se si vuole stimare la matrice degli stati di Kalman per istanti di tempo successivi all'istante iniziale, basta fare la stessa operazione ma rimuovendo, per esempio per l'istante di tempo t_l , il primo blocco di righe di $[H]$ e l'ultimo blocco di righe di $[O]$. Quindi rimuovendo in maniera sequenziale tutti i blocchi di possono definire tutti gli stati di Kalman.

Dell'ultimo passaggio, quello che ci interessa in particolar modo è la matrice di osservabilità, che serve per la definizione delle matrici di sistema (*system matrices*). La matrice di transizione di stato (*state transition matrix*) $[A]$ può essere definita dalla stima della matrice di osservabilità rimuovendo il primo blocco di righe prima e l'ultimo poi:

$$[\hat{O}_{2:s}][\hat{A}] = [\hat{O}_{1:s-1}];$$

La matrice $[A]$ può essere trovata mediante formula inversa, facendo riferimento però alla pseudoinversa di Moore-Penrose.

La seconda matrice di sistema, la matrice di osservazione (*observation matrix*), può essere invece trovata semplicemente prendendo il primo blocco di righe della matrice di osservabilità:

$$[\hat{C}] = [\hat{O}_{1:1}];$$

Definite le matrici di sistema si possono facilmente definire i parametri modali tramite scomposizione agli autovalori della matrice $[A]$:

$$[\hat{A}] = [\Psi][\mu_i][\Psi]^{-1};$$

$$\lambda_i = \frac{\ln(\mu_i)}{t_s};$$

$$\omega_i = |\lambda_i|;$$

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi};$$

$$\zeta_i = \frac{Re(\lambda_i)}{|\lambda_i|};$$

La matrice delle forme modali è definita come:

$$[\Phi] = [C][\Psi].$$

3.3.2. Definizione parametri e Fast Multi-Order SSI

Nel paragrafo precedente è stato spiegato gran parte del problema e quali sono i passaggi da seguire, nel presente paragrafo vengono riportati sinteticamente i passaggi definiti in precedenza tenendo conto dell'aspetto pratico e non teorico dell'algoritmo di identificazione, facendo anche riferimento ai parametri che possono influire sui risultati finali.

Il primo step è rappresentato dalla definizione della matrice di Hankel e quindi del numero di traslazioni della matrice degli output. Impostare bene il numero $2s$ di traslazioni è fondamentale in quanto questa scelta va ad influire sull'ordine del sistema (sM). Van Overschee nel suo libro consiglia di porre come numero di traslazioni:

$$2s = 2 \cdot \frac{\text{ordine massimo}}{\text{numero di output}};$$

Il numero di traslazioni va dunque definito in funzione del numero di modi di vibrare che si vogliono ottenere. Dal punto di vista pratico è importante definire l'ordine massimo del sistema in funzione del numero di output in maniera tale che $2s \in \mathbb{N}$. Dunque, il numero di traslazioni è automaticamente definito una volta che è definito l'ordine massimo del sistema.

Dal punto di vista teorico, l'ordine del sistema potrebbe essere ottenuto definendo il numero di valori singolari (ottenuti dalla scomposizione della matrice del sottospazio) non nulli, ma la presenza del rumore porta ad avere tutti i valori non nulli.

In maniera tale da riuscire ad ottenere i corretti parametri modali è opportuno plottare il diagramma di stabilizzazione, dove vengono riportate tutte le frequenze ottenute per ogni ordine considerato (in tal modo l'ordine della struttura è individuata per tentativi). Tipicamente l'ordine del sistema è sovrastimato ed i modi reali sono individuati dal suddetto diagramma in quanto si noterà un allineamento verticali dei poli stabili, distinguendoli da quelli spuri.

I modi spuri che si ottengono possono essere classificati come:

- Modi di rumore (*Noise modes*): sono dovuti al rumore delle misurazioni ed alle caratteristiche dell'eccitazione della struttura che non ha precisamente le proprietà del rumore bianco;
- Modi matematici (*Mathematical modes*): sono dovuti al fatto che l'ordine del modello è sovrastimato e quindi obbligatoriamente si otterranno dei modi in più che non sono dei modi reali.

Il diagramma di stabilizzazione consente di scartare diversi modi spuri, altri modi spuri possono essere scartati seguendo altri criteri, per esempio scartando i modi che presentano uno smorzamento fuori dal range che ci si aspetta. Anche sottostimando l'ordine del modello si rischia di incorrere in degli errori dovuti alla sovrapposizione di diversi modi di vibrare reali e di rumore.

La soluzione per l'ordine del modello è dunque quello di sovrastimare e tracciare un diagramma di stabilizzazione che è un valido strumento. In ogni caso, la pratica ha dimostrato che: il numero di traslazioni definito da van Overschee può essere considerato come un numero minimo in quanto: se il sistema ha una frequenza fondamentale bassa rispetto alla frequenza di campionamento, solo pochi campionamenti di questa risposta

modale sono inclusi nella matrice di Hankel e di conseguenza il modo di vibrare non è ben individuato.

Dunque, anche il numero di traslazioni dev'essere impostato in maniera opportuna tenendo conto però anche dell'incremento del tempo computazionale che comporterebbe. Una condizione che è stata individuata per il numero di traslazioni, in maniera tale da vedere la frequenza fondamentale f_0 , è la seguente [17]:

$$2s = \frac{f_s}{2f_0};$$

Dunque, il numero di traslazioni minimo da considerare è il massimo delle due condizioni individuate.

Definito il numero $2s$ e definita la matrice di Hankel si procede come descritto nel paragrafo precedente fino alla definizione della matrice di osservabilità.

Si pone:

- $[O^\uparrow]$ = matrice di osservabilità senza l'ultimo blocco di righe;
- $[O^\downarrow]$ = matrice di osservabilità senza il primo blocco di righe.

La matrice di sistema $[A]$ può essere definita facendo riferimento alla pseudoinversa di Moore-Penrose:

$$[A] = [O^\uparrow]^p [O^\downarrow];$$

È stato individuato un metodo più efficiente e numericamente stabile per definire la matrice di transizione di stato ed è quello di ricorrere alla scomposizione QR della $[O^\uparrow]$:

$$[O^\uparrow] = [Q][R];$$

$$[S] = [Q]^T [O^\downarrow];$$

$$[A] = [R]^{-1} [S].$$

La matrice di osservazione è definita come al paragrafo precedente.

I passaggi che sono stati descritti finora andrebbero eseguiti per ogni ordine del sistema considerato e devono essere in gran numero per poter tracciare un idoneo diagramma di stabilizzazione (*Multi-Order Calculation*). Per incrementare l'efficienza dell'algoritmo si fa riferimento alla *Fast Multi-Order SSI* [18].

È dimostrabile che non è necessario ricalcolare tutte le matrici per ogni ordine ma basta calcolare e scomporre (scomposizione QR) la matrice di osservabilità solo per l'ordine massimo scelto n_t e poi calcolare come segue le matrici di sistema:

$$\text{per ord} = n_1 \cdots n_j \cdots n_t;$$

$$[A]_j = [R]_{[1:n_j, 1:n_j]}^{-1} [S]_{[1:n_j, 1:n_j]};$$

$$[C]_j = [C]_{[1:M, 1:n_j]};$$

Seguendo questo metodo il tempo computazionale del programma si riduce notevolmente.

3.3.3. Impostazione dell'algoritmo su Python

Per l'implementazione dell'algoritmo SSI è stato utilizzato il codice di programmazione *Python* (ver. 3.6) [13].

Analogamente a quanto visto per l'FDD, il primo passo è la lettura dei dati di input e quindi delle registrazioni degli accelerometri. Le accelerazioni sono lette da *Python* direttamente da un file con estensione *.csv* dove sono organizzate in colonne.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	3.56E-04	1.70E-04	3.45E-04	-1.19E-04	2.27E-04	4.61E-04	-2.40E-04	4.02E-04	2.16E-05	-1.21E-04	2.48E-04	3.24E-05	
2	4.34E-04	2.54E-04	2.56E-04	-1.51E-04	3.26E-04	4.02E-04	-2.24E-04	4.15E-04	2.97E-05	-2.13E-04	2.62E-04	-1.08E-04	
3	4.34E-04	2.64E-04	2.51E-04	-2.40E-04	3.80E-04	3.34E-04	-2.86E-04	3.53E-04	6.74E-05	-3.37E-04	2.99E-04	2.16E-05	
4	3.43E-04	2.62E-04	3.10E-04	-2.18E-04	2.94E-04	2.78E-04	-2.35E-04	4.99E-04	9.71E-05	-5.10E-04	3.05E-04	5.39E-05	
5	3.32E-04	3.18E-04	2.56E-04	-2.27E-04	3.18E-04	3.37E-04	-2.18E-04	5.07E-04	4.59E-05	-2.29E-04	2.78E-04	0.00E+00	
6	3.43E-04	2.27E-04	2.72E-04	-1.54E-04	2.81E-04	3.53E-04	-1.81E-04	5.26E-04	1.51E-04	-2.51E-04	2.27E-04	2.16E-05	
7	4.69E-04	1.08E-04	3.43E-04	-1.11E-04	2.27E-04	5.02E-04	-2.24E-04	4.67E-04	7.28E-05	-1.40E-04	2.45E-04	-5.39E-05	
8	4.13E-04	1.56E-04	3.51E-04	-5.13E-05	2.99E-04	4.29E-04	-2.16E-04	3.64E-04	9.71E-05	-1.67E-04	2.62E-04	-8.63E-05	
9	3.67E-04	2.43E-04	2.62E-04	-1.81E-04	2.27E-04	4.42E-04	-1.89E-04	4.05E-04	6.47E-05	-2.89E-04	2.54E-04	0.00E+00	
10	4.10E-04	2.89E-04	1.81E-04	-1.92E-04	3.34E-04	3.48E-04	-1.92E-04	4.05E-04	4.05E-05	-1.94E-04	3.26E-04	3.24E-05	
11	3.61E-04	2.81E-04	1.78E-04	-1.73E-04	4.05E-04	3.56E-04	-2.37E-04	4.26E-04	9.71E-05	-4.07E-04	3.10E-04	-5.39E-05	
12	3.05E-04	2.83E-04	1.67E-04	-1.51E-04	2.59E-04	3.67E-04	-1.73E-04	4.59E-04	9.44E-05	-4.23E-04	3.13E-04	-1.08E-05	
13	4.02E-04	2.78E-04	2.13E-04	-1.35E-04	2.18E-04	4.10E-04	-1.78E-04	4.40E-04	1.05E-04	-2.35E-04	2.51E-04	1.08E-05	
14	3.48E-04	2.35E-04	2.48E-04	-1.05E-04	2.64E-04	4.34E-04	-1.70E-04	3.91E-04	1.29E-04	-2.43E-04	2.32E-04	-1.29E-04	
15	4.26E-04	2.40E-04	2.56E-04	-7.55E-05	1.46E-04	4.61E-04	-2.10E-04	2.40E-04	1.13E-04	-2.40E-04	3.07E-04	-3.24E-05	

Figura 27: accelerazioni in file *.csv*

Nel file sopracitato non è presente la colonna temporale in quanto sarà poi automaticamente creata in funzione della frequenza di campionamento e del numero di campioni (numero di righe del file). È importante, ovviamente, che tutte le colonne abbiano lo stesso numero di righe e che i segnali siano allineati nel tempo.

Per il corretto funzionamento dello script è inoltre necessario compilare un altro file con estensione *.csv* dove vengono inserite le informazioni che sono riportate di seguito.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Nodes	x[m]	y[m]	z[m]	dx	dy	dz	Sensors	x	y	z	Reg x	Reg y	Reg z
2	1	2.44	0	0	N	N	N	-	0	0	0	-	-	-
3	2	0	0	0	N	N	N	-	0	0	0	-	-	-
4	3	2.44	35	0	N	N	N	-	0	0	0	-	-	-
5	4	0	35	0	N	N	N	-	0	0	0	-	-	-
6	5	2.44	3.5	0	Y	N	Y	S9	0	0	1	-	-	10
7	6	0	3.5	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
8	7	2.44	7	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
9	8	0	7	0	Y	N	Y	S8	1	0	1	11	-	9
10	9	2.44	10.5	0	Y	N	Y	S7	0	0	1	-	-	8
11	10	0	10.5	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
12	11	2.44	14	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
13	12	0	14	0	Y	N	Y	S6	0	0	1	-	-	7
14	13	2.44	17.5	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
15	14	0	17.5	0	Y	N	Y	S5	-1	0	1	5	-	6
16	15	2.44	21	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
17	16	0	21	0	Y	N	Y	S4	0	0	1	-	-	4
18	17	2.44	24.5	0	Y	N	Y	S3	0	0	1	-	-	12
19	18	0	24.5	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
20	19	2.44	28	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
21	20	0	28	0	Y	N	Y	S2	-1	0	1	3	-	2
22	21	2.44	31.5	0	Y	N	Y	S1	0	0	1	-	-	1
23	22	0	31.5	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
24														
25														

Figura 28: file *model.csv*

Le colonne presenti nel file sono:

- *Nodes*: in questa colonna viene riportata la numerazione dei nodi dove sono posizionati i sensori e degli altri nodi che saranno poi necessari per la corretta rappresentazione della struttura e della sua forma modale (gli spostamenti dei punti che non sono strumentati sono ricavati per interpolazione facendo delle ipotesi in base al tipo di struttura);
- $x [m]$, $y [m]$, $z [m]$: in queste tre colonne vengono inserite le coordinate dei nodi che sono stati specificati nella prima colonna;
- dx , dy , dz : in queste tre colonne viene specificato quali sono i gradi di libertà dei singoli nodi in termini di solo spostamento e non rotazioni (Y = spostamento libero, N = spostamento vincolato). Ad esempio, se un nodo è incastrato si dovrà inserire ‘N’ in tutti e tre i campi;
- *Sensors*: in questa colonna viene indicato il nome del sensore in corrispondenza del nodo in cui è posizionato;
- x , y , z : in queste tre colonne vengono indicate le direzioni di misurazione ed il verso della terna locale dello strumento rispetto a quella globale adottata dall’utente. Si indica con ‘1’ se il verso dell’asse coincide con quello del sistema di riferimento globale, ‘-1’ se il verso è contrario o ‘0’ se lo strumento non misura in quella direzione.
- *Reg x*, *Reg y*, *Reg z*: in questi campi va indicata la corrispondenza tra le registrazioni dei sensori e le colonne del file delle accelerazioni. Questo passaggio è fondamentale per il corretto plot delle forme modali.

Compilati questi due file è possibile lanciare il codice ed ottenere i risultati dell’OMA ma per avere una più significativa rappresentazione dei modi di vibrare è stato realizzato un terzo file con estensione .csv (la compilazione è facoltativa) dove è possibile inserire i nodi che vogliamo collegare mediante dei link monodimensionali. Così facendo si ha la possibilità di ‘disegnare’ una qualsiasi struttura mediante nodi e link.

	A	B	C	D
1	link	Node 1	Node 2	
2	1	1	2	
3	2	3	4	
4	3	5	6	
5	4	7	8	
6	5	9	10	
7	6	11	12	
8	7	13	14	

Figura 29: link nel file .csv

È stata scelta questa strada per il plot della struttura in quanto è la stessa impostazione del software agli elementi finiti *Midas Civil* dove sono presenti: una tabella con i nodi (e le specifiche coordinate) ed una tabella con gli elementi monodimensionali che li uniscono.

Dopo aver compilato i precedenti file di input, è possibile lanciare lo script. La prima cosa che viene richiesta è la frequenza di campionamento:

```

Loading data ...

+++++ Input Data +++++

Sampling frequency [Hz]:
    
```

Figura 30: Inserimento frequenza di campionamento

Una volta che viene inserita, viene costruito il vettore temporale e si ha la possibilità di visualizzare il grafico delle accelerazioni nel tempo.

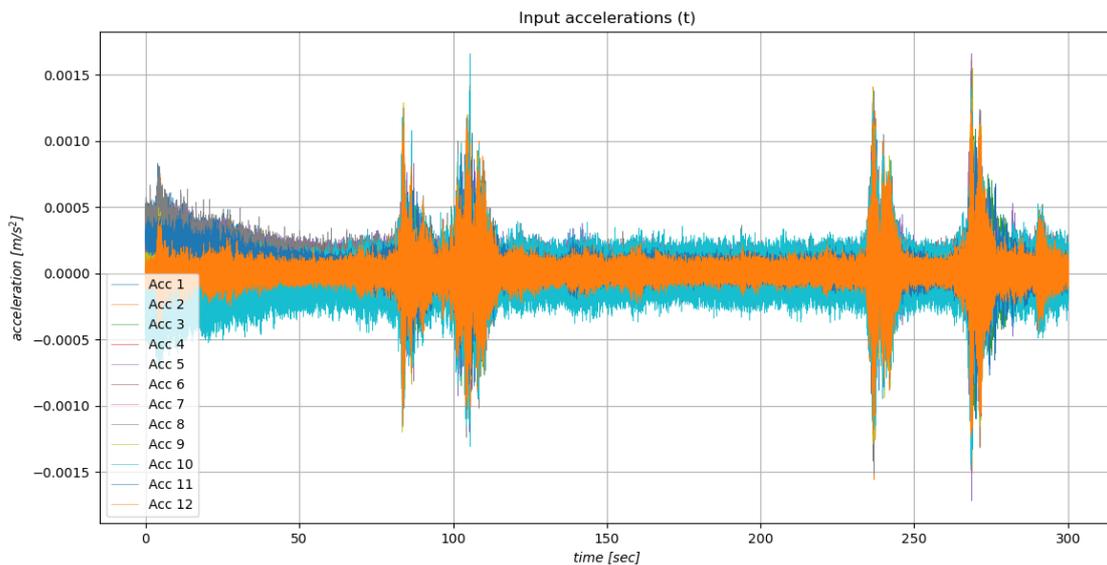


Figura 31: Grafico accelerazioni di input

L'ordine del sistema ed il numero di traslazioni sono stati definiti tenendo conto di quanto detto nel paragrafo precedente. L'ordine massimo è definito in funzione del numero di output M secondo la seguente relazione:

$$ord\ max = C_{ord} \cdot 2 \cdot M;$$

Il coefficiente C_{ord} è impostato dall'utente in funzione del caso, è consigliato scegliere un coefficiente compreso tra 10 e 20. Il numero di traslazioni è definito invece secondo la seguente relazione:

$$2s = C_{shift} \cdot \frac{ord\ max}{M};$$

Il coefficiente C_{shift} è impostato dall'utente in funzione del caso e delle frequenze fondamentali che vogliono essere individuate, è consigliato scegliere un coefficiente il cui valore è compreso tra 2 e 4.

Da tener presente che che C_{shift} e $C_{ord} \in \mathbb{N}$.

I passi successivi sono quelli descritti nei paragrafi precedenti:

- Definizione matrice di Hankel;

```
104 ## Definizione Block Hankel Matrix
105
106 #Definizione della matrice di Hankel (Past and Future)
107 def hankel_matrix(I1, I2, I3, M1): #I1 = s, I2 = M, I3 = N, M1 = YY
108     YYh = np.zeros((int(I1 * I2), int(I3 - I1)), dtype = "float64")
109     for i in range(I1):
110         R_in = int(I2 * i)
111         R_fin = int(R_in + I2)
112         YYh[R_in : R_fin, :] = M1[:, i : int(I3 - I1 + i)]
113     pf = (int(I1/2) + 1) * I2
114     YYhp = YYh[0:pf, :]
115     YYhf = YYh[pf:., :]
116     p = int(pf/I2)
117     return YYhp, YYhf, p
```

- Definizione della matrice del sottospazio;

```
120 ## Subspace Matrix
121
122 #Data driven SSI - UPC
123 def subspace_matrix(M1, M2): #M1 = YYhp, M2 = YYhf
124     H = M2 @ M1.T @ np.linalg.pinv(M1 @ M1.T) @ M1
125     return H
```

- Scomposizione SVD della matrice del sottospazio;

```
128 ## Scomposizione Subspace Matrix (SVD)
129
130 #Scomposizione SVD della matrice H
131 def singular_values_decomposition(M1): #M1 = H
132     U, S, V = np.linalg.svd(M1, full_matrices=False, compute_uv=True, hermitian=False)
133     S = np.diag(S)
134     return U, S, V
```

- Definizione della matrice di osservabilità;

```
136 ## Observability Matrix
137
138 #Definizione della matrice di osservabilità
139 def observability_matrix(M1, M2): #M1 = U, M2 = S
140     O = M1 @ np.sqrt(M2)
141     return O
```

- Calcolo matrici di sistema per l'ordine massimo;

```
143 ## Matrici di sistema (State transition Matrix and Observation Matrix)
144
145 #Definizione delle matrici di sistema
146 def system_matrixes(M1, I1): #M1 = O, I1 = M
147     C = M1[0:I1, 0:ord_max]
148     O_sup = M1[0:-I1, :]
149     O_inf = M1[I1:., :]
150     Q, R = scipy.linalg.qr(O_sup, mode = 'economic') #QR scomposizione della matrice O_sup
151     S = Q.T @ O_inf
152     Rml = np.linalg.pinv(R) #Inversa di R
153     return Q, S, Rml, C
```

- Calcolo multi-ordine;

Man mano che questi passaggi vengono completati si visualizza sulla schermata di Python la conferma della riuscita dell'operazione:

```
Loading data ...

+++++++ Input Data ++++++

Sampling frequency [Hz]: 400

+++++++ Block Hankel Matrix ++++++

Evaluation completed.

+++++++ Subspace Matrix ++++++

Evaluation completed.

+++++++ Kalman States - SVD of Subspace Matrix ++++++

Evaluation completed.

+++++++ System Matrices ++++++

Evaluation completed.
```

Figura 32: Stato avanzamento algoritmo

Terminato il calcolo multi-ordine, viene eseguita l'analisi modale per ogni ordine partendo da 1 fino al valore massimo impostato. Per ogni ordine vengono eliminati i modi spuri che non presentano una coppia complessa coniugata (come dev'essere nello spazio delle fasi) sfruttando il MAC (*Modal Assurance Criterion*) ed i modi che presentano uno smorzamento fuori da un range preimpostato sempre dall'utente. I restanti modi spuri sono scartati sulla base del diagramma di stabilizzazione o se presentano delle forme modali senza significato fisico.

Nel successivo grafico viene riportato un esempio di diagramma di stabilizzazione dove è evidenziato un modo di vibrare che risulta stabile e quindi presenta un allineamento verticale (viene individuato per più ordini del sistema consecutivi).

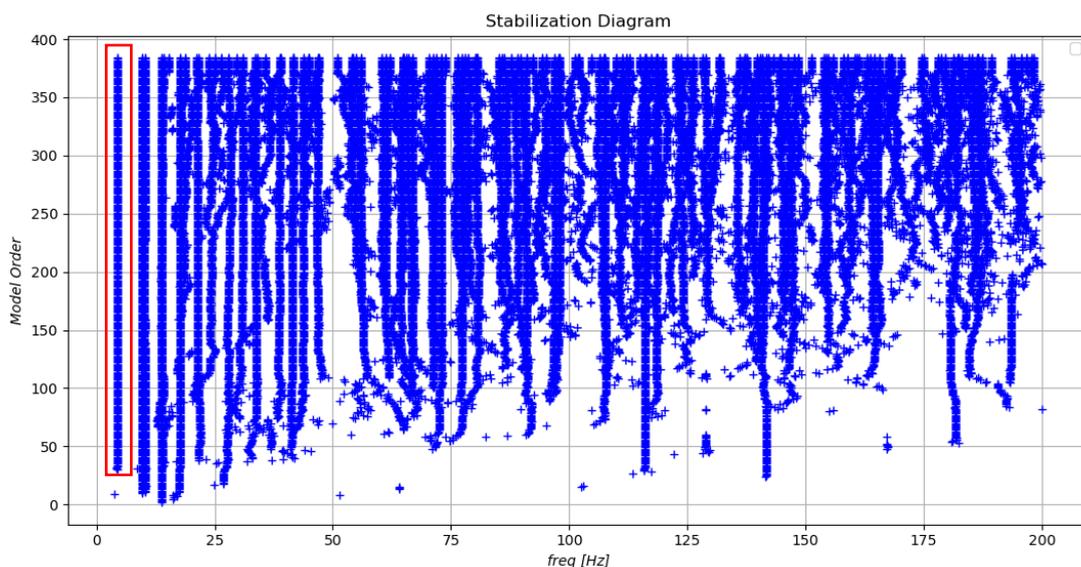


Figura 33: Diagramma di stabilizzazione con in evidenza un modo stabile

Visto attentamente il diagramma di stabilizzazione, viene chiesto l'ordine del modello che si vuole definitivamente considerare e di conseguenza vengono pubblicati i risultati dell'analisi modale:

```

+++++++ Modal Analysis ++++++
Estimated frequencies and damping by SSI :

Mode 1:  f = 4.47 Hz    ζ = 5.09 %
Mode 2:  f = 9.67 Hz    ζ = 1.81 %
Mode 3:  f = 10.23 Hz   ζ = 0.98 %
Mode 4:  f = 13.73 Hz   ζ = 1.58 %
Mode 5:  f = 14.13 Hz   ζ = 6.46 %
Mode 6:  f = 15.19 Hz   ζ = 19.40 %
Mode 7:  f = 17.64 Hz   ζ = 2.68 %

```

Figura 34: Risultati analisi modale

Si inserisce il numero di modi di vibrare che si vogliono salvare, facendo riferimento alla numerazione di sinistra. Indicato il numero di modi che ci interessa, i risultati (frequenze, smorzamenti e forme modali) vengono salvati automaticamente in un file .csv denominato *results_SSI*.

Il file è impostato come segue:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	f [Hz]	4.47	9.67	10.23	13.73	14.13	15.19	17.64
2	damp [%]	5.09	1.81	0.98	1.58	6.46	19.4	2.68
3	S9-Z	-0.05436	0.042494	-1	0.522953	0.831634	0.742317	-0.25261
4	S8-X	-0.20788	0.01379	0.169717	-0.21732	-0.04697	0.264995	-0.28447
5	S8-Z	-0.02431	0.229409	0.085447	0.602562	0.999862	0.02638	-0.0126
6	S7-Z	0.233623	-0.00063	-0.26817	0.059334	0.366714	0.42488	-0.1018
7	S6-Z	-0.1678	1	0.737665	0.0104	0.281778	0.409441	-0.27735
8	S5-X	1	-0.00437	0.082226	-0.13318	-0.03489	0.417031	1
9	S5-Z	0.083656	0.422483	-0.42039	0.059974	0.057711	-0.3599	-0.28708
10	S4-Z	0.199393	0.467658	0.70215	0.510312	0.747804	0.366497	-0.39924
11	S3-Z	-0.05164	0.390882	-0.05414	1	1	1	-0.10718

Figura 35: impostazione risultati nel file .csv

Nella prima riga troviamo le frequenze, nella seconda gli smorzamenti e nelle successive gli spostamenti modali (normalizzati rispetto al valore massimo) associati ai sensori di riferimento ed alla direzione di misurazione (indicati nella prima colonna).

4. Applicazione degli algoritmi a casi reali

Per la validazione degli algoritmi si è deciso di utilizzare i dati relativi a due applicazioni reali di cui sono già noti i parametri modali da ottenere. La validazione non è solo rappresentata dal fatto che si devono ottenere gli stessi risultati delle sperimentazioni originali ma anche dal fatto che si devono ottenere gli stessi risultati con due algoritmi che presentano una base teorica e dei passaggi differenti in quanto non operano nello stesso dominio. Si deve dunque giungere sempre allo stesso risultato percorrendo delle strade differenti. Per avere un'ulteriore prova che i risultati ottenuti sono corretti, sono realizzati dei modelli agli elementi finiti delle strutture esaminate.

Le applicazioni che sono state considerate sono due:

- Applicazione su trave in calcestruzzo armato;
- Applicazione su telaio in acciaio.

Le applicazioni hanno dato modo di definire la correttezza o meno dell'impostazione dei parametri che sono stati definiti nei paragrafi precedenti sia per la tecnica *Frequency Domain Decomposition* che per la tecnica *Stochastic Subspace Identification*.

4.1. Analisi dinamica di una trave in calcestruzzo armato precompresso

4.1.1. Descrizione del sistema

La trave analizzata, come già detto in precedenza, è realizzata in calcestruzzo armato precompresso e presenta uno schema statico in semplice appoggio.

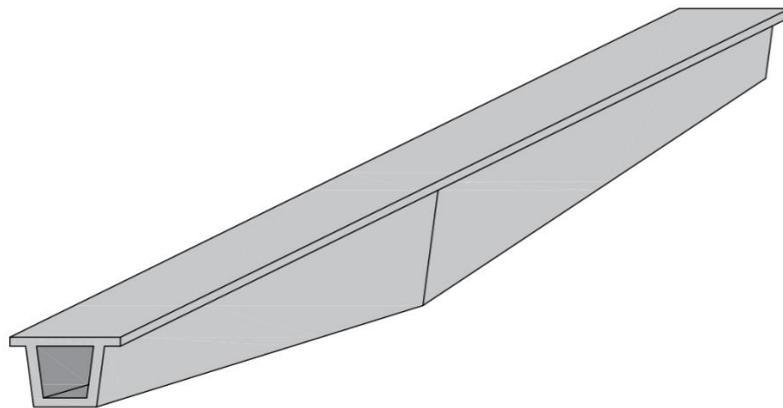


Figura 36: Trave in calcestruzzo armato

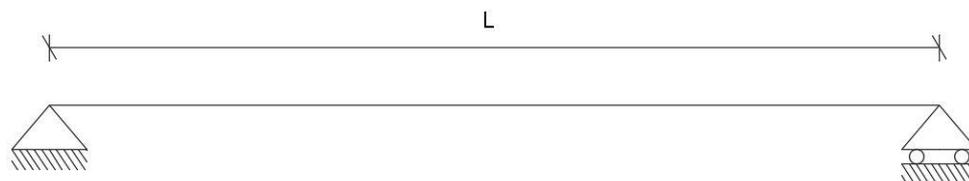


Figura 37: schema statico della trave

Le informazioni note relative ai materiali utilizzati sono le seguenti:

- Calcestruzzo: C35/45;
- Acciaio da precompressione: 10 cavi da 6 trefoli (139 mm²) in acciaio armonico.

Per la definizione del modello agli elementi finiti è fondamentale definire il modulo elastico del calcestruzzo:

$$E = 22000 \left(\frac{f_{ck} + 8}{10} \right)^{0.3} = 34077 \text{ MPa};$$

La trave ha una lunghezza di 35.00 m ed è appoggiata, ambo i lati, ad una distanza di 30 cm dalla sezione estrema, dunque la luce tra i due appoggi è di 34.40 m. La sezione trasversale scatolare è variabile lungo tutto lo sviluppo della trave, in particolare aumenta in altezza dalle sezioni estreme fino in mezzeria.

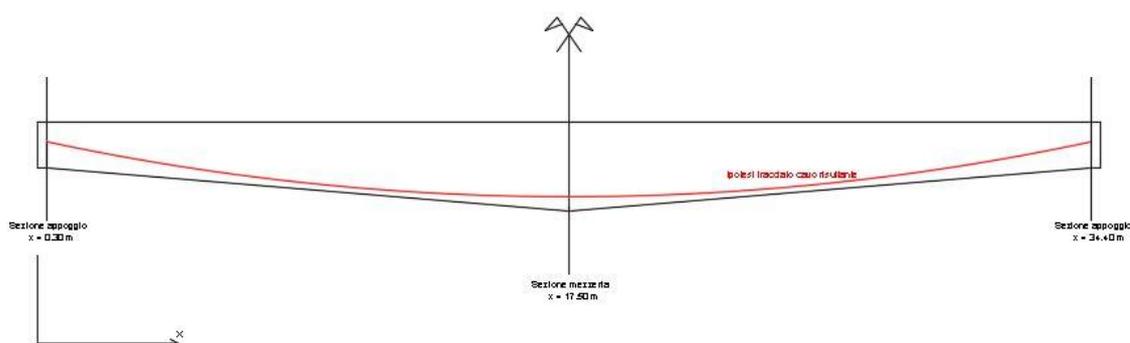


Figura 38: Sviluppo trave con hp di cavo risultante

Nella precedente figura è evidenziato in rosso il tracciato del cavo risultante di precompressione che è stato ipotizzato. Di seguito sono riportate le dimensioni e le caratteristiche geometriche della sezione trasversale della trave:



Figura 39: Dimensioni geometriche della sezione trasversale all'appoggio ed in mezzeria

Tabella 1: Caratteristiche geometriche della sezione di appoggio

Sezione appoggio		
		d_y [cm]
$A_{topslab}$ [cm ²]	4880	145
A_{anima} [cm ²]	2760	77.5
$A_{bottomslab}$ [cm ²]	2780	10
A_{tot} [cm ²]	13180	
S_y [cm ³]	1163200	
z_g [cm]	88.25493171	Distanza del baricentro dall'intradosso
I_{yy} [cm ⁴]	136034500	
I_{yg} [cm ⁴]	33376363.43	
γ_{cls} [kN/m ³]	25	
q [kN/m]	32.95	

Tabella 2: Caratteristiche geometriche della sezione di mezzeria

Sezione mezzeria		
		d_y [cm]
$A_{topslab}$ [cm ²]	4880	285
A_{anima} [cm ²]	6120	147.5
$A_{bottomslab}$ [cm ²]	2040	10
A_{tot} [cm ²]	19160	
S_y [cm ³]	3216600	
z_g [cm]	167.8810021	Distanza del baricentro dall'intradosso
I_{yy} [cm ⁴]	662878500	
I_{yg} [cm ⁴]	122872468.7	
γ_{cls} [kN/m ³]	25	
q [kN/m]	47.9	

Il carico q delle precedenti tabelle è stato applicato in maniera trapezoidale alla trave: crescente dalla sezione estrema alla mezzeria ed è rappresentativo del peso proprio della trave.

Come già detto in precedenza, è stata fatta un'ipotesi riguardante la precompressione della trave in quanto non era noto né il tracciato né la tensione di tesatura di progetto, l'unica informazione nota è legata al quantitativo dell'armatura da precompressione impiegata.

Si è ipotizzato un tracciato parabolico con massima eccentricità rispetto al baricentro in mezzeria, mentre agli appoggi il cavo è passante per il baricentro.

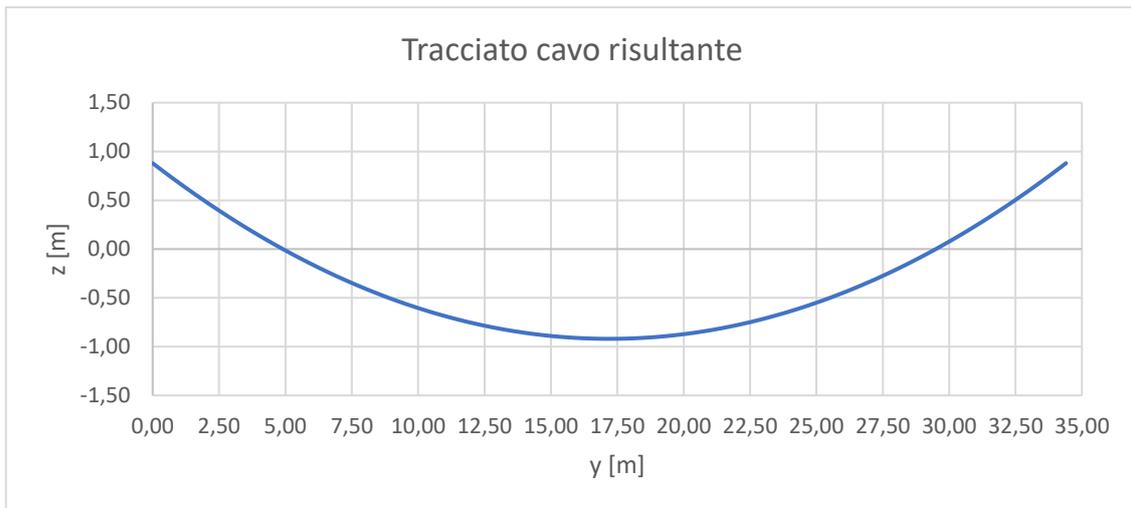
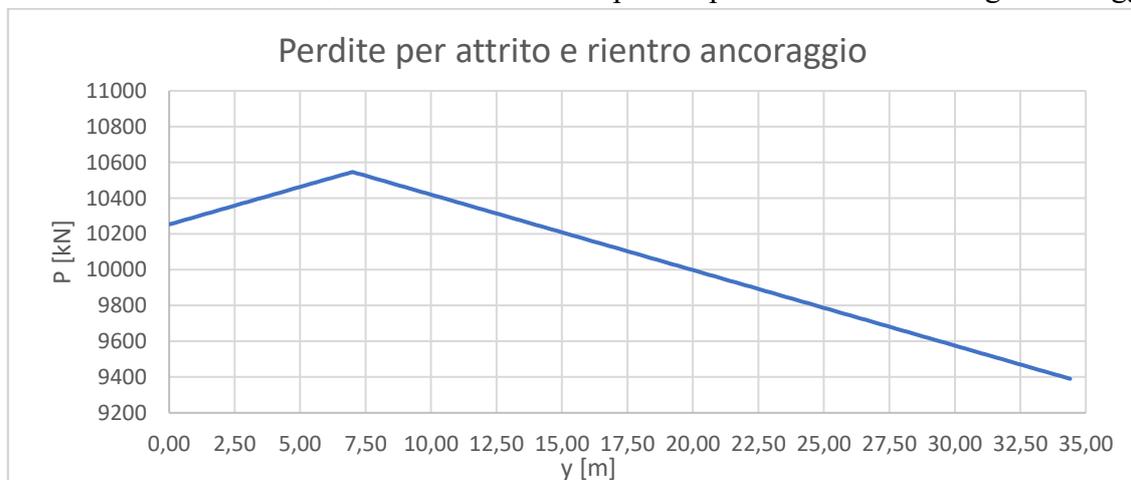


Figura 40: hp tracciato cavo equivalente

Per quanto riguarda il tiro sono state fatte le seguenti ipotesi:

- $\sigma_{p0} = 1300 \text{ MPa}$;
- $A_{cavo,ris} = 10 \cdot 6 \cdot 139 = 8340 \text{ mm}^2$;
- $P_0 = \sigma_{p0} \cdot A_{cavo,ris} = 10842 \text{ kN}$;

Partendo dal tiro iniziale P_0 sono state valutate le perdite per attrito e rientro degli ancoraggi:



Alle perdite di tensione (breve termine) sono state aggiunte le cadute di tensione (lungo termine) stimate pari al 10% del tiro a perdite scontate.

4.1.2. Risultati sperimentazione originale

Per la campagna di indagine dinamica, sulla trave, sono stati posizionati 9 accelerometri per un totale di 12 registrazioni:

- 3 registrazioni in direzione X (direzione orizzontale trasversale all'asse della trave);
- 9 registrazioni in direzione Z (direzione verticale).

Di seguito è riportato lo schema di posizionamento dei sensori:

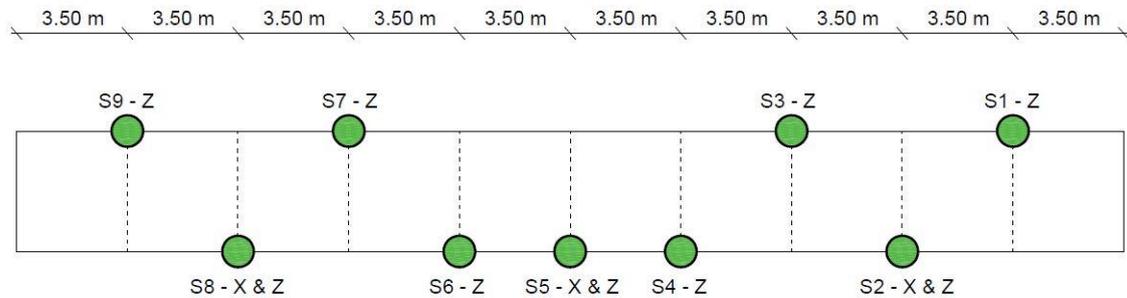


Figura 41: posizionamento dei sensori sulla trave

Nella precedente figura è riportata la disposizione dei sensori sulla trave e le rispettive direzioni di misurazione. Da riportare che tutti gli accelerometri sono disposti sull'estradosso della trave.

L'analisi della trave ha previsto prima la registrazione delle accelerazioni da rumore ambientale e successivamente la registrazione della risposta strutturale dovuta ad un'eccitazione imposta. In particolare l'eccitazione è stata prima applicata in direzione verticale e poi in direzione trasversale e sono state ricavate rispettivamente le frequenze modali per la direzione Z ed X. Tutte le registrazioni sono caratterizzate da una frequenza di campionamento di 400 Hz con durata 180 sec.

Si riportano di seguito le frequenze che sono state individuate dalla sperimentazione di riferimento:

Tabella 3: Risultati sperimentazione di riferimento della trave

	modo	f[Hz]
1° Flex orizzontale	1	2.83
1° Flex verticale	2	4.10
2° Flex verticale	3	13.53

Non sono fornite le informazioni relative agli smorzamenti o ai successivi modi di vibrare, dunque, la verifica di funzionamento degli algoritmi per questa applicazione si basa su soli tre modi di vibrare.

4.1.3. Modello agli elementi finiti

Per la modellazione agli elementi finiti è stato utilizzato il software *Midas Civil* [19].

Il modello della trave è stato realizzato utilizzando esclusivamente elementi monodimensionali (elementi *beam*). La mesh della trave è realizzata considerando elementi di lunghezza di circa 1.00 m ($34.4 / 35 = 0.983$ m) e ad ognuno di essi è stata assegnata una sezione variabile. Per ottenere la corretta geometria è stato necessario eseguire una traslazione dell'asse della trave dal centroide della sezione all'estradosso. Le reazioni

vincolari sono state comunque ricondotte alla reale posizione del vincolo (intradosso) mediante l'ausilio di *rigid link*.

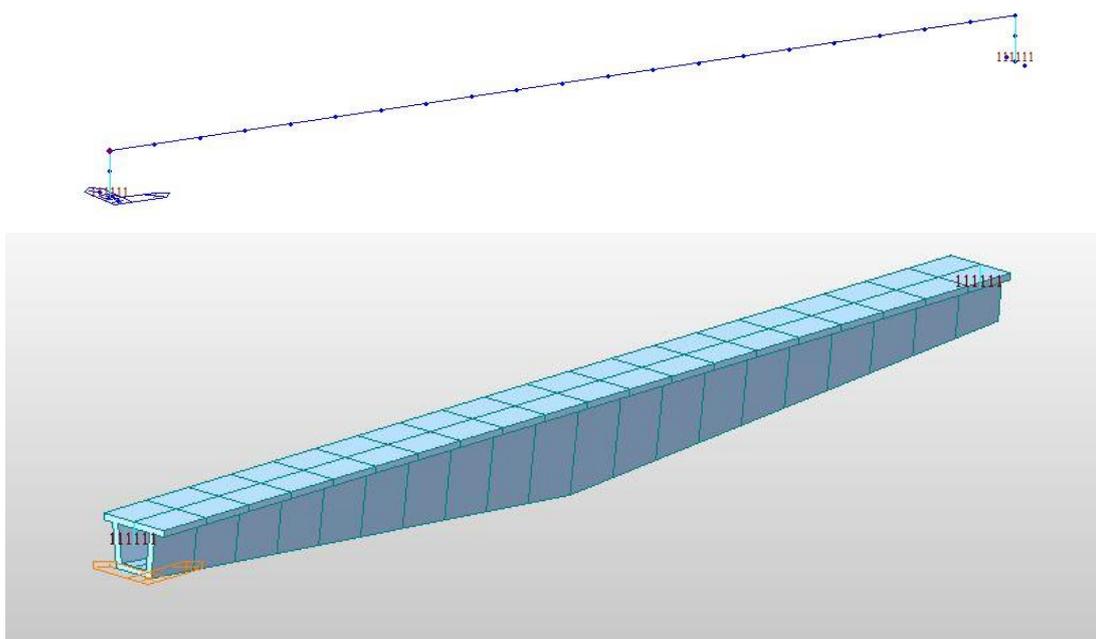


Figura 42: Modello agli elementi finiti della trave

I vincoli che sono stati considerati alle due estremità sono i seguenti:

- Prima estremità: cerniera (rotazione concessa sia intorno all'asse verticale che all'asse trasversale);
- Seconda estremità: carrello (rotazione concessa sia intorno all'asse verticale che all'asse trasversale).

L'unico carico che è stato considerato sulla trave è il peso proprio in quanto la presenza della precompressione nel modello non ha influito in alcun modo sui risultati dell'analisi modale e si è ovviamente deciso di considerare solo i carichi presenti al momento della sperimentazione. Matrice delle masse e matrice di rigidezza sono definite automaticamente dal software.

Dall'analisi dinamica, fatta tramite il software agli elementi finiti, sono stati ottenuti i seguenti risultati:

Tabella 4: Risultati analisi dinamica FEM

modo		Analisi riferimento	Modello FE
		f[Hz]	f[Hz]
1° Flex orizzontale	1	2.83	2.92
1° Flex verticale	2	4.10	4.49
2° Flex verticale	3	13.53	13.85

Come si nota dai risultati c'è coerenza tra quello che è stato ottenuto dall'analisi di riferimento e quello che è stato ottenuto mediante il software agli elementi finiti. Si nota che tutte le frequenze del modello FE sono più alte rispetto alle frequenze dell'analisi di riferimento e questo può essere dovuto ad un danneggiamento della trave che ha causato una riduzione della rigidezza del calcestruzzo (es. effetto della fessurazione).

Si riportano le forme modali dei modi di vibrare individuati dal modello FE:

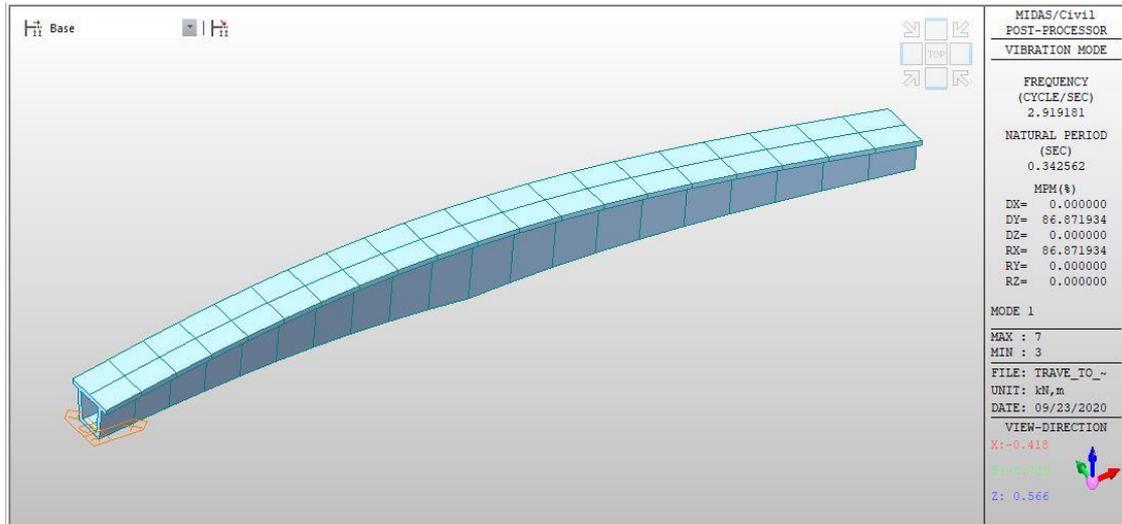


Figura 43: Primo modo flessionale in direzione trasversale - 2.92 Hz

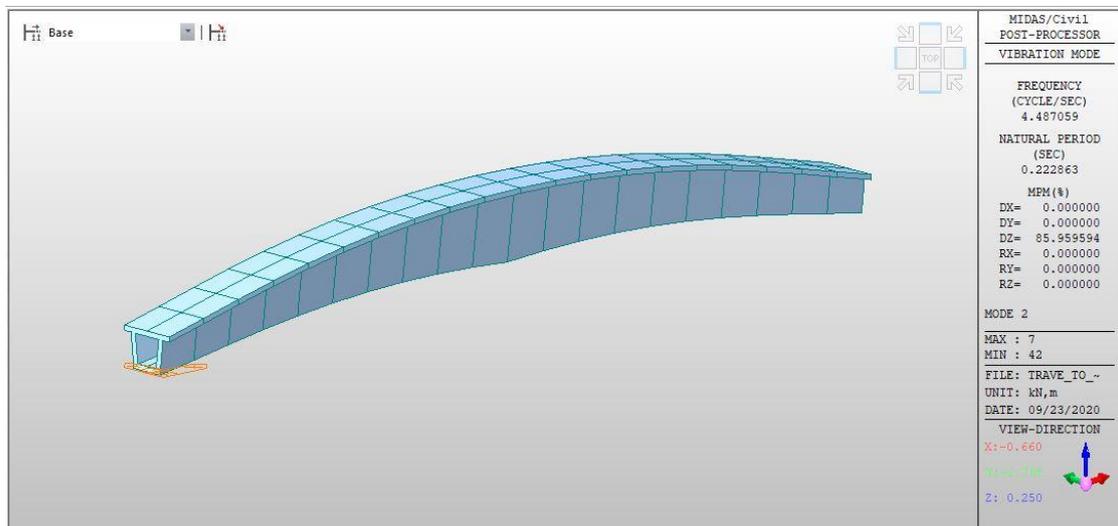


Figura 44: Primo modo flessionale in direzione verticale - 4.49 Hz

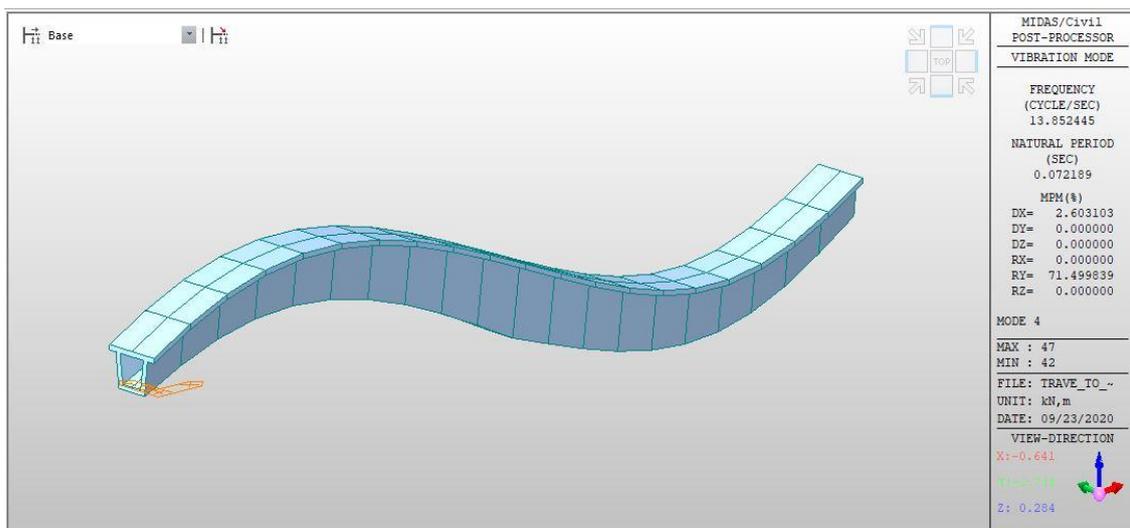


Figura 45: Secondo modo flessionale in direzione verticale - 13.85 Hz

4.1.4. Analisi con algoritmo FDD

L'importazione dei dati segue quanto descritto nel capitolo precedente per l'impostazione dei file di input con estensione .csv. Ovviamente, essendo la tecnica implementata una tecnica *Output-Only*, si utilizzano le registrazioni di rumore ambientale.

Si riporta di seguito l'impostazione dei due file (*model_nodes.csv* e *model_link.csv*) per la specifica applicazione:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Nodes	x[m]	y[m]	z[m]	dx	dy	dz	Sensors	x	y	z	Reg x	Reg y	Reg z
2	1	2.44	0	0	N	N	N	-	0	0	0	-	-	-
3	2	0	0	0	N	N	N	-	0	0	0	-	-	-
4	3	2.44	35	0	N	N	N	-	0	0	0	-	-	-
5	4	0	35	0	N	N	N	-	0	0	0	-	-	-
6	5	2.44	3.5	0	Y	N	Y	S9	0	0	1	-	-	10
7	6	0	3.5	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
8	7	2.44	7	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
9	8	0	7	0	Y	N	Y	S8	1	0	1	11	-	9
10	9	2.44	10.5	0	Y	N	Y	S7	0	0	1	-	-	8
11	10	0	10.5	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
12	11	2.44	14	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
13	12	0	14	0	Y	N	Y	S6	0	0	1	-	-	7
14	13	2.44	17.5	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
15	14	0	17.5	0	Y	N	Y	S5	-1	0	1	5	-	6
16	15	2.44	21	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
17	16	0	21	0	Y	N	Y	S4	0	0	1	-	-	4
18	17	2.44	24.5	0	Y	N	Y	S3	0	0	1	-	-	12
19	18	0	24.5	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
20	19	2.44	28	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
21	20	0	28	0	Y	N	Y	S2	-1	0	1	3	-	2
22	21	2.44	31.5	0	Y	N	Y	S1	0	0	1	-	-	1
23	22	0	31.5	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-

Figura 46: *model_nodes.csv* per la trave

	A	B	C
1	link	Node 1	Node 2
2	1	1	2
3	2	3	4
4	3	5	6
5	4	7	8
6	5	9	10
7	6	11	12
8	7	13	14
9	8	15	16
10	9	17	18
11	10	19	20
12	11	21	22
13	12	1	5
14	13	5	7
15	14	7	9
16	15	9	11
17	16	11	13
18	17	13	15
19	18	15	17
20	19	17	19
21	20	19	21
22	21	21	3
23	22	2	6
24	23	6	8
25	24	8	10
26	25	10	12
27	26	12	14
28	27	14	16
29	28	16	18
30	29	18	20
31	30	20	22
32	31	22	4

Figura 47: *model_link.csv* per la trave

L'impostazione dei due precedenti file è fondamentale ai fini della riuscita dell'analisi e della corretta rappresentazione delle forme modali. Come si nota i nodi definiti sono molti di più rispetto ai nodi strumentati, questo è necessario solo ai fini della rappresentazione. La scelta del numero di nodi da inserire dipende dall'utente ma è fondamentale che siano sempre inseriti almeno i nodi relativi alla posizione degli accelerometri. Se non interessa il grafico delle forme modali si può evitare di compilare il file *model_link.csv*.

Eseguito lo script viene richiesta la frequenza di campionamento che per la presente applicazione è 400 Hz.

```
Loading data ...  
+++++++ Input Data +++++++  
Sampling frequency [Hz]: 400
```

Figura 48: inserimento frequenza di campionamento

Inserita la frequenza di campionamento, vengono visualizzate le accelerazioni per via grafica:

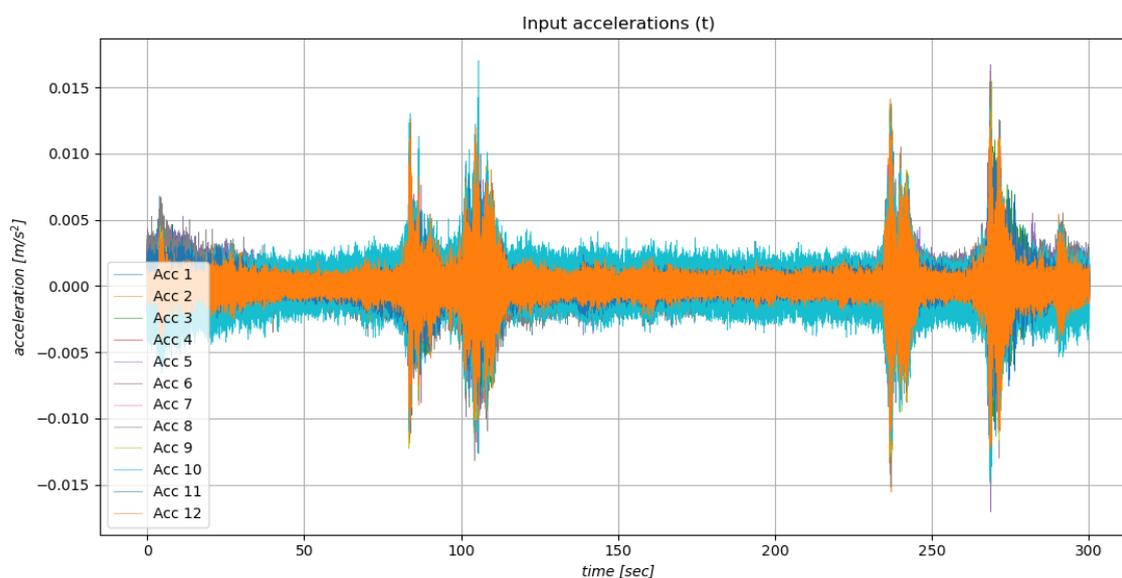


Figura 49: Accelerazioni da rumore ambientale della trave

In quest'algorithmo, visualizzate le accelerazioni, si passa alla fase di individuazione dei picchi, dove sono definiti direttamente dallo spettro di frequenza (in termini di valori singolari).

Nell'immagine successiva vengono riportati i picchi rappresentativi dei modi di vibrare di interesse (i tre modi definiti nell'analisi dinamica di riferimento).

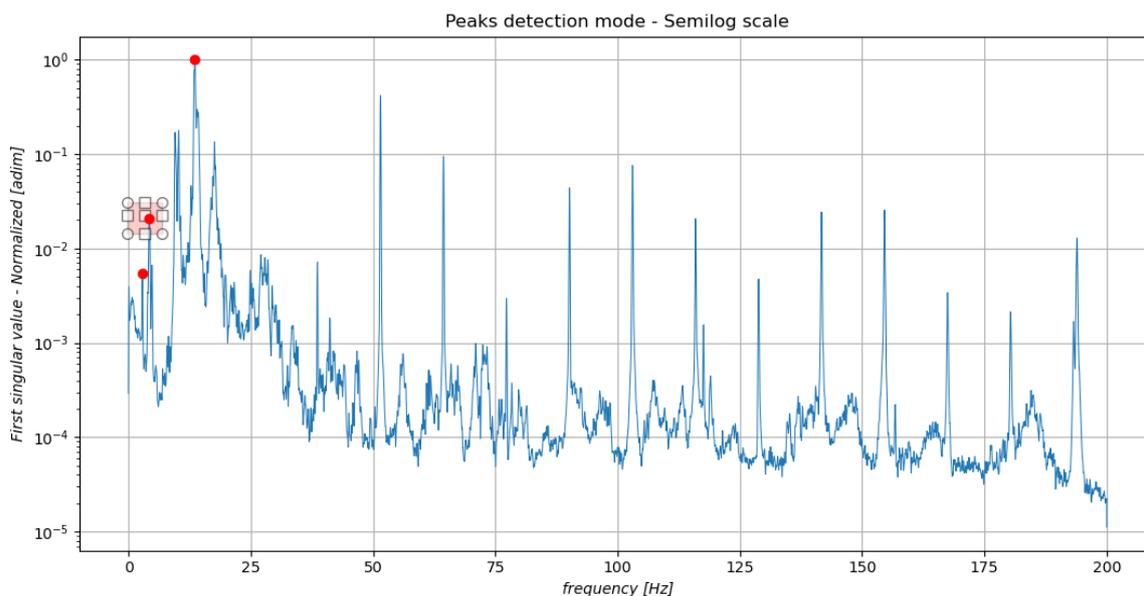


Figura 50: Selezione dei picchi

Si riportano di seguito le frequenze e gli smorzamenti individuati tramite il presente algoritmo confrontando sempre con le frequenze della sperimentazione originale e del modello FE:

Tabella 5: Frequenze modali e smorzamenti FDD

modo		Analisi riferimento	Modello FE	FDD Python	
		f[Hz]	f[Hz]	f[Hz]	ζ [%]
1° Flex orizzontale	1	2.83	2.92	2.85	4.37
1° Flex verticale	2	4.10	4.49	4.23	5.97
2° Flex verticale	3	13.53	13.85	13.61	1.57

Si nota un'ottima corrispondenza tra i risultati aspettati e quelli ottenuti. Da evidenziare che la prima frequenza flessionale verticale presenta una migliore corrispondenza con quella del modello FE rispetto all'analisi di riferimento. Anche gli smorzamenti hanno dei valori accettabili per una struttura in calcestruzzo armato (tipicamente $\div 1-8\%$).

Si riporta la differenza in termini percentuali delle frequenze ottenute mediante il modello FE e delle frequenze ottenute mediante l'algoritmo FDD:

Tabella 6: Differenza tra frequenze modello FE e frequenze FDD

modo		Modello FE	FDD Python	Δf [%]
		f[Hz]	f[Hz]	
1° Flex orizzontale	1	2.91	2.85	-2.06
1° Flex verticale	2	4.49	4.23	-5.79
2° Flex verticale	3	13.85	13.61	-1.73

Si nota che le differenze tra le frequenze individuate non sono molto elevate ed in particolare si ha che l'errore percentuale è maggiore per il primo modo flessionale in direzione Z (5.79%). Il fatto che, per tutti i modi individuati, si ha che la frequenza del modello FE è maggiore conferma che è necessaria una riduzione della rigidità nel modello.

Di seguito le forme modali che sono state individuate con l’FDD:

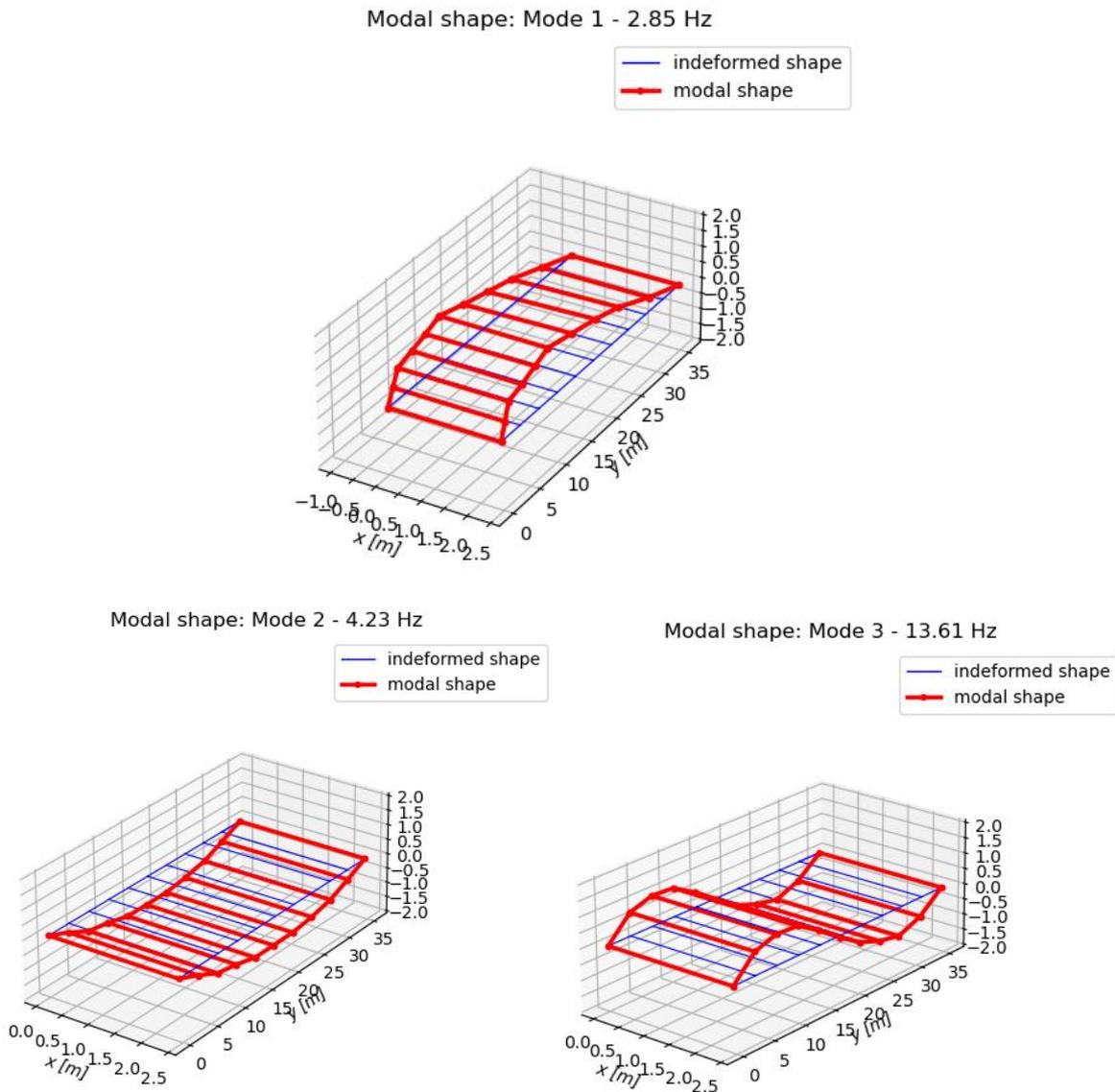


Figura 51: Forme modali individuate tramite FDD

Questi tre modi sono quelli che sono stati confrontati con il modello agli elementi finiti, ma in realtà sono stati individuati altri modi. I risultati completi sono riportati nel paragrafo di confronto tra FDD ed SSI.

4.1.5. Analisi con algoritmo SSI

L'importazione dei dati è identica a quanto visto per l'FDD: vanno definiti i file di input con estensione .csv, oltre alla preparazione del file delle accelerazioni. Anche per l'SSI si utilizzano le registrazioni di rumore ambientale.

Si riporta di seguito l'impostazione dei due file (*model_nodes.csv* e *model_link.csv*) per la specifica applicazione:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Nodes	x[m]	y[m]	z[m]	dx	dy	dz	Sensors	x	y	z	Reg x	Reg y	Reg z
2	1	2.44	0	0	N	N	N	-	0	0	0	-	-	-
3	2	0	0	0	N	N	N	-	0	0	0	-	-	-
4	3	2.44	35	0	N	N	N	-	0	0	0	-	-	-
5	4	0	35	0	N	N	N	-	0	0	0	-	-	-
6	5	2.44	3.5	0	Y	N	Y	S9	0	0	1	-	-	10
7	6	0	3.5	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
8	7	2.44	7	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
9	8	0	7	0	Y	N	Y	S8	1	0	1	11	-	9
10	9	2.44	10.5	0	Y	N	Y	S7	0	0	1	-	-	8
11	10	0	10.5	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
12	11	2.44	14	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
13	12	0	14	0	Y	N	Y	S6	0	0	1	-	-	7
14	13	2.44	17.5	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
15	14	0	17.5	0	Y	N	Y	S5	-1	0	1	5	-	6
16	15	2.44	21	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
17	16	0	21	0	Y	N	Y	S4	0	0	1	-	-	4
18	17	2.44	24.5	0	Y	N	Y	S3	0	0	1	-	-	12
19	18	0	24.5	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
20	19	2.44	28	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-
21	20	0	28	0	Y	N	Y	S2	-1	0	1	3	-	2
22	21	2.44	31.5	0	Y	N	Y	S1	0	0	1	-	-	1
23	22	0	31.5	0	Y	N	Y	-	0	0	0	-	-	-

Figura 52: *model_nodes.csv* per la trave

	A	B	C
1	link	Node 1	Node 2
2	1	1	2
3	2	3	4
4	3	5	6
5	4	7	8
6	5	9	10
7	6	11	12
8	7	13	14
9	8	15	16
10	9	17	18
11	10	19	20
12	11	21	22
13	12	1	5
14	13	5	7
15	14	7	9
16	15	9	11
17	16	11	13
18	17	13	15
19	18	15	17
20	19	17	19
21	20	19	21
22	21	21	3
23	22	2	6
24	23	6	8
25	24	8	10
26	25	10	12
27	26	12	14
28	27	14	16
29	28	16	18
30	29	18	20
31	30	20	22
32	31	22	4

Figura 53: *model_link.csv* per la trave

Per quanto riguarda i parametri da definire relativi all'ordine massimo del sistema ed al numero di traslazioni, sono state fatte delle considerazioni: dato che il primo modo di vibrare in direzione trasversale è di circa $2.7 \div 3.0$ Hz è stata impostata una frequenza minima fondamentale pari a 2.00 Hz e dunque:

$$2s = \frac{f_s}{2f_0} = \frac{400}{2 \cdot 2} = 100;$$

Da questa relazione (definita nel *paragrafo 3.3.2*) si definisce il numero minimo di traslazioni della matrice di Hankel necessario per visualizzare le frequenze modali correttamente da 2.00 Hz in poi. A tal proposito si ricorda che il numero di traslazioni è definito in funzione dell'ordine massimo del sistema che dunque va definito prima del numero di shift secondo la seguente relazione (descritta nel *paragrafo 3.3.3*):

$$ord\ max = C_{ord} \cdot 2 \cdot M;$$

con $M = 12$ (numero di output).

Il coefficiente C_{ord} è stato impostato pari a 20:

$$ord\ max = C_{ord} \cdot 2 \cdot M = 20 \cdot 2 \cdot 12 = 480;$$

Ovviamente l'ordine massimo è sovrastimato in quanto si è preferito avere più modi da scartare (si complica il postprocessing del dato) ma essere sicuri che non ci sia sovrapposizione tra i modi reali ed i modi dovuti al rumore.

In funzione dell'ordine massimo viene definito il numero di traslazioni (relazione descritta nel *paragrafo 3.3.3*) tenendo conto del numero minimo definito in precedenza (100):

$$2s = C_{shift} \cdot \frac{ord\ max}{M} = 4 \cdot \frac{480}{12} = 160;$$

Da tenere sempre bene in mente che C_{shift} e $C_{ord} \in \mathbb{N}$.

Definito l'ordine massimo ed il numero di shift, si può procedere con l'analisi dinamica. Eseguito lo script viene richiesta la frequenza di campionamento che per la presente applicazione è 400 Hz.

```

Loading data ...
+++++++ Input Data ++++++++
Sampling frequency [Hz]: 400

```

Figura 54: inserimento frequenza di campionamento

Analogamente al precedente algoritmo anche in questo caso si ha la possibilità di visualizzare le accelerazioni di input per via grafica.

Si visualizza il diagramma di stabilizzazione, depurato già da tutte le forme modali che non presentano una coppia complessa e coniugata (modi spuri) e da tutti quei modi che non rientrano nel range di smorzamento considerato accettabile. Nel caso in esame il range di smorzamento considerato idoneo è $\div 0.9 - 8\%$.

Si riporta il diagramma di stabilizzazione, nel quale vengono evidenziati i modi di interesse:

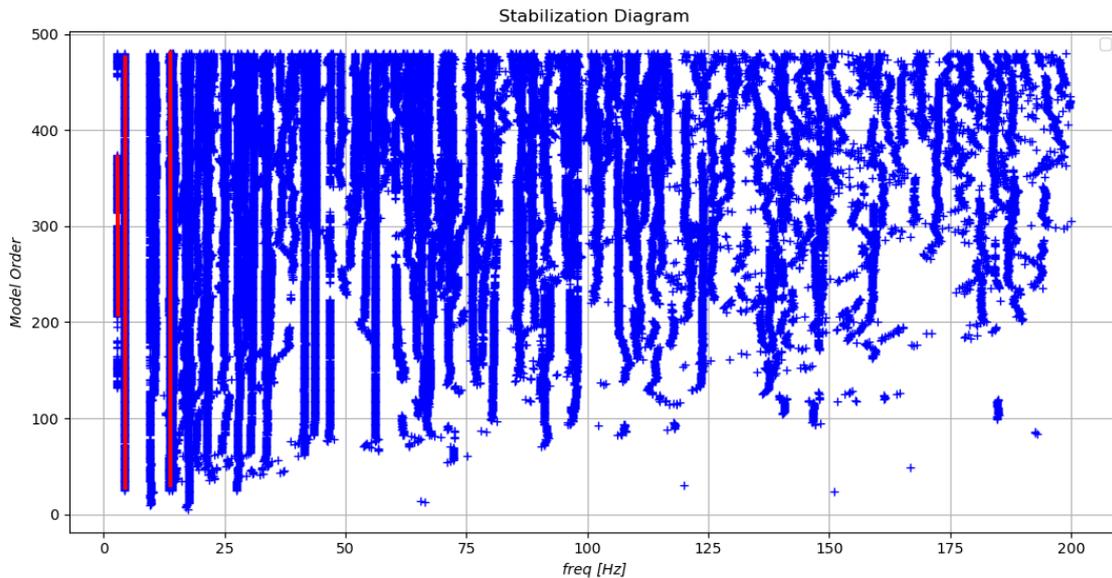


Figura 55: Diagramma di stabilizzazione per la trave

Per prima cosa si nota che il primo modo flessionale trasversale non è stabile per tutti gli ordini del modello così come lo sono invece i modi flessionali verticali. Questo è dovuto probabilmente al fatto che i modi verticali sono maggiormente energizzati dalla forza di gravità nel caso di registrazioni da rumore ambientale. In ogni caso si va a definire l'ordine del modello in maniera tale da vedere anche il primo modo trasversale in maniera stabile. La scelta è ricaduta su un ordine di 350. Per tale ordine si ha che i tre modi di vibrare di interesse sono stabili.

Si riportano di seguito le frequenze e gli smorzamenti individuati tramite il presente algoritmo confrontando sempre con le frequenze della sperimentazione originale e del modello FE:

Tabella 7: Frequenze modali e smorzamenti SSI

modo		Analisi riferimento	Modello FE	SSI Python	
		f[Hz]	f[Hz]	f[Hz]	ζ [%]
1° Flex orizzontale	1	2.83	2.92	2.84	1.41
1° Flex verticale	2	4.10	4.49	4.33	3.03
2° Flex verticale	3	13.53	13.85	13.60	1.11

Si nota un'ottima corrispondenza tra i risultati aspettati e quelli ottenuti. Anche per l'SSI si ha che le frequenze ottenute sono sempre più piccole rispetto a quelle ricavate dal modello FE.

Si riporta la differenza in termini percentuali delle frequenze ottenute mediante il modello FE e delle frequenze ottenute mediante l'algoritmo SSI:

Tabella 8: Differenza tra frequenze modello FE e frequenze SSI

modo		Modello FE	SSI Python	Δf [%]
		f[Hz]	f[Hz]	
1° Flex orizzontale	1	2.91	2.84	-2.41
1° Flex verticale	2	4.49	4.33	-3.56
2° Flex verticale	3	13.85	13.60	-1.81

Le differenze percentuali tra modello FE ed SSI si mantengono analoghe a quelle tra modello FE ed FDD ma in questo caso si ha una riduzione della differenza relativa al primo modo di vibrare in direzione Z (3.56 %).

Di seguito le forme modali che sono state individuate con l'SSI:

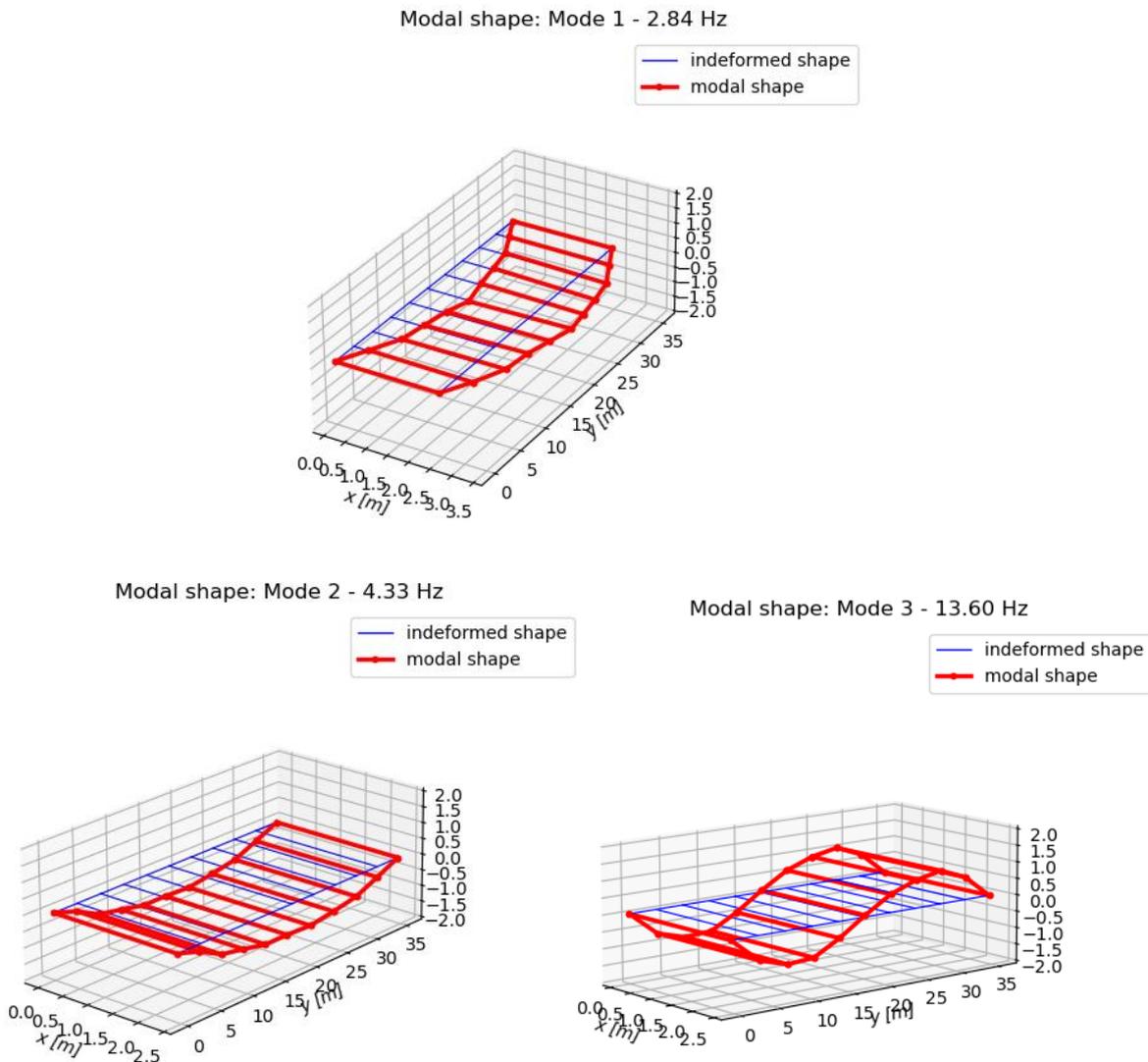


Figura 56: Forme modali individuate tramite SSI

Questi tre modi sono quelli che sono stati confrontati con il modello agli elementi finiti ma in realtà sono stati individuati altri modi. I risultati completi sono riportati nel paragrafo di confronto tra FDD ed SSI.

4.1.6. Correzione del modello FE

Come visto nei due paragrafi precedenti, il modello agli elementi finiti risulta più rigido del comportamento reale della struttura. L'eccessiva rigidezza del modello è stata dedotta dai risultati di entrambi gli algoritmi. Sulla base di quanto definito si è deciso di ridurre il modulo elastico del calcestruzzo.

Riducendo il modulo del calcestruzzo del 5% si è ottenuto un importante miglioramento della corrispondenza tra le frequenze del modello FE e le frequenze dei due algoritmi:

$$E_{cls} = 34077(1 - 0.05) = 32373 \text{ MPa};$$

Di seguito vengono riportate le nuove frequenze modali del modello, confrontate con i risultati sperimentali:

Tabella 9: Confronto modello FE corretto

modo		Modello FE	FDD Python		SSI Python	
		f[Hz]	f[Hz]	Δf [%]	f[Hz]	Δf [%]
1° Flex orizzontale	1	2.85	2.85	0.00	2.84	-0.35
1° Flex verticale	2	4.40	4.23	-3.86	4.33	-1.59
2° Flex verticale	3	13.61	13.61	0.00	13.60	-0.07

Si nota una riduzione delle differenze anche per il primo modo di vibrare verticale che era il più critico mentre le forme modali restano inalterate e coerenti con quelle definite mediante gli algoritmi.

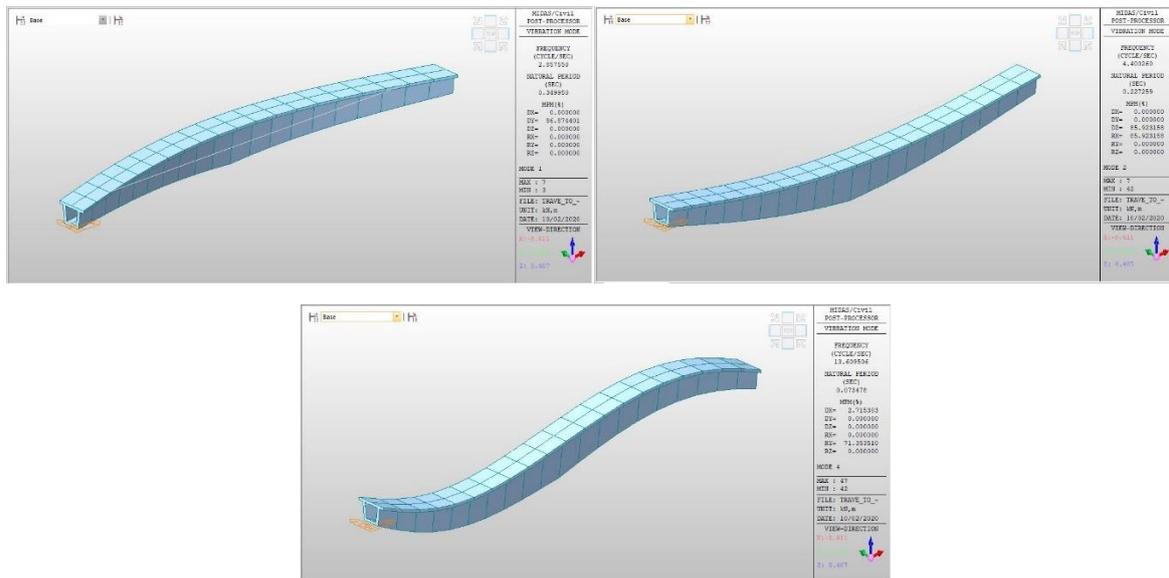


Figura 57: Forme modali della trave con modulo elastico ridotto

4.1.7. Confronto SSI – FDD

Finora i risultati dei due algoritmi sono stati confrontati con i risultati del modello FE e sono riferiti solo ai tre modi di vibrare riportati nella sperimentazione di riferimento. Tramite i due algoritmi si ottengono più modi di vibrare che vengono riportati nel seguito.

Per la distinzione dei modi reali dai modi di rumore o dai modi matematici sono stati sfruttati:

- Corrispondenza tra le due tecniche: sono stati presi in considerazione solo i modi di vibrare individuati mediante entrambe le tecniche;
- Smorzamento modale: sono stati presi in considerazione solo i modi di vibrare caratterizzati da uno smorzamento compreso entro un range prestabilito;
- Forme modali: le forme modali devono avere un significato fisico e devono essere congrue con la tipologia della struttura.

Si riportano di seguito i picchi dei modi di vibrare individuati tramite FDD:

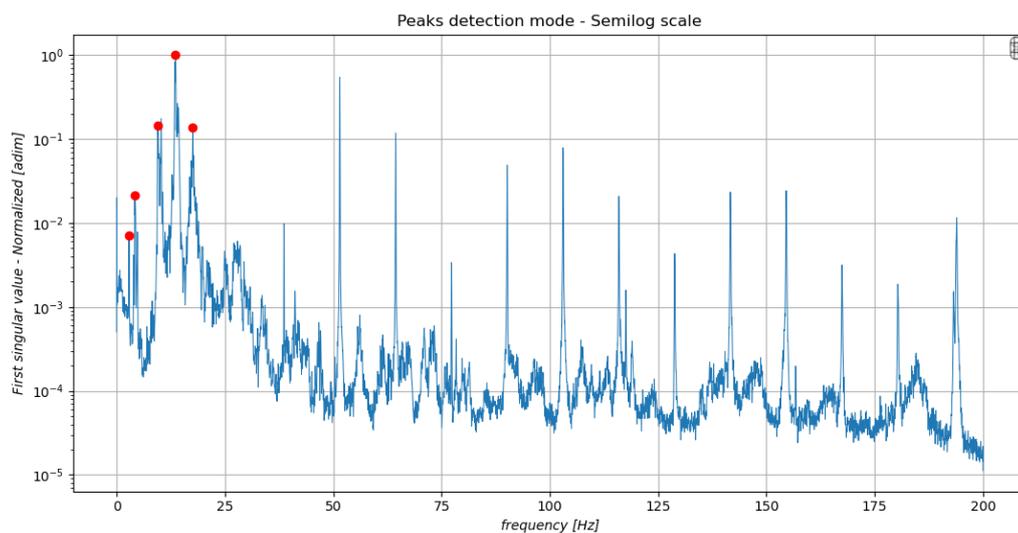


Figura 58: Individuazione picchi tramite FDD

Si riportano di seguito gli stessi modi di vibrare individuati tramite FDD nel diagramma di stabilizzazione definito tramite il calcolo multi-ordine dell'SSI:

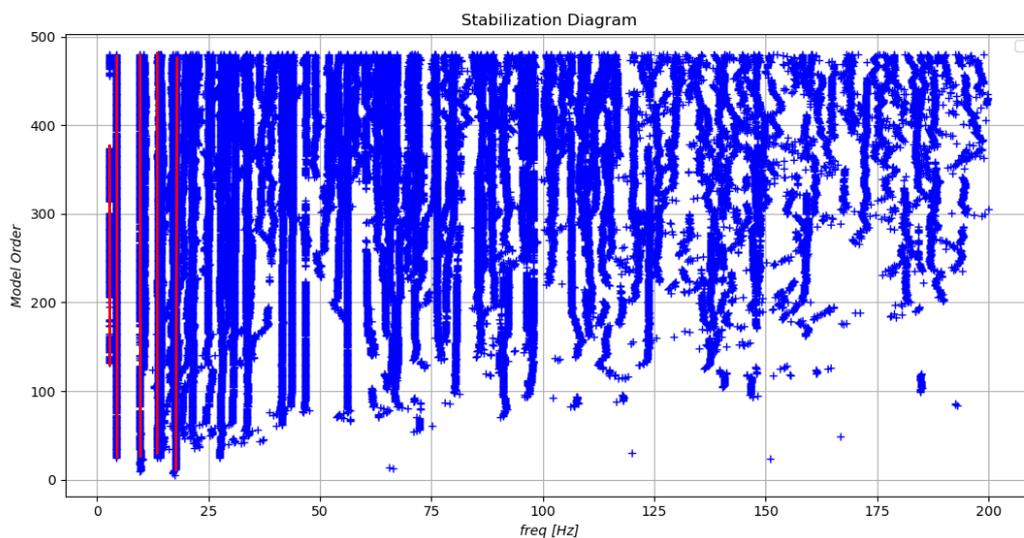


Figura 59: Diagramma di stabilizzazione

Per confrontare i parametri modali ottenuti dai due algoritmi si considera sia la differenza % in frequenza sia il *Modal Assurance Criterion* per le forme modali:

$$MAC(\{\varphi_r\}, \{\varphi_s\}) = \frac{|\{\varphi_r\}^T \{\varphi_s\}|^2}{(\{\varphi_r\}^T \{\varphi_r\})(\{\varphi_s\}^T \{\varphi_s\})};$$

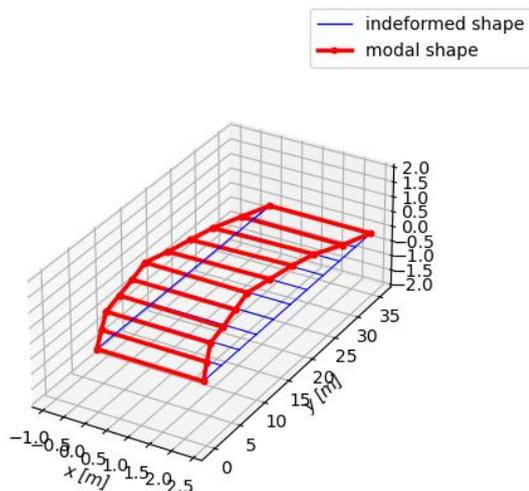
Si riportano di seguito i parametri modali:

Tabella 10: Confronto parametri modali SSI - FDD

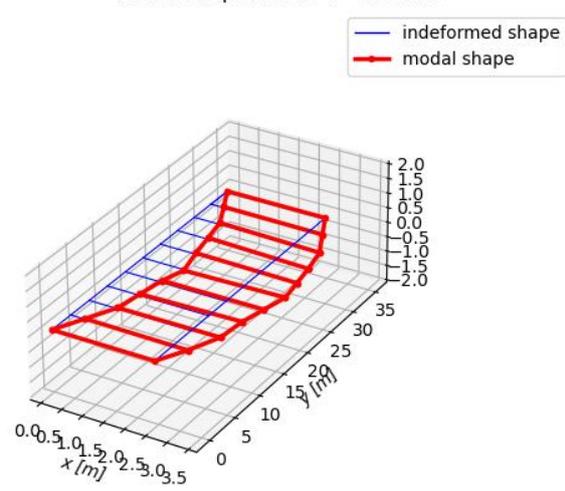
modo		FDD		SSI		Δf [%]	MAC
		f [Hz]	ζ [%]	f [Hz]	ζ [%]		
1° Flex trasversale	1	2.85	4.37	2.84	1.41	0.35	0.997
1° Flex verticale	2	4.23	5.97	4.33	3.03	2.36	0.999
2° Flex trasversale	3	9.53	2.25	9.57	0.97	0.42	0.910
2° Flex verticale	4	13.61	1.57	13.60	1.11	0.07	0.998
3° Flex trasversale	5	17.58	0.95	17.58	1.95	0.00	0.986

A sinistra sono riportate le forme modali ricavate da FDD mentre a destra quelle ricavate da SSI:

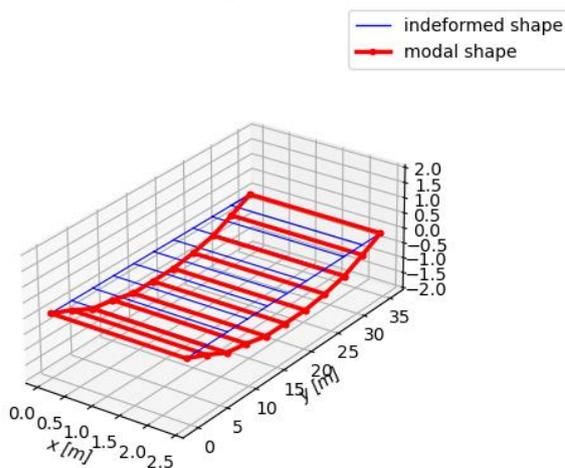
Modal shape: Mode 1 - 2.85 Hz



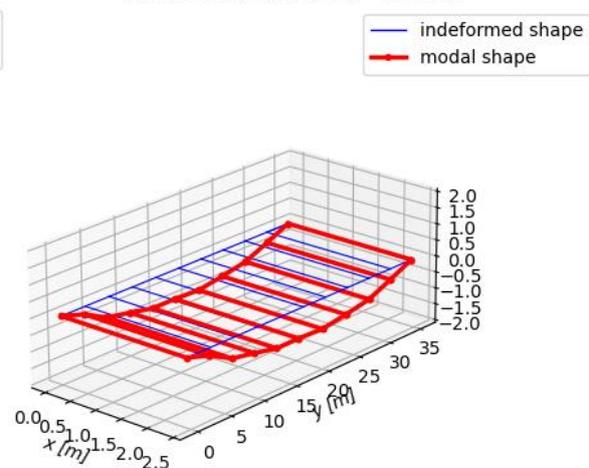
Modal shape: Mode 1 - 2.84 Hz



Modal shape: Mode 2 - 4.23 Hz



Modal shape: Mode 2 - 4.33 Hz



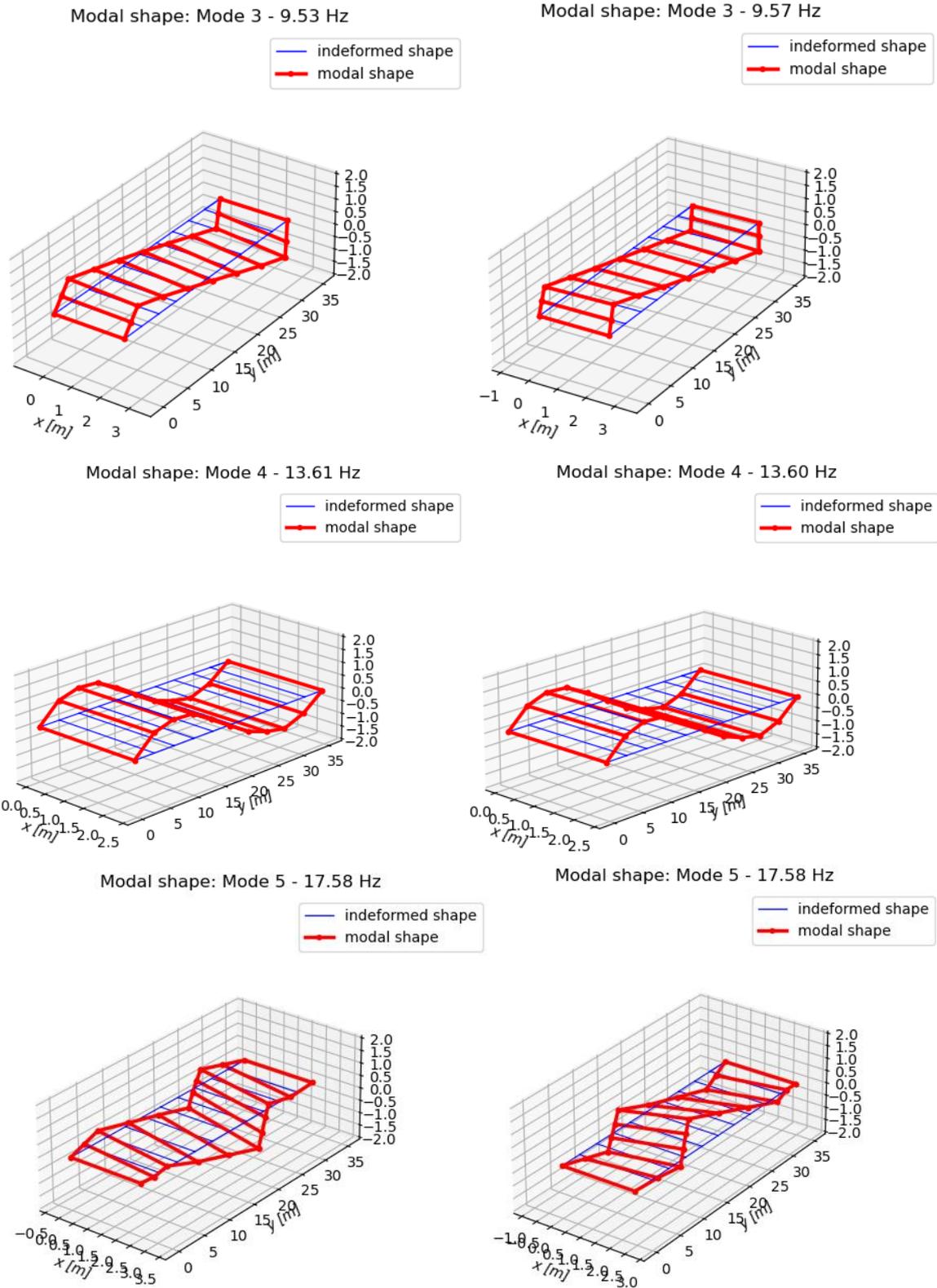


Figura 60: Forme modali FDD (a sx) ed SSI (a dx)

Dalle forme modali si nota che per i modi flessionali trasversali, a parte il primo, c'è sempre anche una componente torsionale. Questo è dovuto al fatto che, rispetto all'asse X, la sezione della trave non è simmetrica e quindi il centro delle rigidzze non corrisponde con il centro di gravità (cosa che invece accade se si considera l'asse Z). La componente torsionale non è visibile nel modello FE in quanto sono stati utilizzati solo degli elementi monodimensionali

(elementi *beam*) per la costruzione dell'asse della trave. Realizzando un modello agli elementi finiti più complesso, con la definizione corretta del centro di taglio e di torsione, è certamente possibile individuare anche le componenti torsionali dei modi, riducendo così gli errori, o addirittura individuare dei modi puramente torsionali.

Sia dal MAC che dai grafici delle forme modali è chiara la corrispondenza tra i risultati dei modi individuati. Questo aspetto è molto importante in quanto partendo da due basi teoriche differenti si giunge allo stesso risultato.

4.2. Analisi dinamica di un telaio in acciaio

4.2.1. Descrizione del sistema

Il telaio analizzato è realizzato interamente in acciaio e presenta due solai realizzati a loro volta in acciaio.



Figura 61: a) Telaio in acciaio analizzato; b)c)d) Particolari strutturali [20]

Sia i pilastri che le travi sono realizzati in acciaio strutturale, di cui è ben noto il modulo elastico (necessario al fine della costruzione del modello FE):

$$E_{steel} = 210'000 \text{ MPa};$$

Di seguito vengono riportate le sezioni trasversali degli elementi strutturali: colonne, travi e controventi.



Figura 62: Sezioni trasversali degli elementi del telaio

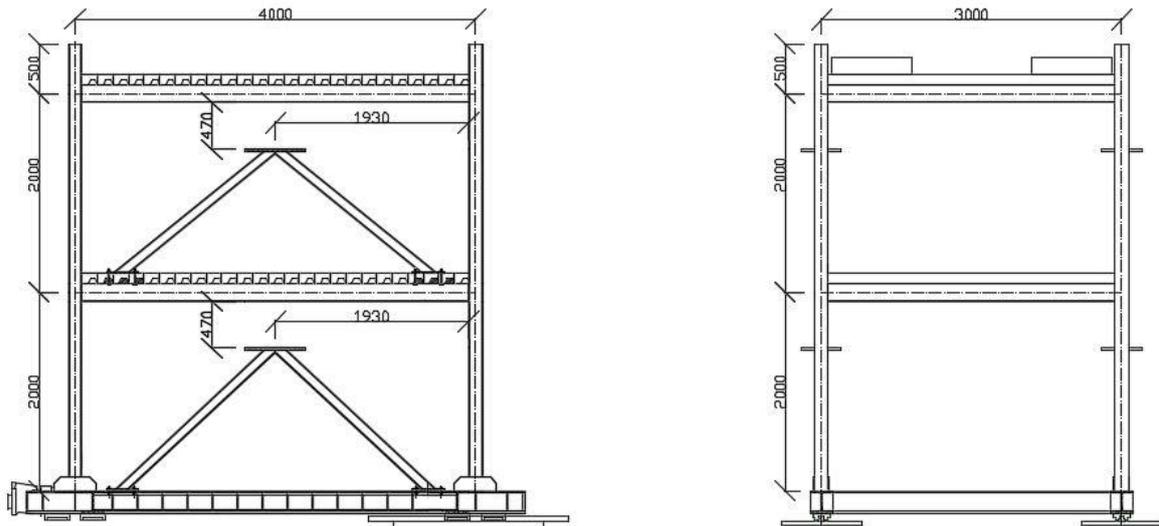


Figura 63: Prospetti del telaio

Il prospetto di destra è definito nel piano XZ mentre il prospetto di sinistra è definito nel piano YZ.

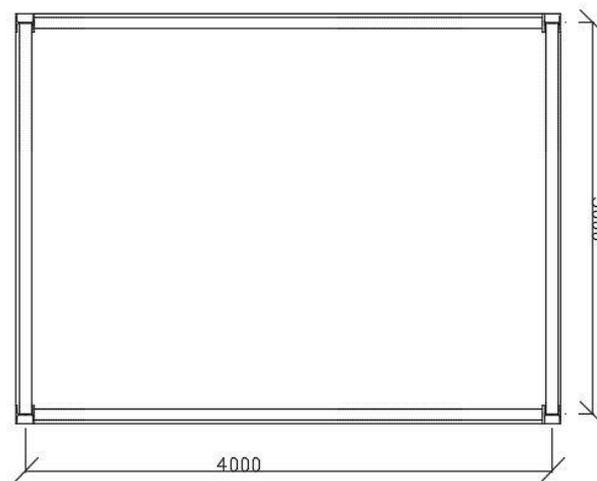


Figura 64: Dimensioni in pianta del telaio

I solai in acciaio presentano uno spessore di 10 cm.

L'ultimo aspetto da definire è legato alle condizioni di vincolo alla base: le colonne sono considerate incastrate in entrambe le direzioni.

Il comportamento del telaio può essere ricondotto al comportamento diaframmatico di piano: si ha che per ogni solaio sono consentiti solo spostamenti rigidi e non si hanno spostamenti fuori piano. Sotto questa ipotesi ogni solaio presenta tre gradi di libertà: due traslazioni ed una rotazione nel piano. Da tener conto anche che i vari elementi del telaio sono saldati tra di loro.

Dunque, il sistema può considerarsi completamente descritto se vengono individuati sei modi di vibrare in quanto la struttura presenta sei gradi di libertà totali (tre per due solai).

4.2.2. Risultati sperimentazione originale

Per la campagna di indagine dinamica, sul telaio sono stati posti 4 accelerometri per un totale di 8 registrazioni:

- 4 registrazioni in direzione X;
- 4 registrazioni in direzione Y.

Di seguito è riportato lo schema di posizionamento dei sensori:

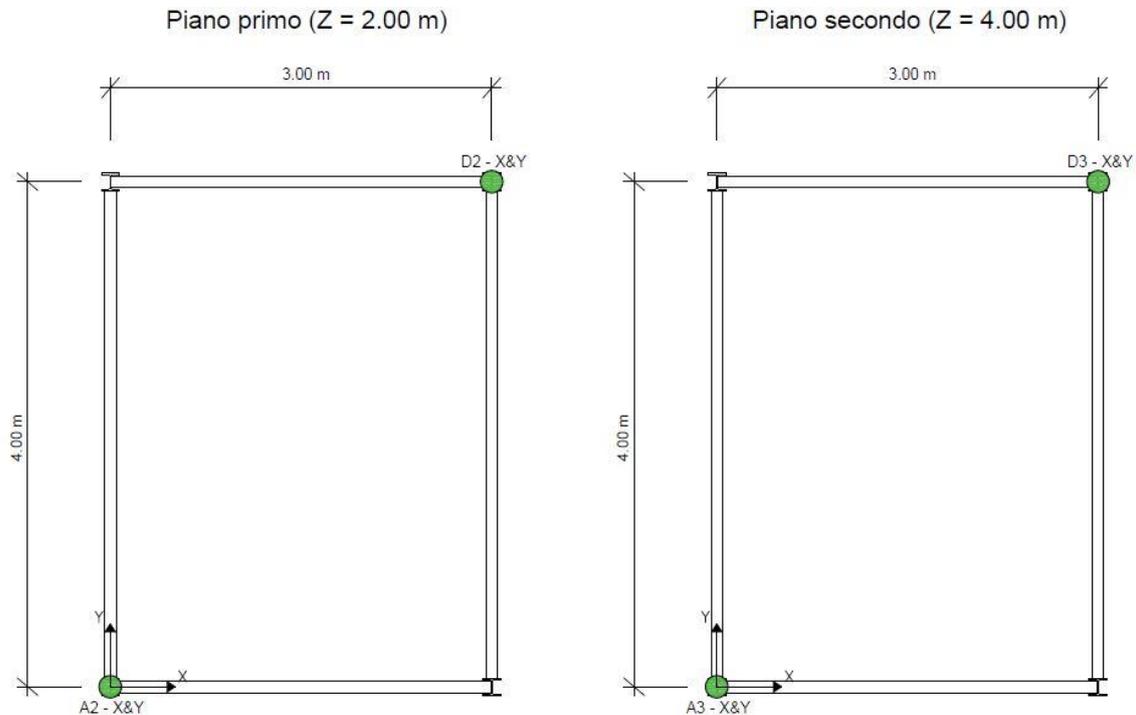


Figura 65: posizionamento dei sensori sul telaio

In realtà sul telaio sono presenti più sensori di quelli evidenziati nella precedente figura, ma per l'analisi si è scelto di non utilizzarli tutti. Tutti i sensori sono posizionati al livello del solaio di riferimento.

Le prove sperimentali sul telaio hanno previsto diverse configurazioni e diverse tipologie di configurazioni delle masse posizionate sul telaio. Per la presente applicazione è stata considerata la configurazione *base* del telaio (senza posizionamento di masse sul telaio) ed un tipo di eccitazione rappresentata da rumore ambientale. La durata delle registrazioni da rumore ambientale è di 30 minuti con una frequenza di campionamento di 200 Hz. Per l'identificazione dei parametri modali è stata utilizzata la tecnica EFDD (*Enhanced Frequency Domain Decomposition*) [21].

Si riportano di seguito le frequenze che sono state individuate dalla sperimentazione di riferimento:

Tabella 11: Risultati sperimentazione di riferimento del telaio

	modo	f [Hz]	ζ [%]
1° traslazionale Y	1	3.38	0.11
1° traslazionale X	2	4.23	0.13
1° torsionale	3	5.89	0.15
2a° traslazionale Y	4	9.41	0.09
2b° traslazionale Y	5	11.27	0.07
2° traslazionale X	6	14.64	0.09
2° torsionale	7	18.73	0.78

Come si nota dai risultati della tabella precedente, i modi di vibrare individuati non sono 6 ma 7, in particolare si ha che il secondo modo traslazionale in direzione *Y* è sdoppiato ed individuato per due frequenze (9.41 Hz e 11.27 Hz). Gli smorzamenti risultano molto bassi come ci si aspetta da un telaio in acciaio così semplice.

Lo scopo di questa applicazione è di individuare tutti i modi che sono stati individuati tramite EFDD nella sperimentazione di riferimento.

4.2.3. Modello agli elementi finiti

Per la modellazione agli elementi finiti è stato utilizzato il software *Midas Civil* [19].

La costruzione di un modello FE del telaio ha previsto l'utilizzo di elementi monodimensionali per travi e colonne mentre si è deciso di non modellare i controventi onde evitare di ottenere dei modi di vibrare locali. Comunque, è stata considerata la massa dei controventi che è stata applicata sottoforma di forza nei punti di contatto con la trave:

$$F_{cv} = A_{cv} \cdot L_{cv} \cdot \gamma_{steel} = 0.3 \text{ kN};$$

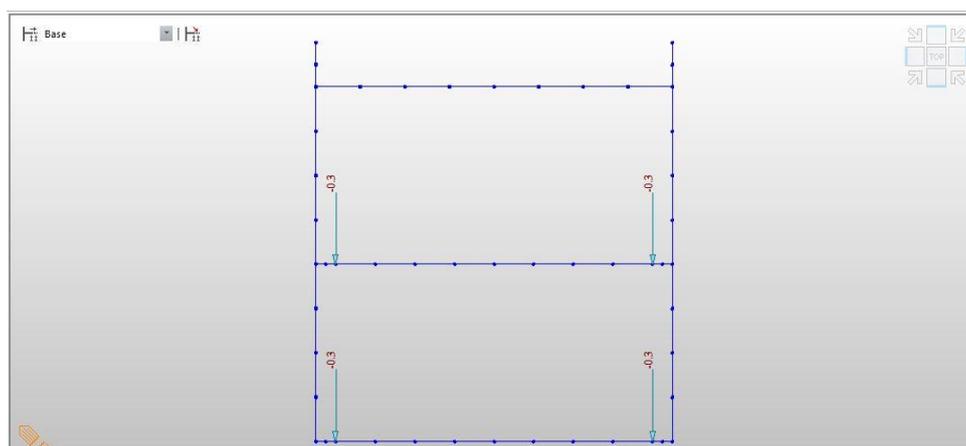


Figura 66: Applicazione delle forze derivanti dal peso dei controventi

Questa forza è poi tradotta in massa dal software agli elementi finiti. Per quanto riguarda la modellazione del solaio in acciaio è stato valutato uno spessore equivalente in funzione della massa (dato che il solaio non è pieno) nota dalla sperimentazione di riferimento pari a 3350 kg per solaio. Lo spessore equivalente è riportato di seguito:

$$t_{eq} = \frac{P_{solaio}}{A_{solaio} \cdot \gamma_{steel}} = \frac{3350 \text{ kg}}{12.00 \text{ m}^2 \cdot 7850 \text{ kg/m}^3} = 0.035 \text{ m};$$

Il solaio è stato realizzato mediante elementi bidimensionali (elementi *shell*) con spessore pari a quello equivalente individuato. La mesh degli elementi monodimensionali prevede la suddivisione in sotto-elementi di lunghezza pari a 0.5 m, mentre la mesh degli elementi bidimensionali prevede la suddivisione in sotto-elementi di 0.25 m². Tutti gli elementi sono realizzati in acciaio. Alla base, le colonne sono incastrate in entrambe le direzioni.

Si riporta di seguito la rappresentazione del modello costruito:

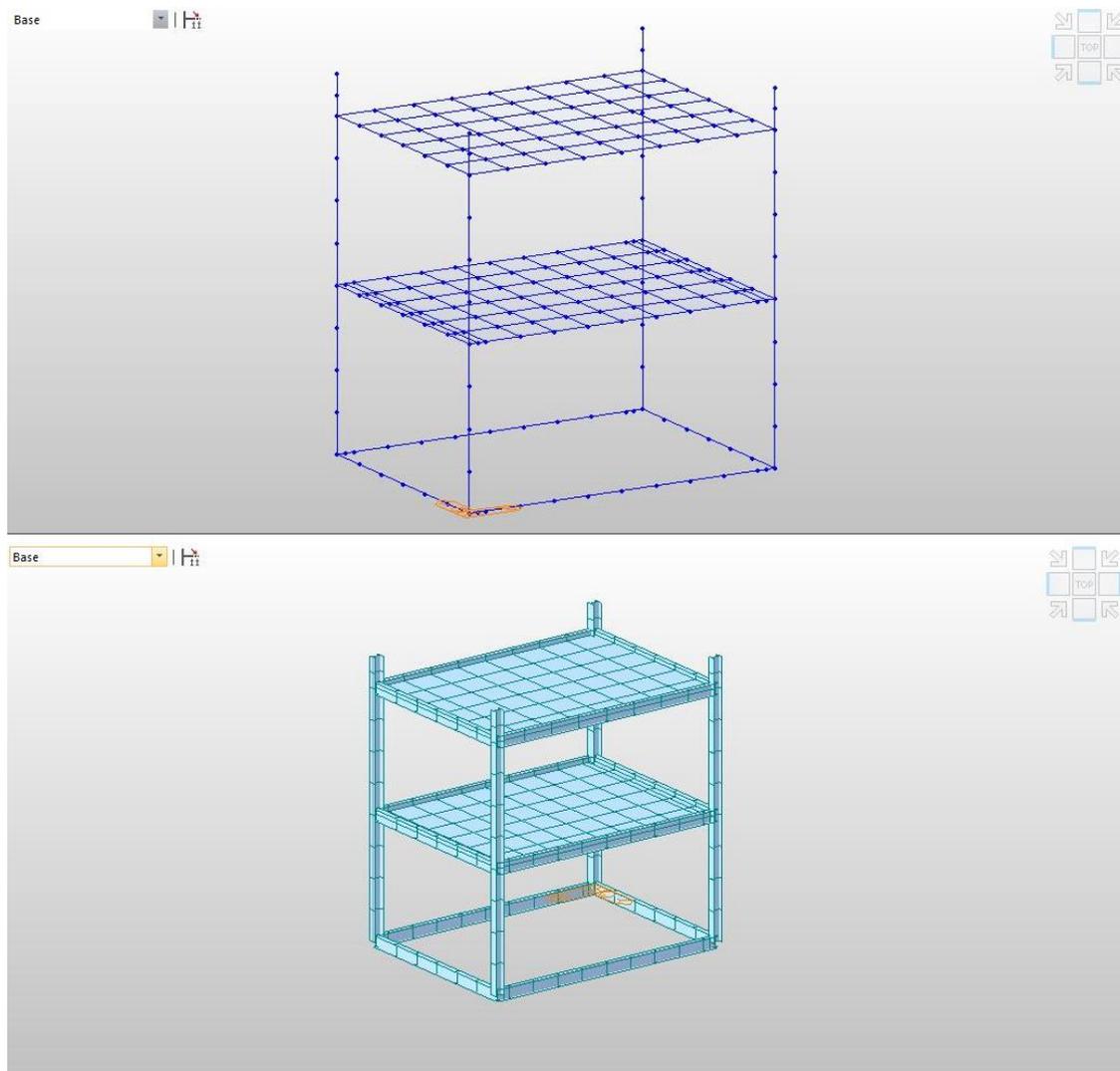


Figura 67: Modello FE del telaio

L'unico carico che è stato considerato sul telaio è il peso proprio in quanto si è deciso di considerare solo i carichi presenti al momento della sperimentazione. Matrice delle masse e matrice di rigidità sono definite automaticamente dal software.

Costruito il modello, è stata fatta l'analisi dinamica in maniera tale da individuare i modi di vibrare.

Si riportano di seguito i risultati dell'analisi dinamica confrontati con i risultati della sperimentazione di riferimento:

Tabella 12: Risultati modello FE

modo		Analisi di riferimento	Modello FE	Δf [%]
		f [Hz]	f [Hz]	
1° traslazionale Y	1	3.38	3.40	0.59
1° traslazionale X	2	4.23	4.22	-0.24
1° torsionale	3	5.89	5.91	0.34
2a° traslazionale Y	4	9.41	10.18	8.18
2b° traslazionale Y	5	11.27	10.18	-9.67
2° traslazionale X	6	14.64	14.55	-0.61
2° torsionale	7	18.73	18.77	0.21

Si nota un'ottima corrispondenza tra tutti i modi di vibrare che sono stati individuati (le differenze sono tutte sotto l'1%) con eccezione del 2° modo traslazionale in Y. Come ci si aspettava, dal modello agli elementi finiti si ottiene un unico modo mentre dall'analisi di riferimento si ottengono due modi con frequenza ben distinta ma identica forma modale. Il modo che è stato individuato dal modello FE è compreso tra i due valori.

$$\overline{f_{2y}} = \frac{9.41 + 11.27}{2} = 10.34 \text{ Hz};$$

Considerando la frequenza media tra le due individuate dall'OMA per il secondo modo traslazionale in Y, si ottiene un errore rispetto a quella individuata dal FEM pari a 1.5 %.

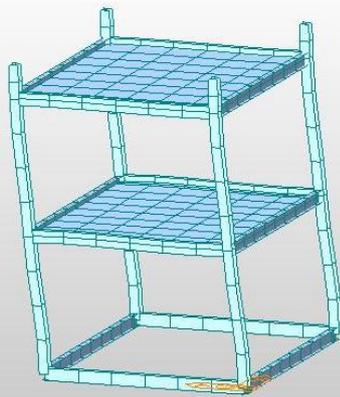
Si riportano di seguito la differenza % di tutti i modi rispetto alla sperimentazione di riferimento:

Tabella 13: Differenze % tra modello FE ed OMA di riferimento

modo		Analisi di riferimento	Modello FE	Δf [%]
		f [Hz]	f [Hz]	
1° traslazionale Y	1	3.38	3.40	0.59
1° traslazionale X	2	4.23	4.22	-0.24
1° torsionale	3	5.89	5.91	0.34
2° traslazionale Y (medio)	4	10.34	10.18	-1.55
2° traslazionale X	5	14.64	14.55	-0.61
2° torsionale	6	18.73	18.77	0.21

Si riportano ora le sei forme modali individuate mediante il software agli elementi finiti.

Base



MIDAS/Civil
POST-PROCESSOR
VIBRATION MODE

FREQUENCY
(CYCLE/SEC)
3.401831

NATURAL PERIOD
(SEC)
0.293959

MPM(%)
DX= 0.000000
DY= 85.705293
DZ= 0.000000
RX= 0.001642
RY= 0.000000
RZ= 0.000000

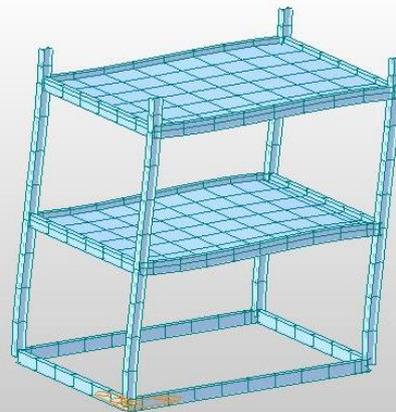
MODE 1

MAX : 13
MIN : 1

FILE: JETPACK - EL-
UNIT: kN,m
DATE: 10/04/2020

VIEW-DIRECTION
X: -0.925
Y: 0.385
Z: 0.208

Base



MIDAS/Civil
POST-PROCESSOR
VIBRATION MODE

FREQUENCY
(CYCLE/SEC)
4.221084

NATURAL PERIOD
(SEC)
0.236906

MPM(%)
DX= 82.170775
DY= 0.000000
DZ= 0.000000
RX= 0.000000
RY= 0.001650
RZ= 0.000000

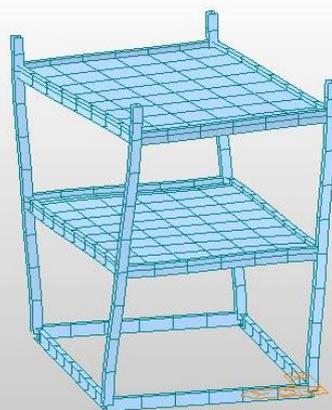
MODE 2

MAX : 16
MIN : 1

FILE: JETPACK - EL-
UNIT: kN,m
DATE: 10/04/2020

VIEW-DIRECTION
X: -0.502
Y: 0.385
Z: 0.276

Base



MIDAS/Civil
POST-PROCESSOR
VIBRATION MODE

FREQUENCY
(CYCLE/SEC)
5.917572

NATURAL PERIOD
(SEC)
0.168988

MPM(%)
DX= 0.000000
DY= 0.000000
DZ= 0.000000
RX= 0.000000
RY= 0.000000
RZ= 0.000111

MODE 3

MAX : 14
MIN : 1

FILE: JETPACK - EL-
UNIT: kN,m
DATE: 10/04/2020

VIEW-DIRECTION
X: -0.933
Y: 0.385
Z: 0.267

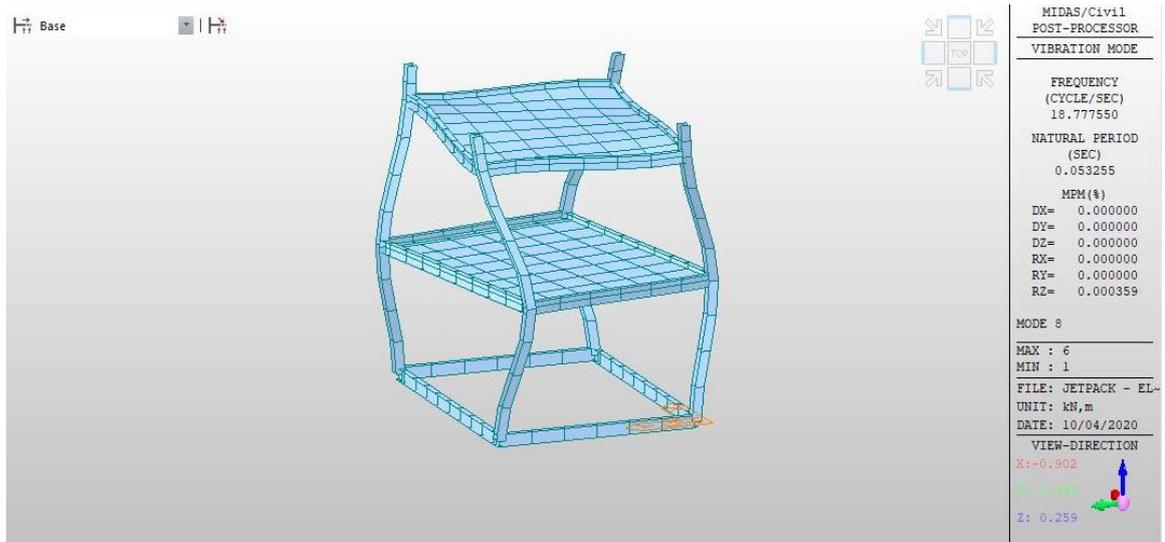
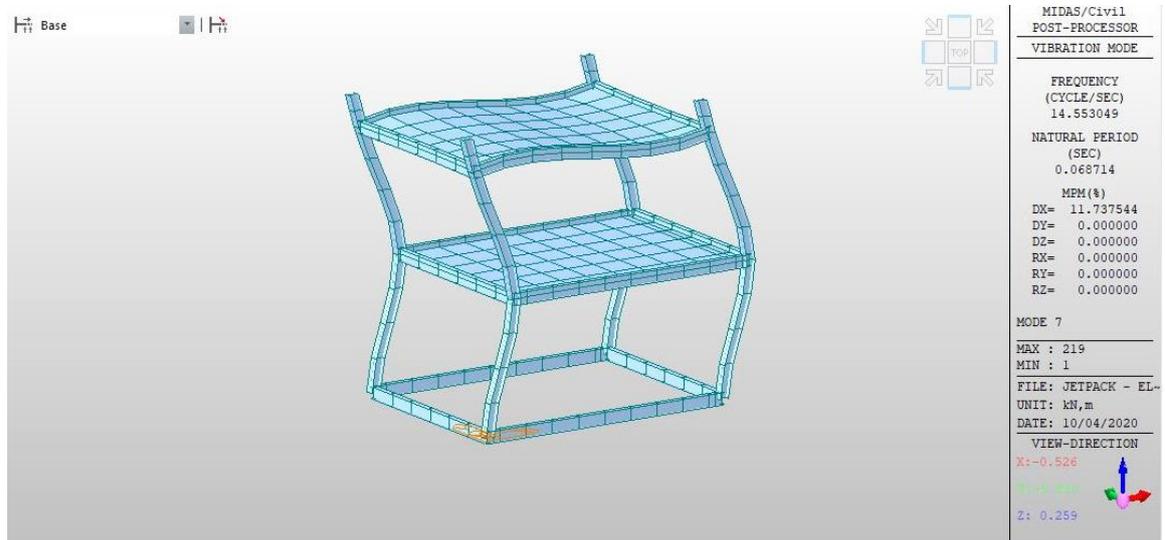
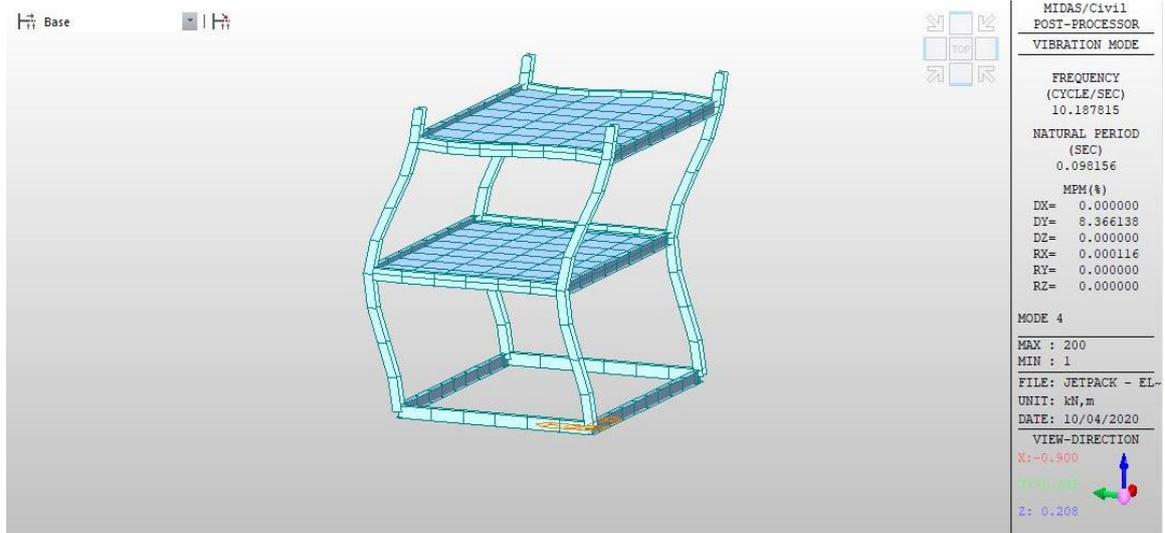


Figura 68: Forme modali individuate dal FEM per il telaio

4.2.4. Analisi con algoritmo FDD

L'importazione dei dati segue quanto descritto nel capitolo precedente per l'impostazione dei file di input con estensione *.csv*. Ovviamente, essendo la tecnica implementata una tecnica *Output-Only*, si utilizzano le registrazioni di rumore ambientale.

Si riporta di seguito l'impostazione dei due file (*model_nodes.csv* e *model_link.csv*) per la specifica applicazione:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Nodes	x[m]	y[m]	z[m]	dx	dy	dz	Sensors	x	y	z	Reg x	Reg y	Reg z
2	1	0	0	0	N	N	N	-	0	0	0	-	-	-
3	2	4	0	0	N	N	N	-	0	0	0	-	-	-
4	3	4	3.14	0	N	N	N	-	0	0	0	-	-	-
5	4	0	3.14	0	N	N	N	-	0	0	0	-	-	-
6	5	0	0	2	Y	Y	N	A2	1	1	0	1	2	-
7	6	4	0	2	Y	Y	N	-	0	0	0	-	-	-
8	7	4	3.14	2	Y	Y	N	D2	1	1	0	3	4	-
9	8	0	3.14	2	Y	Y	N	-	0	0	0	-	-	-
10	9	0	0	4	Y	Y	N	A3	1	1	0	5	6	-
11	10	4	0	4	Y	Y	N	-	0	0	0	-	-	-
12	11	4	3.14	4	Y	Y	N	D3	1	1	0	7	8	-
13	12	0	3.14	4	Y	Y	N	-	0	0	0	-	-	-

Figura 69: *model_nodes.csv* per il telaio

	A	B	C
1	link	Node 1	Node 2
2	1	1	5
3	2	5	9
4	3	2	6
5	4	6	10
6	5	3	7
7	6	7	11
8	7	4	8
9	8	8	12
10	9	5	6
11	10	6	7
12	11	7	8
13	12	8	5
14	13	9	10
15	14	10	11
16	15	11	12
17	16	12	9
18			

Figura 70: *model_link.csv* per il telaio

L'impostazione dei due precedenti file è fondamentale ai fini della riuscita dell'analisi e della corretta rappresentazione delle forme modali. Come si nota i nodi definiti sono molti di più rispetto ai nodi strumentati, questo è necessario solo ai fini della rappresentazione grafica. La scelta del numero di nodi da inserire dipende dall'utente ma è fondamentale che siano sempre inseriti almeno i nodi relativi alla posizione degli accelerometri. Se non interessano i grafici delle forme modali si può evitare di compilare il file *model_link.csv*.

Eseguito lo script viene richiesta la frequenza di campionamento che per la presente applicazione è 200 Hz.

```

Loading data . . .
+++++ INPUT DATA +++++
Sampling frequency [Hz]: 200

```

Inserita la frequenza di campionamento, vengono visualizzate le accelerazioni per via grafica:

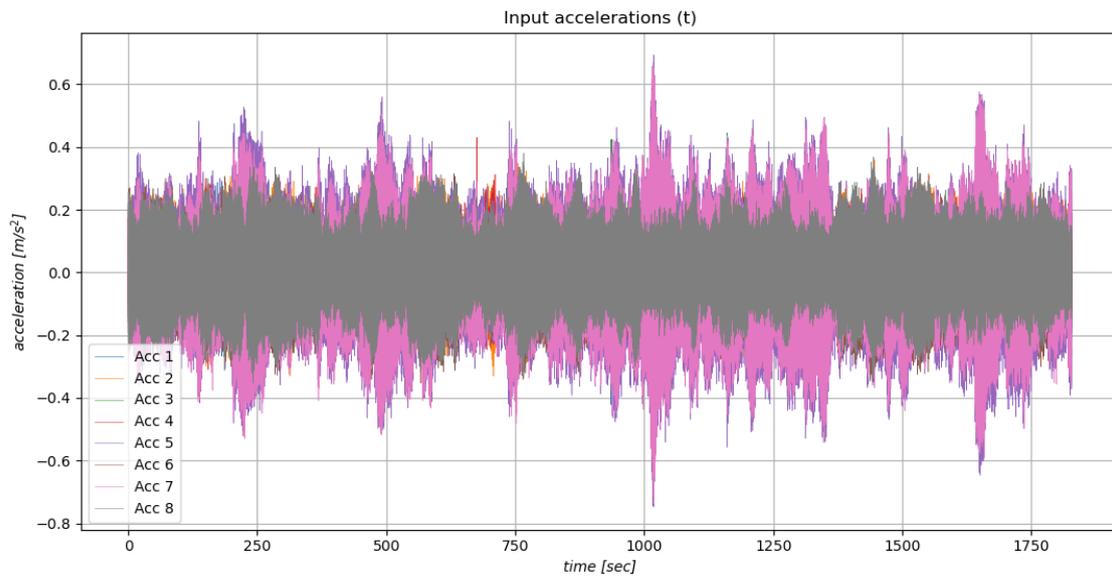


Figura 71: Accelerazioni da rumore ambientale per il telaio

Il prossimo step è rappresentato dall'identificazione dei picchi, di seguito vengono riportati i modi che sono stati individuati mediante FDD:

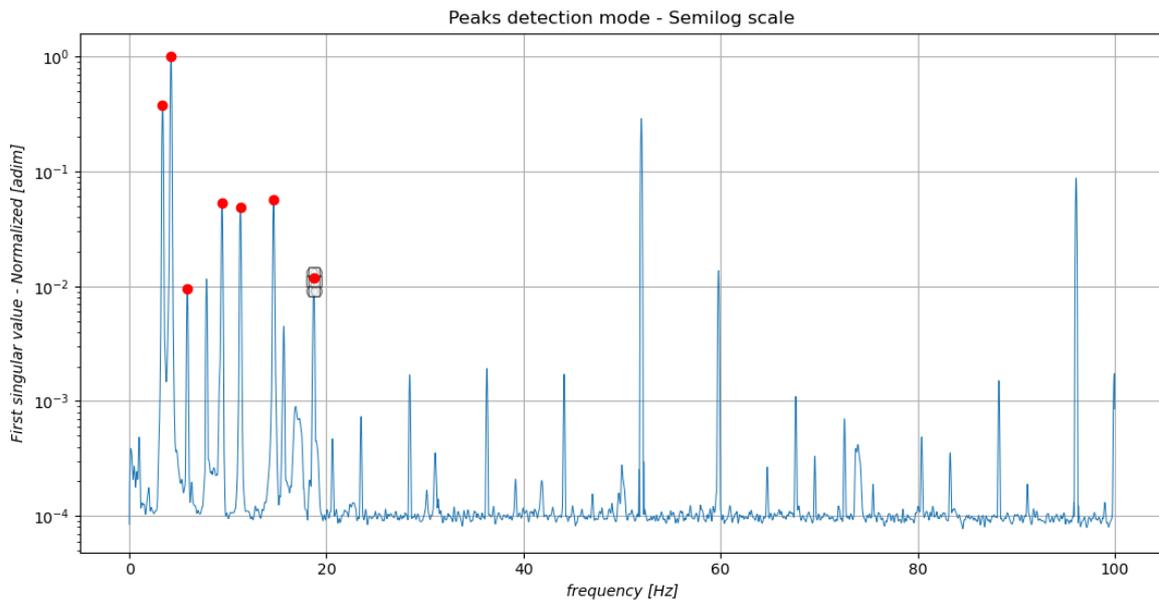


Figura 72: Peak detection mode per il telaio

I picchi che sono evidenziati nella precedente figura sono quelli riferiti ai modi di vibrare individuati dalla OMA di riferimento ma sono comunque presenti altri picchi che non sono stati evidenziati. Questi picchi possono essere riferiti a modi di vibrare locali (es: oscillazione del solaio, oscillazione dei controventi) o a modi dovuti alla presenza di rumore.

Di seguito sono riportati i parametri modali (frequenze e smorzamenti) individuati mediante l’FDD, confrontati con l’analisi dinamica di riferimento e il modello FE:

Tabella 14: Risultati analisi modale FDD

modo		Analisi di riferimento		Modello FE	FDD Python	
		f [Hz]	ζ [%]	f [Hz]	f [Hz]	ζ [%]
1° traslazionale Y	1	3.38	0.11	3.40	3.37	1.74
1° traslazionale X	2	4.23	0.13	4.22	4.23	1.54
1° torsionale	3	5.89	0.15	5.91	5.89	1.07
2a° traslazionale Y	4	9.41	0.09	10.18	9.40	0.81
2b° traslazionale Y	5	11.27	0.07	10.18	11.27	0.61
2° traslazionale X	6	14.64	0.09	14.55	14.64	0.54
2° torsionale	7	18.73	0.78	18.77	18.72	0.41

Si nota un’ottima corrispondenza dei risultati ottenuti sia con il modello agli elementi finiti che con l’OMA di riferimento. La corrispondenza è perfetta per quanto riguarda le frequenze mentre non è ottimale per quanto riguarda gli smorzamenti. In ogni caso gli smorzamenti ottenuti presentano dei valori accettabili che potrebbero essere rappresentativi della realtà. In particolare si nota che anche per l’FDD implementato si ottiene che il secondo modo traslazionale in Y sia sdoppiato.

Si riporta la differenza in termini percentuali delle frequenze ottenute mediante il modello FE e delle frequenze ottenute mediante l’algoritmo FDD:

Tabella 15: Differenze % tra modello FE ed FDD

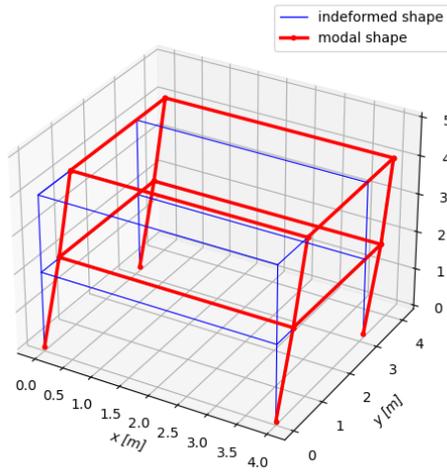
modo		Modello FE	FDD Python	Δf [%]
		f [Hz]	f [Hz]	
1° traslazionale Y	1	3.40	3.37	-0.88
1° traslazionale X	2	4.22	4.23	0.24
1° torsionale	3	5.91	5.89	-0.34
2° traslazionale Y (medio)	4	10.18	10.34	1.57
2° traslazionale X	5	14.55	14.64	0.62
2° torsionale	6	18.77	18.72	-0.27

Le differenze si mantengono sempre sotto l’1% ad eccezione del secondo modo traslazionale in Y (è stata calcolata la media delle due frequenze individuate) che presenta un errore dell’1.57%, in ogni caso si tratta di un errore accettabile. Il modello FE è ben tarato.

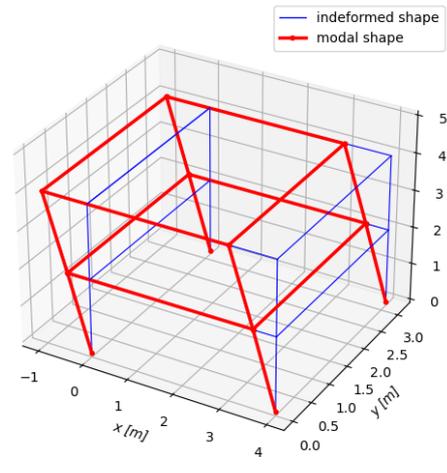
È superfluo riportare le differenze tra l’OMA di riferimento e l’FDD in quanto le frequenze ottenute sono identiche.

Si riportano di seguito le forme modali che sono state individuate mediante FDD:

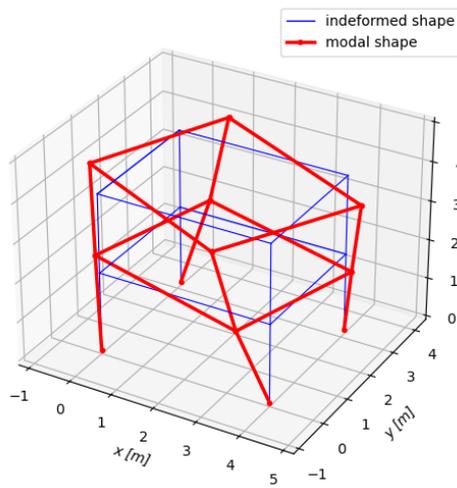
Modal shape: Mode 1 - 3.37 Hz



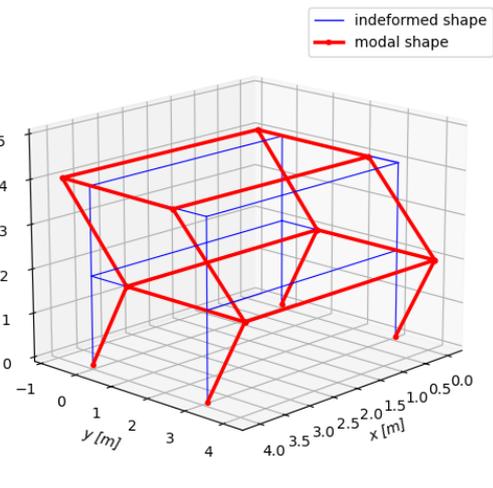
Modal shape: Mode 2 - 4.23 Hz



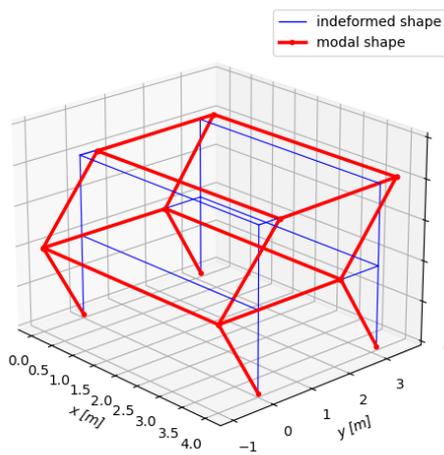
Modal shape: Mode 3 - 5.89 Hz



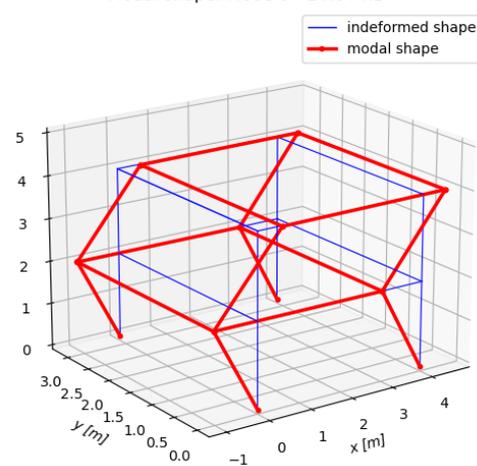
Modal shape: Mode 4 - 9.40 Hz



Modal shape: Mode 5 - 11.27 Hz



Modal shape: Mode 6 - 14.64 Hz



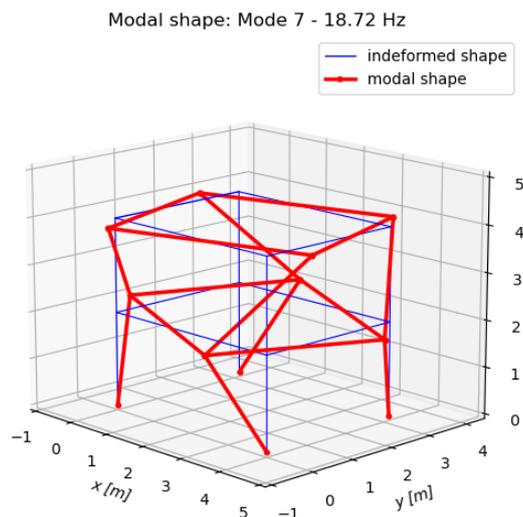


Figura 73: Forme modali del telaio da FDD

4.2.5. Analisi con algoritmo SSI

L'importazione dei dati è identica a quanto visto per l'FDD: vanno definiti i file di input con estensione .csv, oltre alla preparazione del file delle accelerazioni. Anche per l'SSI si utilizzano le registrazioni di rumore ambientale.

Si riporta di seguito l'impostazione dei due file (*model_nodes.csv* e *model_link.csv*) per la specifica applicazione:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Nodes	x[m]	y[m]	z[m]	dx	dy	dz	Sensors	x	y	z	Reg x	Reg y	Reg z
2	1	0	0	0	N	N	N	-	0	0	0	0-	-	-
3	2	4	0	0	N	N	N	-	0	0	0	0-	-	-
4	3	4	3.14	0	N	N	N	-	0	0	0	0-	-	-
5	4	0	3.14	0	N	N	N	-	0	0	0	0-	-	-
6	5	0	0	2	Y	Y	N	A2	1	1	0	1	2	-
7	6	4	0	2	Y	Y	N	-	0	0	0	0-	-	-
8	7	4	3.14	2	Y	Y	N	D2	1	1	0	3	4	-
9	8	0	3.14	2	Y	Y	N	-	0	0	0	0-	-	-
10	9	0	0	4	Y	Y	N	A3	1	1	0	5	6	-
11	10	4	0	4	Y	Y	N	-	0	0	0	0-	-	-
12	11	4	3.14	4	Y	Y	N	D3	1	1	0	7	8	-
13	12	0	3.14	4	Y	Y	N	-	0	0	0	0-	-	-

Figura 74: model_nodes.csv per il telaio

	A	B	C
1	link	Node 1	Node 2
2	1	1	5
3	2	5	9
4	3	2	6
5	4	6	10
6	5	3	7
7	6	7	11
8	7	4	8
9	8	8	12
10	9	5	6
11	10	6	7
12	11	7	8
13	12	8	5
14	13	9	10
15	14	10	11
16	15	11	12
17	16	12	9
18			

Figura 75: model_link.csv per il telaio

Per quanto riguarda i parametri da definire relativi all'ordine massimo del sistema ed al numero di traslazioni, sono state fatte delle considerazioni: dato che il primo modo di vibrare in direzione trasversale è di circa $3.2 \div 3.5$ Hz è stata impostata una frequenza minima fondamentale pari a 3.20 Hz e dunque:

$$2s = \frac{f_s}{2f_0} = \frac{200}{2 \cdot 3.2} \approx 32;$$

Da questa relazione (definita nel *paragrafo 3.3.2*) si definisce il numero minimo di traslazioni della matrice di Hankel necessario per visualizzare le frequenze modali correttamente da 3.00 Hz in poi. A tal proposito si ricorda che il numero di traslazioni è calcolato in funzione dell'ordine massimo del sistema che dunque va definito prima del numero di traslazioni secondo la seguente relazione (descritta nel *paragrafo 3.3.3*):

$$ord\ max = C_{ord} \cdot 2 \cdot M;$$

con $M = 8$ (numero di output).

Il coefficiente C_{ord} è stato impostato pari a 20:

$$ord\ max = C_{ord} \cdot 2 \cdot M = 16 \cdot 2 \cdot 8 = 256;$$

Ovviamente l'ordine massimo è sovrastimato in quanto si è preferito avere più modi da scartare (si complica il postprocessing del dato) ma essere sicuri che non ci sia sovrapposizione tra i modi reali ed i modi dovuti al rumore.

In funzione dell'ordine massimo viene definito il numero di traslazioni (relazione descritta nel *paragrafo 3.3.3*) tenendo conto del numero minimo definito in precedenza (100):

$$2s = C_{shift} \cdot \frac{ord\ max}{M} = 2 \cdot \frac{256}{8} = 64;$$

Da tenere sempre bene in mente che C_{shift} e $C_{ord} \in \mathbb{N}$.

Definito l'ordine massimo ed il numero di traslazioni, si può procedere con l'analisi dinamica.

Eseguito lo script viene richiesta la frequenza di campionamento che per la presente applicazione è 200 Hz.

```

Loading data . . .
+++++ INPUT DATA +++++
Sampling frequency [Hz]: 200

```

Analogamente al precedente algoritmo anche in questo caso si ha la possibilità di visualizzare le accelerazioni di input per via grafica.

Si visualizza il diagramma di stabilizzazione, depurato già da tutte le forme modali che non presentano una coppia complessa e coniugata (modi spuri) e da tutti quei modi che non rientrano nel range di smorzamento considerato accettabile. Nel caso in esame il range di smorzamento considerato idoneo è $\div 0 - 2\%$, in quanto il telaio è molto semplice e non presenta un elevato valore di smorzamento.

Si riporta il diagramma di stabilizzazione, nel quale vengono evidenziati i modi di interesse:

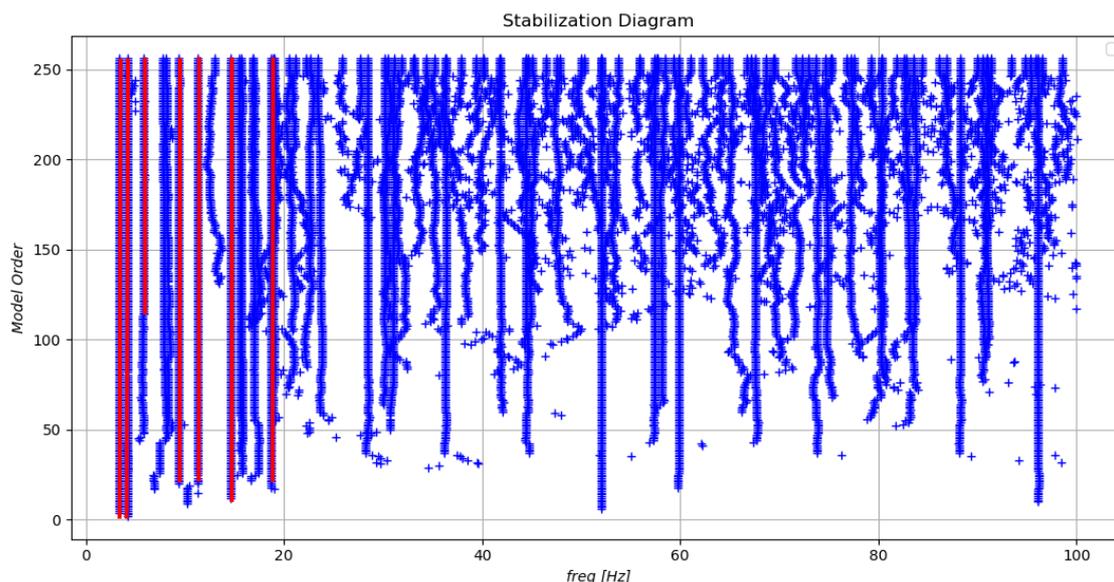


Figura 76: Diagramma di stabilizzazione per il telaio

Si nota dal diagramma di stabilizzazione che i modi da individuare presentano un'ampia stabilità anche per ordini non troppo elevati del modello. A differenza dell'applicazione della trave in questo caso è più semplice dunque definire dei parametri in maniera tale da avere la stabilità di tutti i modi: probabilmente è dovuto alla lunghezza del segnale che è maggiore in questo caso (30 min.) ed al minor disturbo del segnale (nelle accelerazioni della trave si nota come ci siano dei picchi molto marcati). La scelta dell'ordine è ricaduta su 200.

Si riportano di seguito i risultati dell'SSI, confrontati con i risultati dell'analisi di riferimento e con il modello FE:

Tabella 16: Risultati SSI per il telaio

modo		Analisi di riferimento		Modello FE	SSI Python	
		f [Hz]	ζ [%]	f [Hz]	f [Hz]	ζ [%]
1° traslazionale Y	1	3.38	0.11	3.40	3.38	0.15
1° traslazionale X	2	4.23	0.13	4.22	4.23	0.08
1° torsionale	3	5.89	0.15	5.91	5.84	0.80
2a° traslazionale Y	4	9.41	0.09	10.18	9.42	1.03
2b° traslazionale Y	5	11.27	0.07	10.18	11.30	0.15
2° traslazionale X	6	14.64	0.09	14.55	14.65	0.18
2° torsionale	7	18.73	0.78	18.77	18.73	0.21

Si nota subito un'ottima corrispondenza tra le frequenze (identiche all'OMA di riferimento) e migliora la stima dello smorzamento che risulta più piccolo rispetto all'FDD. Anche nel caso dell'SSI viene individuato il secondo modo traslazionale in Y come sdoppiato.

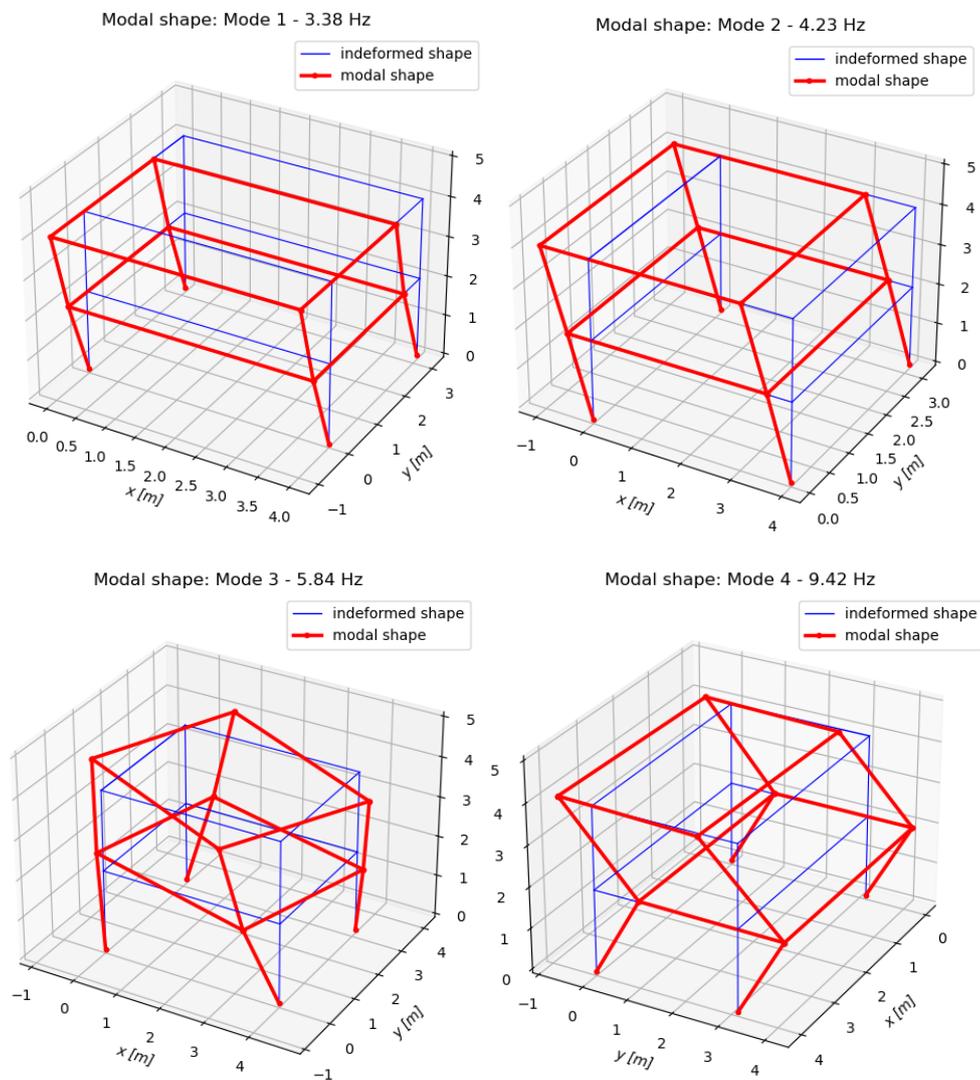
Si riporta la differenza in termini percentuali delle frequenze ottenute mediante il modello FE e delle frequenze ottenute mediante l'algoritmo SSI:

Tabella 17: Differenze % tra SSI e modello FE

modo		Modello FE	SSI Python	Δf [%]
		f [Hz]	f [Hz]	
1° traslazionale Y	1	3.40	3.38	-0.59
1° traslazionale X	2	4.22	4.23	0.24
1° torsionale	3	5.91	5.84	-1.18
2° traslazionale Y (medio)	4	10.18	10.36	1.77
2° traslazionale X	5	14.55	14.65	0.69
2° torsionale	6	18.77	18.73	-0.21

Come per l'FDD anche in questo caso le differenze tra il modello FE e l'analisi dinamica operativa sono molto ridotte. Questa è un'ulteriore conferma del fatto che il modello agli elementi finiti sia costruito in maniera corretta.

Si riportano le forme modali che sono state ottenute mediante l'SSI:



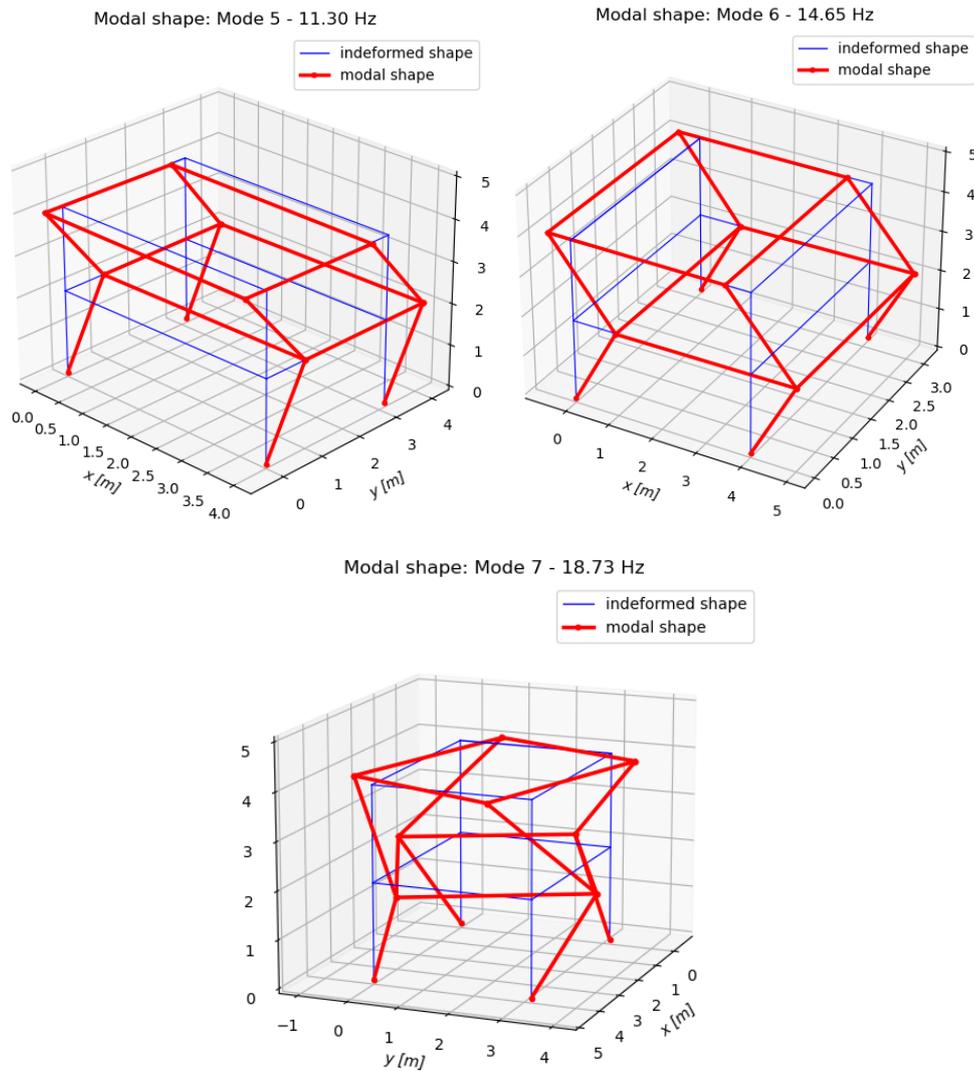


Figura 77: Forme modali individuate tramite SSI per il telaio

4.2.6. Correzione del modello FE

Come si è notato dai paragrafi precedenti, il modello agli elementi finiti presenta un'ottima corrispondenza con i risultati sperimentali per ogni modo di vibrare. Mediante il FEM sono stati identificati sei modi di vibrare e, per quanto detto inizialmente, sotto l'ipotesi di comportamento diaframmatico di piano, sono sufficienti questi sei modi di vibrare per identificare completamente il comportamento dinamico della struttura. Sulla base di ciò non vi è intenzione di andare a modificare il modello agli elementi finiti per migliorare la corrispondenza dei modi. Quello che si vuole fare è: sfruttare il modello agli elementi finiti per cercare di individuare dei modi locali che compaiono nei risultati sperimentali.

In particolare, sono state individuate due frequenze che sono presenti in entrambi gli algoritmi con un MAC reciproco delle forme modali elevato. Il problema è che le forme modali relative a tali frequenze non hanno alcun significato fisico.

Queste frequenze possono essere frutto di modi locali di vibrare, infatti nel modello agli elementi finiti non sono stati definiti i controventi. Lo scopo è definire i controventi nel modello agli elementi finiti per verificare che le frequenze locali associate ad un loro movimento coincidano con quelle individuate per via sperimentale.

Le frequenze individuate mediante SSI ed FDD sono riportate di seguito:

FDD		SSI		MAC
f [Hz]	ζ [%]	f [Hz]	ζ [%]	
7.84	1.50	7.79	0.85	0.997
16.88	1.20	16.88	0.95	0.990

Per la modellazione dei controventi sono stati utilizzati degli elementi *beam*.

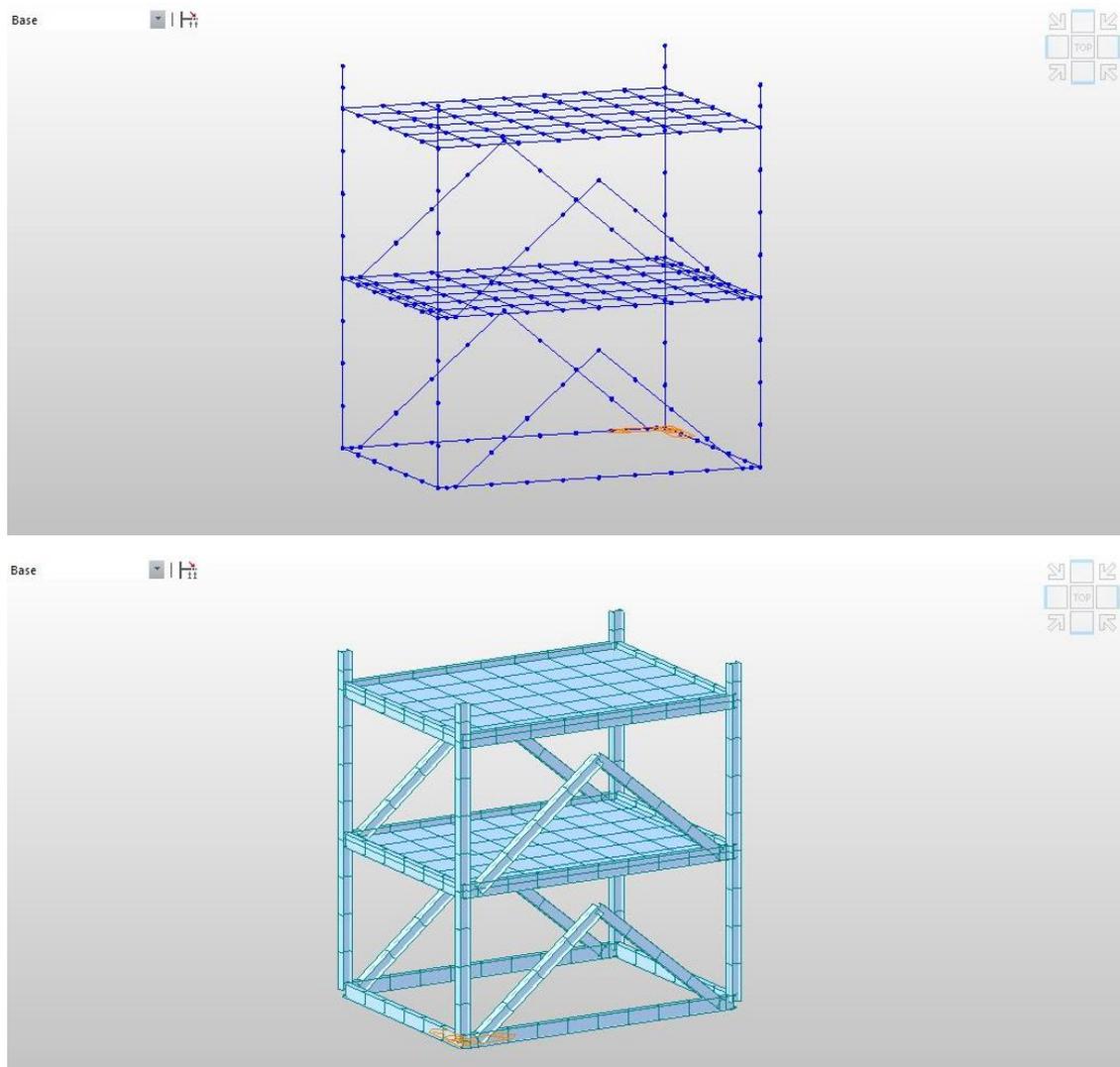


Figura 78: Modello FE del telaio con controventi

Le frequenze e le forme modali definite nei paragrafi precedenti non hanno subito grandi cambiamenti (centesimi o millesimi di Hz), non sono stati inoltre individuati dei modi di vibrare locali che coincidano con le frequenze sopra citate.

4.2.7. Confronto SSI – FDD

Per confrontare i parametri modali ottenuti dai due algoritmi si considera sia la differenza % in frequenza sia il *Modal Assurance Criterion* per le forme modali:

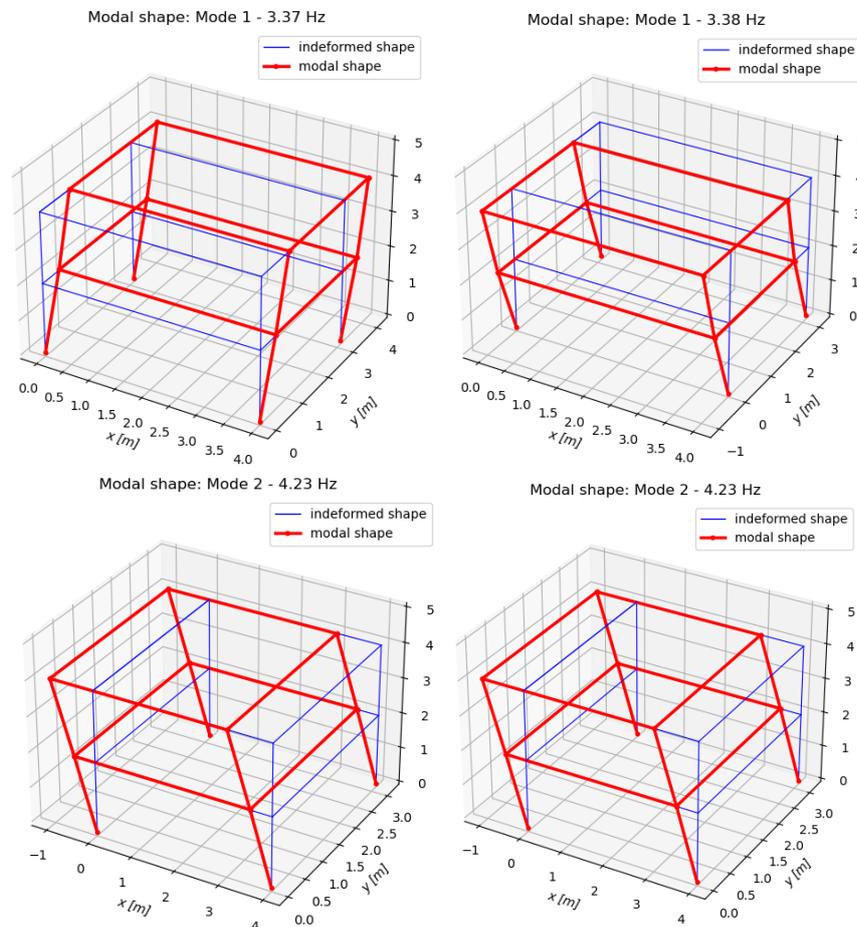
$$MAC(\{\varphi_r\}, \{\varphi_s\}) = \frac{|\{\varphi_r\}^T \{\varphi_s\}|^2}{(\{\varphi_r\}^T \{\varphi_r\})(\{\varphi_s\}^T \{\varphi_s\})};$$

Si riportano di seguito i parametri modali:

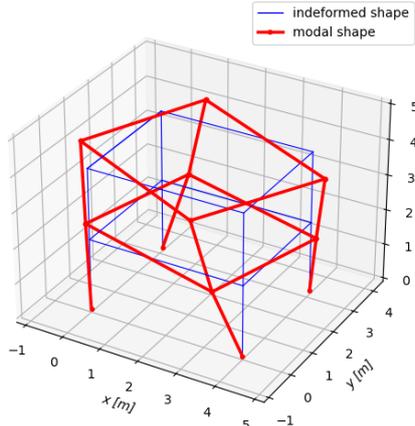
Tabella 18: Confronto parametri modali SSI - FDD

modo		FDD		SSI		Δf [%]	MAC
		f [Hz]	ζ [%]	f [Hz]	ζ [%]		
1° traslazionale Y	1	3.37	1.74	3.38	0.15	0.30	1.000
1° traslazionale X	2	4.23	1.54	4.23	0.08	0.00	1.000
1° torsionale	3	5.89	1.07	5.84	0.80	0.85	0.997
2a° traslazionale Y	4	9.40	0.81	9.42	1.03	0.21	0.996
2b° traslazionale Y	5	11.27	0.61	11.30	0.15	0.27	1.000
2° traslazionale X	6	14.64	0.54	14.65	0.18	0.07	1.000
2° torsionale	7	18.72	0.41	18.73	0.21	0.05	0.999

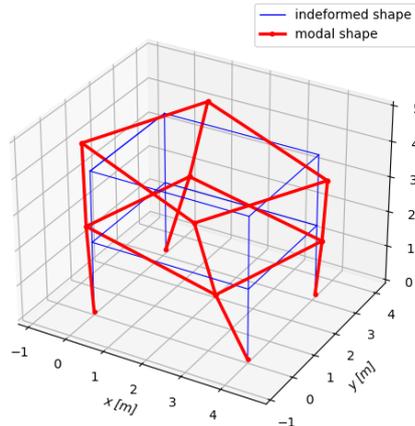
La corrispondenza tra frequenze e forme modali è molto elevata, questo è un indicatore che l'analisi sperimentale è stata condotta nel modo adeguato. Di seguito si può apprezzare anche per via grafica la corrispondenza tra le forme modali derivanti dall'FDD e dall'SSI. A sinistra sono riportate le forme modali ricavate da FDD mentre a destra quelle ricavate da SSI:



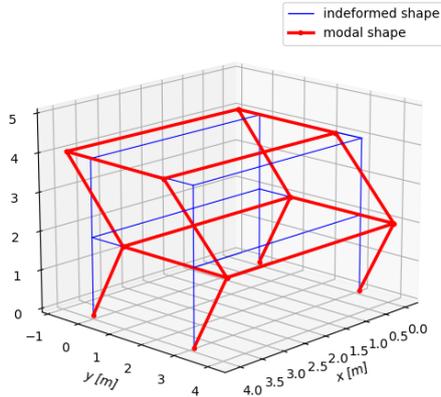
Modal shape: Mode 3 - 5.89 Hz



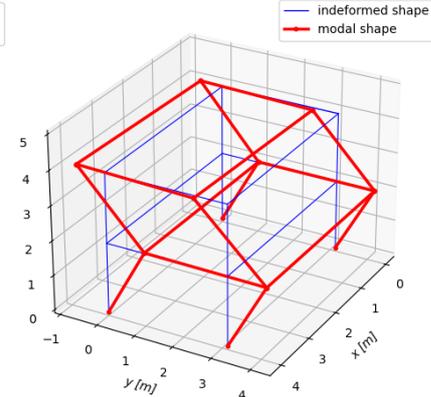
Modal shape: Mode 3 - 5.84 Hz



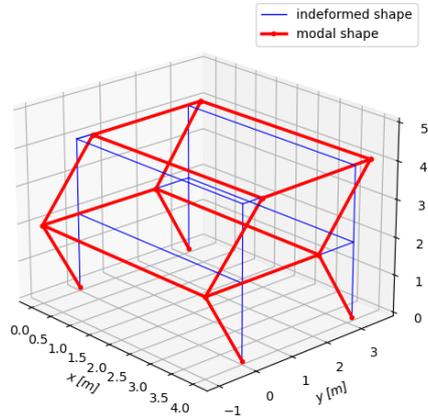
Modal shape: Mode 4 - 9.40 Hz



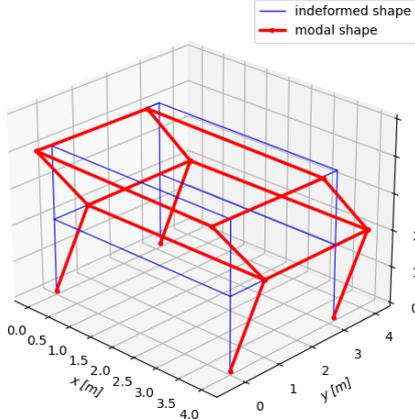
Modal shape: Mode 4 - 9.42 Hz



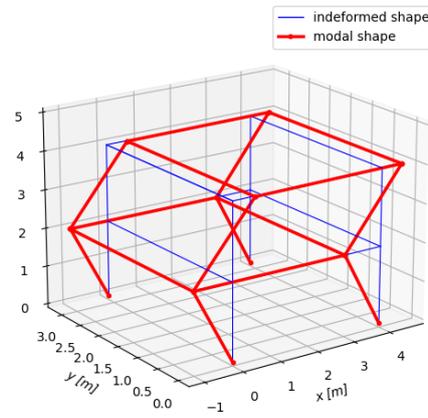
Modal shape: Mode 5 - 11.27 Hz



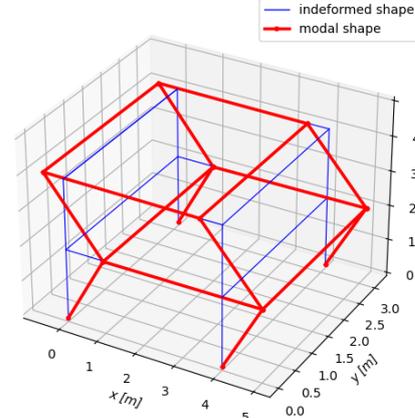
Modal shape: Mode 5 - 11.30 Hz



Modal shape: Mode 6 - 14.64 Hz



Modal shape: Mode 6 - 14.65 Hz



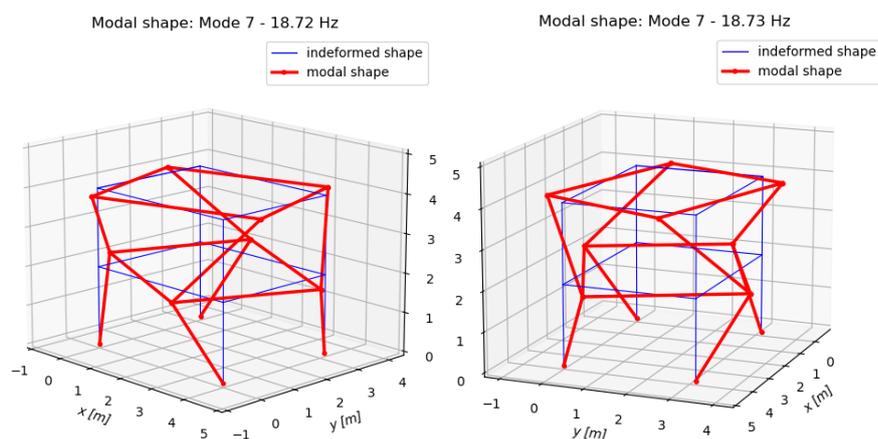


Figura 79: Confronto forme modali SSI-FDD per il telaio

4.3. Resoconto applicazioni

Dai risultati delle due applicazioni si può dedurre il corretto funzionamento dei due algoritmi implementati su Python che, ovviamente, possono ancora essere ottimizzati. In particolare, può essere migliorata la stima dello smorzamento per l’FDD pulendo il segnale da eventuali componenti armoniche di disturbo.

La corrispondenza tra i risultati dei due algoritmi è molto importante in quanto, operando in domini differenti, si ottengono gli stessi parametri modali. Sicuramente la corrispondenza risulta essere migliore per la seconda applicazione (telaio in acciaio) dove le differenze delle frequenze non superano mai l’1% ed il MAC presenta sempre un valore molto elevato. Questo può essere dovuto alla migliore qualità del segnale che ha un’ampiezza più o meno costante nel tempo mentre le accelerazioni relative alla prima applicazione (trave in calcestruzzo armato) presentano dei picchi che si discostano molto dall’ampiezza media del segnale. In ogni caso anche per l’applicazione relativa alla trave sono stati ottenuti dei buoni risultati, questo dimostra che anche se la qualità del segnale non è ottimale si ottengono dei risultati affidabili.

In definitiva si può dedurre che:

- I due algoritmi funzionano correttamente presentando un’ottima corrispondenza reciproca e con i modelli agli elementi finiti realizzati;
- I risultati sono più accurati se l’ampiezza del segnale si mantiene più o meno costante durante tutta la registrazione (altrimenti si perde una delle ipotesi fondamentali di eccitazione gaussiana);
- I risultati sono più accurati se la registrazione è più lunga, infatti i risultati migliori sono stati ottenuti per l’applicazione del telaio dove le registrazioni hanno una durata di 30 minuti, mentre per la trave le registrazioni hanno una durata di 3 minuti;
- FDD ed SSI dimostrano la stessa affidabilità per quanto riguarda la stima delle frequenze (si possono avere degli errori nell’FDD se due frequenze sono molto vicine tra loro) ma l’SSI risulta più affidabile per la stima dello smorzamento.

5. Campo prove - Tensostruttura Fiera di Genova

5.1. Descrizione e finalità del campo prove

Il campo prove riguarda la Tensostruttura della Fiera Internazionale di Genova ed è finalizzato alla validazione tecnica di un sistema di monitoraggio automatico del carico agente sugli stralli di sostegno dei pennoni. Il sistema è basato sul rilievo indiretto del carico attraverso l'analisi di risposta dinamica degli elementi strutturali. Il vantaggio di questo metodo indiretto è il basso impatto operativo in quanto non richiede l'interruzione della continuità funzionale degli elementi stessi. Trattandosi, di contro, di un metodo indiretto di determinazione del tiro negli stralli, questo può essere soggetto a degli errori connessi alla variabilità dei diversi fattori che influiscono sul calcolo (curvatura, rigidezza flessionale, massa, condizioni di vincolo).

Per la definizione del tiro negli stralli è stato utilizzato un metodo che trova riscontri positivi in letteratura: la *Unified Practical Formulas* [22]. Per la definizione delle frequenze modali necessarie al calcolo del tiro sono stati utilizzati invece i due algoritmi implementati.

Lo scopo del campo prove è quello di valutare la precisione di questo sistema per il calcolo del tiro: l'obiettivo è avere un errore minore del 5%. Per la stima dell'errore sono state poste due celle di carico ad un'estremità dello strallo che forniscono il valore preciso della trazione.



Figura 80: Tensostruttura Fiera Internazionale di Genova - foto da <https://portoantico.it/>

5.2. Calcolo del tiro: *Unified Practical Formulas*

Il metodo consiste nel valutare un coefficiente correttivo da applicare al tiro valutato mediante la *teoria delle corde tese*, tenendo conto dei diversi fattori che sono trascurati in questa teoria.

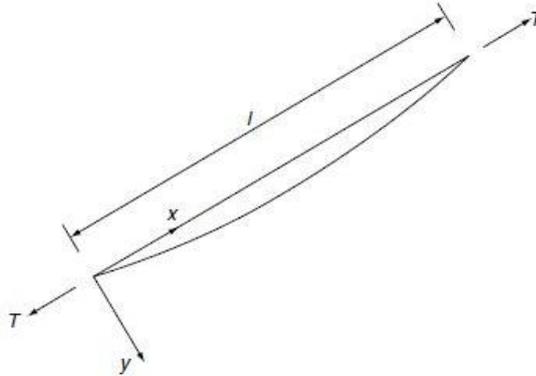


Figura 81: Schema cavo inclinato soggetto a trazione T

Il punto di partenza per la definizione del tiro è l'equazione differenziale che governa il problema rappresentato nella figura precedente: cavo inclinato soggetto a trazione T.

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + T \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + h(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0;$$

- $EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}$ = contributo legato alla rigidezza flessionale del cavo;
- $T \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}$ = contributo legato al tiro nel cavo;
- $h(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ = contributo legato alla tensione addizionale nel cavo dovuta al moto;
- $m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$ = contributo legato all'inerzia.

Le principali problematiche legate a questo tipo di analisi sono: inflessione del cavo dovuta alla forza di gravità, rigidezza flessionale del cavo, condizioni di vincolo. Il presente metodo propone una soluzione unificata che consenta di aggirare facilmente le citate difficoltà.

Se l'inflessione del cavo può essere considerata piccola o se è grande ma l'ordine del modo di vibrare considerato è maggiore di 1, l'effetto della variazione del tiro dovuta alla vibrazione $h(t)$ può essere trascurato. Si semplifica così l'equazione dinamica:

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + T \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0;$$

L'equazione così definita coincide con l'equazione del moto di una trave soggetta a trazione T ed essendo un'equazione nota, è nota anche la relativa soluzione.

La soluzione che si ottiene è la seguente:

$$\lambda_n = \frac{1}{\alpha_n \beta_n} = \sqrt{\frac{EI}{m \cdot \omega_n^2 \cdot l^4}};$$

$$K_n = \frac{(n\pi)^2}{\alpha_n^2} - \lambda_n^2 \alpha_n^2 (n\pi)^2;$$

$$T_s = \frac{m \cdot l^2 \cdot \omega_n^2}{(n\pi)^2};$$

I parametri appena definiti sono:

- λ_n = parametro adimensionale rappresentante la rigidità flessionale del cavo;
- K_n = coefficiente correttivo del tiro valutato tramite la *teoria delle corde tese*;
- T_s = tiro valutato mediante la *teoria delle corde tese*.

Il tiro per un generico modo di vibrare n può essere definito come:

$$T = K_n \cdot T_s;$$

I coefficienti α_n e β_n dipendono dalle condizioni di vincolo.

Si riporta il significato dei termini che compaiono nelle precedenti relazioni:

- EI = rigidità flessionale del cavo;
- ω_n = pulsazione propria relativa al modo di vibrare di ordine n ;
- m = densità di massa lineare del cavo [kg/m].

Viene ora definita la specifica soluzione per diverse condizioni di vincolo.

5.2.1. Vincoli: *cerniera – cerniera*

Per questa condizione di vincolo si ottiene la soluzione più semplice delle tre che saranno considerate:

$$\alpha_n = n\pi;$$

$$K_n = 1 - \lambda_n^2 (n\pi)^4;$$

Sostituendo nell'equazione del tiro si ottiene:

$$T = \frac{m \cdot l^2 \cdot \omega_n^2}{(n\pi)^2} - \frac{EI}{l^2} (n\pi)^2;$$

5.2.2. Vincoli: *incastro – incastro*

Per tale condizione di vincolo, la soluzione al problema è un'equazione trascendente che va risolta per via iterativa (es. metodo iterativo di Newton).

È nota però la relazione tra K_n e λ_n (definita mediante interpolazione):

$$K_n = -A_n \lambda_n^2 - B_n \lambda_n + 1;$$

$$\begin{cases} A_n = 98.2n^4 + 87.64n^3 + 65.37n^2; \\ B_n = 9.31n + 1.72; \end{cases}$$

Definito K_n può essere calcolato il tiro secondo la relazione riportata nei paragrafi precedenti.

In letteratura è anche riportato un metodo per la stima della precisione del calcolo del tiro, basato su un parametro adimensionale η :

$$\eta = \frac{\lambda}{\lambda_{max}};$$

λ_{max} può essere definito ponendo $K_n = 0$.

In base al valore di tale parametro, si sa che errore aspettarsi nella stima del tiro:

- $\eta < 0.88$ = errore inferiore al 3%;
- $\eta < 0.55$ = errore inferiore all'1%.

5.2.3. Vincoli: *incastro – cerniera*

Anche in questo caso si ottiene come soluzione del problema un'equazione trascendente, dunque l'impostazione è identica a quanto visto per il caso *incastro – incastro*, quello che cambia sono solo i coefficienti per la definizione di K_n :

$$K_n = -A_n \lambda_n^2 - B_n \lambda_n + 1;$$
$$\begin{cases} A_n = 97.51n^4 + 47.18n^3 + 17.17n^2; \\ B_n = 4.78n + 0.5; \end{cases}$$

Definito K_n può essere calcolato il tiro secondo la relazione riportata nei paragrafi precedenti.

Per quanto riguarda la stima dell'errore:

- $\eta < 0.90$ = errore inferiore all'1%.

Riprendendo le tre problematiche che sono state definite (inflexione del cavo, rigidità flessionale, condizioni di vincolo) si ha che:

- L'effetto dell'inflexione del cavo può essere trascurato se consideriamo frequenze modali di ordine ≥ 2 ;
- Si tiene conto della rigidità flessionale EI ;
- Si tiene conto delle condizioni di vincolo.

Per quanto riguarda la stima dell'errore atteso mediante il coefficiente η , c'è da tener conto che i vincoli reali non sono mai perfetti come i vincoli teorici, dunque, la stima dell'errore potrebbe non essere affidabile.

5.3. Proprietà dello strallo e condizioni di vincolo

La tensostruttura è composta da vele sostenute da sei coppie di travi ad arco sorrette da plinti in calcestruzzo armato e puntoni in acciaio inclinati per un'altezza massima di 20 m, completata da sei pennoni per un'altezza complessiva di 45 m. Tutti gli elementi strutturali sono realizzati dunque in acciaio e le connessioni sono tutte bullonate.



Figura 82: Viste della Tensostruttura in esame

Per quanto riguarda gli stralli, sono presenti quattro stralli (due lato Sud e due lato Nord) per sei pennoni. Durante il campo prove è stato analizzato un unico strallo lato Sud relativo al pennone 3, uno dei due pennoni centrali.

Si riportano di seguito le caratteristiche significative dello strallo necessarie per il calcolo della trazione mediante il metodo presentato:

Tabella 19: Caratteristiche geometriche e meccaniche dello strallo

L [m]	d [m]	A [m ²]	I [m ⁴]	γ_{steel} [kg/m ³]	m [kg/m]	E [MPa]
30.00	0.03	7.07E-04	3.98E-08	7850	5.55	210000

Le caratteristiche riportate nella tabella sono valutate tenendo conto che la sezione dello strallo sia piena ma in realtà lo strallo è realizzato mediante una fune spiroidale chiusa di diametro 3 cm che presenta una certa % di vuoti al suo interno che influisce sulla massa. Inoltre, dato lo scorrimento tra i fili e l'attrito che si genera, anche il modulo di elasticità dell'acciaio va ridotto.

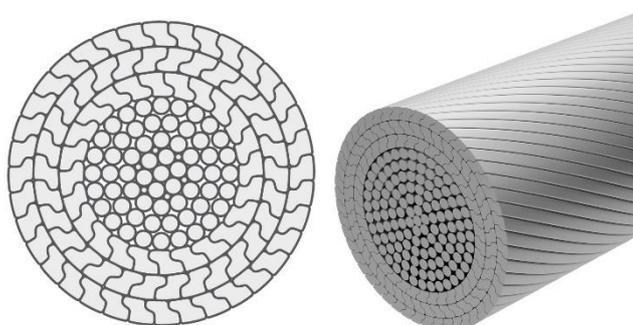


Figura 83: Funi spiroidali chiuse

Questo tipo di fune è molto resistente alla corrosione e risulta molto adeguata a strallature e tensostrutture.

Generalmente il modulo elastico di una fune spiroidale chiusa è di 160000 MPa [23], mentre per quanto riguarda la massa è stata tarata sfruttando il modello FE dello strallo: la stima finale è di una percentuale dei vuoti del 2%.

Si riporta di seguito la tabella con le caratteristiche dello strallo aggiornate:

Tabella 20: Caratteristiche geometriche e meccaniche dello strallo

L [m]	d [m]	A _{eff} [m ²]	I [m ⁴]	γ _{steel} [kg/m ³]	m [kg/m]	E [MPa]
30.00	0.03	6.93E-04	3.98E-08	7850	5.44	160000

Come è già stato detto, è fondamentale andare a definire le condizioni di vincolo da considerare, anche se non si hanno dei vincoli perfetti. Si consideri la seguente terna assiale:

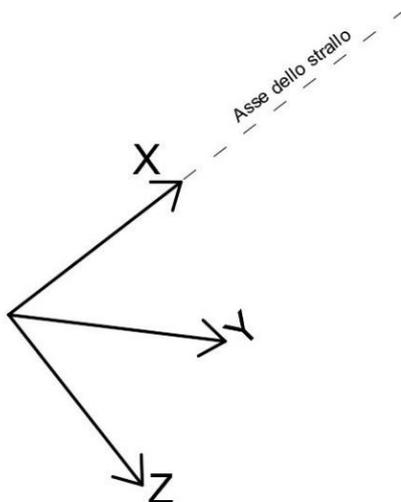


Figura 84: Sistema di riferimento globale dello strallo

Di seguito sono riportate le foto dei vincoli in testa ed alla base dello strallo e sono definite le condizioni vincolari:



Figura 85: Vincolo in testa allo strallo

Per quanto riguarda il vincolo in testa si può chiaramente considerare come una cerniera in direzione Z e come un incastro in direzione Y, questo perché l'unica rotazione che è consentita è la rotazione intorno all'asse Y.



Figura 86: Vincolo alla base dello strallo

Il vincolo alla base ha una costruzione più complessa: lo strallo è immorsato in un cilindro di calcestruzzo che presenta due fori attraverso il quale passano due barre filettate di acciaio $\Phi 30$, su queste due barre sono presenti due dadi che fanno da contrasto sul cilindro di calcestruzzo impedendone lo sfilamento. Le due barre filettate sono ancora connesse ad un secondo cilindro trasversale d'acciaio che passa per un foro, formando così una cerniera per le due barre filettate.

Come si nota, la definizione del vincolo non può essere ricondotta alla semplice scelta cerniera o incastro, questo ovviamente introduce degli errori sistematici. Il vincolo di base è considerato come cerniera in direzione Z (è consentita la rotazione delle due barre filettate) e come incastro in direzione Y.

5.4. Descrizione del sistema di monitoraggio

Il campo prova prevede l'installazione di due sistemi di monitoraggio: un sistema di monitoraggio dinamico ed un sistema di monitoraggio statico.

5.4.1. Sistema di monitoraggio dinamico

Il sistema di monitoraggio dinamico consiste nella posa di 3 accelerometri triassiali wireless in tre punti distinti dello strallo, rispettivamente ad $1/2$, $1/3$ ed $1/4$ della lunghezza dello stesso. La configurazione è stata scelta in maniera tale da definire la posizione ottimale per vedere più modi di vibrare, e di conseguenza definire quale modo risulta più affidabile per la definizione del tiro. I sensori dinamici sono alimentati a batteria e trasmettono i dati ad una centralina alimentata a rete. La centralina trasferisce i dati su un server online. L'acquisizione degli accelerometri avviene secondo due modalità: con finestre temporali predefinite e programmate nel tempo oppure a seguito del superamento di una soglia di trigger. Le finestre temporali programmate hanno una durata di 3 minuti con una frequenza di campionamento pari a 50 Hz (fissa, non può essere modificata) e sono state programmate in maniera da avere una finestra ogni ora. Al superamento di una soglia di trigger le registrazioni hanno invece una durata di 10 secondi sempre con una frequenza di campionamento di 50 Hz. Per la stima del tiro nello strallo si è fatto affidamento solo alle registrazioni programmate. Gli accelerometri sono stati installati in maniera tale che gli assi del sistema di riferimento locale dello strumento coincidano con quelli dello strallo che sono stati definiti nel paragrafo precedente.



Figura 87: Accelerometro posizionato sullo strallo

5.4.2. Sistema di monitoraggio statico

Il sistema di monitoraggio statico prevede invece l'installazione di 2 celle di carico toroidali in corrispondenza dell'estremità di base dello strallo: a tal proposito è stata realizzata una struttura di contrasto in acciaio *ad hoc* sul quale poggiano le celle (le barre filettate passano attraverso il foro delle celle) che a loro volta fanno contrasto su un dado. Per il trasferimento del carico alle celle sono stati utilizzati due martinetti cilindrici.



Figura 88: a sx: Trasferimento del carico mediante martinetti cilindrici; a dx: Celle di carico toroidali a fine installazione

La presenza delle celle è necessaria al fine di capire l'entità dell'errore che comporta il metodo utilizzato e le approssimazioni considerate (ad es. sulle condizioni di vincolo). Alla fine del campo prove le due celle di carico saranno rimosse.

Di seguito è riportato lo schema di posizionamento dei sensori dinamici e statici:

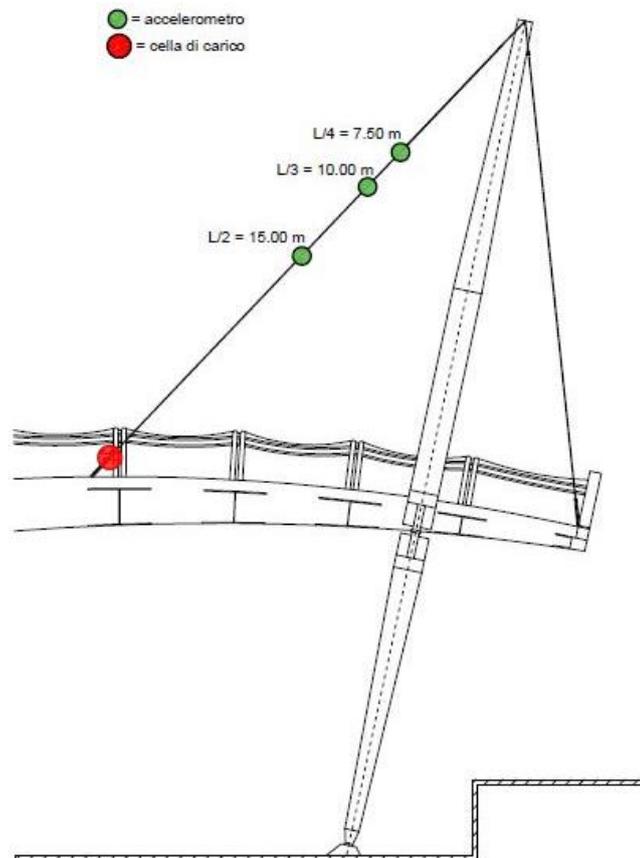


Figura 89: posizionamento dei sensori per il monitoraggio

Le distanze in figura sono misurate a partire dalla testa dello strallo.

5.5. Costruzione modello FE

5.5.1. Geometria del modello

La costruzione geometrica del modello agli elementi finiti dello strallo è piuttosto semplice in quanto sono stati utilizzati solo elementi monodimensionali. L'unica complicazione ha riguardato la modellazione del vincolo di base: sono stati ricostruiti tutti gli elementi che lo compongono (barre filettate $\Phi 30$ e traversi). In testa allo strallo è stata considerata una cerniera monodirezionale (consente la rotazione intorno all'asse Y).

Si riporta di seguito la costruzione geometrica del modello FE ed il particolare del vincolo di base:

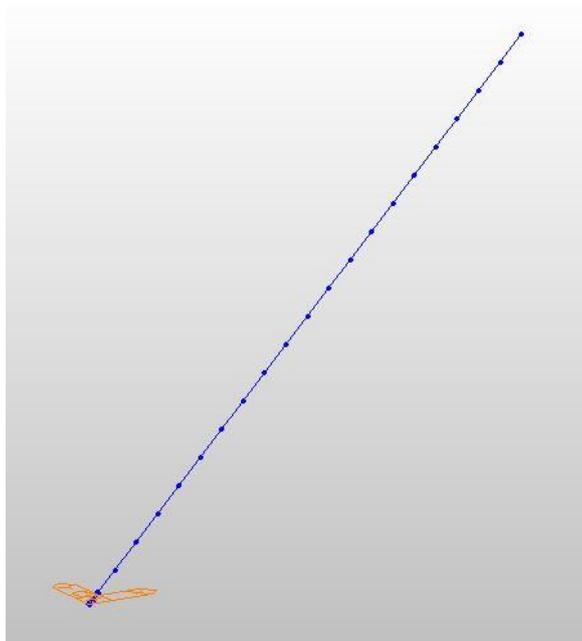


Figura 90: Geometria modello FE strallo

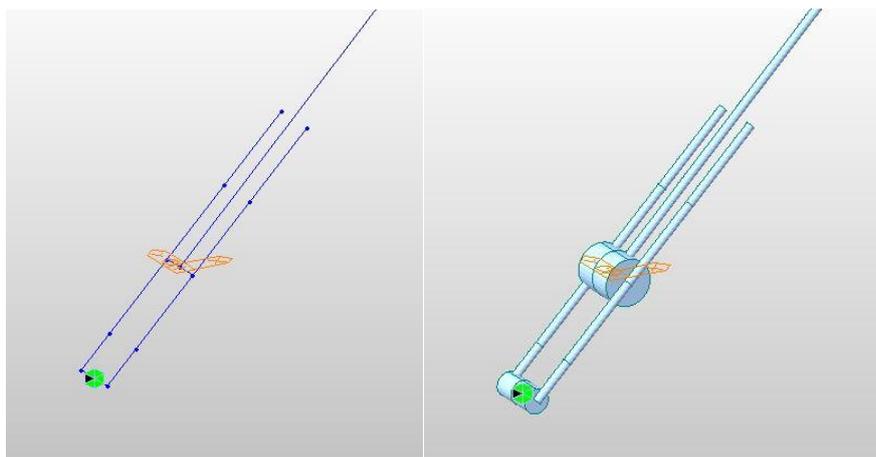


Figura 91: Particolare vincolo di base

Per la realizzazione di tutti gli elementi sono stati utilizzati degli elementi monodimensionali. La mesh dello strallo è caratterizzata da elementi di 1.50 m (30 m / 20). Il vincolo di base è stato così modellato in maniera tale da cogliere eventuali modi torsionali dello stesso dovuti all'oscillazione controfase delle due barre filettate. Il traverso in acciaio è vincolato con una cerniera monodirezionale in mezzeria

5.5.2. Taratura del modello

Oltre alle caratteristiche meccaniche e geometriche, è necessario conoscere anche il tiro nello strallo per poter definire in maniera idonea il modello agli elementi finiti. Questo perché il tiro nello strallo influisce ovviamente sui risultati dell'analisi dinamica (in particolare sulle frequenze).

A tal proposito sono stati raccolti i dati delle celle di carico durante la prima settimana di osservazione (dal 03/09/2020 al 09/09/2020):

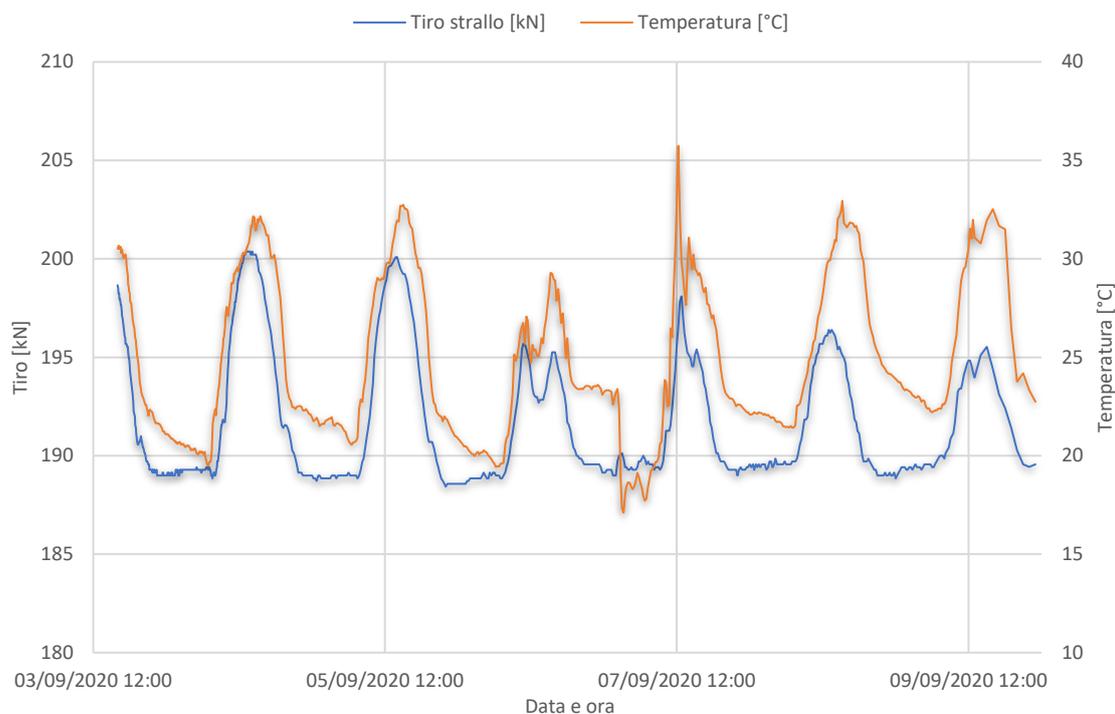


Figura 92: Andamento del tiro dello strallo e della temperatura

Dal grafico si nota come il tiro vari al variare della temperatura, il che è comprensibile in quanto la struttura è completamente realizzata in acciaio e quindi suscettibile alle variazioni termiche. Oltre che alle variazioni di lunghezza proprie dello strallo, saranno presenti anche delle deformazioni globali della struttura che influiscono sulla forza interna dello strallo.

In particolare si notano delle oscillazioni giornaliere massime di circa 12 kN (tra 188 kN e 200 kN). Queste oscillazioni del tiro portano anche a delle variazioni delle frequenze individuate mediante l'analisi dinamica, dunque, per tarare il modello FE si è scelto di considerare tre condizioni:

- *Tiro* = 190 kN;
- *Tiro* = 195 kN;
- *Tiro* = 200 kN.

L'obiettivo è ottenere per queste tre condizioni le stesse frequenze che si ottengono dall'analisi dinamica.

Di seguito sono riportate le frequenze ottenute tramite gli algoritmi FDD ed SSI per le tre condizioni considerate:

Tabella 21: Frequenze per $T = 190$ kN

T = 190 kN		FDD		SSI		
modo di vibrare	ordine del modo	f [Hz]	ζ [%]	f [Hz]	ζ [%]	Δf [%]
flessionale Z	1	3.121	0.15	3.123	0.18	0.064
flessionale Y	1	3.210	0.11	3.235	0.13	0.779
flessionale Z	2	6.242	0.13	6.243	0.07	0.016
flessionale Y	2	6.429	0.08	6.432	0.02	0.047
flessionale Z	3	9.267	0.06	9.259	0.07	0.086
flessionale Y	3	9.619	0.19	9.609	0.18	0.104

Tabella 22: Frequenze per $T = 195$ kN

T = 195 kN		FDD		SSI		
modo di vibrare	ordine del modo	f [Hz]	ζ [%]	f [Hz]	ζ [%]	Δf [%]
flessionale Z	1	3.155	0.20	3.150	0.44	0.158
flessionale Y	1	3.238	0.25	3.244	0.17	0.185
flessionale Z	2	6.312	0.19	6.299	0.32	0.206
flessionale Y	2	6.475	0.13	6.478	0.06	0.046
flessionale Z	3	9.363	0.07	9.366	0.09	0.032
flessionale Y	3	9.716	0.19	9.705	0.11	0.113

Tabella 23: Frequenze per $T = 200$ kN

T = 200 kN		FDD		SSI		
modo di vibrare	ordine del modo	f [Hz]	ζ [%]	f [Hz]	ζ [%]	Δf [%]
flessionale Z	1	3.186	0.35	3.198	0.61	0.377
flessionale Y	1	3.288	0.19	3.300	0.23	0.365
flessionale Z	2	6.388	0.13	6.437	0.55	0.767
flessionale Y	2	6.602	0.47	6.610	0.12	0.121
flessionale Z	3	9.496	0.07	9.484	0.09	0.126
flessionale Y	3	9.866	0.13	9.894	0.31	0.284

I risultati dei due algoritmi sono quasi coincidenti: l'errore massimo è di 0.78 %. Si nota anche il valore degli smorzamenti che è molto piccolo e concorde con il sistema considerato.

Considerando come modulo elastico del cavo il valore definito per i cavi chiusi spirodali (160'000 MPa) ed una riduzione della massa del 2% dovuta alle percentuali di vuoti presenti nella sezione dello strallo, si ottengono i seguenti risultati:

Tabella 24: Confronto frequenze del modello FE per $T = 190$ kN

T = 190 kN		Modello FE	FDD		SSI	
modo di vibrare	ordine del modo	f [Hz]	f [Hz]	Δf [%]	f [Hz]	Δf [%]
flessionale Z	1	3.112	3.121	0.288	3.123	0.352
flessionale Y	1	3.204	3.210	0.187	3.235	0.958
flessionale Z	2	6.223	6.242	0.304	6.243	0.320
flessionale Y	2	6.412	6.429	0.264	6.432	0.311
flessionale Z	3	9.327	9.267	0.647	9.259	0.734
flessionale Y	3	9.627	9.619	0.083	9.609	0.187

Tutti gli errori si mantengono al di sotto dell'1%. Si riportano di seguito le forme modali che sono state individuate:

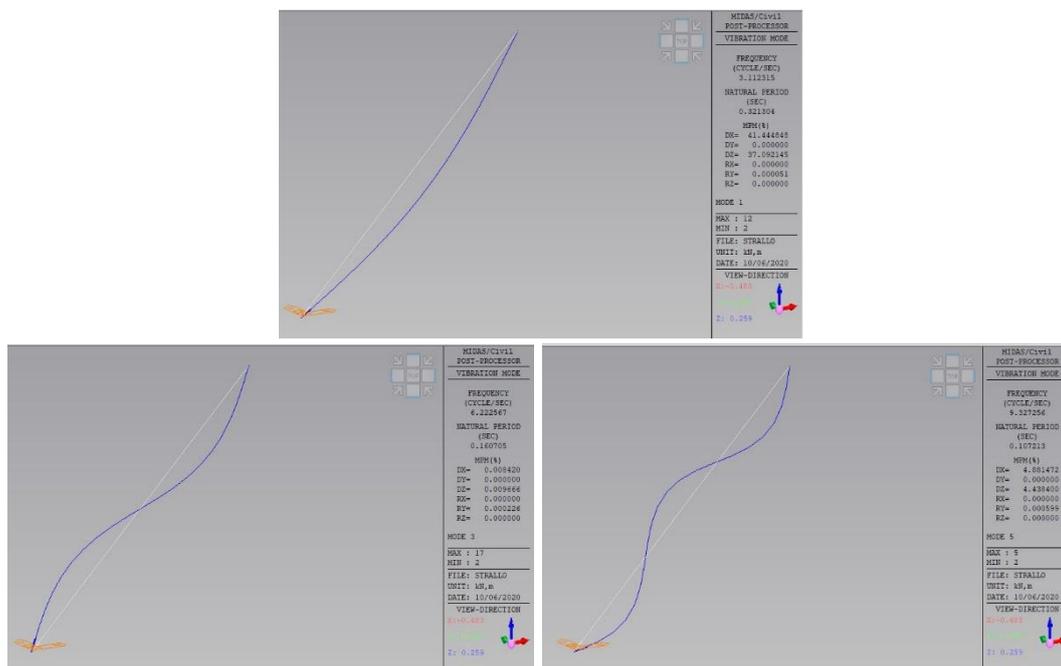


Figura 93: Modi flessionali in direzione Z – T = 190 kN

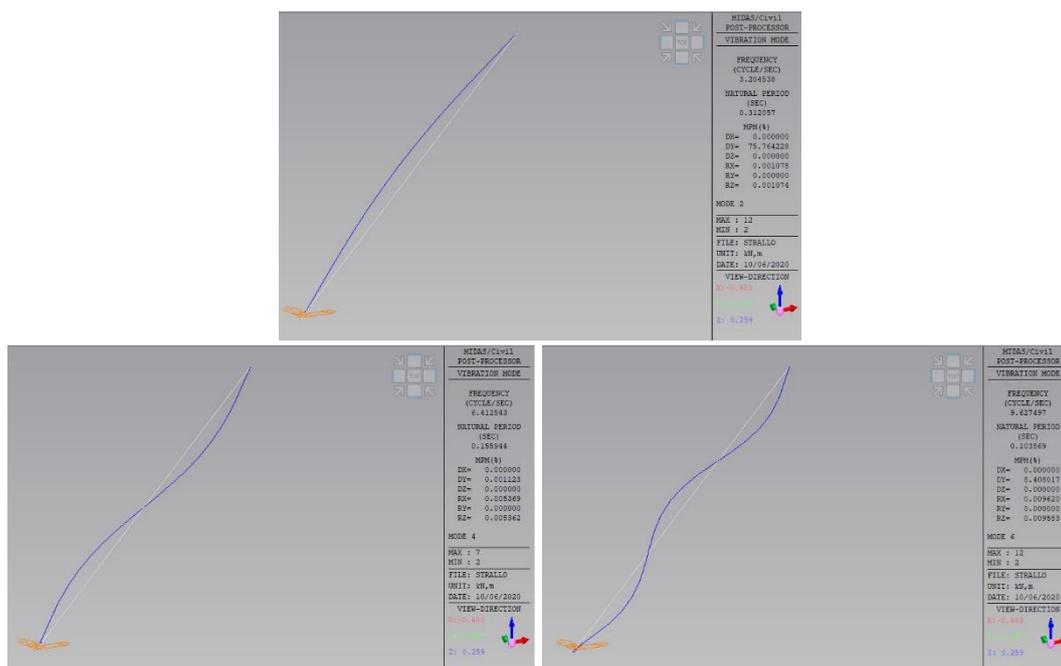


Figura 94: Modi flessionali in direzione Y – T = 190 kN

Il fatto che ci sia una buona corrispondenza dei modi di vibrare definiti mediante il FEM e mediante gli algoritmi indica che il modulo di Young e la massa dello strallo sono state definite bene. È fondamentale definire bene questi parametri in quanto sono necessari per il calcolo del tiro mediante la *Unified Practical Formulas*.

Per verificare che questi parametri siano sempre idonei, si considerano anche i due casi con valore di tiro, rispettivamente, 195 kN e 200 kN. L'unico parametro che viene cambiato nel modello FE è il tiro nello strallo.

Si riporta di seguito il confronto tra i risultati degli algoritmi e quelli del FEM:

Tabella 25: Confronto frequenze del modello FE per $T = 195$ kN

T = 195 kN		Modello FE	FDD		SSI	
modo di vibrare	ordine del modo	f [Hz]	f [Hz]	Δf [%]	f [Hz]	Δf [%]
flessionale Z	1	3.153	3.155	0.063	3.150	0.095
flessionale Y	1	3.246	3.238	0.247	3.244	0.062
flessionale Z	2	6.304	6.312	0.127	6.299	0.079
flessionale Y	2	6.495	6.475	0.309	6.478	0.262
flessionale Z	3	9.449	9.363	0.919	9.366	0.886
flessionale Y	3	9.751	9.716	0.360	9.705	0.474

Tabella 26: Confronto frequenze del modello FE per $T = 200$ kN

T = 200 kN		Modello FE	FDD		SSI	
modo di vibrare	ordine del modo	f [Hz]	f [Hz]	Δf [%]	f [Hz]	Δf [%]
flessionale Z	1	3.193	3.186	0.220	3.198	0.156
flessionale Y	1	3.286	3.288	0.061	3.300	0.424
flessionale Z	2	6.384	6.388	0.063	6.437	0.823
flessionale Y	2	6.577	6.602	0.379	6.610	0.499
flessionale Z	3	9.569	9.496	0.769	9.484	0.896
flessionale Y	3	9.874	9.866	0.081	9.894	0.202

Gli errori tra i risultati sperimentali e numerici non superano mai l'1%. Si può procedere al calcolo del tiro negli stralli utilizzando i parametri definiti durante la taratura del modello FE.

Tabella 27: Caratteristiche geometriche e meccaniche dello strallo

L [m]	d [m]	A_{eff} [m ²]	I [m ⁴]	γ_{steel} [kg/m ³]	m [kg/m]	E [MPa]
30.00	0.03	6.93E-04	3.98E-08	7850	5.44	160000

5.6. Analisi dati: confronto monitoraggio dinamico – statico

Nel presente paragrafo vengono analizzati i dati a partire dal 04/09/2020 fino al 30/09/2020.

L'analisi prevede:

- La valutazione delle frequenze modali mediante FDD e mediante SSI;
- Il calcolo del tiro mediante il metodo discusso (vedi paragrafo 5.2);
- Il confronto del tiro calcolato mediante la prova dinamica con il tiro calcolato mediante le celle di carico.

L'obiettivo è quello di ottenere un errore inferiore al 5% tra prova dinamica e prova statica. È anche importante definire la posizione ottimale tra le tre degli accelerometri. Questo perché l'intenzione è quella di andare a posizionare un unico accelerometro per ogni strallo che sarà monitorato in futuro. La definizione della posizione ottimale è basata sull'ordine della frequenza modale che consente di definire il tiro con maggiore accuratezza.

La disposizione degli accelerometri sullo strallo si ricorda che è la seguente:

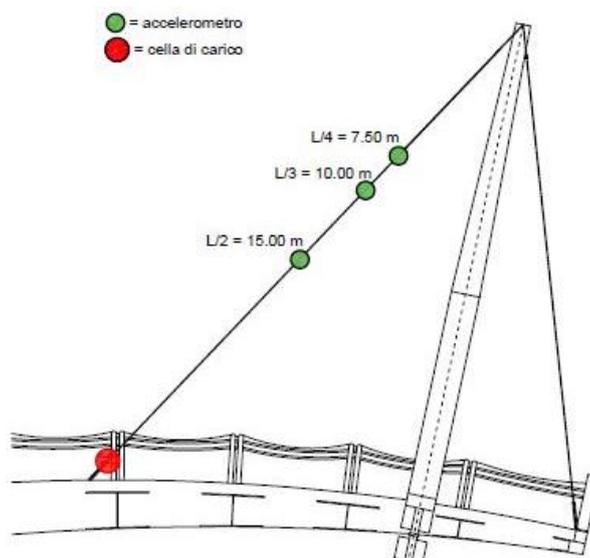


Figura 95: Posizione accelerometri

Si deve tener conto che:

- Il sensore posto ad $L/4$ non consente di vedere i modi di ordine 4 in quanto si trova sul punto di flesso teorico del relativo modo, anche se il flesso non sarà perfettamente in quella posizione è probabile che non si riesca ad individuare il modo. Di contro, questo è l'unico sensore che consente di vedere tutti e tre i primi modi di vibrare;
- Il sensore posto ad $L/3$ non consente di individuare i modi di ordine 3 per le medesime ragioni. Questo è l'unico sensore che consente di individuare i modi di ordine 4 in quanto gli altri due sensori si trovano sui flessi della deformata del modo;
- Il sensore posto ad $L/2$ non consente di vedere i modi di ordine 2 e 4.

Per l'analisi dei dati sono stati considerati i primi tre modi di vibrare, dunque, il sensore più idoneo risulta quello posto ad $L/4$ in quanto consente di vedere tutti i modi di interesse.

Si riporta di seguito un esempio di individuazione delle frequenze modali per l’FDD e l’SSI:

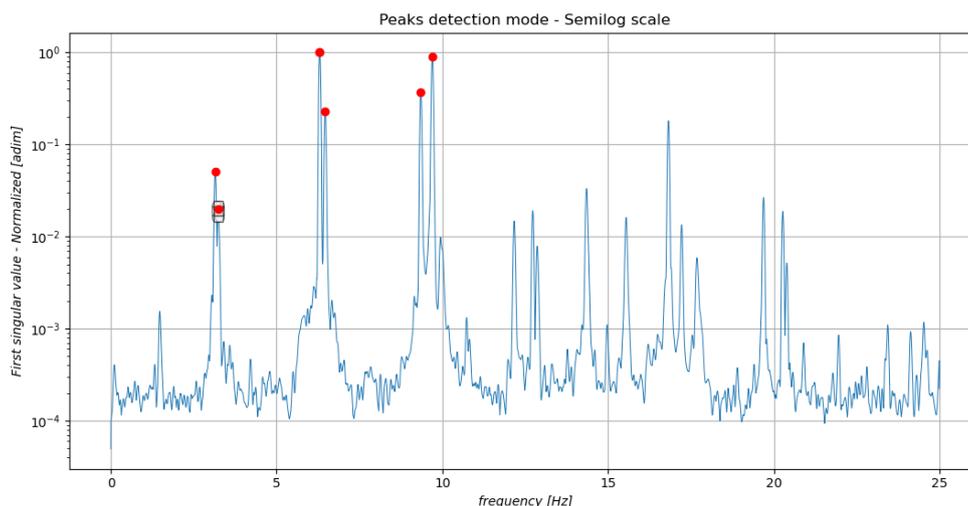


Figura 96: Individuazione frequenze mediante FDD

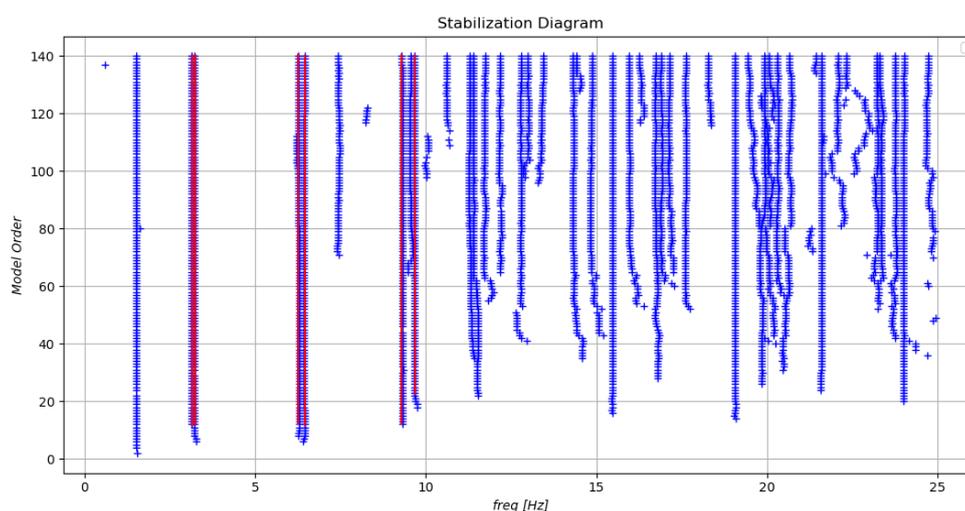


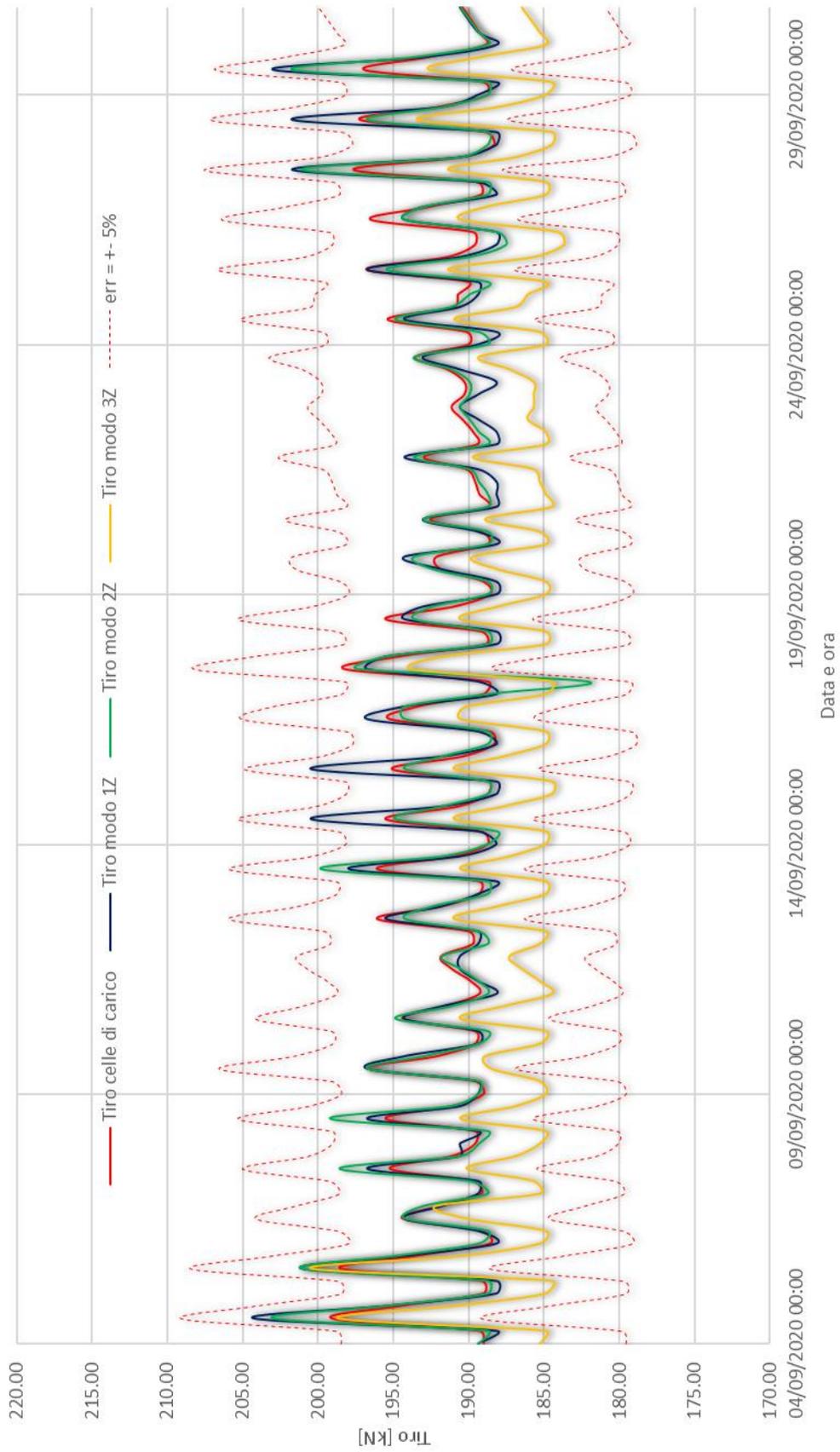
Figura 97: Individuazioni frequenze mediante SSI

Per l’analisi dei dati sono stati considerati 4 campionamenti al giorno (00:00 – 06:00 – 12:00 – 18:00) a partire dal 04/09/2020 fino al 30/09/2020. Il tiro dello strallo è calcolato, per tutti e sei i modi di vibrare individuati, tenendo conto della condizione di vincolo *cerniera-cerniera* per i modi flessionali in Z e *incastro-incastro* per i modi flessionali in Y.

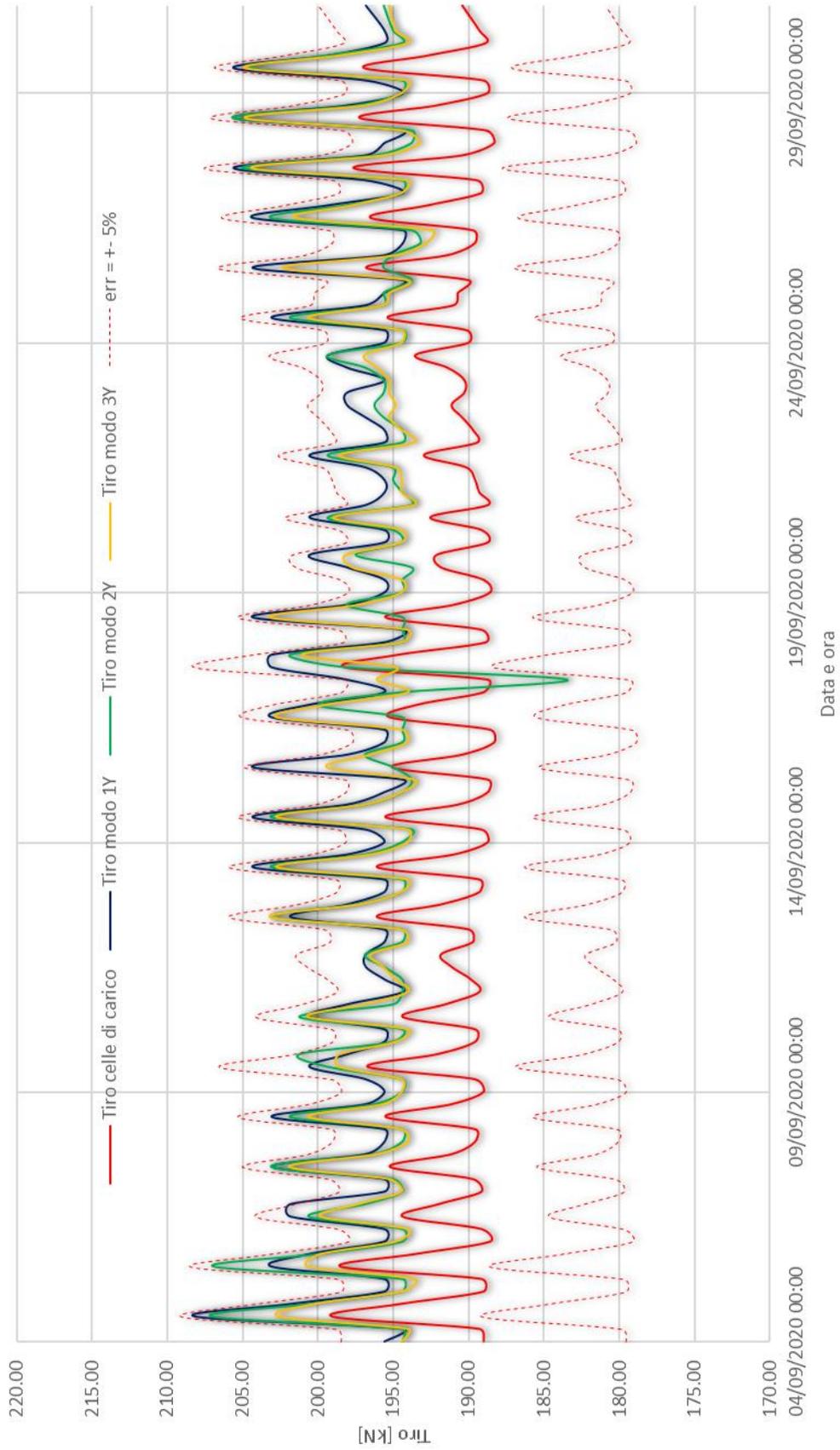
La stessa analisi è stata fatta per le frequenze individuate mediante entrambi gli algoritmi SSI ed FDD implementati su Python.

Nelle pagine successive vengono riportati i grafici relativi all’andamento nel tempo del tiro valutato mediante le celle di carico ed il tiro valutato mediante la prova dinamica. Nei grafici sono anche evidenziate le due soglie di errore limite ($\pm 5\%$), in maniera tale da individuare se e quando questa soglia viene superata.

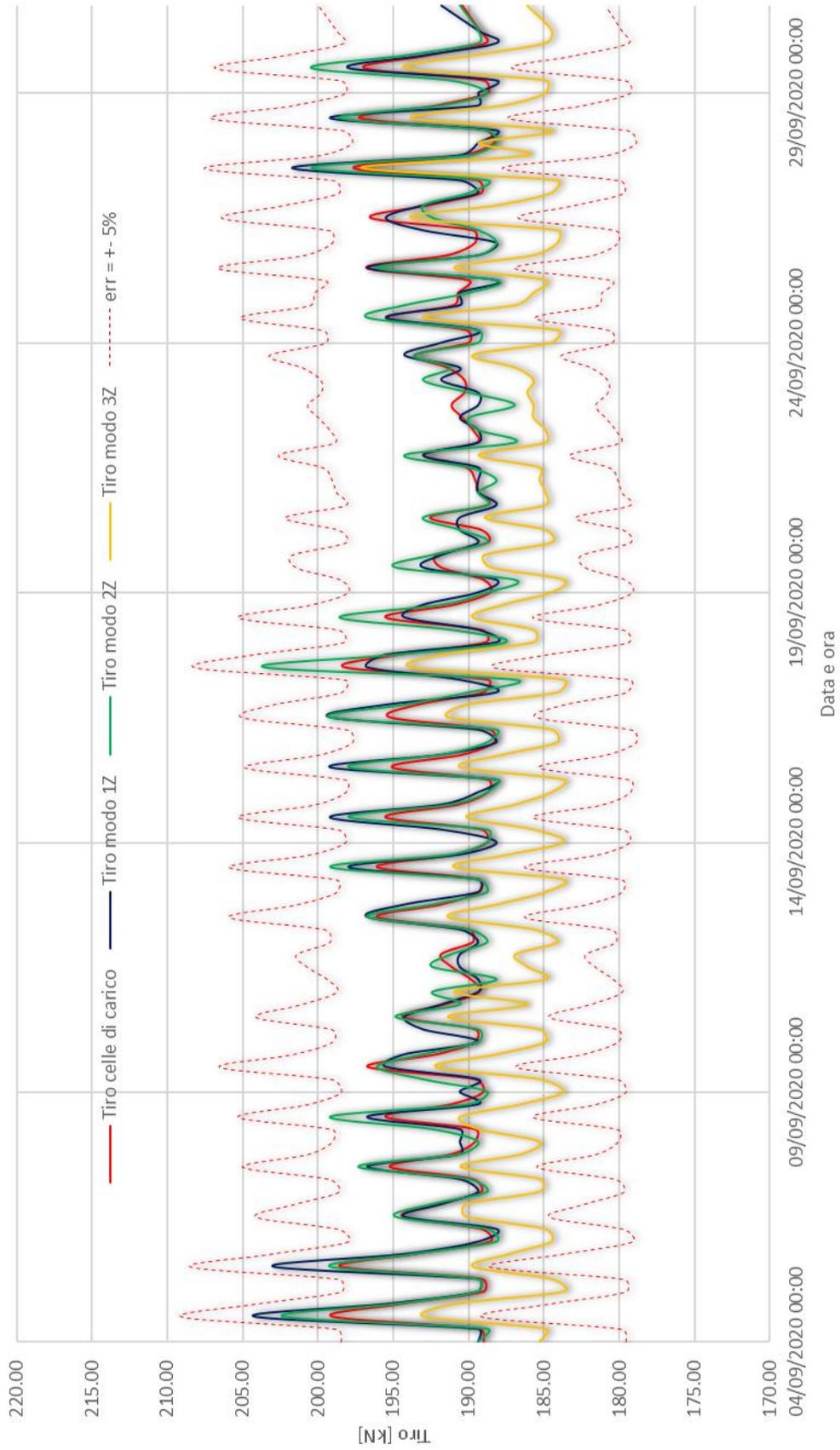
Confronto tiro: prova statica - prova dinamica
Modi in direzione Z valutati tramite FDD



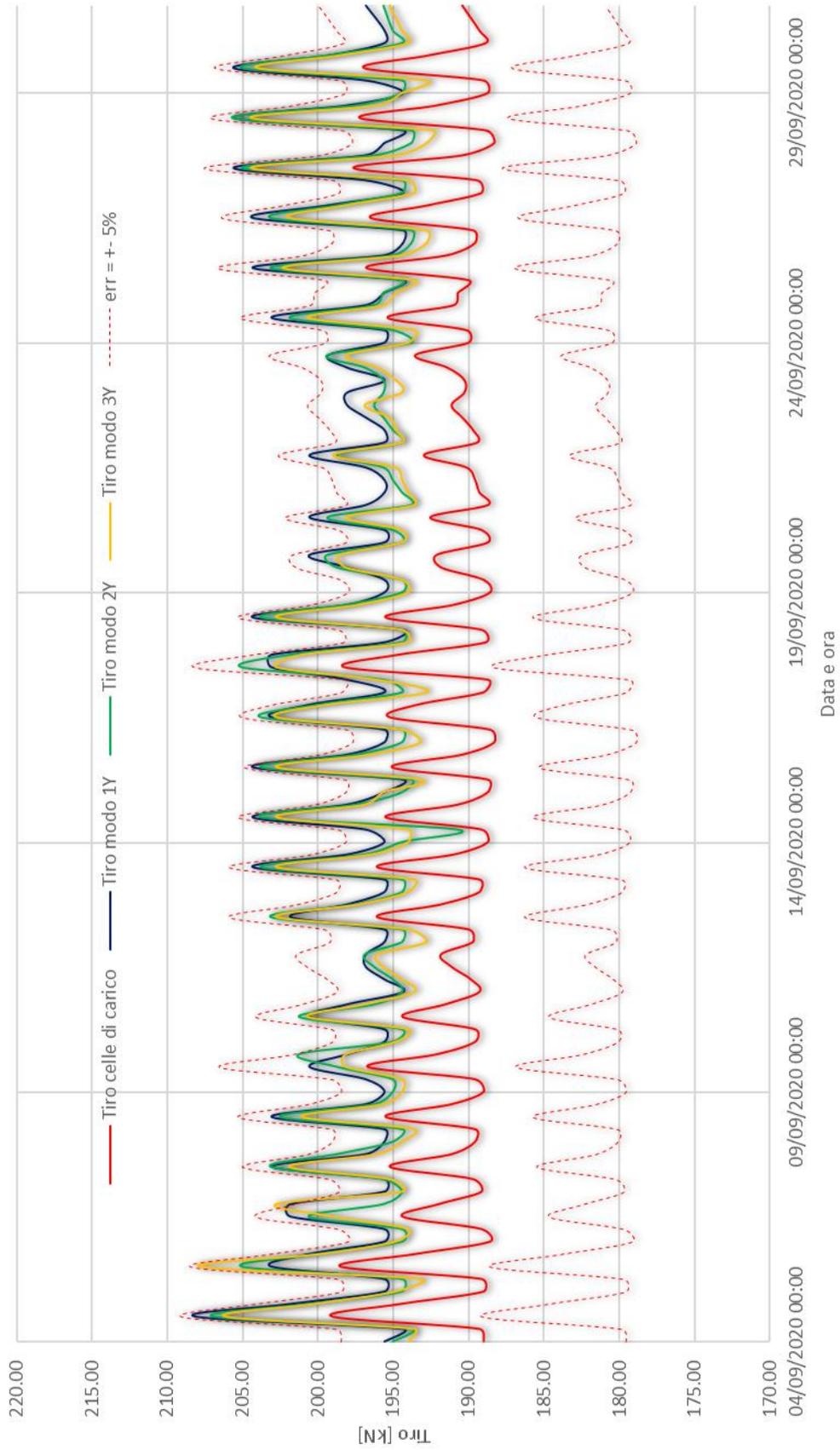
Confronto tiro: prova statica - prova dinamica
Modi in direzione Y valutati tramite FDD



Confronto tiro: prova statica - prova dinamica
Modi in direzione Z valutati tramite SSI



Confronto tiro: prova statica - prova dinamica
Modi in direzione Y valutati tramite SSI



Dai grafici riportati si nota che in nessun caso viene superata la soglia di errore massimo impostata. La stima del tiro è migliore usando i primi due modi di vibrare in direzione Z mentre considerando il terzo modo di vibrare in direzione Z si ha una sottostima più o meno costante (in termini %) del tiro. Per quanto riguarda i modi flessionali in direzione Y si ha una sovrastima del tiro più o meno uguale per tutti e tre i modi considerati. Anche in questo caso sembra che il tiro calcolato mediante la prova dinamica sia caratterizzato da un errore costante nel tempo. I risultati ottenuti mediante i due algoritmi sono simili tra di loro.

Nelle seguenti tabelle è riportato un resoconto dei risultati ottenuti:

Tabella 28: Tiro medio calcolato dalle celle di carico nel periodo di osservazione

Tiro celle medio [kN]
191.35

Tabella 29: Tiro ed errore medio calcolato tramite FDD per modi in Z

Modi flessionali in direzione Z - soluzione <i>cerniera - cerniera</i> (FDD)			
ordine del modo	1	2	3
Tiro medio [kN]	191.41	191.35	187.22
Err [%]	0.03	0.00	-2.15

Tabella 30: Tiro ed errore medio calcolato tramite FDD per modi in Y

Modi flessionali in direzione Y - soluzione <i>incastro - incastro</i> (FDD)			
ordine del modo	1	2	3
Tiro medio [kN]	197.51	196.52	196.50
Err [%]	3.22	2.71	2.70

Tabella 31: Tiro ed errore medio calcolato tramite SSI per modi in Z

Modi flessionali in direzione Z - soluzione <i>cerniera - cerniera</i> (SSI)			
ordine del modo	1	2	3
Tiro medio [kN]	191.77	191.72	187.12
Err [%]	0.21	0.19	-2.21

Tabella 32: Tiro ed errore medio calcolato tramite SSI per modi in Y

Modi flessionali in direzione Y - soluzione <i>incastro - incastro</i> (SSI)			
ordine del modo	1	2	3
Tiro medio [kN]	198.01	197.16	196.62
Err [%]	3.48	3.03	2.75

Mediante i primi due modi di vibrare sono stati ottenuti degli errori medi molto contenuti che consentono di definire i risultati del campo prove, finora ottenuti, positivi. L'errore cresce se si considera il terzo modo di vibrare in direzione Z o uno dei modi flessionali in direzione Y. Questi errori possono essere dovuti a diversi fattori, quali per esempio un eventuale comportamento non lineare della struttura. In ogni caso anche per tali modi si ottengono degli errori contenuti, giustificati dalle diverse ipotesi semplificative del metodo e dal fatto che le condizioni vincolari in opera non presentano mai perfettamente il comportamento teorico ipotizzato. Gli errori relativi ai modi di vibrare trasversali possono anche essere dovuti al fatto che la massa non partecipi completamente come per i modi in direzione Z e che quindi vada ridotta.

Conclusioni

La presente tesi si è posta come obiettivo quello di gettare le basi per lo sviluppo di un software aziendale di analisi dinamica da accompagnare all'accelerometro che la stessa azienda sta sviluppando con Flex Patch System.

Sono stati innanzitutto implementati due algoritmi di identificazione dinamica operativa, uno operante nel dominio delle frequenze ed uno operante nel dominio delle frequenze. Le due tecniche di identificazione dinamica sono: Frequency Domain Decomposition (FDD) e Stochastic Subspace Identification (Data-Driven SSI).

Una volta implementati i due algoritmi si è passati alla validazione degli stessi utilizzando i dati relativi a due sperimentazioni precedentemente realizzate ed al confronto con i risultati dell'analisi dinamica numerica dei modelli agli elementi finiti realizzati mediante il software Midas Civil. Le due applicazioni riguardano: una trave in calcestruzzo armato ed un telaio in acciaio. Entrambe le applicazioni hanno avuto riscontro positivo per quanto riguarda i parametri modali ottenuti, sia dal confronto con i risultati delle sperimentazioni originali che dal confronto con i risultati dei modelli agli elementi finiti che sono stati poi tarati, sulla base dell'identificazione dinamica, ottenendo dei risultati congrui con la realtà. Molto importante è anche la corrispondenza di quello che si ottiene dai due metodi in quanto operano in domini differenti e quindi consentono di giungere allo stesso risultato nonostante vengano percorse delle strade differenti.

Dalle due applicazioni a casi reali si è dedotto che gli algoritmi Output-Only sono più performanti se le accelerazioni misurate non presentano dei picchi molto alti rispetto al valore medio dell'ampiezza e se risultano più lunghe: i risultati relativi all'applicazione del telaio in acciaio sono migliori ed infatti la registrazione delle accelerazioni ha una durata di 30 minuti (3 minuti per la trave in calcestruzzo armato) e l'ampiezza dell'accelerazione si mantiene quasi costante (presenza di picchi per la trave in calcestruzzo armato). Questo è giustificato dal fatto che le tecniche Output-Only si basano sull'ipotesi fondamentale che l'eccitazione della struttura sia riconducibile a rumore bianco ambientale.

In ogni caso si può dedurre che i due algoritmi funzionano correttamente anche se possono sicuramente essere ottimizzati e completamente automatizzati.

Una volta validati gli algoritmi è stato realizzato un campo prove: analisi del tiro in uno strallo sfruttando le frequenze modali valutate mediante gli algoritmi. I risultati della prova dinamica sono stati confrontati con i risultati del monitoraggio statico (celle di carico) e di un modello agli elementi finiti. Anche il campo prove ha avuto finora (durerà ancora 2 mesi) riscontro positivo in quanto gli errori nella forza calcolata vanno dall'essere inferiori allo 0.5 % per i primi due modi in direzione Z ad un errore massimo del 3% per i modi trasversali. Questo metodo di analisi del tiro negli stralli è molto funzionale in quanto consente di definire la tensione nello strallo partendo solo dalla registrazione di un unico accelerometro utilizzando tecniche Output-Only e quindi non c'è la necessità di fare intervenire alcun operatore se non al momento dell'installazione o del monitoraggio periodico programmato. Tale sistema, dunque, consente di monitorare in continuo il tiro nello strallo processando solo quello che viene restituito in output dai sensori dinamici.

Appendice: Principi dell'analisi dinamica analitica

A1. Soluzione oscillatore a più gradi di libertà

Si consideri un treno costituito da due masse concentrate (sistema *lumped-mass*) collegate da molle prive di massa (molle collegate in serie):

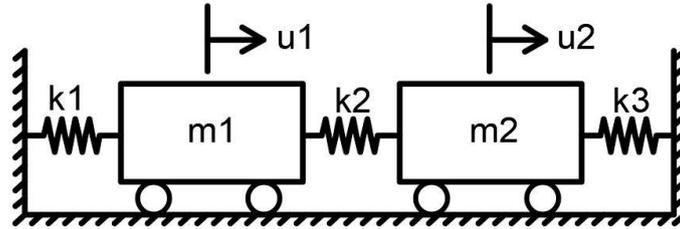


Figura 98: oscillatore a più gdl

Considerando una generica massa m_i ed applicando uno spostamento u_i alla stessa, si ha che la massa è soggetta alle seguenti forze:

- Forza di richiamo elastico verso sinistra e verso destra;
- Forza di inerzia.

In generale, l'equazione del moto della generica massa può essere espressa secondo la seguente relazione:

$$-m_i \cdot \ddot{u}_i - k_i \cdot (u_i - u_{i-1}) + k_{i+1} \cdot (u_{i+1} - u_i) = 0;$$

mettendo in evidenza gli spostamenti si ottiene la seguente forma canonica:

$$m_i \cdot \ddot{u}_i + k_i \cdot u_{i-1} + (k_i + k_{i+1}) \cdot u_i - k_{i+1} \cdot u_{i+1} = 0;$$

da quest'ultima forma si nota come il moto della generica massa i dipenda esclusivamente dalla massa stessa e da quelle immediatamente vicine (*chain-like system*).

Si consideri il sistema rappresentato in figura costituito da due masse concentrate, in questo caso si ottengono due equazioni del moto:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{u}_1 + (k_1 + k_2) \cdot u_1 - k_2 \cdot u_2 = 0 ; \\ m_2 \cdot \ddot{u}_2 - k_2 \cdot u_1 + (k_2 + k_3) \cdot u_2 = 0 ; \end{cases}$$

Assumendo le molle con la stessa rigidezza k :

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{u}_1 + 2k \cdot u_1 - k \cdot u_2 = 0 ; \\ m_2 \cdot \ddot{u}_2 - k \cdot u_1 + 2k \cdot u_2 = 0 ; \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$
$$[m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = \{0\};$$

I termini che compaiono nella forma compatta sono rispettivamente: matrice delle masse, vettore delle accelerazioni, matrice di rigidezza e vettore degli spostamenti.

Le due matrici citate presentano delle proprietà fondamentali:

- La matrice di massa è simmetrica ed è diagonale nel caso di sistema a masse concentrate (*chain-like system*);
- La matrice di rigidezza è simmetrica in campo elastico-lineare (teorema di Betti);
- Entrambe le matrici sono matrici definite positive.

Procedendo con la risoluzione dell'equazione differenziale (rappresentata dalla forma matriciale) si ottiene la seguente forma:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} e^{j\omega_k t};$$

Questa soluzione è analoga a quella dell'oscillatore semplice ma ora la costante è un vettore perché si tiene conto dello spostamento dei due gradi di libertà.

Si sostituisce la soluzione nell'equazione differenziale:

$$-\omega_k^2 \cdot [m] \cdot \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} e^{j\omega_k t} + [k] \cdot \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} e^{j\omega_k t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$([k] - \omega_k^2 \cdot [m]) \cdot \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} e^{j\omega_k t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

L'equazione è valida per ogni istante di tempo e dunque si può semplificare l'esponenziale, ottenendo così un problema agli autovalori:

$$([k] - \omega_k^2 \cdot [m]) \cdot \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Per trovare le soluzioni all'equazione, oltre a quella banale corrispondente al sistema fermo, occorre annullare il determinante della matrice dei coefficienti (equazione secolare):

$$\det([k] - \omega_k^2 \cdot [m]) = 0;$$

Dall'equazione precedente si ottengono gli autovalori che rappresentano il quadrato delle pulsazioni proprie del sistema: sostituendo nuovamente queste nell'equazione relativa al problema agli autovalori si ottengono le soluzioni in termini di spostamenti a meno di una costante moltiplicativa (forme modali).

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}; \quad \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\omega_2^2 = \frac{3k}{m}; \quad \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

La soluzione dell'oscillatore a più gradi di libertà è semplice ma molto importante per capire il significato dell'analisi modale delle strutture reali ed inoltre è molto simile a casi reali quali possono essere i telai *shear-type*.

A2. Analisi modale

La risoluzione del problema agli autovalori consente di determinare i modi di vibrare, mentre l'analisi modale prevede di sfruttare alcune proprietà dei modi di vibrare per risolvere le equazioni del moto: nell'analisi modale si fa riferimento allo *spazio modale* con coordinate modali per risolvere in maniera agevole le equazioni del moto.

A2.1. Ortogonalità dei modi di vibrare

Si ricorda che i modi di vibrare, rappresentati dagli autovettori, definiscono la forma della deformata a meno di una costante.

Si considerino due modi di vibrare distinti r ed s , di essi si scrive l'equazione risolutiva del problema agli autovalori:

$$\begin{cases} ([k] - \omega_r^2 \cdot [m]) \cdot \{\phi\}_r = \{0\}; \\ ([k] - \omega_s^2 \cdot [m]) \cdot \{\phi\}_s = \{0\}; \end{cases}$$

Premoltiplicando la prima equazione per $\{\phi\}_s^T$:

$$\{\phi\}_s^T \cdot ([k] - \omega_r^2 \cdot [m]) \cdot \{\phi\}_r = \{0\};$$

Si traspone e si postmoltiplica la seconda equazione per $\{\phi\}_r^T$:

$$\{\phi\}_s^T \cdot ([k]^T - \omega_s^2 \cdot [m]^T) \cdot \{\phi\}_r = \{0\};$$

In virtù della proprietà di simmetria della matrice di masse e di rigidità si può riscrivere:

$$\{\phi\}_s^T \cdot ([k] - \omega_s^2 \cdot [m]) \cdot \{\phi\}_r = \{0\};$$

Facendo la differenza tra le due equazioni:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \cdot \{\phi\}_s^T \cdot [m] \cdot \{\phi\}_r = \{0\};$$

Dato che r ed s sono due di vibrare distinti, sicuramente il primo termine dell'equazione precedente è non nullo: di conseguenza, per soddisfare la relazione, deve essere nullo il secondo termine:

$$\{\phi\}_s^T \cdot [m] \cdot \{\phi\}_r = \{0\};$$

Questa relazione corrisponde a dire che: due autovettori distinti sono ortogonali rispetto alla matrice di massa. La stessa proprietà vale anche per la matrice di rigidità:

$$\{\phi\}_s^T \cdot [k] \cdot \{\phi\}_r = \{0\};$$

Una condizione fondamentale perché sia verificata l'ortogonalità dei modi è che la matrice di rigidità sia simmetrica e che dunque sia valido il Teorema di Betti: questo implica che l'ortogonalità dei modi vale solo in campo elastico-lineare.

A2.2. Analisi modale per sistemi non smorzati

Si consideri l'equazione dinamica di un sistema MDOF (a più gradi di libertà), trascurando il termine legato allo smorzamento:

$$[m] \cdot \{\ddot{u}\} + [k] \cdot \{u\} = \{F(t)\};$$

Come già anticipato, il tipo di analisi che si sta considerando opera nello spazio modale e quindi il passaggio a questo spazio prevede un disaccoppiamento del problema (disaccoppiamento modale) attraverso la trasformazione:

$$\{u\} = [U] \cdot \{p\};$$

Dove $[U]$ rappresenta la matrice degli autovettori, $\{p(t)\}$ è invece funzione del tempo.

Si sostituisce nell'equazione del moto prima definita:

$$[m] \cdot [U] \cdot \{\ddot{p}\} + [k] \cdot [U] \cdot \{p\} = \{F(t)\};$$

Si premoltiplica per la trasposta della matrice degli autovettori:

$$[U]^T \cdot [m] \cdot [U] \cdot \{\ddot{p}\} + [U]^T \cdot [k] \cdot [U] \cdot \{p\} = [U]^T \cdot \{F(t)\};$$

dove, in virtù dell'ortogonalità dei modi di vibrare:

- $[U]^T \cdot [m] \cdot [U] = [I];$
- $[U]^T \cdot [k] \cdot [U] = [\Omega];$

Essendo che le due matrici definite nel punto precedente sono diagonali, le equazioni del problema possono considerarsi disaccoppiate e del tipo:

$$\ddot{p}_k + \omega_k^2 \cdot p_k = \sum_i U_{ik} F_i(t);$$

Questa rappresenta l'equazione dell'oscillatore semplice. Dunque, mediante l'analisi modale è possibile ridurre un sistema complicato ad n gradi di libertà in n equazioni corrispondenti ad n oscillatori semplici: per questo motivo si parla di disaccoppiamento modale.

L'utilizzo di questo tipo di analisi, oggi strumento consolidato, porta a diversi vantaggi: per ciascun oscillatore semplice può essere utilizzata la soluzione di Duhamel (Integrale di Duhamel), si può applicare il concetto di risonanza...

Ovviamente perché il disaccoppiamento modale sia possibile è necessaria l'ortogonalità dei modi di vibrare in quanto, altrimenti, non otterremmo delle matrici diagonali che consentono la scissione del sistema in tante equazioni quanti sono i gradi di libertà del sistema in esame.

A2.3. Analisi modale per sistemi smorzati

Si consideri l'equazione dinamica di un sistema MDOF smorzato (in forma matriciale):

$$[m] \cdot \{\ddot{u}\} + [c] \cdot \{\dot{u}\} + [k] \cdot \{u\} = \{F(t)\};$$

Si esegue la stessa trasformazione che è stata descritta nel paragrafo precedente (passaggio allo spazio modale):

$$\{u\} = [U] \cdot \{p\};$$

Si sostituisce nell'equazione dinamica:

$$[m] \cdot [U] \cdot \{\ddot{p}\} + [c] \cdot [U] \cdot \{\dot{p}\} + [k] \cdot [U] \cdot \{p\} = \{F(t)\};$$

Si premoltiplica per la trasposta della matrice degli autovettori:

$$[U]^T \cdot [m] \cdot [U] \cdot \{\ddot{p}\} + [U]^T \cdot [c] \cdot [U] \cdot \{\dot{p}\} + [U]^T \cdot [k] \cdot [U] \cdot \{p\} = [U]^T \cdot \{F(t)\};$$

dove, in virtù dell'ortogonalità dei modi di vibrare:

- $[U]^T \cdot [m] \cdot [U] = [I];$
- $[U]^T \cdot [k] \cdot [U] = [\Omega];$

Perché sia possibile disaccoppiare il sistema è necessario che anche il prodotto $[U]^T \cdot [c] \cdot [U]$ restituisca una matrice diagonale. In generale, il termine di smorzamento non è diagonale e dunque non si potrebbe disaccoppiare il sistema, ma al fine di forzare il disaccoppiamento modale si agisce sulla matrice di smorzamento in maniera tale che il prodotto sopra riportato restituisca una matrice diagonale. Tenzialmente si può operare in due modi distinti: una è la diagonalizzazione forzata (metodo che presuppone che si conoscano gli smorzamenti relativi per tutti modi) che è un metodo accettabile per valori di smorzamento relativo bassi, uno è il metodo di Rayleigh (metodo dello smorzamento proporzionale) che ha senso solo se si hanno delle misure dello smorzamento.

A2.4. Disaccoppiamento modale nello spazio delle fasi

Il metodo più rigoroso di risolvere le equazioni del moto è attraverso le equazioni del I ordine: nell'ingegneria sismica spesso si lavora con le equazioni del II ordine in quanto sono equazioni di equilibrio e quindi più semplici, ma la corretta trascrizione delle equazioni dinamiche è con equazioni del I ordine in quanto, nella dinamica i parametri di stato non sono solo gli spostamenti ma anche le velocità.

Si introduce il vettore di stato, contenente spostamenti e velocità (dimensione $2n$):

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{\dot{u}\} \end{Bmatrix};$$

Così si passa da n equazioni del moto a $2n$ equazioni del moto in quanto le incognite raddoppiano (non consideriamo più solo gli spostamenti come incognite ma anche le velocità). Queste equazioni sono definite nello spazio delle fasi (*state-space*):

$$\begin{bmatrix} [c] & [m] \\ [m] & [0] \end{bmatrix} \cdot \{\dot{x}\} + \begin{bmatrix} [k] & [0] \\ [0] & -[m] \end{bmatrix} \cdot \{x\} = \begin{Bmatrix} \{F(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix};$$

Dato che si opera nello spazio delle fasi il problema agli autovalori assume una forma diversa:

$$\left\{ s \cdot \begin{bmatrix} [c] & [m] \\ [m] & [0] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [k] & [0] \\ [0] & -[m] \end{bmatrix} \right\} \cdot \{\phi'\} = \{0\};$$

Il termine s dell'equazione precedente rappresenta l'autovalore ed è, in questo caso, una quantità complessa:

$$s_k = -\zeta_k \omega_k \pm j \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2};$$

La relazione relativa all'autovalore è più complessa in quanto compare anche il termine dello smorzamento relativo e non solo della pulsazione propria. Questo implica però che dall'autovalore si ottengono informazioni riguardante sia la frequenza modale che lo smorzamento relativo.

Risolvendo il problema agli autovalori si ottengono $2n$ autovettori e dunque $2n$ forme modali, questo avviene perché sono coppie complesse e coniugate e dunque ogni coppia corrisponde ad un modo di vibrare e ad un'unica forma modale.

Un'altra differenza con la classica soluzione è che nello spazio delle fasi, essendo l'autovettore un valore complesso, questo presenta modulo e fase: si ha dunque un nuovo elemento che è la fase del modo. Operando con le equazioni del II ordine, le posizioni dei vari modi possono essere sfalsate di 0 o di π mentre ora la fase tra le posizioni di due modi di vibrare può essere qualunque: la vibrazione non è più sincrona ma è sfalsata da punto a punto di una quantità fissa.

Anche operando nello spazio delle fasi è possibile operare un disaccoppiamento modale. Analogamente all'analisi modale con le equazioni del II ordine, si esegue il passaggio alle coordinate modali mediante la seguente trasformazione:

$$\{x\} = [\phi'] \cdot \{w\};$$

dove:

- $[\phi']$ = matrice modale nello spazio delle fasi ($2n \times 2n$);
- $\{w\}$ = coordinate principali.

Con questa trasformazione le equazioni del moto sono disaccoppiate.

Il problema di queste equazioni disaccoppiate è che la formulazione è complessa, ma può comunque essere risolta per poi passare agli spostamenti reali [6].

Bibliografia e sitografia

- [1] “*A Review of Structural Health Monitoring Literature 1996 – 2001*” Hoon Sohn, Charles R. Farrar, Francois Hemez and Jerry Czarnecki.
- [2] “*Health Monitoring for Civil Infrastructure*” Conference Paper 2003, Ahmed-Waeil Elgamal, Michael Fraser, Joel P. Conte and Sami Masri.
- [3] “*Comunicato stampa Unione Provincie Italiane*” 2019.
- [4] “*Nuove linee guida per il monitoraggio e la manutenzione delle infrastrutture*” 2019, www.stradeautostrade.it.
- [5] “*Monitoraggio strutturale attraverso prove statiche e dinamiche. Un esempio rilevante: il monitoraggio del passetto Vaticano*” B. Calandrino, M. Di Paola, A. Pirrotta, B. Villa.
- [6] “*Slides del corso di Ingegneria Sismica 2018-2019*”, R. Ceravolo, Politecnico di Torino.
- [7] “*L’analisi dinamica sperimentale ed il monitoraggio delle strutture esistenti*”, G. Fabbrocino, C. Rainieri, M. Verderame.
- [8] “*Introduction to Operational Modal Analysis*”, R. Brincker, Carlos E. Ventura
- [9] “*Output-Only Modal Analysis by Frequency Domain Decomposition*”, 2000, R. Brincker, L. Zhang, P. Andersen.
- [10] “*Random Data, Analysis and Measurement Procedures*” 1986, John Wiley & Sons, Bendat, Julius S and Allan G. Piersol.
- [11] “*SVD & PCA*” Mariolino De Cecco.
- [12] “*Damping Estimation by Frequency Domain Decomposition*”, 2001, R. Brincker, C. Ventura, P. Andersen.
- [13] Python Software Foundation. Python 3.6, <https://www.python.org/>.
- [14] “*Subspace Identification for Linear Systems*” van Overschee, De Moor.
- [15] “*Understanding Stochastic Subspace Identification*”, 2006, R. Brincker, P. Andersen.
- [16] “*Linear System*”, 1980, T. Kailath.
- [17] “*Influence of model order and number of block rows on accuracy and precision of modal parameter estimates in stochastic subspace identification*”, 2014, C. Rainieri, G. Fabbrocino.
- [18] “*Fast Multi-Order Stochastic Subspace Identification*”, 2010, Michael Dohler, Laurent Mevel.
- [19] CSPFEA Engineering Solutions. Midas Civil, <https://www.cspfea.net/>.
- [20] “*Identification of analytical and finite element models for the Jetpacs three-dimensional frame*”, 2007, V. Gattulli, M. Lepidi, F. Potenza.
- [21] “*Using Enhanced Frequency Domain Decomposition as a Robust Technique to Harmonic Excitation in Operational Modal Analysis*”, 2006, Jacobsen, Niels-Jorgen, P. Andersen, R. Brincker.
- [22] “*Unified Practical Formulas for Vibration-Based Method of Cable Tension Estimation*”, 2015, Y. Huang et al.
- [23] “*Tecniche non distruttive per la diagnosi di funi in acciaio*”, Tesi, M. Dore.