

# POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale  
in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di laurea magistrale

## IDENTIFICAZIONE E CARATTERIZZAZIONE DEI VORTICI ALL'INTERNO DI IMMAGINI PIV



**Relatore**

Prof. Gaetano Iuso

**Candidato**

Manuela Coletta

**Correlatore**

Ing. Fabrizio De Gregorio

A.A. 2018-2019



# Ringraziamenti

Desidero innanzitutto ringraziare il relatore di questa tesi il professor Gaetano Iuso, per la disponibilità e l'accortezza dimostrate durante il lavoro. Un ringraziamento particolare va al correlatore l'ingegner Fabrizio De Gregorio che, insieme ai suoi colleghi tra i quali vorrei menzionare l'ingegnere Antonio Visingardi, mi ha accolta al CIRA con entusiasmo e mi ha incoraggiata durante tutto il periodo di tesi.

Ringrazio la mia famiglia che durante tutto il percorso mi ha sempre appoggiata. Un grazie particolare va ai miei genitori che in tutti questi anni si sono sacrificati consentendomi di realizzare il mio sogno, siete per me grande fonte di ispirazione. Un ringraziamento speciale va ai miei fratelli Giuseppe e Ida per avermi sempre sostenuta dandomi la forza di rialzarmi nei momenti più duri. Senza di voi non avrei mai raggiunto questo traguardo.

Ringrazio con tutto il cuore il mio fidanzato Dario che ha creduto in me come nessun altro, mi hai supportata e sopportata in tutti questi anni senza mai chiedere nulla in cambio. Questo traguardo lo abbiamo raggiunto insieme.

Un affettuoso ringraziamento va a Gennaro, Anna e Dimitri in questi anni siete stati per me come una seconda famiglia.

Un ringraziamento speciale va alle mie amiche d'infanzia, Laura e Sonia, che seppur lontane non mi hanno mai fatto mancare il loro sostegno; siete sempre state presenti nei momenti di gioia e dolore.

Ringrazio Veronica per essere stata in questo viaggio un supporto e soprattutto un'Amica. Grazie infinite per i tuoi consigli e per avermi sostenuta anche quando le mie paranoie erano davvero troppe.

Un caloroso grazie lo dedico ad Adri, Vale e Vitto amiche conosciute a Torino che mi hanno incoraggiata in questi anni e sono riuscite a tirar fuori una parte di me che nessuno conosceva.

Ringrazio tutti i miei compagni di università che hanno condiviso con me gioie e dolori.

# Sommario

Per comprendere questo lavoro di tesi bisogna partire dal presupposto che numerosi problemi ingegneristici implicano la presenza di strutture vorticose nel loro campo di moto, come i vortici di estremità che si staccano dalle pale del rotore di un elicottero che possono generare problematiche di interazione flusso/struttura. Innanzitutto, in questa dissertazione, si procede con l'analisi teorica di una serie di criteri mirati all'identificazione dei vortici; in particolar modo sono analizzati i metodi:  $\Delta$ ,  $Q$ , massimo del modulo della vorticità, massimo del modulo della circolazione ed è introdotto un metodo ancora poco conosciuto ma molto efficace, il metodo  $\Gamma_2$ . Questa trattazione teorica consente di capire appieno i metodi e di scrivere un codice di calcolo per l'analisi dei campi vettoriali PIV a due componenti. Tale codice è validato tramite una serie di campi di moto sintetici, caratterizzati dalla presenza di uno o due vortici di Vatistas in cui si possono variare una serie di parametri caratteristici. Ciò permette di confrontare i diversi metodi sopra indicati al variare delle caratteristiche dei vortici, come raggio, intensità, numero e livello di rumore. Infine, sono state analizzate una serie di immagini reali ottenute in un'analisi antecedente, presso i laboratori del CIRA, tramite la tecnica PIV a due componenti. Tali immagini consentono di analizzare la scia di un rotore individuando in esse i vortici di estremità rilasciati al tip utilizzando i diversi criteri di identificazione. Così facendo è possibile nuovamente confrontare i metodi scelti per l'analisi come già effettuato con le immagini sintetiche.



# Indice

<b>1 Introduzione .....</b>	<b>1</b>
1.1 Motivazioni .....	1
1.2 Obiettivi .....	1
<b>2 Criteri di identificazione dei vortici .....</b>	<b>2</b>
2.1 Massimo del modulo della vorticità.....	2
2.2 Massimo del modulo della circolazione.....	2
2.3 Minimo locale della pressione .....	3
2.4 Criteri locali basati sul tensore gradiente di velocità .....	4
2.4.1 Criterio $Q$ .....	7
2.4.2 Criterio $\Delta$ .....	7
2.4.2 Criterio di resistenza vorticoso .....	8
2.4.4 Criterio $\lambda^2$ .....	9
2.5 Metodo $\Gamma^2$ .....	10
<b>3 Codice di identificazione dei vortici .....</b>	<b>13</b>
<b>4 Modelli teorici di vortice piano.....</b>	<b>18</b>
<b>5 Indagine della scia di un rotore: apparato sperimentale .....</b>	<b>20</b>
5.1 Rotor Test Rig.....	20
5.2 Sistema di misura PIV.....	20
<b>6 Validazione del codice: analisi del vortice di Vatistas .....</b>	<b>22</b>
6.1 Singolo vortice senza rumore.....	22
6.1.1 Metodo $\Gamma^2$ .....	23
6.1.2 Metodi $\Delta$ e $Q$ .....	28
6.1.3 Metodi massimo del modulo della vorticità e della circolazione .....	31
6.1.4 Confronto tra i metodi .....	34
6.2 Singolo vortice con rumore.....	35
6.2.1 Metodo $\Gamma^2$ .....	36
6.2.2 Metodi $\Delta$ e $Q$ .....	44
6.2.3 Metodi massimo del modulo della vorticità e della circolazione .....	50
6.2.4 Confronto tra i metodi .....	57
6.3 Doppio vortice senza rumore .....	61

6.3.1 Metodo $\Gamma_2$ .....	64
6.3.2 Metodi $\Delta$ e $Q$ .....	68
6.3.3 Metodi massimo del modulo della vorticità e della circolazione .....	76
6.3.4 Confronto tra i metodi .....	80
<b>6.4 Doppio vortice con rumore .....</b>	<b>83</b>
6.4.1 Metodo $\Gamma_2$ .....	84
6.4.2 Metodi $\Delta$ e $Q$ .....	102
6.4.3 Metodi massimo del modulo della vorticità e della circolazione .....	115
6.4.4 Confronto tra i metodi .....	129
6.4.5 Andamento velocità tangenziali .....	143
<b>7 identificazione dei vortici nella scia del rotore .....</b>	<b>145</b>
7.1 Passaggio pala .....	146
7.2 Regione con flusso turbolento.....	148
7.3 Distribuzione vortici di estremità.....	149
<b>8 Conclusioni .....</b>	<b>153</b>
<b>Appendice A .....</b>	<b>155</b>
<b>Bibliografia .....</b>	<b>163</b>



# 1 Introduzione

## 1.1 Motivazioni

Molti problemi ingegneristici presentano un campo di moto con strutture vorticose. Hanno particolare rilevanza i vortici concentrati sulla scia delle ali e quelli che si staccano dalle pale di un rotore. Sulla scia di aerei di grandi dimensioni la presenza di questi vortici influisce sulla quantità di atterraggi e decolli possibili negli aeroporti. Invece, i vortici creati dalle pale di un rotore di elicottero, interagendo tra di loro e con le pale, causano vibrazioni e rumore [1]. Per questo motivo l'analisi e l'identificazione dei vortici è certamente una problematica di fondamentale importanza. Il concetto di vortice è stato teorizzato sin dall'antichità, ciononostante non esiste ancora una definizione universale e scientifica relativa a questo fenomeno. Una prima possibile definizione di vortice venne data da Lugt [2]: "Una moltitudine di particelle materiali che ruotano intorno ad un centro comune". Circa dieci anni più tardi, Robinson [3] afferma che "Un vortice esiste quando le linee di flusso istantanee nel piano normale al nucleo del vortice, posto un osservatore in movimento insieme al centro del nucleo stesso, esibiscono un movimento approssimativamente circolare o spirale". Il problema è inoltre esacerbato dall'impossibilità di definire inequivocabilmente i confini del vortice, in altri termini, quando si guarda un vortice come una struttura finita è difficile stabilire dove esso cessi di esistere. Nonostante la definizione di vortice risulti ancora molto ambigua, negli anni si sono sviluppati diversi metodi in grado di identificare il vortice e il corrispondente centro. Alcuni di questi criteri quali il criterio  $Q$  [4], il criterio  $\Delta$  [5] [6] [7], il criterio della massima vorticità in modulo [1], il criterio della massima circolazione in modulo [1] e, soprattutto, il metodo  $\Gamma_2$  [8] [9] verranno trattati più nel dettaglio sottolineando i loro diversi punti di forza e i loro difetti.

## 1.2 Obiettivi

Il seguente lavoro di tesi ha l'obiettivo di proporre un agevole metodo ingegneristico in grado di identificare e caratterizzare le strutture vorticose all'interno di un campo di moto ottenuto tramite un sistema di misura Particle Image Velocimetry (PIV) a due componenti. Il lavoro è anticipato da una panoramica teorica di alcuni metodi esistenti per l'identificazione dei vortici nei fluidi ponendo particolare attenzione su di un nuovo metodo,  $\Gamma_2$ . Dopo la descrizione dei diversi metodi si passa alla scrittura di un codice di calcolo in Matlab a partire da alcuni dei criteri sopracitati e alla sua applicazione a diversi casi sintetici e reali. L'applicazione ai diversi casi sintetici consente di validare il codice e dunque di capire il comportamento dei diversi parametri da settare e come poi comportarsi in presenza delle immagini reali. Infine, si effettua un'analisi su delle immagini reali riguardanti la scia di un rotore quadripala, tali immagini sono state ottenute, in un lavoro precedente presso il CIRA, tramite la tecnica PIV 2D-2C.

# 2 Criteri di identificazione dei vortici

## 2.1 Massimo del modulo della vorticità

La vorticità raggiunge un estremo locale nel centro del vortice, per cui questa caratteristica può essere sfruttata per individuare il centro del vortice stesso come il valore del massimo del modulo della vorticità [1]. La vorticità è definita come il rotore della velocità ovvero:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left( \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} \right) i + \left( \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} \right) j + \left( \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right) k$$

Partendo da tale relazione si valuta su tutto il campo la vorticità e si prende il valore massimo in modulo. Tuttavia, la vorticità non è adatta per l'identificazione di un vortice in quanto non è in grado di distinguere tra movimenti di taglio puro e movimenti vorticosi propri di un vortice [2]. Una possibile soluzione al problema sta nello stabilire un livello di soglia per  $|\vec{\omega}|$ . Purtroppo, rimane il problema di identificare il livello di soglia adeguato su tutto il campo il che rende questo criterio ancora più complesso e variabile caso per caso.

## 2.2 Massimo del modulo della circolazione

La circolazione raggiunge un estremo locale nel centro del vortice, per cui questa caratteristica può essere sfruttata per individuare il centro del vortice stesso come il valore del massimo del modulo della circolazione [1]. La circolazione è definita come la circuitazione di un campo di velocità lungo un percorso chiuso ovvero:

$$\gamma = \oint_{\partial\Sigma} \vec{u} \cdot d\vec{\sigma}$$

Avendo indicato con  $\Sigma$  l'area del percorso chiuso,  $\partial\Sigma$  il suo contorno e con  $d\vec{\sigma}$  l'ascissa curvilinea. Data la definizione di prodotto scalare, si avrà che quello tra la velocità  $\vec{u}$  e l'ascissa curvilinea  $d\vec{\sigma}$  rappresenta la proiezione della velocità sulla curva. Per come è costruita si avrà circolazione nulla per flussi irrotazionali, mentre sarà massima se all'interno della linea è presente un vortice.

Per una valutazione numerica della circolazione si fa riferimento a quanto esposto da H. Vollmers [1]. Si consideri un campo di moto 2D con  $\vec{u} = (u, v)$ . Si valuti la circolazione partendo dal campo da analizzare e si effettui una triangolazione, ovvero si consideri come percorso chiuso una serie di triangoli con vertice nel punto in cui si vuole valutare la circolazione (Figura 1).

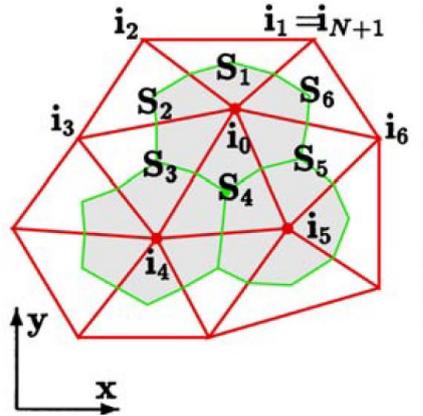


Figura 1: Triangolazione per valutazione numerica della circolazione. [1]

Osservando la Figura 1 la circolazione nel generico punto  $i_0$  è definita come:

$$\gamma_{i_0} \approx \sum_{n=1}^N \gamma_{S_n, i_0}$$

Dove  $\gamma_{S_n, i_0}$  è la circolazione valutata nel seguente modo:

$$\gamma_{S_n, i_0} \approx \vec{u}_{i_n, i_0} \cdot \vec{\sigma}_{i_{n+1}, i_0} - \vec{u}_{i_{n+1}, i_0} \cdot \vec{\sigma}_{i_n, i_0}$$

Con:

$$\vec{\sigma}_{i,j} = (x_j - x_i, y_j - y_i) \quad \vec{u}_{i,j} = (u_j - u_i, v_j - v_i)$$

## 2.3 Minimo locale della pressione

Se si analizza un vortice piano, stazionario in un fluido incomprimibile è possibile identificare il centro del vortice come il punto in cui la pressione è minima. In assenza di sforzi viscosi l'equilibrio delle forze è legato alle sole forze centrifughe e di pressione che agiscono su un elemento fluido nella direzione radiale. Tali forze devono bilanciarsi per garantire una traiettoria curvilinea. Nelle immagini PIV è nota solo la

velocità nel campo di moto, dunque, partendo da essa, è necessario ricostruire la pressione per poter utilizzare tale criterio. Vengono stimati i gradienti di pressione  $\frac{\partial p}{\partial x}$  e  $\frac{\partial p}{\partial y}$  attraverso le equazioni di Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \nabla p + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) - \nabla \cdot \bar{\tau} = \rho \vec{f}$$

Nel caso stazionario di un campo di moto incomprimibile con assenza di forze di volume si ottiene:

$$\nabla p + \rho \nabla \cdot (\vec{u} \vec{u}) - \nabla \cdot \bar{\tau} = 0$$

Riarrangiando i termini utilizzando l'equazione di bilancio della massa  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \nabla \cdot \vec{u} = 0$  e considerando  $\mu = cost$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} + \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Noto il campo di velocità, ottenuto sperimentalmente tramite misure PIV o costruendolo utilizzando software CFD, è possibile, utilizzando le equazioni di bilancio della quantità di moto, ottenere il gradiente di pressione. Il gradiente di pressione viene integrato ottenendo così il campo di pressione da cui si determina il minimo che corrisponde al centro del vortice. Tale approccio necessita di approssimare le derivate prime e seconde del campo di velocità ricavando in tal modo il gradiente di pressione. Fatto ciò è poi necessario integrare il gradiente tramite formule numeriche così da ottenere l'andamento della pressione con i suoi relativi minimi. Un approccio simile risulta poco accurato da un punto di vista numerico, infatti, il metodo diffonde i disturbi dovuti sia a dati rumorosi che errati.

## 2.4 Criteri locali basati sul tensore gradiente di velocità

I criteri di seguito descritti si basano sull'analisi del tensore gradiente di velocità  $\nabla \vec{u}$ , della sua parte simmetrica  $\bar{S}$  e antisimmetrica  $\bar{\Omega}$  e dei suoi tre invarianti.

Considerando un sistema di riferimento cartesiano ortogonale 3D, il tensore gradiente di velocità è definito come:

$$\nabla \vec{u} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}$$

Dove  $\vec{u} = (u, v, w)$  sono le componenti del vettore velocità nel sistema di riferimento cartesiano. Tale tensore può essere decomposto in una parte simmetrica  $\bar{S}$  e una antisimmetrica  $\bar{\Omega}$  ovvero:

$$\nabla \vec{u} = \bar{S} + \bar{\Omega} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2u_x & u_y + v_x & u_z + w_x \\ v_x + u_y & 2v_y & v_z + w_y \\ w_x + u_z & w_y + v_z & 2w_z \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & u_y - v_x & u_z - w_x \\ v_x - u_y & 0 & v_z - w_y \\ w_x - u_z & w_y - v_z & 0 \end{pmatrix}$$

In forma compatta:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Il tensore  $\bar{S}$  è definito come tensore velocità di deformazione mentre  $\bar{\Omega}$  come tensore velocità di rotazione o anche tensore vorticità. Tali tensori valutano, rispettivamente, la velocità con cui le particelle si deformano e ruotano nell'intorno di un punto e in un certo istante di tempo.

L'equazione caratteristica del  $\nabla \vec{u}$  si ottiene risolvendo il seguente determinante:

$$\begin{vmatrix} u_x - \lambda & u_y & u_z \\ v_x & v_y - \lambda & v_z \\ w_x & w_y & w_z - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^3 - P\lambda^2 + Q\lambda - R = 0$$

Dove  $P$ ,  $Q$  e  $R$  sono i tre invarianti del tensore gradiente di velocità definiti come:

$$P = u_x + v_y + w_z = \nabla \cdot \vec{u}$$

$$Q = u_x v_y + u_x w_z + v_y w_z - u_y v_x - u_z w_x - v_z w_y$$

$$R = u_x v_y w_z + u_z v_x w_y + u_y v_z w_z - u_z v_y w_x - u_x v_z w_y - u_y v_x w_z = \det(\nabla \vec{u})$$

L'equazione caratteristica ridotta è fondamentale nell'analisi dei vortici. Essa rappresenta l'equazione nel caso di flusso incomprimibile ( $\rho = cost$ ). In tal caso il termine  $P = \nabla \cdot \vec{u}$  scompare (equazione di continuità) e il termine  $Q$  si semplifica. Si avrà dunque [2]:

$$\lambda^3 + Q\lambda - R = 0$$

Con:

$$Q = -\frac{1}{2}(u_x^2 + v_y^2 + w_z^2 + 2u_yv_x + 2u_zw_x + 2v_zw_y) = \frac{1}{2}(\|\bar{\Omega}\|^2 - \|\bar{S}\|^2)$$

Per passare dalla formulazione iniziale nel caso compressibile alla formulazione nel caso incompressibile si considera:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{u} = 0 &\rightarrow u_x + v_y + w_z = 0 \rightarrow (u_x + v_y + w_z)^2 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow u_x^2 + v_y^2 + w_z^2 + 2u_xv_y + 2u_xw_z + 2v_yw_z = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow u_xv_y + u_xw_z + v_yw_z = -\frac{1}{2}(u_x^2 + v_y^2 + w_z^2) \end{aligned}$$

Inoltre, l'uguaglianza tra le due formulazioni è data considerando la norma di matrice quale norma di Frobenius ovvero:

$$\begin{aligned} \|\bar{\Omega}\|^2 &= tr(\bar{\Omega}\bar{\Omega}^t) = \frac{1}{4}[2(u_y - v_x)^2 + 2(u_z - w_x)^2 + 2(v_z - w_y)^2] = \\ &= \frac{1}{2}(u_y^2 + v_x^2 + u_z^2 + w_x^2 + v_z^2 + w_y^2 - 2u_yv_x - 2u_zw_x - 2v_zw_y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\bar{S}\|^2 &= tr(\bar{S}\bar{S}^t) = \\ &= \frac{1}{4}[4u_x^2 + 4v_y^2 + 4w_z^2 + 2(u_y + v_x)^2 + 2(u_z + w_x)^2 + 2(w_y + v_z)^2] = \\ &= \frac{1}{2}(2u_x^2 + 2v_y^2 + 2w_z^2 + u_y^2 + v_x^2 + u_z^2 + w_x^2 + w_y^2 + v_z^2 + 2u_yv_x + 2u_zw_x + \\ &\quad + 2v_zw_y) \end{aligned}$$

Nel caso di misure piane di un moto 3D, come per la PIV, comprimibile l'equazione si semplifica e si avrà un autovalore sempre nullo. Per cui:

$$\lambda^3 - P\lambda^2 + Q\lambda = 0$$

Questa si ottiene tenendo conto che le derivate in z e tutte le componenti lungo z sono nulle il che fa scomparire il terzo invariante  $R = 0$ .

I criteri di seguito descritti sono invarianti galileiani ovvero tali metodi non cambiano se partendo da un sistema di riferimento generico si applica una trasformazione ortogonale.

#### 2.4.1 Criterio $Q$

Hunt et al. [4] definiscono i vortici, in un flusso incompressibile ( $\rho = cost$ ), come le regioni connesse in cui valgono le seguenti condizioni [2] [10]:

1. Il secondo invariante del gradiente di velocità deve essere positivo, cioè  $Q > 0$ . Dalla definizione del secondo invariante del gradiente si ottiene:

$$Q = \frac{1}{2} (\|\bar{\Omega}\|^2 - \|\bar{S}\|^2) > 0$$

In termini fisici ciò sta a significare che la regione che identifica il vortice è una regione connessa dove la componente antisimmetrica del tensore  $\nabla\vec{u}$ , ovvero il tensore vorticità, prevale sulla componente simmetrica, ovvero la velocità di deformazione. In altri termini si misura l'eccesso di velocità di rotazione rispetto all'ampiezza della velocità di deformazione in tutte le direzioni;

2. La pressione nella regione dei vortici è inferiore a quella ambiente. La ragione per cui si aggiunge la condizione sulla pressione è che questo assicura che, se il flusso è rotazionale, le linee di flusso sono curve. Data tale condizione è necessario misurare o ricostruire la pressione reale  $p^1$  partendo dalla velocità nota e confrontarla con quella ambiente;

Nella maggior parte dei casi l'ipotesi sulla pressione, nello sviluppo del metodo  $Q$ , non viene considerata. Si noti, però, che la condizione  $Q > 0$  non è sufficiente a garantire l'esistenza di un minimo di pressione all'interno della regione da essa identificata.

Rispetto al metodo della massima vorticità utilizzando il metodo  $Q$  è possibile distinguere tra movimenti di taglio puro e movimenti vorticosi di un vortice.

#### 2.4.2 Criterio $\Delta$

Dallmann [5], Vollmers et al. [6] e Chong [7] presentarono un criterio di identificazione dei vortici basato sull'esistenza, nel campo di moto, di linee di flusso circolari o a spirali. Il metodo  $\Delta$  definisce i vortici come "le regioni connesse in cui  $\nabla\vec{u}$  presenta autovalori complessi e le linee di flusso sono a spirali o chiuse" [2]. Essendo l'equazione caratteristica associata al gradiente di velocità di terzo grado, affinché si abbiano autovalori complessi è necessario che ci siano due autovalori complessi e coniugati e un autovalore reale. Tale requisito può essere tradotto utilizzando il

---

<sup>1</sup> Ricostruzione effettuata nel paragrafo Minimo locale della pressione (p 5).

discriminante degli autovalori della matrice del gradiente di velocità indicato con  $\Delta$ . Dunque, tale condizione nel caso 3D incomprimibile si traduce in:

$$\Delta = \left(\frac{1}{2} R\right)^2 + \left(\frac{1}{3} Q\right)^3 > 0$$

La condizione  $\Delta > 0$  implica che il tensore  $\nabla\vec{u}$  presenta autovalori complessi.

Nel caso di misure piane di un moto 3D comprimibile l'equazione caratteristica si semplifica. Uno degli autovalori sarà sempre reale e nullo mentre, per avere autovalori complessi, è necessario che il discriminante rispetti la seguente condizione [1]:

$$\Delta = P^2 - 4Q < 0 \quad \rightarrow \quad \Delta = (u_x + v_y)^2 - 4(u_x v_y - u_y v_x) < 0$$

Ovviamente il caso incomprimibile riporta il metodo  $\Delta$  alla medesima formulazione del metodo  $Q$  essendo  $P = 0$ .

#### 2.4.2 Criterio di resistenza vorticoso

Il criterio  $\lambda_{ci}$  detto criterio di resistenza vorticoso fu elaborato da Zhou et al [11] e si basa sul criterio  $\Delta$ . Come già detto il metodo  $\Delta$  definisce i vortici come “le regioni connesse in cui  $\nabla\vec{u}$  presenta autovalori complessi e le linee di flusso sono a spirali o chiuse” [2] per cui partendo da tale definizione si considerano gli autovalori del gradiente di velocità, nel caso in cui ci siano due autovalori complessi e coniugati, e si analizzano, cioè si utilizza la loro parte immaginaria  $\lambda_{ci}$  per identificare i vortici.

Consideriamo un sistema di coordinate curvilinee locali  $(y_1, y_2, y_3)$ . Tale sistema si muove insieme alle particelle fluide ed è definito dai vettori  $(\vec{v}_r, \vec{v}_{cr}, \vec{v}_{ci})$ . In questo sistema le linee di flusso istantanee si esprimono come [10]:

$$y_1(t) = y_1(0)e^{\lambda_r t}$$

$$y_2(t) = e^{\lambda_{cr} t} [y_2(0) \cos(\lambda_{ci} t) + y_3(0) \sin(\lambda_{ci} t)]$$

$$y_3(t) = e^{\lambda_{cr} t} [y_3(0) \cos(\lambda_{ci} t) - y_2(0) \sin(\lambda_{ci} t)]$$

Osserviamo che  $\lambda_1 = \lambda_r$  è l'autovalore reale mentre  $\lambda_{2,3} = \lambda_{cr} \pm i\lambda_{ci}$  sono gli autovalori complessi e coniugati. Gli autovettori corrispondenti sono  $\vec{v}_r$  e  $\vec{v}_{cr} \pm i\vec{v}_{ci}$ . Da questa formulazione è ben evidente come il flusso ruota localmente nel piano  $(\vec{v}_{cr}, \vec{v}_{ci})$  con periodo di rotazione pari a  $\frac{2\pi}{\lambda_{ci}}$  e viene allungato o compresso lungo  $\vec{v}_r$ . La quantità  $\lambda_{ci}$ , cioè la parte immaginaria dell'autovalore complesso, viene detta forza vorticoso e misura la velocità di rotazione del vortice nel piano  $(\vec{v}_{cr}, \vec{v}_{ci})$ . La quantità

$\lambda_r$ , che corrisponde all'autovalore reale, è indice della forza di compressione lungo  $\vec{v}_r$ . Dunque, la parte immaginaria dell'autovalore  $\lambda_{ci}$  gioca un ruolo fondamentale nell'individuazione del vortice. La soglia associata a  $\lambda_{ci}$  per l'identificazione dei vortici non è ben definita, teoricamente tale soglia dovrebbe essere settata a zero e in tal caso il metodo coinciderebbe con il metodo  $\Delta$ . In realtà si utilizza come valore di soglia una quantità  $\epsilon$  positiva così da poter individuare non tutte le strutture vorticosi, come nel caso di soglia zero, ma solo quelle più intense. Dunque, i vortici sono definiti come le regioni connesse in cui:

- $\lambda_{ci} > 0$  si individuano tutti i possibili vortici;
- $\lambda_{ci} \geq \epsilon > 0$  si individuano solo vortici più intensi;

Ovviamente la scelta di una soglia diversa da zero non risulta semplice ma dipende dal caso in analisi.

#### 2.4.4 Criterio $\lambda_2$

Jeong e Hussain [12] definiscono i vortici come le regioni connesse in cui il tensore  $\bar{S}^2 + \bar{\Omega}^2$  ha due autovalori negativi, ovvero utilizzano come principio l'individuazione del minimo della pressione [2] [10].

Per un fluido newtoniano incomprimibile con viscosità uniforme in cui si trascurano le forze di volume l'equazione di quantità di moto è:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

Poniamo  $a_{ij}(\vec{x}, t) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  ed effettuiamo il gradiente dell'equazione si ottiene l'equazione di trasporto del tensore gradiente di velocità i cui elementi sono  $a_{ij}$  [13]:

$$\frac{Da_{ij}}{Dt} = a_{ik}a_{kj} - \frac{1}{\rho} p_{,ij} + \nu a_{ij,kk}$$

Ricordando che  $S_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$  e  $\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$  si decompone l'equazione in una parte simmetrica e una antisimmetrica ottenendo rispettivamente l'equazione di trasporto della velocità di deformazione e l'equazione di trasporto della vorticità:

---

<sup>2</sup> Si fissa l'indice  $i$  e si effettua la somma lungo  $j$ . La relazione scritta senza omettere la sommatoria sarà:  $\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \sum_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$

$$\frac{DS_{ij}}{Dt} + S_{ik}S_{kj} + \Omega_{ik}\Omega_{kj} - \nu S_{ij,kk} = -\frac{1}{\rho}p_{,ij}$$

$$\frac{D\Omega_{ij}}{Dt} + S_{ik}\Omega_{kj} + \Omega_{ik}S_{kj} - \nu\Omega_{ij,kk} = 0$$

Poiché le informazioni sugli estremi locali della pressione sono contenute nell'Hessiano  $\nabla(\nabla p)$  ovvero  $p_{,ij}$  si sfrutta l'equazione di trasporto della velocità di deformazione per determinare tale quantità. Il criterio di identificazione del vortice si ottiene considerando il caso stazionario e inviscido per cui l'equazione si semplifica divenendo:

$$S^2 + \Omega^2 = -\frac{1}{\rho}\nabla(\nabla p)$$

Il tensore  $S^2 + \Omega^2$  è simmetrico per costruzione e dunque presenta tre autovalori reali  $\lambda_i^3$  che posti in ordine crescente sono:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$$

Questi, a meno del segno e della costante, sono gli autovalori della matrice Hessiana  $\nabla(\nabla p)$ . Essendo una funzione in tre variabile il minimo di pressione si avrà quando l'Hessiana, ovvero  $\nabla(\nabla p)$ , presenta almeno due autovalori positivi. Per cui la matrice  $S^2 + \Omega^2$  dovrà presentare almeno due autovalori negativi. Dunque, il criterio richiede che nel nucleo del vortice  $\lambda_2 < 0$  (da cui si ricava  $\lambda_3 < 0$ ) per avere due autovalori negativi e dunque un minimo di pressione.

## 2.5 Metodo $\Gamma_2$

I criteri fin ora analizzati sono criteri locali basati sulla stima del gradiente di velocità. Quando il campo di velocità è ottenuto sperimentalmente con misurazioni PIV ed è presente un certo rumore di misurazione o un certo livello di turbolenza tali criteri difficilmente consentono l'individuazione dei vortici in maniera autonoma. Dunque, M. Michard e T. Favelier [8] [9] proposero un criterio basato sul calcolo della funzione  $\Gamma_2$  così ottenuta:

$$\Gamma_2(\vec{x}) = \frac{1}{S} \oint_{\vec{x}' \in S} \sin(\theta) dx'_1 dx'_2 = \frac{1}{S} \int_{\vec{x}' \in S} \frac{\{(\vec{x}' - \vec{x}) \times (\vec{u}(\vec{x}') - \vec{u}_{mean})\} \cdot \vec{n}}{|\vec{x}' - \vec{x}| |(\vec{u}(\vec{x}') - \vec{u}_{mean})|} d\vec{x}'$$

---

<sup>3</sup> Questi autovalori sono diversi dagli autovalori del tensore gradiente di velocità.

Con  $\vec{n}$  il versore normale al piano contenente il moto,  $S$  il generico dominio convesso contenente i punti  $\vec{x}'$  e  $x$ ,  $\vec{u}(\vec{x}')$  la velocità dei punti  $\vec{x}'$  e  $\vec{u}_{mean}$  la velocità media del campo. La scelta della forma del dominio  $S$  viene effettuata per rendere la funzione  $\Gamma_2$  isotropa, questo può essere fatto utilizzando un dominio  $S$  circolare di raggio  $\tilde{R}$  e centrato in  $\vec{x}$ . Così com'è definita, la  $\Gamma_2$  è una funzione 3D adimensionale con  $-1 \leq \Gamma_2 \leq 1$ . Per analizzare il carattere locale del flusso e legarlo alla funzione  $\Gamma_2$  procediamo come segue. Consideriamo la funzione  $\Gamma_2$  e definiamo il dominio  $S$  come un dominio circolare di raggio  $\tilde{R}$ . Facendo tendere tale raggio a zero si osserva come la funzione  $\Gamma_2$  tenda ad una funzione  $\gamma_2$  strettamente legata al gradiente di velocità.

$$\gamma_2(x) = \frac{sign(\Omega)}{\pi} \left\{ (1 - |\mu|)F \left[ 2 \sqrt{\frac{|\mu|}{1 + |\mu|}} \right] + (1 + |\mu|)E \left[ 2 \sqrt{\frac{|\mu|}{1 + |\mu|}} \right] \right\}$$

Dove  $F$  ed  $E$  sono gli integrali ellittici completi rispettivamente del primo e del secondo ordine e  $\mu = S / \Omega$ , con  $\Omega$  il tensore velocità di rotazione nel punto, ovvero la parte antisimmetrica del tensore gradiente di velocità in  $x$ , e  $S$  il tensore velocità di deformazione nel punto, ovvero la parte simmetrica del tensore gradiente di velocità in  $x$ . In un caso bidimensionale e incompressibile alcuni metodi basati sul gradiente di velocità affermano che i vortici sono regioni connesse in cui  $Q > 0$  oppure  $\lambda_2 < 0$ . Grazie alla funzione  $\gamma_2$  si può dimostrare che queste condizioni sono equivalenti a  $|\gamma_2| > \frac{2}{\pi}$ . Pertanto, il confine di un vortice è una curva chiusa lungo la quale  $|\gamma_2| = \frac{2}{\pi}$ . Inoltre, è possibile riportare il tutto alla funzione  $\Gamma_2$  ottenendo in questo modo la seguente classificazione [14]:

- $|\Gamma_2| < \frac{2}{\pi}$  flusso localmente dominato dagli sforzi;
- $|\Gamma_2| = \frac{2}{\pi}$  taglio puro;
- $|\Gamma_2| > \frac{2}{\pi}$  flusso localmente dominato dalla rotazione;

Dunque, il carattere adimensionale della funzione  $\Gamma_2$  consente di utilizzare un livello di soglia universale  $|\Gamma_2| = \frac{2}{\pi}$  indipendente dall'intensità del vortice. Tutti i punti con valori di  $|\Gamma_2| > \frac{2}{\pi}$  sono punti appartenenti al vortice con centro corrispondente al punto in cui  $|\Gamma_2|$  è massimo.

In caso di problemi reali non si conosce la velocità in modo continuo ma discreto per cui la funzione  $\Gamma_2$  non si ottiene più risolvendo un integrale ma sostituendolo con una sommatoria:

$$\Gamma_2(\vec{x}_i) = \frac{1}{M} \sum_{x_j \in S_i} \sin(\theta_{ij}) = \frac{1}{M} \sum_{x_j \in S_i} \frac{\{(\vec{x}_j - \vec{x}_i) \times (\vec{u}_j - \vec{u}_{mean})\} \cdot \vec{n}}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i| |\vec{u}_j - \vec{u}_{mean}|}$$

Con  $\vec{n}$  il versore normale al piano contenente il moto,  $S_i$  dominio circolare di raggio  $\tilde{R}$  e centrato in  $\vec{x}_i$ ,  $\vec{u}_j$  velocità dei punti  $x_j$ ,  $\vec{u}_{mean}$  velocità media del campo ed  $M$  numero di punti  $\vec{x}_j$  interni ad  $S_i$  con  $j \neq i$ . Il raggio del dominio circolare  $\tilde{R}$  è proporzionale alla risoluzione spaziale dell'immagine  $\Delta L$  ovvero:

$$\tilde{R} = D \times \Delta L$$

Dove  $D$  è un numero intero che corrisponde al numero di nodi della griglia sui quali si calcola il dominio della funzione  $\Gamma_2$ . Tale valore, nelle analisi successive, sarà impropriamente chiamato dominio senza tener conto della risoluzione spaziale  $\Delta L$  dell'immagine.

# 3 Codice di identificazione dei vortici

Il codice di identificazione dei vortici è stato scritto presso il CIRA con il linguaggio di programmazione Matlab. È strutturato nel seguente modo:

- Riceve in ingresso file dati contenenti le posizioni  $(x, y, z)$  e le componenti di velocità  $(u, v, w)$  ottenute tramite un'analisi PIV o CFD. L'operatore sceglie i file dati, contenenti queste informazioni, grazie all'ausilio della funzione Matlab "uigetfile()" che consente di selezionarli all'interno di cartelle presenti nel calcolatore. È possibile selezionare più file dati così da effettuare un'analisi contemporaneamente. I file così selezionati vengono letti e i dati inseriti all'interno di opportune matrici il cui numero di righe e colonne è letto direttamente nel file dati;
- Una volta scelti i file da analizzare vengono richiesti all'operatore una serie di parametri in ingresso:
  1. Il piano di lavoro ovvero  $xy$ ,  $xz$  o  $yz$ ;
  2. Il raggio  $D$  del dominio per il calcolo della funzione  $\Gamma_2$ . Tale valore è un numero intero ed indica i nodi della matrice su cui calcolare la funzione. Questo, moltiplicato per la risoluzione spaziale dell'immagine, darà il raggio  $\tilde{R}$  del dominio circolare per il calcolo della funzione  $\Gamma_2$ ;
  3. La soglia necessaria per individuare i vortici una volta calcolata la funzione  $\Gamma_2$ . Tale soglia è solitamente settata al valore pari a  $\frac{2}{\pi}$ , come indicato dalla teoria, ma si può aumentare fino ad un valore pari ad 1 per tenere conto solo dei vortici più intensi;
  4. La soglia necessaria per individuare i vortici una volta calcolata la funzione  $\Delta$ . Solitamente verrà fissata a 0 ma si possono considerare, in base al problema in analisi, anche valori negativi;
  5. La soglia necessaria per individuare i vortici una volta calcolata la funzione  $Q$ . Solitamente verrà fissata a 0 ma si possono considerare, in base al problema in analisi, anche valori positivi;
  6. Le soglie necessarie per individuare i vortici una volta calcolate le funzioni vorticità e circolazione. La loro scelta dipende dal caso in analisi;
  7. Se necessario si può pensare di introdurre il numero massimo di vortici da individuare;

8. Se necessario si può pensare di introdurre il raggio massimo per il calcolo delle caratteristiche, garantendo in questo modo un'individuazione efficace del raggio del vortice;
- Si calcolano le funzioni necessarie per individuare i vortici con le formulazioni viste nella trattazione teorica (Criteri di identificazione dei vortici):
    1. Per il calcolo della funzione  $\Gamma_2$  non si effettuano approssimazioni essendo un semplice prodotto vettoriale (Metodo  $\Gamma_2$ );
    2. Per il calcolo delle funzioni  $\Delta$  (Criterio  $\Delta$ ),  $Q$  (Criterio  $Q$ ) e  $\vec{\omega}$  (Massimo del modulo della vorticità) è necessario approssimare le derivate prime presenti. Si opta per un'approssimazione al secondo ordine, dunque centrata. Supponendo di aver scelto il piano  $xy$  le formulazioni saranno le seguenti:

$$\Delta_{i,j} = \left[ \left( \frac{du}{dx} \right)_{i,j} + \left( \frac{dv}{dy} \right)_{i,j} \right]^2 - 4 \left[ u_x \left( \frac{du}{dx} \right)_{i,j} \left( \frac{dv}{dy} \right)_{i,j} - \left( \frac{du}{dy} \right)_{i,j} \left( \frac{dv}{dx} \right)_{i,j} \right]$$

$$Q_{i,j} = -\frac{1}{2} \left( \left( \frac{du}{dx} \right)_{i,j}^2 + \left( \frac{dv}{dy} \right)_{i,j}^2 + 2 \left( \frac{du}{dy} \right)_{i,j} \left( \frac{dv}{dx} \right)_{i,j} \right)$$

$$\omega_{z,i,j} = \left( \frac{dv}{dx} \right)_{i,j} - \left( \frac{du}{dy} \right)_{i,j}$$

Con:

$$\left( \frac{du}{dx} \right)_{i,j} \cong \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2 \Delta x} \quad \left( \frac{du}{dy} \right)_{i,j} \cong \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2 \Delta y}$$

$$\left( \frac{dv}{dy} \right)_{i,j} \cong \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2 \Delta y} \quad \left( \frac{dv}{dx} \right)_{i,j} \cong \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2 \Delta x}$$

3. Per una valutazione numerica della circolazione si fa riferimento a quanto esposto da H. Vollmers [1] come già elaborato nel paragrafo Massimo del modulo della circolazione;
- Una volta calcolate le funzioni e note le soglie ad esse associate introdotte dall'operatore si passa all'individuazione dei vortici. Si utilizza la funzione di Matlab "regionprops()" che individua tramite delle circonferenze tutte le zone all'interno delle quali, per ogni metodo, verrà rispettata la condizione imposta dalla soglia ovvero  $|\Gamma_2| > \frac{2}{\pi}$  (o eventualmente una soglia superiore),  $\Delta < 0$  (o eventualmente una soglia negativa),  $Q > 0$  (o eventualmente una soglia positiva),  $|\omega_z| > \omega_{z,soglia}$  e  $|\gamma| > \gamma_{soglia}$ . In questo modo si individuano tutte le zone in cui, secondo quel particolare metodo, sono presenti dei vortici;

- Individuati i vortici se ne calcolano i centri. Se si è imposto un limite sul numero massimo di vortici da determinare in questa fase se ne terrà conto e al più si calcoleranno tanti centri quanti sono i vortici massimi imposti. Il calcolo del centro si effettua in due modi differenti per ogni metodo:
  1. Centri non pesati: all'interno delle zone individuate, per ogni metodo, si individuano i picchi delle funzioni. Le coordinate del punto associate a quel picco rappresentano le coordinate del centro del vortice. I centri si ordinano in maniera decrescente partendo dal picco maggiore ad arrivare a quello minore, cosicché nel caso si imponga un numero massimo di vortici da individuare si considerano solo quelli che per quel dato metodo risultano più intensi perché presentano picchi maggiori;
  2. Centri pesati: sebbene il calcolo del centro non pesato sia già una buona approssimazione si è pensato di migliorare tale comportamento cercando di individuare il centro anche laddove non sono presenti punti della griglia. Una volta ordinati i centri non pesati e scelti solo quelli da considerare, si prendono le zone individuate ad essi corrispondenti e all'interno di esse si effettua una media pesata ottenendo in questo modo le coordinate dei centri pesati, anch'esse ordinate in modo decrescente;
- Individuati i centri con ogni metodo è necessario definire le caratteristiche del vortice in funzione della distanza radiale dal centro del vortice stesso. Si valutano, dunque, gli andamenti di:
  1. Velocità tangenziale  $v_\theta$  e la velocità radiale  $v_n$   
Le velocità tangenziale e radiale si calcolano, note le componenti di velocità verticale e orizzontale  $(u, v)$  (nel caso di piano  $xy$ ) in un dato punto del campo di moto, come:

$$v_\theta = u \sin \theta - v \cos \theta$$

$$v_n = u \cos \theta + v \sin \theta$$

Con  $\theta$  l'angolo compreso tra la velocità orizzontale  $u$  e la direzione che congiunge il centro del vortice e il punto del campo di moto con velocità  $(u, v)$ . Dunque, quest'angolo varierà tra  $0^\circ$  e  $180^\circ$  consentendo in questo modo di valutare la velocità tangenziale e radiale in tutto il campo di moto;

2. Circolazione  $\gamma$   
La circolazione  $\gamma$ , valutata in un certo punto del campo di moto, si ottiene considerando la velocità tangenziale e la distanza radiale dal centro del vortice stesso:

$$\gamma = 2\pi r v_\theta$$

### 3. Vorticità $\omega$

Si valuta la vorticità come effettuato in precedenza attraverso un'approssimazione delle derivate al secondo ordine di accuratezza;

### 4. Raggio del vortice $r_c$

Il raggio del vortice lo si valuta come il valore del raggio per il quale si ottiene la velocità tangenziale massima. È in questa fase che risulta di fondamentale importanza il raggio massimo definito dall'operatore. In caso di vortici vicini oppure elevati livelli di turbolenza possono esserci molte oscillazioni nella velocità tangenziale e il valore maggiore non corrisponde visibilmente al reale valore del raggio. Ad esempio, in presenza di una zona turbolenta, caratterizzata da molteplici vortici, si rischia di individuare il massimo della velocità tangenziale legato ad un altro vortice. Allora in tal caso si scelgono dei valori massimi del raggio entro i quali analizzare la velocità tangenziale e valutare così il suo picco escludendo in tal modo eventuali picchi, più elevati, presenti successivamente ma che in realtà non corrispondono al raggio del vortice;

Per valutare queste quantità in funzione della distanza radiale dal centro del vortice si creano delle circonferenze centrate nel nucleo del vortice. Ogni circonferenza presenterà un raggio  $i dr$  con  $dr$  pari alla risoluzione spaziale dell'immagine mentre  $i$  un numero intero tale che  $dr \leq i dr \leq r_{max}$ . Il valore di  $r_{max}$  è pari alla distanza tra il centro del vortice e il punto dell'immagine ad esso più lontano. Su ciascuna circonferenza vengono valutate le quantità sopra indicate. Ad esempio, consideriamo una delle generiche circonferenze di raggio  $i dr$ , su questa circonferenza non è detto che vi siano dei punti della griglia con i quali valutare le grandezze volute per cui è necessario effettuare una media per valutarle. Tale media si effettua considerando tutti i punti inclusi tra le circonferenze  $(i - 1) dr$  e  $(i + 1) dr$ . Per ognuno di questi punti sarà nota la velocità  $(u, v)$  nel sistema scelto e l'angolo  $\theta$ . Note queste quantità si valutano la velocità tangenziale e radiale associate a quel punto. Valutate le velocità per tutti i punti compresi tra  $(i - 1) dr$  e  $(i + 1) dr$  si effettua una media. La velocità ottenuta come media la si associa alla circonferenza di raggio  $i dr$ . Una volta valutata la velocità tangenziale sulla data circonferenza si valuta la circolazione. Per quanto riguarda la vorticità si effettua solo una media dei valori di vorticità di tutti i punti compresi tra  $(i - 1) dr$  e  $(i + 1) dr$  e tale media la si associa alla circonferenza di raggio  $i dr$ .

- A questo punto per ogni immagine si salvano diversi file di dati:

#### 1. File con i centri non pesati e un file con i centri pesati

In questi due file si salvano rispettivamente le coordinate dei centri non pesati e pesati per ogni metodo. Inoltre, in ognuno di questi file si salvano i picchi delle funzioni associati a questi centri; il raggio del vortice, il valore massimo della velocità tangenziale e il valore massimo

di vorticità. Se vengono caricate più immagini si salvano questi dati per tutte le immagini in base all'ordine in cui vengono analizzate. Per poter associare i diversi vortici alle rispettive immagini si utilizzano delle references. Ovvero, ad ogni singola immagine, e dunque ai suoi rispettivi vortici, si associa un numero, grazie al quale, entrando in un ulteriore file di output denominato references si ottiene il campo di velocità in cui è presente quel vortice;

2. File contenente le caratteristiche

Tale file contiene, a fissata immagine, per ogni metodo i valori delle caratteristiche sia per vortici non pesati che pesati. Se si analizzano contemporaneamente più immagini verranno generati tanti file quanti sono le immagini analizzate. Il nome di ognuno di questi file sarà il nome del file di partenza caricato con “\_caratteristiche” così da poter associare il campo di moto e le relative caratteristiche;

3. File contenete le velocità medie del campo;

4. File con le references

Questo file è necessario nel caso in cui vengano analizzate più immagini. Dalla lettura di questo file rientrando nel file contenete i centri dei vortici è possibile capire ogni centro a quale immagine è associato;

Il codice di calcolo così costruito lo si applica ad una serie di campi di velocità sintetici, singolo vortice e doppio vortice, senza rumore e aumentando il livello di rumore fino al 90% e ad una serie di immagini reali.

# 4 Modelli teorici di vortice piano

In letteratura vi sono numerosi modelli di vortice che descrivono in modo approssimato il comportamento reale dei vortici, tra di essi i più diffusi sono quello di Rankine, di Lamb-Oseen, di Burnham-Hallock, di Jacquin e di Vatistas. Nella descrizione dei vortici porremo  $\bar{r} = r/r_c$  raggio adimensionalizzato con  $r_c$  raggio del vortice, quest'ultimo è definito come la distanza radiale tra l'asse del vortice e la posizione della massima velocità tangenziale,  $\bar{v}_\theta = \frac{v_\theta}{\Gamma_v/2\pi r_c}$  velocità tangenziale

adimensionalizzata con  $\Gamma_v$  circolazione del vortice. Di seguito sono descritti, in ordine di formulazione temporale, diversi modelli di vortice [15].

Uno dei primi modelli utilizzato per descrivere la velocità tangenziale in un vortice viscoso fu formulato da Rankine [16]. Questo modello ipotizza una rotazione simile ad un corpo rigido vicino al centro, con velocità nel centro nulla, e un vortice potenziale libero lontano da esso. Questo genera una discontinuità nella formulazione del modello di Rankine. In sintesi, tale modello può essere descritto come:

$$\bar{v}_\theta = \begin{cases} \bar{r} & \bar{r} < 1 \\ \frac{1}{\bar{r}} & \bar{r} > 1 \end{cases}$$

Successivamente Scully [17], basandosi sul vortice di Rankine, formula un nuovo modello in cui non sono presenti discontinuità e la cui velocità tangenziale massima diviene la metà:

$$\bar{v}_\theta = \frac{\bar{r}}{\bar{r}^2 + 1}$$

Un altro modello di vortice è il modello Lamb-Oseen [18] [19] il cui nome deriva dagli studiosi che lo analizzarono. Si parte dalla soluzione assialsimmetrica delle equazioni di Navier Stokes e si pongono le velocità assiali e radiali nulle. In tal modo si ottiene la formulazione del modello di Lamb-Oseen:

$$\bar{v}_\theta = \frac{1}{\bar{r}} (1 - e^{-\alpha \bar{r}^2})$$

Dove  $\alpha = 1.25643$  è una costante definita come parametro di Oseen.

Infine, Vatistas [20] propose un modello che racchiude una famiglia di profili di velocità tangenziale:

$$\bar{v}_\theta = \frac{\bar{r}}{(\bar{r}^{2n} + 1)^{\frac{1}{n}}}$$

In base alla scelta del coefficiente  $n$  è possibile variare il modello del vortice. Si noti che per  $n = 1$  si ottiene il modello Scully, per  $n \rightarrow \infty$  il modello corrisponde a quello di Rankine e per  $n = 2$  il modello è un'approssimazione del modello di Lamb Oseen.

Descritti i diversi modelli si osserva che essi considerano il vortice come stazionario e non tengono conto dell'evoluzione temporale e dunque del tasso di crescita temporale del nucleo stesso del vortice. Questo è un aspetto fondamentale poiché, per definizione, il massimo della velocità tangenziale si ottiene in corrispondenza del raggio  $r_c$  che evolverà temporalmente. È ampiamente accettato che la crescita del nucleo del vortice dipende dalla natura del flusso ovvero se è laminare o turbolento. Dunque, la dimensione del nucleo del vortice aumenta con l'aumentare del tempo mentre la vorticità diminuisce ma la circolazione totale si conserva. La crescita del nucleo del vortice viene descritta dal modello diffusivo di Squire [21]:

$$r_c = \sqrt{r_{c0}^2 + 4\alpha\delta vt}$$

$$\delta = \frac{\nu + \nu_t}{\nu}$$

Il raggio  $r_c$  così descritto tiene conto dell'ispessimento del nucleo del vortice con il tempo. Il termine  $r_{c0}$  è il raggio iniziale del vortice che rimuove la singolarità all'istante  $t_0 = 0$ . Il termine  $\delta$  rappresenta il rapporto tra la viscosità apparente ed effettiva con  $\nu$  viscosità cinematica e  $\nu_t$  viscosità turbolenta. Squire impose che la viscosità  $\nu_t$  fosse una funzione della viscosità  $\nu$ . Dato che la caratteristica principale di un vortice è la sua circolazione, Squire suppose che la  $\nu_t$  fosse proporzionale alla circolazione totale del vortice  $\Gamma_v$  ottenendo:

$$\delta = 1 + a_1 \frac{\Gamma_v}{\nu}$$

il coefficiente  $a_1$  è un parametro empirico che varia tra 0.2 e 0.0002 e il rapporto  $\frac{\Gamma_v}{\nu}$  è il numero di Reynolds del vortice  $Re_v$ . Valori elevati di  $\delta$ , dunque del coefficiente  $a_1$ , corrispondono ad un aumento del livello di turbolenza all'interno del vortice e ciò comporta un aumento del tasso di crescita del nucleo del vortice, viceversa per valori di  $\delta \rightarrow 1$ , ovvero  $a_1 \rightarrow 0$ , ci si avvicina al flusso laminare.

# 5 Indagine della scia di un rotore: apparato sperimentale

I dati sperimentali utilizzati per la validazione dei criteri di individuazione dei vortici provengono da una precedente campagna di prova del CIRA. I dati PIV sono relativi alle misure della scia rilasciata da un rotore quadripala in condizione di hover. Di seguito è riportata una breve descrizione dell'apparato sperimentale.

## 5.1 Rotor Test Rig

Presso il CIRA è disponibile un apparato sperimentale che simula il funzionamento di un rotore quadripala di elicottero comprensivo di controllo del ciclico e del collettivo [22] [23] [24]. Il sistema è basato su un aeromodello radiocomandato, ovvero il Blade 450 3D RTF, a cui sono state apportate una serie di modifiche. Il rotore è composto da una testa a quattro pale rettangolari di raggio  $R = 360 \text{ mm}$ , con profilo NACA0013 e corda  $c = 32.7 \text{ mm}$ . La velocità massima di rotazione è  $\Omega = 1780 \text{ rpm}$  con angolo di inclinazione collettiva compreso tra  $1^\circ$  e  $11.3^\circ$ .

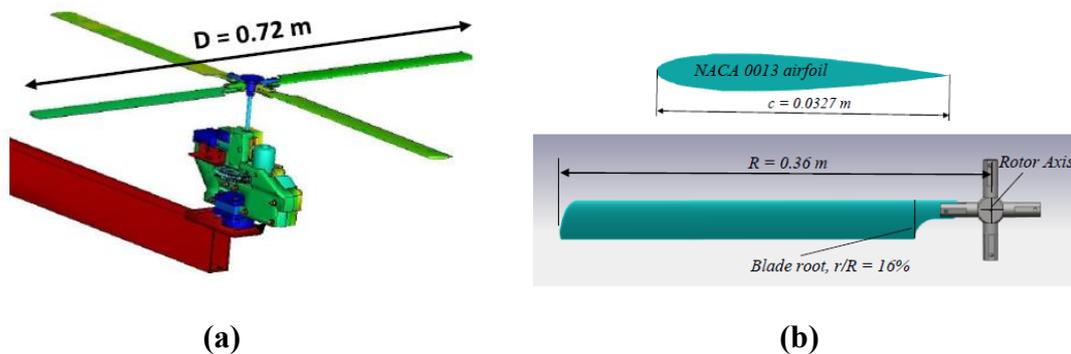


Figura 2: (a) Rotore. (b) profilo alare (in alto) e planimetria (in basso) delle pale del rotore con scale diverse. [23] [24].

## 5.2 Sistema di misura PIV

Il sistema di misura PIV consente di misurare il campo di velocità generato dal rotore in condizioni di hover. In particolare, le misure si sono concentrate nel caratterizzare la scia del rotore e i vortici di estremità rilasciati dal passaggio delle pale. Il principio di funzionamento di tale tecnica risiede nella definizione di velocità  $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ . Si fissa l'intervallo di tempo  $\Delta t$  e si effettua una misura diretta dello spostamento  $\Delta s$ . Ottenuti questi due valori si valuta il campo di velocità istantaneo. Per ottenere lo spostamento  $\Delta s$  si introducono nel flusso in esame delle particelle di opportune dimensioni e caratteristiche al fine di non alterare il campo di moto e di seguire esattamente le linee

di corrente. La zona di misura viene illuminata successivamente tramite una luce pulsata e la posizione delle particelle viene acquisita da delle telecamere digitali a due istanti successivi  $t_0$  e  $t_0 + \Delta t$  dove il tempo di ritardo  $\Delta t$  è scelto dall'operatore. Misurando lo spostamento  $\Delta s$  e conoscendo il tempo di ritardo  $\Delta t$  si calcola la velocità. Dunque, tramite una misura diretta dello spostamento si misura indirettamente la velocità della corrente. I componenti fondamentali del sistema PIV sono [22]:

1. Le particelle liquide di DEHS, con un diametro medio di  $1 \mu m$  generate da un apposito sistema;
2. La sorgente laser è di tipo pulsato, composta da due teste di Nd-Yag equipaggiate da duplicatori di armonica. Il laser emette un impulso con lunghezza d'onda pari a  $532 nm$  ed energia massima pari a  $320 mJ$ . I due raggi emessi sono collimati da un sistema di lenti;
3. Un sistema a sette specchi confinati consente di trasportare il raggio nella zona di interesse per poi essere focalizzato ed espanso da una serie di lenti sferiche e cilindriche;
4. Una telecamera modello PCO2000, con risoluzione del sensore di  $2048 \times 2048 px$ , equipaggiata con un obiettivo a focale fissa di  $200 mm$  riprende le coppie di immagini in sincrono con il laser. La sincronizzazione è garantita da un sistema denominato Sequencer. Le immagini riprendono una regione del campo pari a circa  $120 \times 120 mm^2$  con risoluzione pari a  $17 px/mm$ . Le immagini, così, ricavate si presentano con scale di grigi che descrivono in modo discreto il passaggio dal bianco (particelle che riflettono la luce) al nero (assenza di particelle). Una problematica legata alla misura dei vortici con tecnica PIV è la mancanza di segnale al centro dei vortici. Questo è dovuto alla forza centrifuga sulle particelle che tende a confinarle all'esterno lasciando una zona scura all'interno del vortice. Tale fenomeno è chiamato particle void;
5. Il software di analisi dei dati utilizzato è il PIVview2C. Esso è in grado, partendo dalle immagini così ottenute, di calcolare tramite una funzione di cross-correlazione lo spostamento delle particelle e quindi la velocità delle stesse ottenendo in questo modo le mappe di velocità di nostro interesse;

# 6 Validazione del codice: analisi del vortice di Vatistas

Ci concentreremo sull'analisi del modello di vortice di Vatistas ( $n = 1.06$ ) non tenendo conto dell'analisi temporale ma assumendo:

$$r_c = r_{c0}$$

Analizziamo un singolo e un doppio vortice a differenti distanze con differenti intensità e raggi. Effettuiamo questa analisi sia su casi ideali privi di rumore sia aumentando il livello di rumore. Le mappe vettoriali utilizzate per questa analisi si ottengono tramite un piccolo script Fortran che richiede in ingresso la posizione del centro del vortice, la sua intensità espressa in termini di circolazione adimensionale e il suo raggio adimensionale. I campi di velocità ottenuti saranno tutti adimensionalizzati rispetto alle caratteristiche del vortice principale e presenteranno una griglia equispaziata tale che  $\Delta x = \Delta y = \Delta L$ . Le analisi effettuate consentono di paragonare i diversi metodi di individuazione dei vortici e soprattutto di comprendere i loro punti di forza e i loro difetti.

## 6.1 Singolo vortice senza rumore

Consideriamo innanzitutto un caso privo di rumore con singolo vortice. Analizziamo il singolo vortice di Vatistas posto in posizione  $(0,0)$  con raggio  $r_c = r_{c0} = 1 [-]$  e circolazione  $\gamma_\infty = 2\pi [-]$ . Le immagini ottenute sono quadrate centrate in  $(0,0)$  e con dimensione variabile da  $-10$  a  $10$ . Il centro del vortice non è un punto della griglia. Consideriamo diverse risoluzioni grazie alle quali è possibile indagare come le funzioni  $\Gamma_2$ ,  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\omega_z$  e  $\gamma$  variano e come varia l'andamento delle caratteristiche, in particolar modo della velocità tangenziale, al variare della risoluzione. La Tabella 1 sintetizza i casi analizzati, ponendo l'attenzione sul numero di punti presenti nell'immagine analizzata e sul numero di punti presenti nel raggio del vortice.

Tabella 1: Singolo vortice di Vatistas caratteristiche principali.

$\Delta L/r_c$	0.5	0.2	0.1	0.05
$r_c$	1	1	1	1
$\gamma_\infty$	$2\pi$	$2\pi$	$2\pi$	$2\pi$
Dimensione griglia	40x40	100x100	200x200	400x400
N. di punti in $r_c$	2	5	10	20

Passiamo all'analisi dei diversi metodi per l'individuazione dei vortici e al calcolo dei centri. Effettuiamo, per ogni metodo, un'analisi sull'andamento delle funzioni e delle zone individuate e calcoliamo il centro valutando l'errore come distanza dal centro  $(0,0)$  e in percentuale della distanza della risoluzione spaziale ovvero:

$$\varepsilon(\%) = \frac{\sqrt{x_{centro}^2 + y_{centro}^2}}{\frac{\Delta L}{r_c} \sqrt{2}} \%$$

### 6.1.1 Metodo $\Gamma_2$

Il primo studio che effettuiamo riguarda il metodo  $\Gamma_2$ . Analizziamo come si comporta la funzione  $\Gamma_2$  al variare del dominio di calcolo e della risoluzione. Consideriamo domini  $D = 2, D = 3, D = 5, D = 6, D = 7$  e  $D = 10$  con soglia  $\frac{2}{\pi}$  valutiamo come varia l'individuazione dei vortici e l'andamento delle funzioni  $\Gamma_2$ .

Nella Figura 3 si riportano le zone che il metodo  $\Gamma_2$  individua al variare del dominio  $D$  e della risoluzione  $\frac{\Delta L}{r_c}$ .

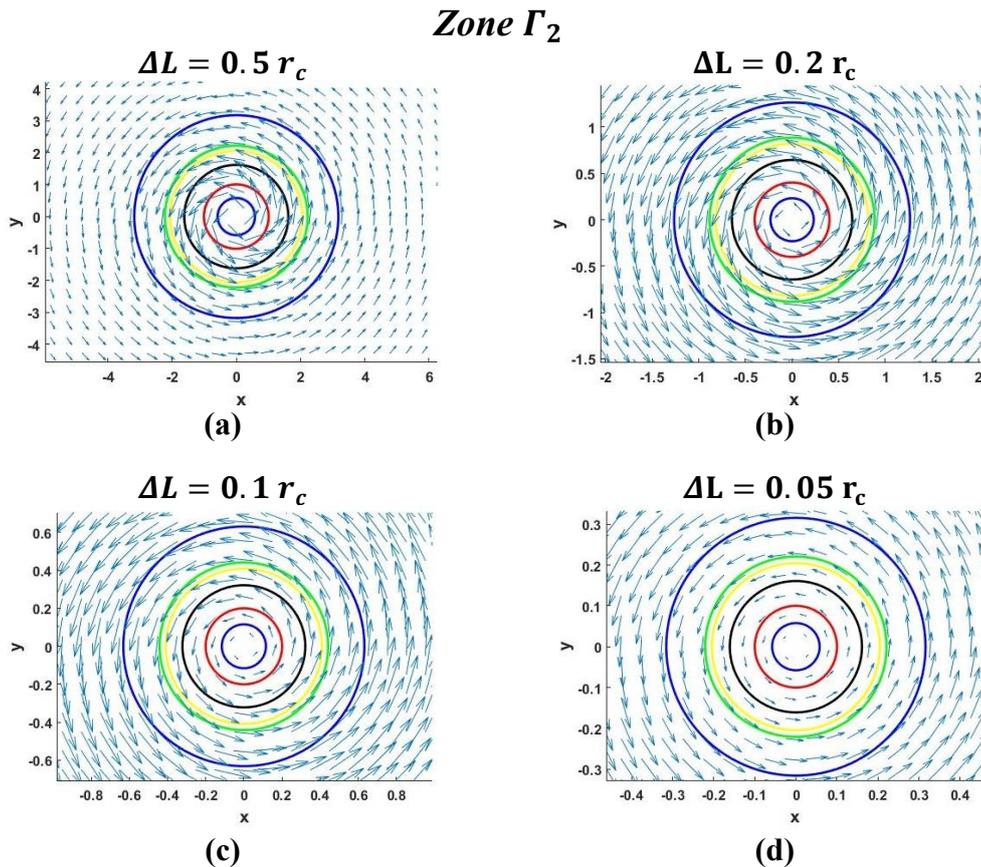


Figura 3: Zoom individuazione vortice metodo  $\Gamma_2$  soglia  $\frac{2}{\pi}$  con risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  (a),  $\Delta L = 0.2 r_c$  (b),  $\Delta L = 0.1 r_c$  (c),  $\Delta L = 0.05 r_c$  (d) e dominio  $D = [2, 3, 5, 6, 7, 10]$  (dal cerchio interno al cerchio esterno). Immagini con scale diverse.

Di seguito si riportano gli andamenti delle funzioni  $\Gamma_2$  al variare del dominio di calcolo solo per risoluzioni  $\Delta L/r_c = 0.5$  (Figura 4) e  $\Delta L/r_c = 0.1$  (Figura 5) gli andamenti con le restanti risoluzioni sono analoghi.

$\Gamma_2$  risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$

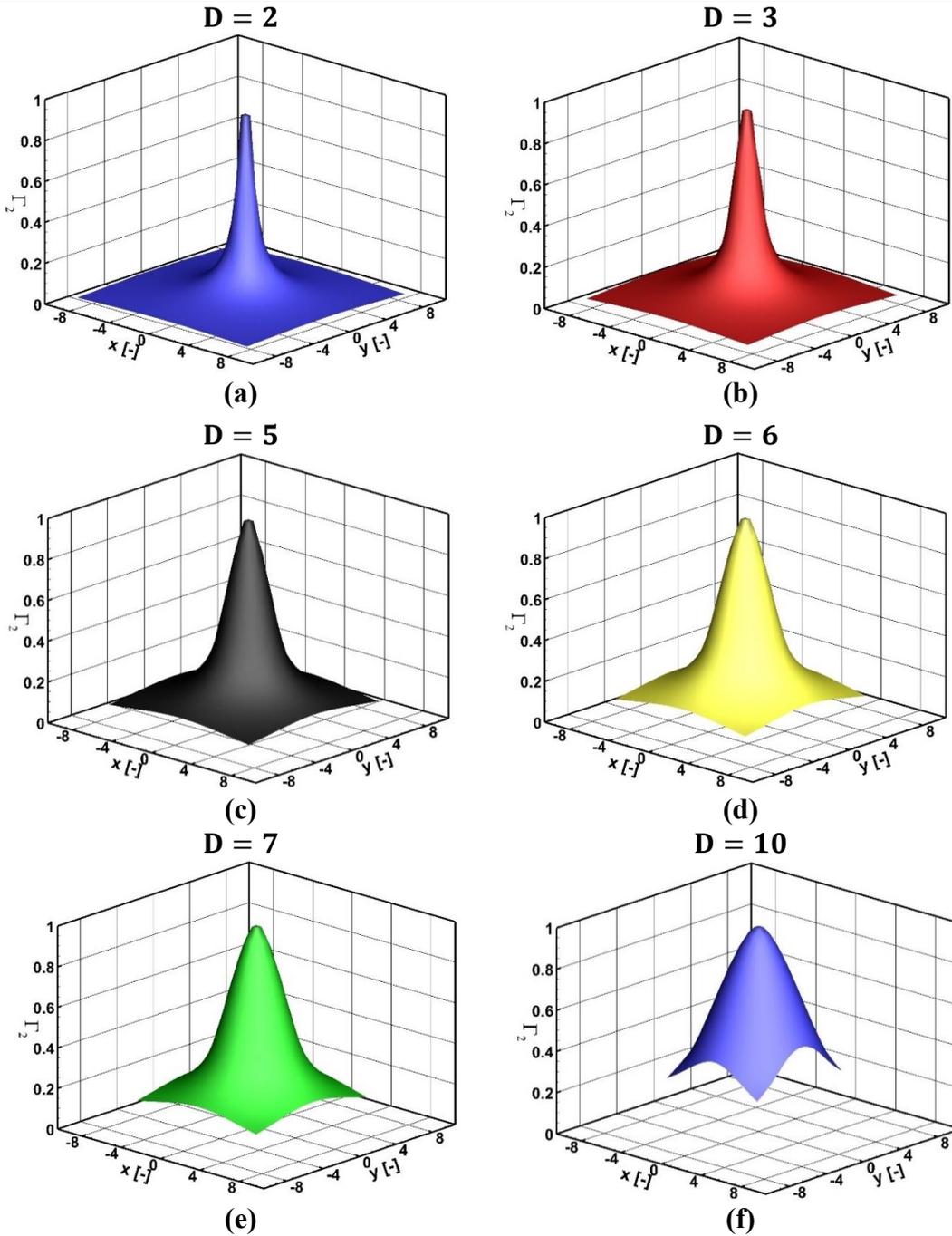


Figura 4: Andamenti funzione  $\Gamma_2$  risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  e dominio  $D = 2$  (a),  $D = 3$  (b),  $D = 5$  (c),  $D = 6$  (d),  $D = 7$  (e) e  $D = 10$  (f).

$\Gamma_2$  risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$

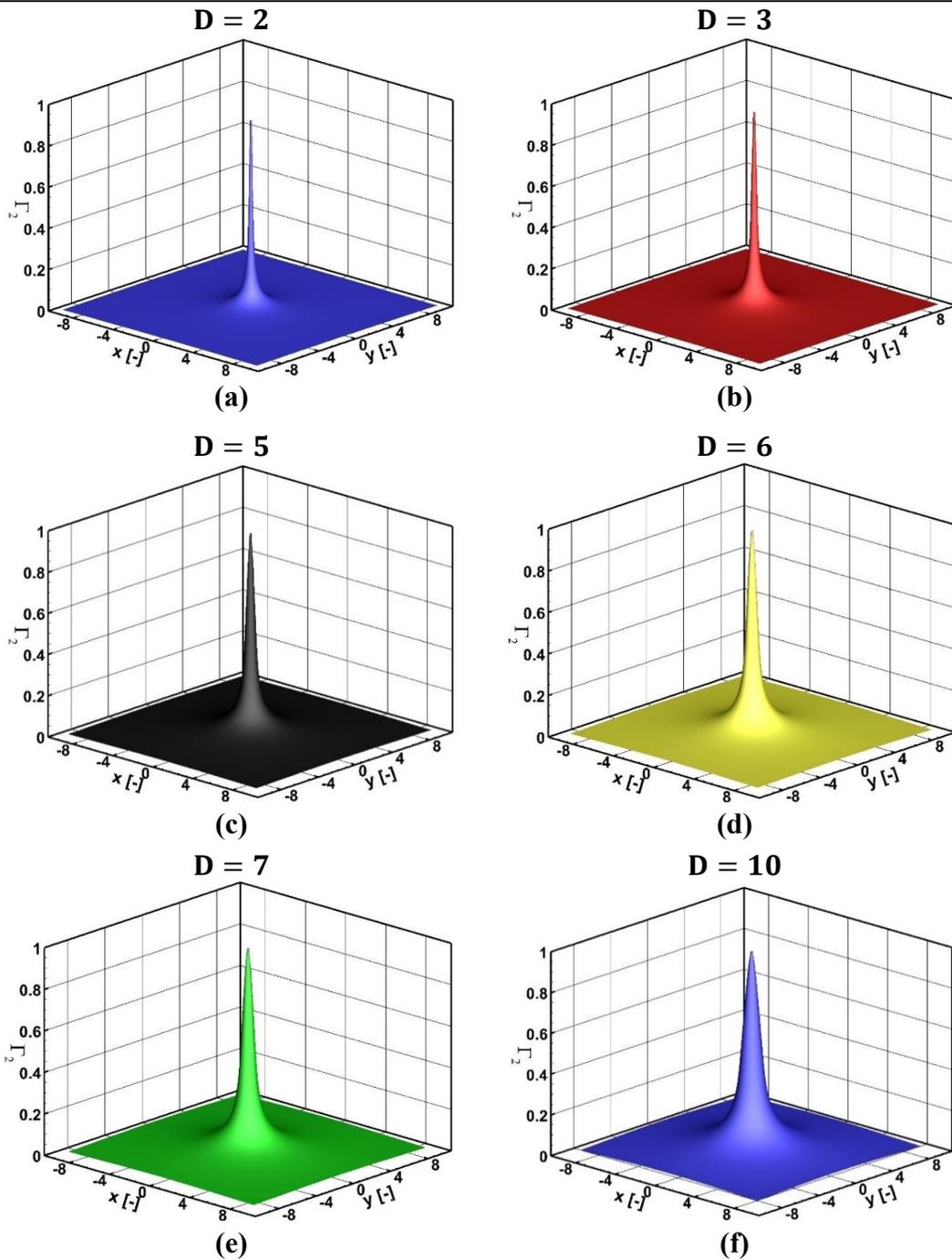


Figura 5: Andamenti funzione  $\Gamma_2$  risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$  e dominio  $D = 2$  (a),  $D = 3$  (b),  $D = 5$  (c),  $D = 6$  (d),  $D = 7$  (e) e  $D = 10$  (f).

È ben evidente, sia dall'individuazione effettuata (Figura 3), sia dall'andamento delle funzioni  $\Gamma_2$  (Figura 4 e Figura 5) come, a fissata risoluzione, e all'aumentare del dominio di calcolo la zona che individua il vortice si allarga. Inoltre, all'aumentare del dominio le zone individuate risultano sempre concentriche e di raggio maggiore. Analogamente, all'aumentare della risoluzione e a fissato dominio la zona individuata

diviene più piccola, questo perché il raggio  $\tilde{R}$  per il calcolo della funzione  $\Gamma_2$  è proporzionale alla risoluzione spaziale. Dunque, migliore sarà la risoluzione più piccolo risulterà il raggio e dunque più piccola risulterà la zona individuata. Si osserva, inoltre, che il picco di  $\Gamma_2$ , che consente l'individuazione del centro, è positivo, ciò è legato al verso antiorario del vortice a cui corrisponde un valore positivo della funzione  $\Gamma_2$ .

A fissata risoluzione all'aumentare del dominio di calcolo aumenta il massimo della funzione  $\Gamma_2^4$ . Questo si evince dalla Tabella 2 in cui sono riportati al variare del dominio e della risoluzione i massimi assunti dalla funzione  $\Gamma_2$ .

Tabella 2: Massimi della funzione  $\Gamma_2$  al variare della risoluzione  $\Delta L/r_c$  e del dominio di calcolo  $D$ .

$\Delta L = 0.5 r_c$						
$D$	2	3	5	6	7	10
$\max(\Gamma_2)$	0.9149	0.9526	0.9787	0.9837	0.9871	0.9932
$\Delta L = 0.2 r_c$						
$D$	2	3	5	6	7	10
$\max(\Gamma_2)$	0.9147	0.9523	0.9783	0.9823	0.9867	0.9929
$\Delta L = 0.1 r_c$						
$D$	2	3	5	6	7	10
$\max(\Gamma_2)$	0.9147	0.9523	0.9783	0.9833	0.9866	0.9928
$\Delta L = 0.05 r_c$						
$D$	2	3	5	6	7	10
$\max(\Gamma_2)$	0.9147	0.9523	0.9783	0.9833	0.9866	0.9928

Individuato il vortice si passa al calcolo del centro. Si osserva che per tutti i domini analizzati l'errore che si commette nel calcolo del centro non pesato è pari alla metà della distanza della risoluzione spaziale dell'immagine ovvero in termini percentuali è un errore del 50%. Effettuando una media pesata all'interno della zona individuata, invece, si osserva una forte diminuzione dell'errore commesso che è nettamente inferiore alla metà della distanza della risoluzione spaziale dell'immagine (Tabella 3).

Tabella 3: Errore individuazione centro pesato del vortice espresso in percentuale della distanza della risoluzione spaziale  $\frac{\Delta L}{r_c} \sqrt{2}$ , metodo  $\Gamma_2$ .

$\Delta L = 0.5 r_c$						
$D$	2	3	5	6	7	10
$\varepsilon_{\Gamma_2}(\%)$	0.0481%	0.140%	0.185%	0.276%	0.329%	0.534%
$\Delta L = 0.2 r_c$						
$D$	2	3	5	6	7	10
$\varepsilon_{\Gamma_2}(\%)$	0.0402%	0.0922%	0.0969%	0.134%	0.115%	0.174%

<sup>4</sup> Ricordiamo che al più  $\Gamma_2$  può assumere valore unitario.

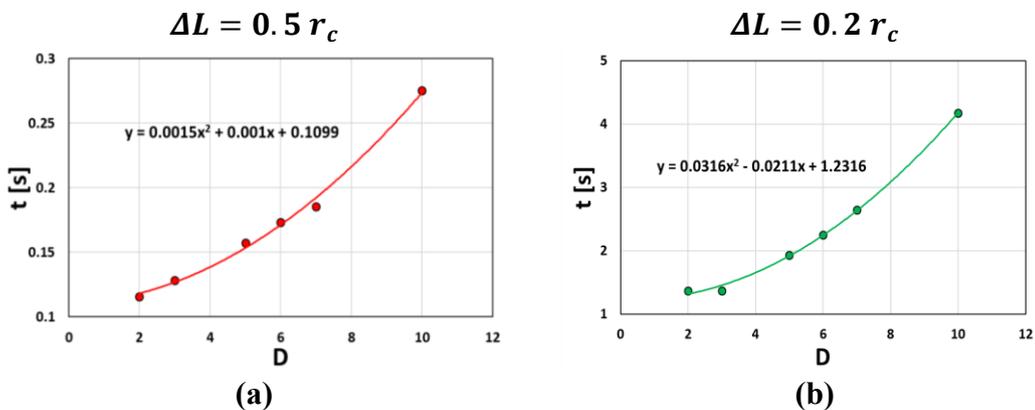
$\Delta L = 0.1 r_c$						
$D$	2	3	5	6	7	10
$\varepsilon_{\Gamma_2}(\%)$	0.0393%	0.0812%	0.0862%	0.0863%	0.0865%	0.1040%
$\Delta L = 0.05 r_c$						
$D$	2	3	5	6	7	10
$\varepsilon_{\Gamma_2}(\%)$	0.0393%	0.0778%	0.0792%	0.0851%	0.0875%	0.0976%

Sebbene gli errori commessi risultano nettamente inferiori alla metà della distanza della risoluzione spaziale si osserva, anche se poco rilevante, un aumento dell'errore percentuale all'aumentare del dominio e una diminuzione dell'errore a fissato dominio e all'aumentare della risoluzione (Tabella 3).

L'individuazione del vortice e il calcolo del suo centro presentano risultati ottimali, sussiste, però, una differenza legata a tempi di calcolo tra un dominio e l'altro. Tale differenza si traduce in un aumento dei tempi di calcolo all'aumentare del dominio e, a fissato dominio, al diminuire della risoluzione come si evince dalla Tabella 4 e dai grafici riportati nella Figura 6.

Tabella 4: Tempi di calcolo della funzione  $\Gamma_2$  e individuazione del vortice al variare del dominio di calcolo  $D$  e della risoluzione  $\Delta L/r_c$ .

$\Delta L = 0.5 r_c$						
$D$	2	3	5	6	7	10
$t [s]$	0.1158	0.1284	0.1572	0.1731	0.1855	0.2752
$\Delta L = 0.2 r_c$						
$D$	2	3	5	6	7	10
$t [s]$	1.3688	1.3701	1.9297	2.2525	2.6444	4.1704
$\Delta L = 0.1 r_c$						
$D$	2	3	5	6	7	10
$t [s]$	12.0712	12.5678	14.9972	16.5217	18.3999	26.3477
$\Delta L = 0.05 r_c$						
$D$	2	3	5	6	7	10
$t [s]$	213.8900	216.4622	226.7753	234.7693	243.3267	282.7571



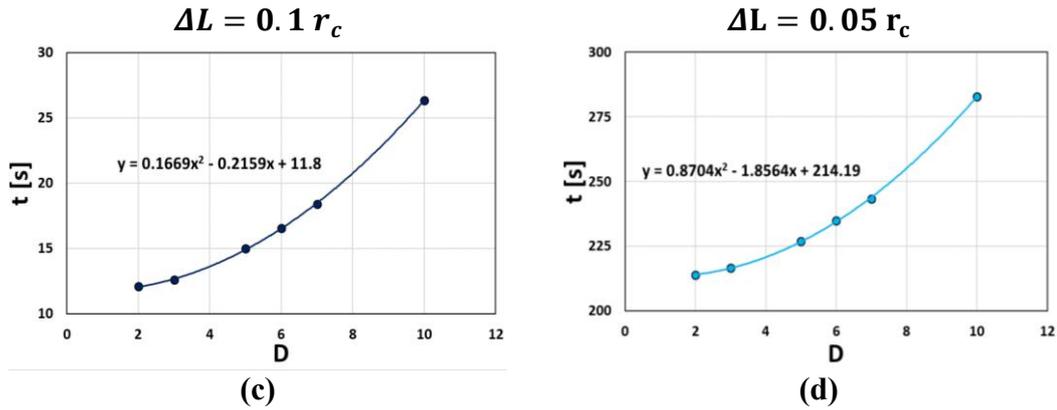


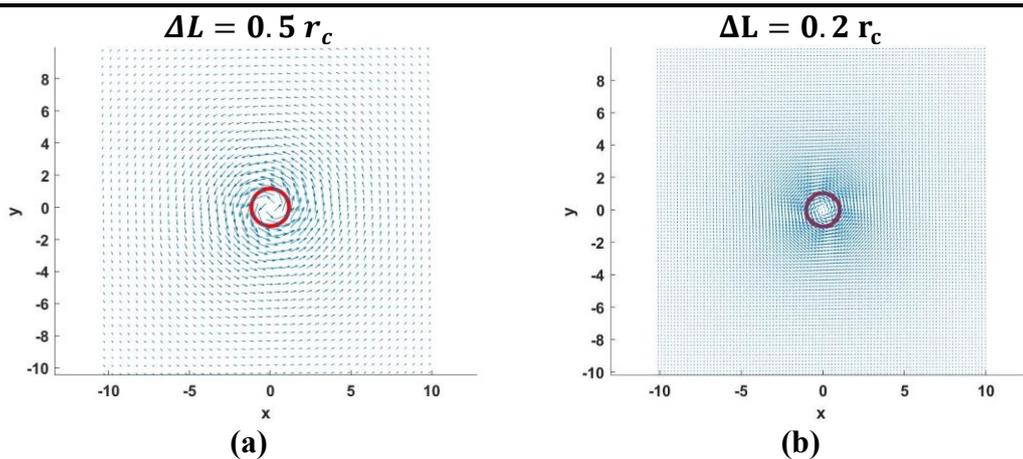
Figura 6: Andamenti tempi di calcolo della funzione  $F_2$  e dell'individuazione del vortice al variare del dominio di calcolo  $D$  e a fissata risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  (a),  $\Delta L = 0.1 r_c$  (b),  $\Delta L = 0.2 r_c$  (c),  $\Delta L = 0.05 r_c$  (d). differenti scale in ogni grafico.

Dunque, in assenza di rumore l'individuazione del centro del vortice è analoga per ogni dominio sebbene sia più conveniente utilizzare un dominio di calcolo  $D = 2$  poiché, a fissata risoluzione, è quello che commette un errore minore inoltre è anche quello che presenta minor tempo di calcolo.

### 6.1.2 Metodi $\Delta$ e $Q$

Passiamo all'analisi del metodo  $\Delta$  e del metodo  $Q$ . Si analizzano insieme poiché il loro comportamento è molto simile essendo metodi derivanti da una formulazione simile. Si sceglie come livello di soglia quello teorico, per cui si individuano i vortici considerando le zone che presentano valori  $\Delta < 0$  e  $Q > 0$ . In assenza di rumore i metodi funzionano da soli senza la richiesta del numero di vortici da calcolare.

### Zone $\Delta < 0$ o $Q > 0$



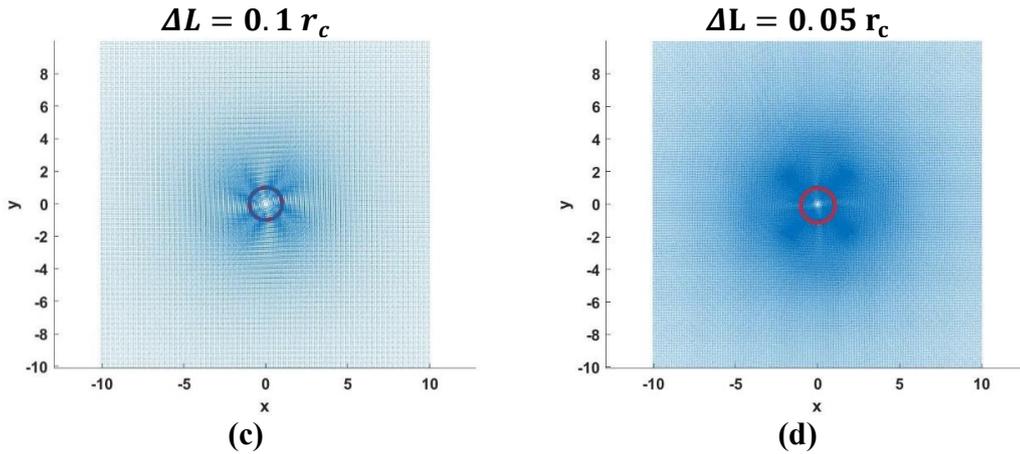


Figura 7: Individuazione vortice metodo  $\Delta$  e  $Q$  soglia 0 (sono coincidenti) con risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  (a),  $\Delta L = 0.2 r_c$  (b),  $\Delta L = 0.1 r_c$  (c),  $\Delta L = 0.05 r_c$  (d).

Sebbene l'individuazione attraverso i due metodi consiste nel calcolo di due funzioni differenti  $\Delta$  e  $Q$ , le quali dovranno presentare rispettivamente valori negativi e valori positivi, si osserva che le zone individuate sono perfettamente coincidenti a fissata risoluzione, è questo il motivo per cui sulla medesima immagine nella Figura 7 sono presenti sia le individuazioni  $\Delta < 0$  che le individuazioni  $Q > 0$ .

Di seguito si riportano gli andamenti delle funzioni  $\Delta$  e  $Q$  per le risoluzioni  $\Delta L/r_c = 0.5$  (Figura 8 "a" e Figura 9 "a") e  $\Delta L/r_c = 0.1$  (Figura 8 "b" e Figura 9 "b") i restanti andamenti sono analoghi.

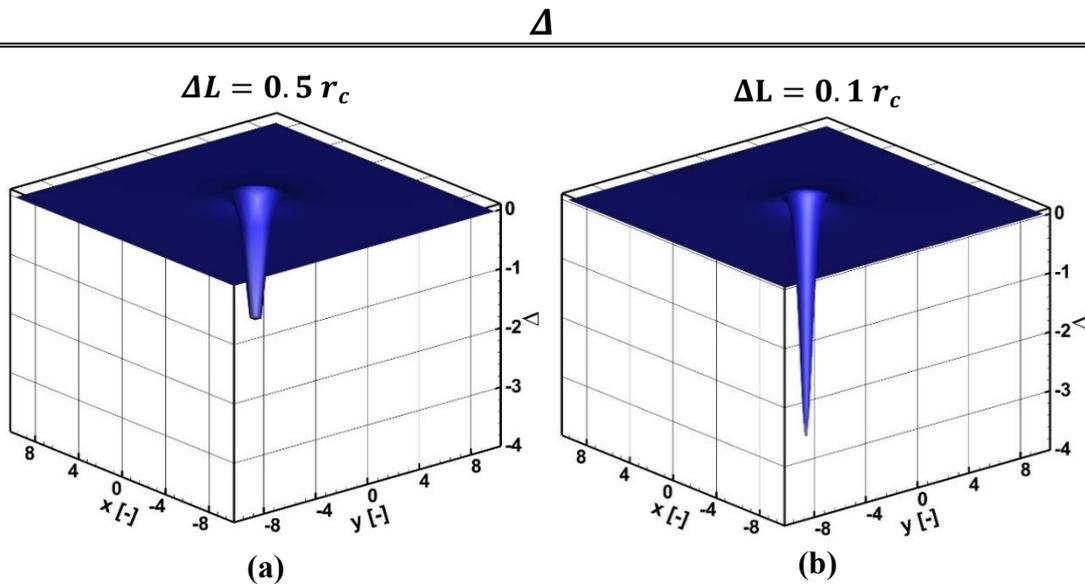


Figura 8: Andamenti funzione  $\Delta$  risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  (a) e  $\Delta L = 0.1 r_c$  (b).

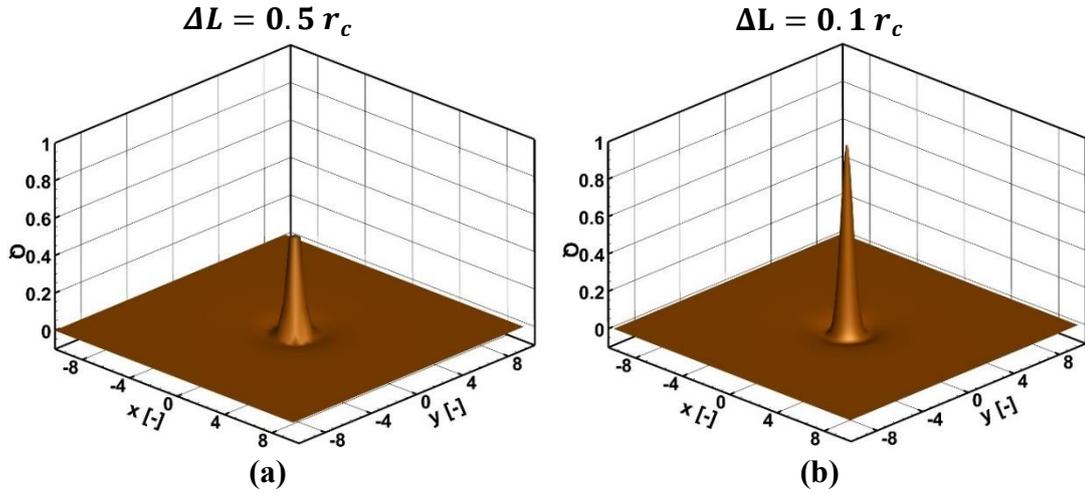


Figura 9: Andamenti funzione  $Q$  risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  (a) e  $\Delta L = 0.1 r_c$  (b).

Le funzioni  $\Delta$  e  $Q$  presentano, al variare della risoluzione, un comportamento analogo alla funzione  $\Gamma_2$  ovvero rispettivamente diminuisce il minimo di  $\Delta$  e aumenta il massimo di  $Q$ , come riportato da Tabella 5 di seguito e come evidenziato dall'andamento delle funzioni stesse.

Tabella 5: Minimi della funzione  $\Delta$  e massimi della funzione  $Q$  al variare della risoluzione  $\Delta L/r_c$ .

$\Delta L/r_c$	0.5	0.2	0.1	0.05
<b>min(<math>\Delta</math>)</b>	-1.958	-3.527	-3.8820	-3.9749
<b>max(<math>Q</math>)</b>	0.4894	0.8818	0.9706	0.9931

Così come effettuato con il metodo  $\Gamma_2$ , dopo l'individuazione del vortice si passa al calcolo del centro e delle sue caratteristiche. Analogamente al metodo  $\Gamma_2$  l'errore commesso nel calcolo del centro non pesato è pari alla metà della distanza della risoluzione spaziale dell'immagine, ovvero in termini percentuali è un errore del 50%. Effettuando una media pesata all'interno della zona individuata, invece, si osserva una forte diminuzione dell'errore commesso. Nella Tabella 6 si riportano gli errori percentuali espressi in termini della distanza della risoluzione spaziale.

Tabella 6: Errore individuazione centro pesato del vortice espresso in percentuale della distanza della risoluzione spaziale  $\frac{\Delta L}{r_c} \sqrt{2}$ , metodo  $\Delta$  e  $Q$ .

$\Delta L/r_c$	0.5	0.2	0.1	0.05
$\epsilon_\Delta$ (%)	$7.44 \times 10^{-15} \%$	$9.22 \times 10^{-15} \%$	$3.12 \times 10^{-14} \%$	$6.24 \times 10^{-14} \%$
$\epsilon_Q$ (%)	$7.44 \times 10^{-15} \%$	$9.22 \times 10^{-15} \%$	$3.12 \times 10^{-14} \%$	$6.24 \times 10^{-14} \%$

Gli errori percentuali sono piccolissimi e di molti ordini di grandezza inferiori alla risoluzione spaziale. Inoltre, si osserva che, sebbene poco rilevante, all'aumentare della risoluzione l'errore aumenta di un ordine di grandezza.

### 6.1.3 Metodi massimo del modulo della vorticità e della circolazione

Passiamo all'analisi dei metodi massimo del modulo della vorticità e della circolazione. Per poter individuare la zona in cui è presente un vortice è necessario scegliere una soglia adeguata. Tale scelta si effettua osservando l'andamento delle funzioni vorticità e circolazione e i rispettivi massimi. Essendo un vortice antiorario sia la circolazione che la vorticità presentano un picco positivo. Analizziamo gli andamenti e i rispettivi massimi.

Nella Figura 10 e Figura 11 si riportano gli andamenti delle funzioni  $\omega_z$  e  $\gamma$  per le sole risoluzioni  $\Delta L/r_c = 0.5$  e  $\Delta L/r_c = 0.1$  i restanti andamenti sono analoghi.

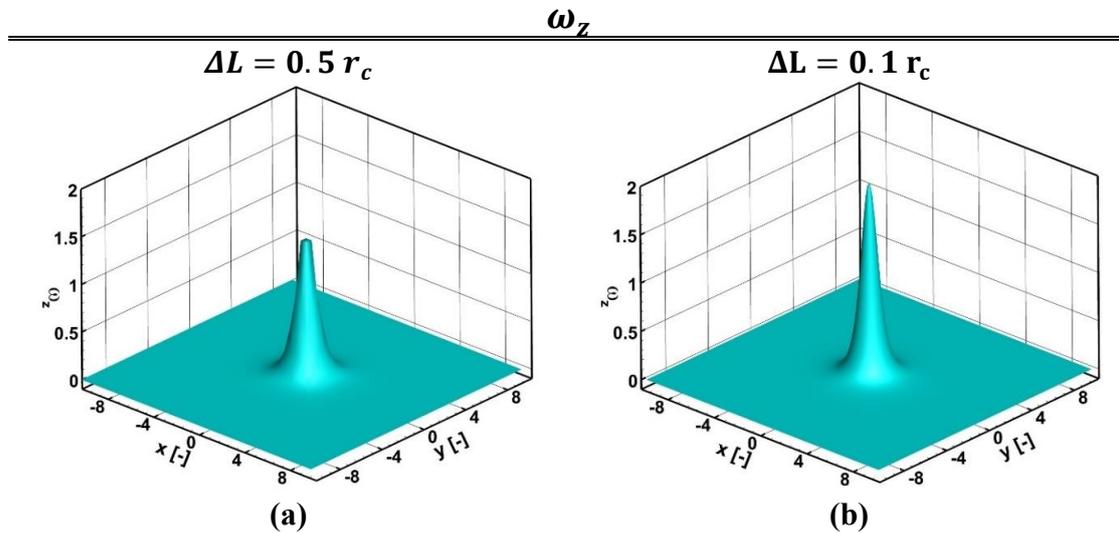


Figura 10: Andamenti funzione  $\omega_z$  risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  (a) e  $\Delta L = 0.1 r_c$  (b).

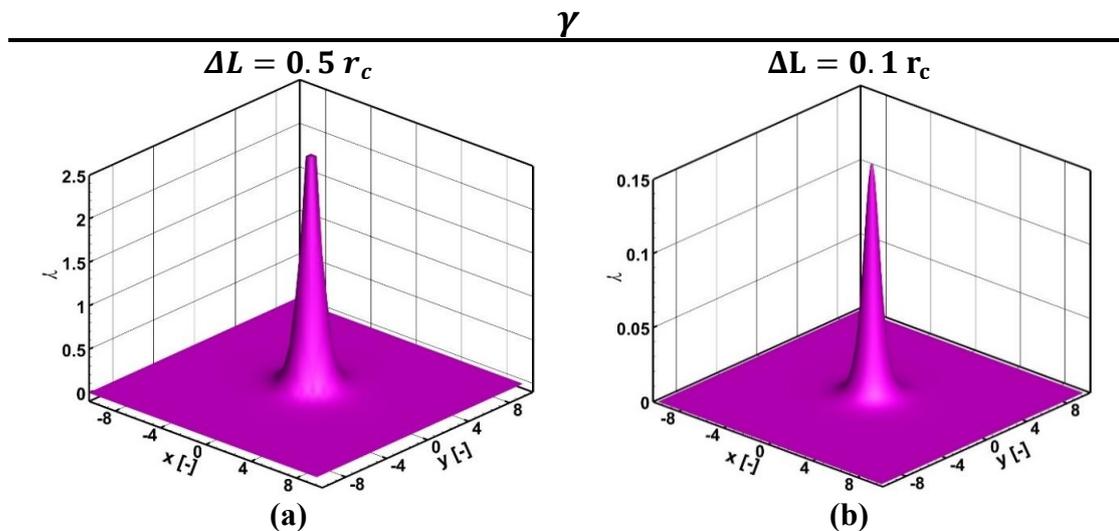


Figura 11: Andamenti funzione  $\gamma$  risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  (a) e  $\Delta L = 0.1 r_c$  (b). Due diverse scale.

Tabella 7: Massimi delle funzioni  $\omega_z$  e  $\gamma$  al variare della risoluzione  $\Delta L/r_c$ .

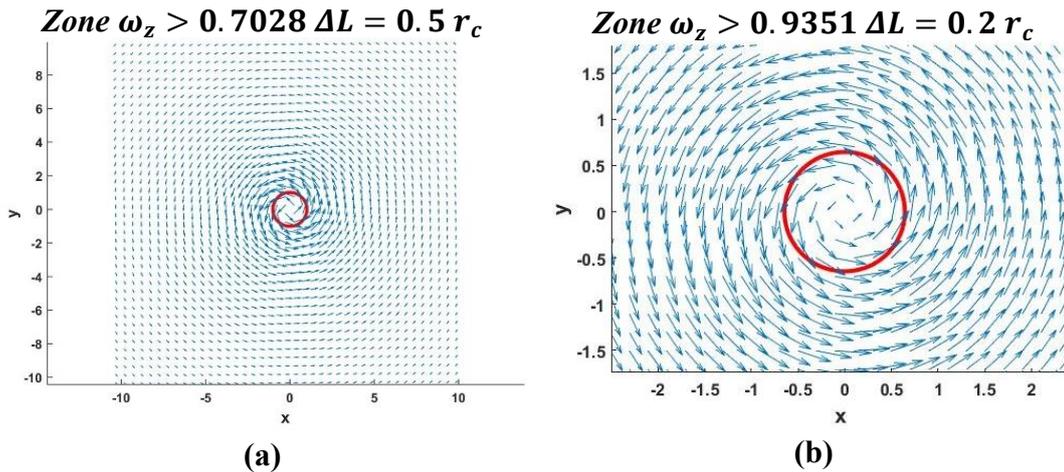
$\Delta L/r_c$	0.5	0.2	0.1	0.05
$\max(\omega_z)$	1.4056	1.8701	1.9704	1.9931
$\max(\gamma)$	2.6695	0.5952	0.1358	0.03990

Sia dalle immagini delle funzioni (Figura 10 e Figura 11) sia dalla Tabella 7 contenente i valori massimi si osserva che all'aumentare della risoluzione il picco della funzione  $\omega_z$  aumenta invece quello della funzione  $\gamma$  diminuisce. Ciò è legato alla diversa discretizzazione utilizzata per tali funzioni, nel primo caso si è utilizzato un metodo alle differenze finite nel secondo caso un metodo agli elementi finiti con elementi triangolari. Poiché i triangoli costruiti, all'aumentare della risoluzione, divengono più piccoli il contributo globale che si ottiene è minore. Sebbene si verifichi tale fenomeno sono ben evidenti, in tutte le risoluzioni, i picchi di circolazione. Analizzati gli andamenti e i massimi delle funzioni si passa alla scelta della soglia. Si sceglie la soglia pari alla metà del valore massimo come riportato nella Tabella 8.

Tabella 8: Soglie per l'individuazione dei vortici metodo del massimo del modulo della vorticità e della circolazione.

$\Delta L/r_c$	0.5	0.2	0.1	0.05
soglia $ \omega_z $	0.7028	0.9351	0.9852	0.9966
soglia $ \gamma $	1.3348	0.2976	0.06788	0.01990

Scelti i livelli di soglia si individuano i centri.



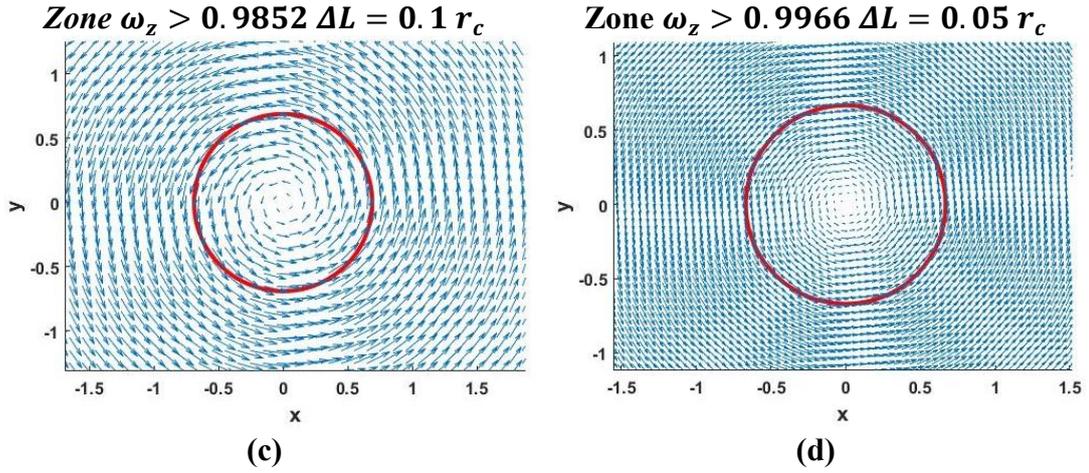


Figura 12: Individuazione vortice metodo  $\max|\omega_z|$  risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  (a),  $\Delta L = 0.2 r_c$  (b) (zoom),  $\Delta L = 0.1 r_c$  (c) (zoom) e  $\Delta L = 0.05 r_c$  (d) (zoom). Scale diverse per ogni immagine.

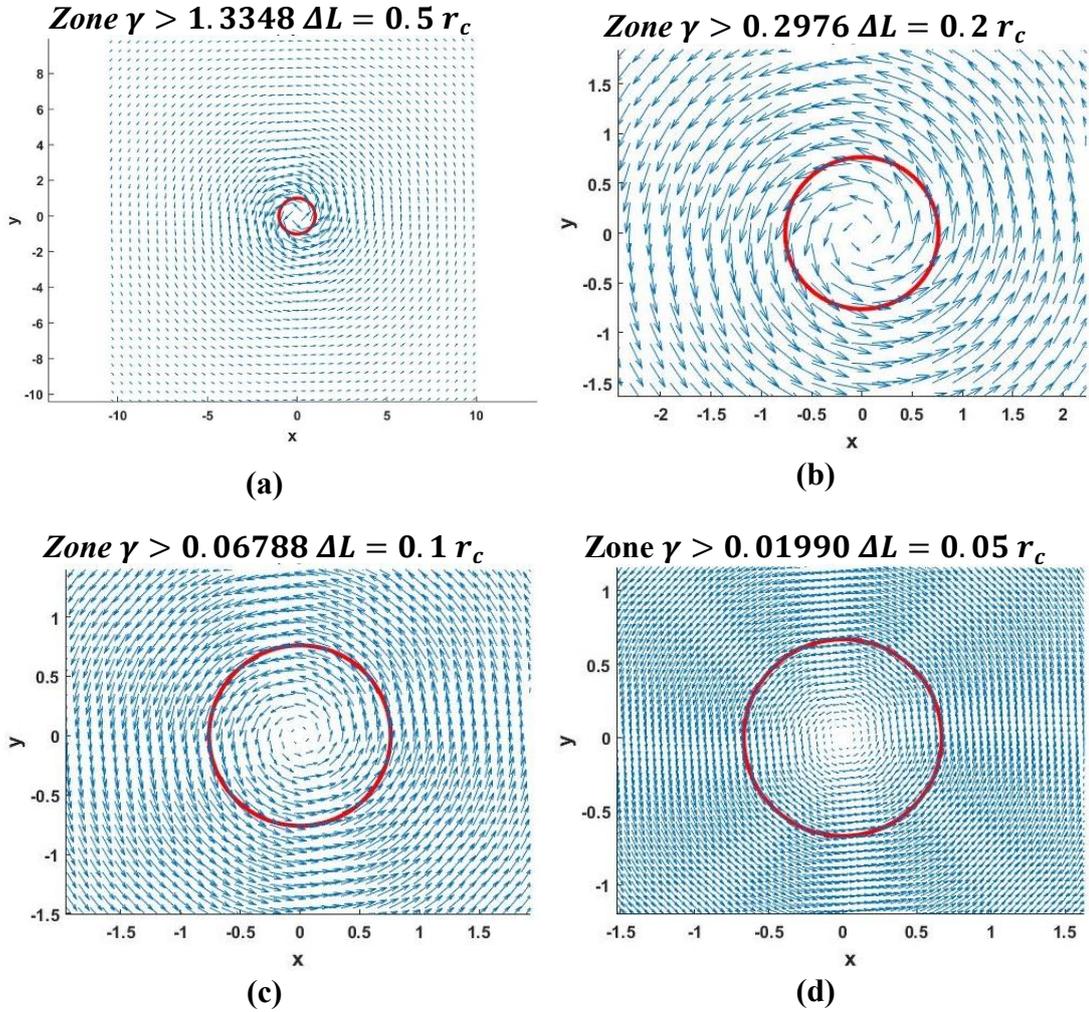


Figura 13: Individuazione vortice metodo  $\max|\gamma|$  risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  (a),  $\Delta L = 0.2 r_c$  (b) (zoom),  $\Delta L = 0.1 r_c$  (c) (zoom) e  $\Delta L = 0.05 r_c$  (d) (zoom). Scale diverse per ogni immagine.

Individuato il vortice si passa al calcolo del centro e delle sue caratteristiche. In modo analogo ai metodi precedenti l'errore commesso nel caso di centro non pesato è pari alla metà della distanza della risoluzione spaziale cioè al 50% invece, come evidenziato dalla Tabella 9, l'errore nel caso di centri pesati è nettamente inferiore.

Tabella 9: Errore individuazione centro pesato del vortice espresso in percentuale della distanza della risoluzione spaziale  $\frac{\Delta L}{r_c} \sqrt{2}$ , metodo  $\omega_z$  e  $\gamma$ .

$\Delta L/r_c$	0.5	0.2	0.1	0.05
$\epsilon_{\max \omega_z }(\%)$	$3.73 \times 10^{-15} \%$	$2.14 \times 10^{-15} \%$	$4.28 \times 10^{-15} \%$	$2.90 \times 10^{-14} \%$
$\epsilon_{\max \gamma }(\%)$	$1.90 \times 10^{-15} \%$	$9.10 \times 10^{-15} \%$	$8.81 \times 10^{-15} \%$	$5.02 \times 10^{-14} \%$

#### 6.1.4 Confronto tra i metodi

Sebbene gli errori commessi con i metodi  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  sono di molti ordini di grandezza inferiori a quelli di  $\Gamma_2$  essendo la risoluzione spaziale molto più grande di tali errori da un punto di vista di calcolo delle caratteristiche non vi è alcun cambiamento, a fissata risoluzione, al variare dei diversi metodi. Ciò è ben evidenziato dall'andamento della velocità tangenziale. L'unico aspetto che si nota è come, all'aumentare della risoluzione spaziale, tale andamento risulta sempre più vicino alla curva teorica.

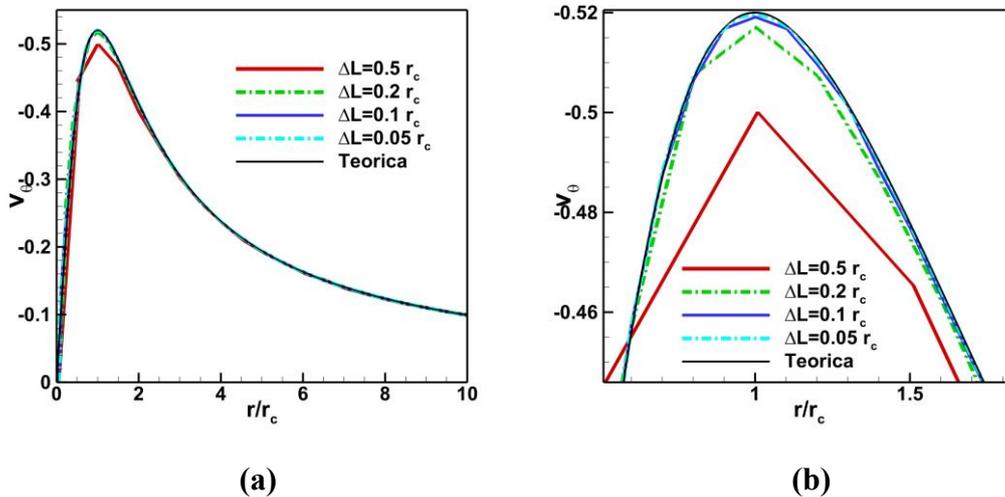


Figura 14: Andamento velocità tangenziale per diverse risoluzioni (a) zoom dell'andamento della velocità tangenziale per diverse risoluzioni (b). A fissata risoluzione con tutti i metodi gli andamenti coincidono, consideriamo quelli ottenuti con il metodo  $\Gamma_2$ .

Per qualsiasi metodo e a fissata risoluzione i raggi del vortice, così come i massimi della velocità tangenziale, sono perfettamente coincidenti. In Tabella 10 si riportano

gli errori percentuali rispetto ai valori teorici noti ovvero  $r_c = 1[-]$  e  $\max(\bar{v}_\theta) = 0.52[-]$ .

$$\varepsilon(\max(\bar{v}_\theta))\% = \left| \frac{\max(\bar{v}_\theta) - 0.52}{0.52} \right| \%$$

$$\varepsilon(r_c)\% = \left| \frac{r_c - 1}{1} \right| \%$$

Tabella 10: Errore percentuale raggio del vortice e velocità tangenziale massima. A fissata risoluzione con tutti i metodi gli errori coincidono.

$\Delta L/r_c$	0.5	0.2	0.1	0.05
$err(r_c)\%$	0.719%	0.286%	0.143%	0.0710%
$err(\max(\bar{v}_\theta))\%$	3.81%	0.567%	0.169%	0.0483%

I dati sulla velocità tangenziale massima indicano un errore trascurabile rispetto alla curva teorica per tutte le risoluzioni, eccetto  $\Delta L = 0.5 r_c$  dove l'errore è circa del 4% della velocità massima in accordo con il limite posto da Martin [25] sulla risoluzione necessaria a misurare le caratteristiche di un vortice ( $\Delta L \leq 0.2 r_c$ ). Secondo Martin una misura può essere considerata ottimale se nel raggio del vortice individuato sono presenti almeno cinque punti di misura, cosa che non avviene con risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$ .

In conclusione, in assenza di rumore e in presenza di un singolo vortice tutti i metodi individuano un solo vortice e riescono a calcolare il centro e le caratteristiche con elevata accuratezza.

## 6.2 Singolo vortice con rumore

In assenza di rumore tutti i metodi presentano un comportamento ottimale. Vediamo come inserendo una certa percentuale di rumore tale comportamento cambia radicalmente in particolar modo per i metodi  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$ . Faremo vedere come una volta scelto il dominio più opportuno per la funzione  $\Gamma_2$  questo metodo è in grado di individuare un solo vortice e di calcolare in maniera accurata il centro diversamente dagli altri metodi che necessitano del numero di vortici per lavorare. Sebbene in questo caso sia noto il numero di vortici presenti nell'immagine nella realtà questa informazione non è nota ed è dunque un aspetto fondamentale su cui focalizzarsi.

Prendiamo in considerazione due sole risoluzioni per questa analisi  $\Delta L = 0.5 r_c$  e  $\Delta L = 0.1 r_c$  a cui corrispondo rispettivamente 2 e 10 punti nel raggio del vortice. Ricordiamo che una misura può essere considerata ottimale se nel raggio del vortice individuato sono presenti almeno cinque punti [25], per cui la risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$

non è una misura ottimale differentemente dalla risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$ . Il rumore si genera tramite la funzione `random`<sup>5</sup> di Fortran di ampiezza 1 con oscillazioni base tra  $-0.5$  e  $0.5$ . Si prendono in considerazione soglie di rumore al 20%, al 70% e al 90% espresse in percentuale della velocità tangenziale massima ( $\max(\bar{v}_\theta) = 0.52$ ). Di seguito è riportata la Tabella 11 contenete i casi da analizzare con rumore.

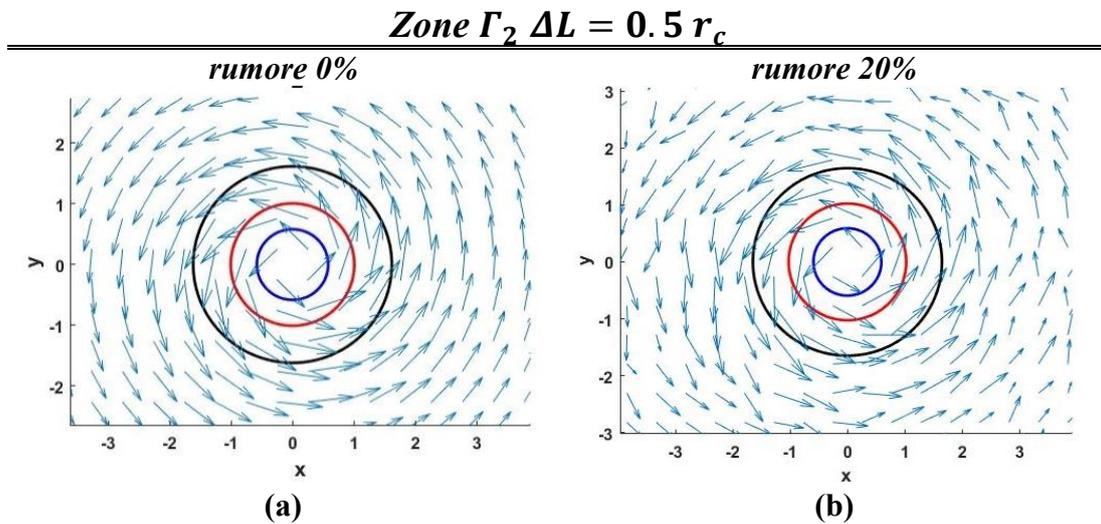
Tabella 11: Casi con rumore da analizzare.

$\Delta L/r_c$	0.5	0.1
<b>Rumore % <math>\max(\bar{v}_\theta)</math></b>	20%	20%
	70%	70%
	90%	90%

Come fatto nel caso di singolo vortice senza rumore analizziamo gli andamenti e le individuazioni del vortice con ogni singolo metodo.

### 6.2.1 Metodo $\Gamma_2$

Partiamo dal metodo  $\Gamma_2$  e vediamo come al variare del rumore per le diverse risoluzioni scelte varia la funzione  $\Gamma_2$  e le sue individuazioni. Per risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  consideriamo  $D = 2, D = 3$  e  $D = 5$  per risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$  consideriamo  $D = 2, D = 3, D = 5, D = 10, D = 15$  e  $D = 25$ .



<sup>5</sup> La funzione FORTRAN si chiama `random_number` e genera un valore “pseudo random” compreso tra 0 e 1. Questa la si applica alle due componenti di velocità. Ottenuti questi valori si effettua poi uno shift così da avere oscillazioni base tra  $-0.5$  e  $0.5$ . L’ampiezza delle fluttuazioni è poi modulata attraverso la velocità tangenziale massima moltiplicata per il livello di rumore desiderato (in questo caso 0.20, 0.70 e 0.90).

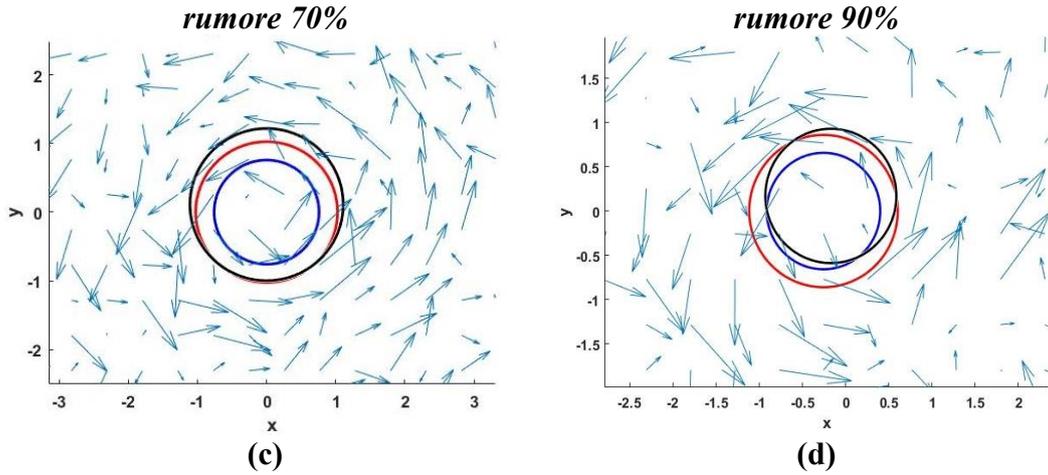


Figura 15: Zoom individuazione vortice metodo  $\Gamma_2$  soglia  $\frac{2}{\pi}$  risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  rumore 0% (a), 20% (b), 70% (c) e 90% (d) con  $D = 2$  (blu),  $D = 3$  (rosso),  $D = 5$  (nero). Scale diverse per ogni immagine.

### Zone $\Gamma_2 \Delta L = 0.1 r_c$

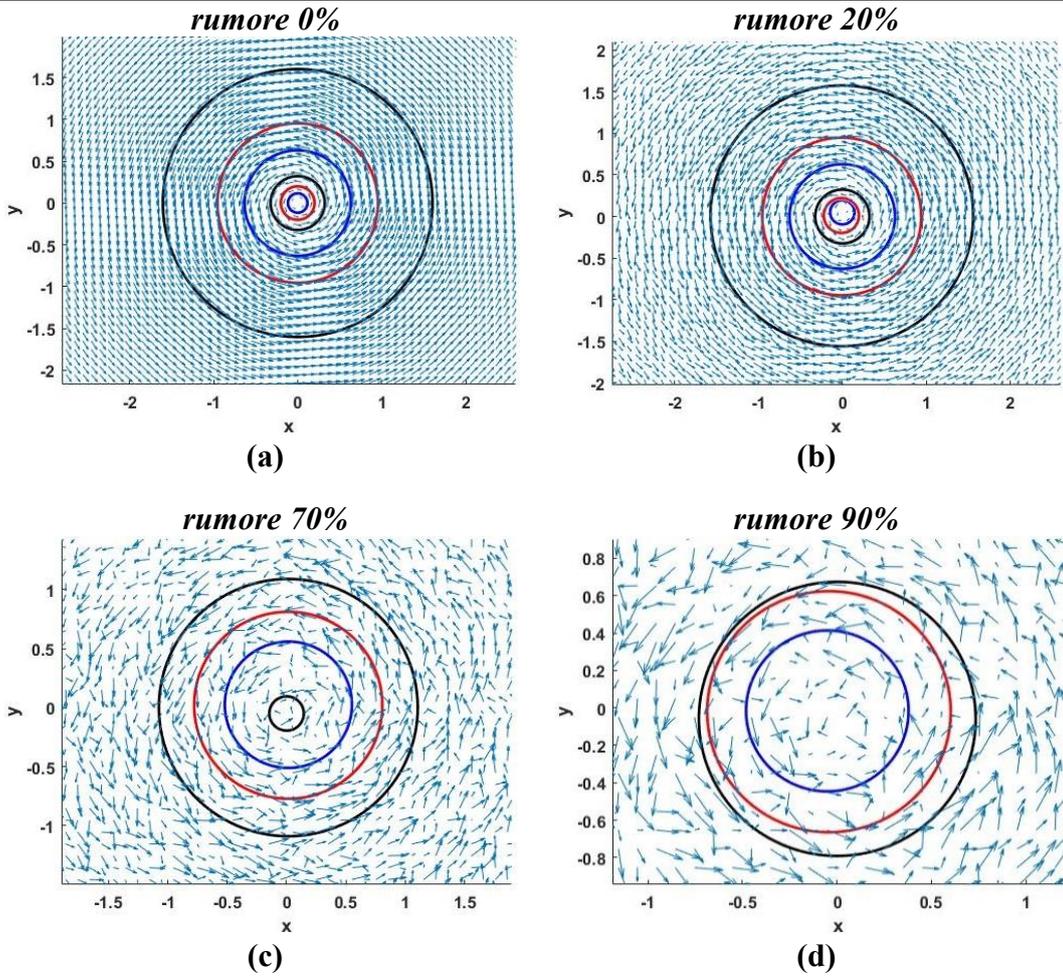


Figura 16: Zoom individuazione vortice metodo  $\Gamma_2$  soglia  $\frac{2}{\pi}$  risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$  rumore 0% con  $D = [2, 3, 5, 10, 15, 25]$  (a), 20% con  $D = [2, 3, 5, 10, 15, 25]$  (b), 70% con  $D = [5, 10, 15, 25]$  (c) e 90% con  $D = [10, 15, 25]$  (d). Scale diverse per ogni immagine.

$$\Delta L = 0.1 r_c \text{ con } D = 2$$

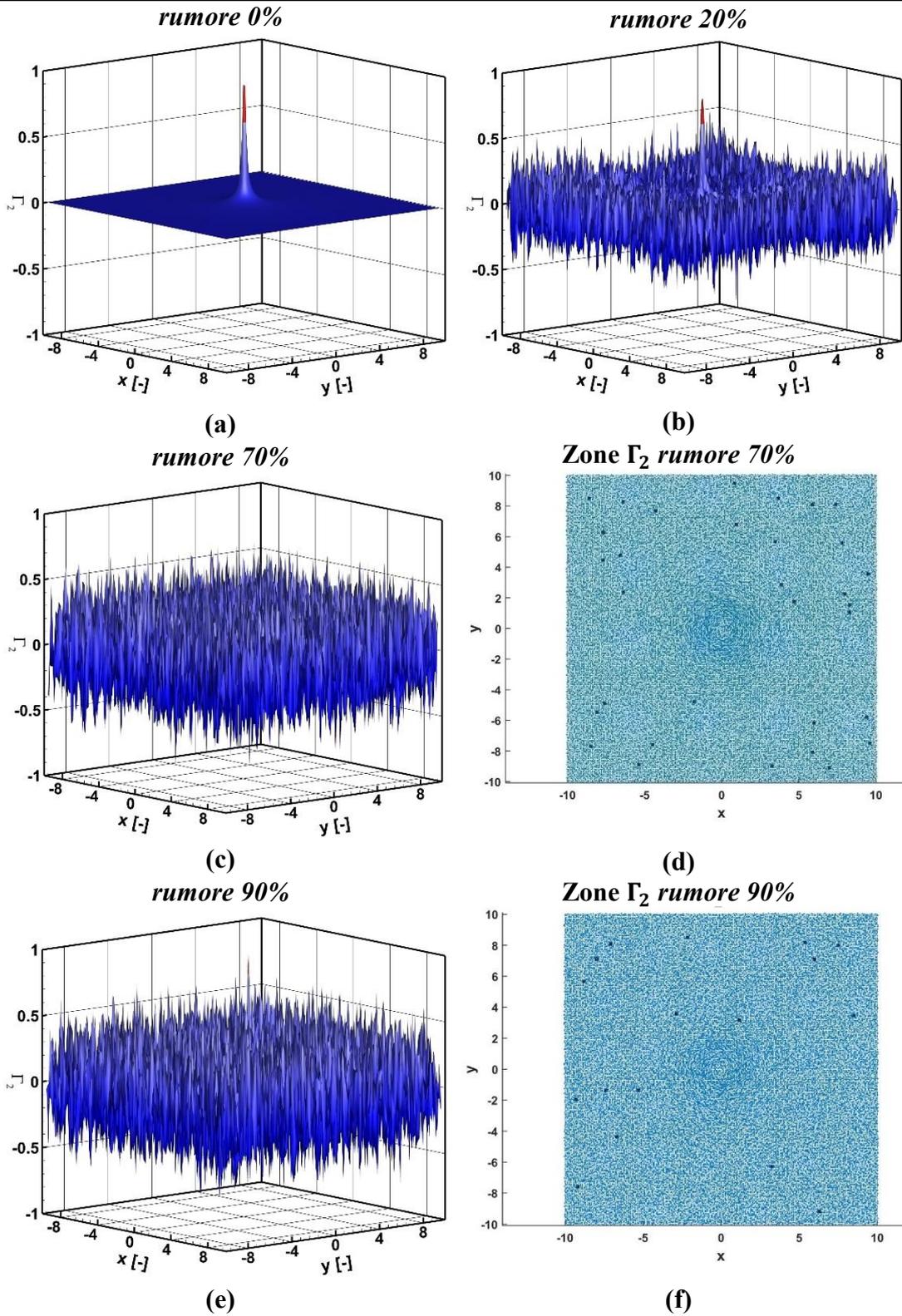


Figura 17: Andamenti funzione  $\Gamma_2$   $D=2$  e risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$  al variare del rumore con individuazione delle zone con valori superiori alla soglia  $2/\pi$  nei casi con 70% (d) e 90% (f) di rumore.

Per risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$  con rumore al 70% e 90% e  $D = 2$  per evidenziare la presenza di numerosi picchi si è introdotta anche l'individuazione del vortice effettuata tramite le circonferenze (Figura 17 “d” e “f”).

$$\Delta L = 0.1 r_c \text{ con } D = 3$$

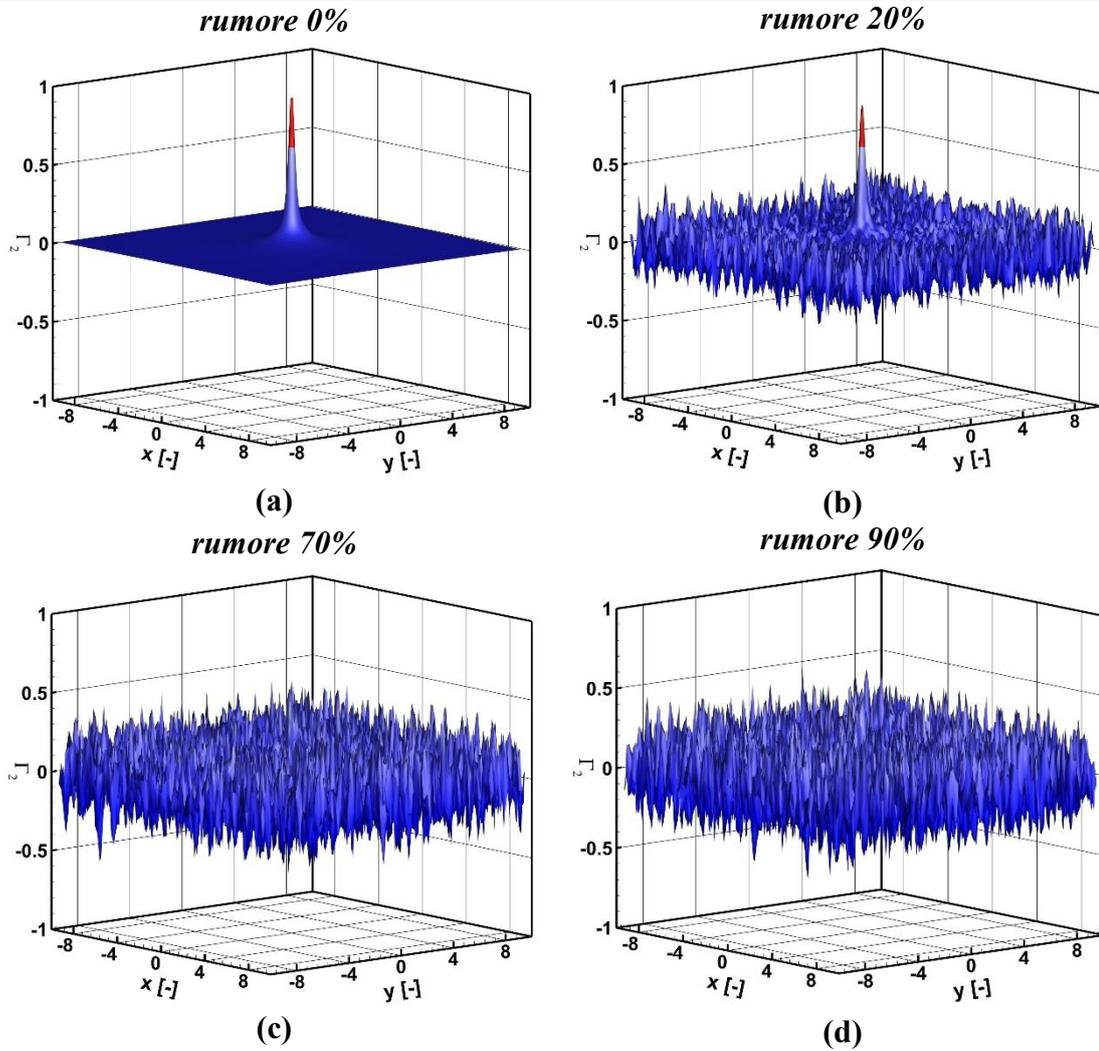


Figura 18: Andamenti funzione  $\Gamma_2$   $D=3$  e risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$  al variare del rumore.

$$\Delta L = 0.1 r_c \text{ con } D = 5$$

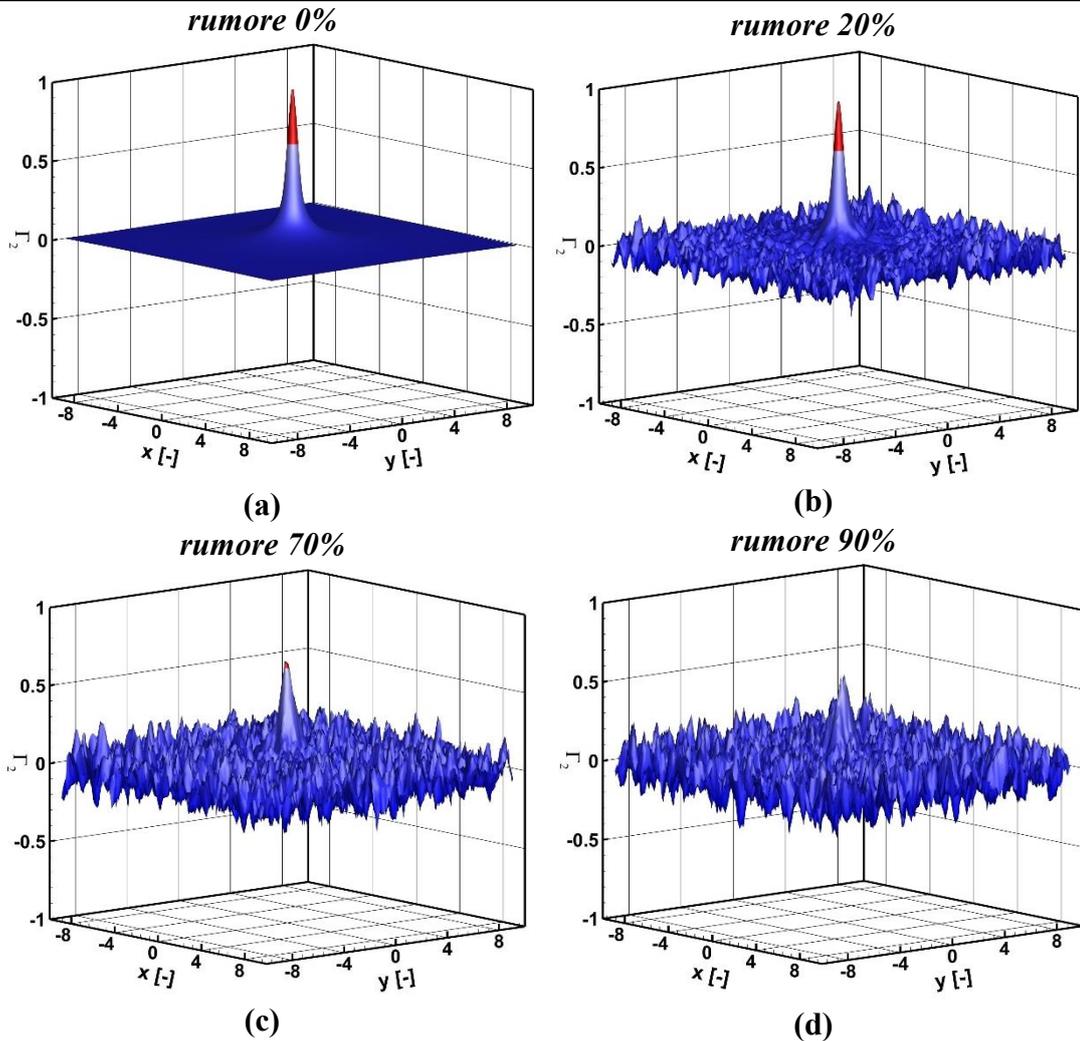


Figura 19: Andamenti funzione  $\Gamma_2$   $D=5$  e risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$  al variare del rumore.

Si osservano, dall'individuazione stessa del vortice e dall'andamento di alcune funzioni  $\Gamma_2$ , diversi comportamenti:

- Per risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  l'individuazione del vortice avviene con tutti i domini analizzati (Figura 15). All'aumentare del rumore, però, l'individuazione effettuata dal dominio  $D = 5$  diviene meno precisa, si osserva infatti come la zona che individua il vortice con  $D = 5$  non è più concentrica (Figura 15 "c" e "d");
- Per risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$  l'individuazione del vortice cambia molto al variare del rumore. Fino ad un rumore pari al 20% si individua il vortice in maniera ottimale con tutti i domini. Con un rumore al 70%, invece, solo i domini  $D = 5, D = 10, D = 15, D = 25$  individuano il vortice. La funzioni  $\Gamma_2$  con dominio  $D = 2$  presenta numerose oscillazioni e una serie di picchi che superano la soglia stabilita (Figura 17 "c" e "d") diversamente  $D = 3$  presenta

numerose oscillazioni ma nessuna zona che supera la soglia stabilita (Figura 18 “c”). Arrivando ad un rumore pari al 90% solo le funzioni  $\Gamma_2$  con  $D = 10, D = 15, D = 25$  sono in grado di individuare il vortice. Il comportamento per  $D = 2$  (Figura 17 “e” e “f”) e  $D = 3$  (Figura 18 “d”) è analogo al caso con il 70% di rumore, per dominio  $D = 5$  invece non vi sono zone che raggiungono la soglia stabilita (Figura 19 “d”). Sebbene il dominio  $D = 25$  consenta l’individuazione del vortice si osserva una non concentricità della zona individuata rispetto alle zone  $D = 10$  e  $D = 15$  (Figura 16 “d”);

Sono presenti delle analogie tra le due risoluzioni:

1. Per un dominio  $D = 5$  e  $D = 25$  rispettivamente per risoluzioni  $\Delta L = 0.5 r_c$  e  $\Delta L = 0.1 r_c$  e rumore al 90% le zone che individuano il vortice con soglia  $2/\pi$  non sono più concentriche (Figura 15 “d” e Figura 16 “d”). Ricordando che il raggio  $\tilde{R} = D \times \Delta L$  si osserva che per entrambe le risoluzioni e fissati quei domini il raggio  $\tilde{R} = 2.5$ . Questo spiega l’analogo comportamento presente;
2. Per un rumore pari al 90% il primo dominio che consente l’individuazione del vortice è il dominio  $D = 10$  in caso di risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$ . Questo è legato al numero di punti presenti nel raggio del vortice. Per risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$ , invece, essendo presenti nel raggio del vortice solo due punti, è possibile individuare il vortice utilizzando anche un dominio  $D = 2$ ;

Nel caso privo di rumore all’aumentare del dominio è evidente un aumento del picco associato alla funzione  $\Gamma_2$ , invece, nel caso con rumore non vi è un andamento analogo come evidenziato dalle seguenti tabelle (Tabella 12 e Tabella 13). L’aspetto però che si conserva è che essendo un vortice antiorario il picco della funzione  $\Gamma_2$  per qualsiasi dominio è positivo.

Tabella 12: Massimo della funzione  $\Gamma_2$  al variare del rumore e per diversi domini risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$ .

$\Delta L = 0.5 r_c$			
$D$	2	3	5
<b>Rumore 0%</b>	0.9149	0.9526	0.9787
<b>Rumore 20%</b>	0.9220	0.9496	0.9691
<b>Rumore 70%</b>	0.8788	0.8757	0.8480
<b>Rumore 90%</b>	0.8627	0.8429	0.6905

Tabella 13: Massimo della funzione  $\Gamma_2$  al variare del rumore e per diversi domini risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$ .

$\Delta L = 0.1 r_c$						
$D$	2	3	5	10	15	25
<b>Rumore 0%</b>	0.9147	0.9523	0.9783	0.9929	0.9964	0.9985
<b>Rumore 20%</b>	0.8405	0.9017	0.9479	0.9797	0.9866	0.9878
<b>Rumore 70%</b>	Molti	Nessuno	0.6815	0.8344	0.8692	0.8437
<b>Rumore 90%</b>	Molti	Nessuno	Nessuno	0.7383	0.7919	0.7399

Dunque, da un'analisi preliminare del metodo  $\Gamma_2$  è possibile osservare come una volta scelto opportunamente il dominio sia possibile individuare il vortice. Così come nel caso senza rumore, anche aumentando la percentuale di rumore, l'errore che si commette valutando il centro non pesato è pari a metà della distanza della risoluzione spaziale ovvero in termini percentuali al 50%. Osserviamo, ora, come varia al variare del rumore l'errore percentuale commesso nel calcolo del centro pesato (Tabella 14 e Tabella 15), in rosso si evidenziano gli errori minori.

Tabella 14: Errore calcolo del centro pesato del vortice per risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  al variare del rumore, metodo  $\Gamma_2$ . In rosso sono evidenziati gli errori minori.

$\Delta L = 0.5 r_c$			
$D$	2	3	5
<b>Rumore 0%</b>	0.0481%	0.140%	0.185%
<b>Rumore 20%</b>	<b>0.514%</b>	1.154%	0.833%
<b>Rumore 70%</b>	<b>0.570%</b>	1.347%	3.367%
<b>Rumore 90%</b>	<b>4.970%</b>	46.660%	47.324%

Tabella 15: Errore calcolo del centro pesato del vortice per risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$  al variare del rumore, metodo  $\Gamma_2$ . In rosso sono evidenziati gli errori minori.

$\Delta L = 0.1 r_c$						
$D$	2	3	5	10	15	25
<b>Rumore 0%</b>	0.0393%	0.0812%	0.0862%	0.1040%	0.117%	0.202%
<b>Rumore 20%</b>	34.89%	2.938%	0.831%	<b>0.492%</b>	0.499%	11.080%
<b>Rumore 70%</b>	Molti	Nessuno	36.144%	<b>1.500%</b>	2.438%	8.709%
<b>Rumore 90%</b>	Molti	Nessuno	Nessuno	<b>35.145%</b>	46.998%	36.646%

L'aspetto che lega il dominio  $D$  al numero di punti presenti nel raggio del vortice  $r_c$  viene fortemente evidenziato anche dagli errori percentuali espressi in termini della distanza della risoluzione spaziale. Si osserva, infatti, che l'errore minimo si commette quando  $D$  è pari proprio al numero di punti presenti nel raggio. Inoltre, l'errore commesso per qualsiasi dominio è sempre inferiore alla metà della distanza della

risoluzione spaziale per cui passando dal centro non pesato al centro pesato l'individuazione migliora. Quindi, sebbene in assenza di rumore la scelta del dominio ricade sul caso  $D = 2$  in presenza di rumore la scelta più opportuna risulta il valore del dominio che è pari al numero di punti presenti nel raggio del vortice. Inoltre, si osserva che valori superiori consentono di individuare e calcolare analogamente il centro anche se si commettono errori più significativi. Nella Figura 20 si riportano il campo di velocità con i diversi centri per risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$  il comportamento è analogo per risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$ .

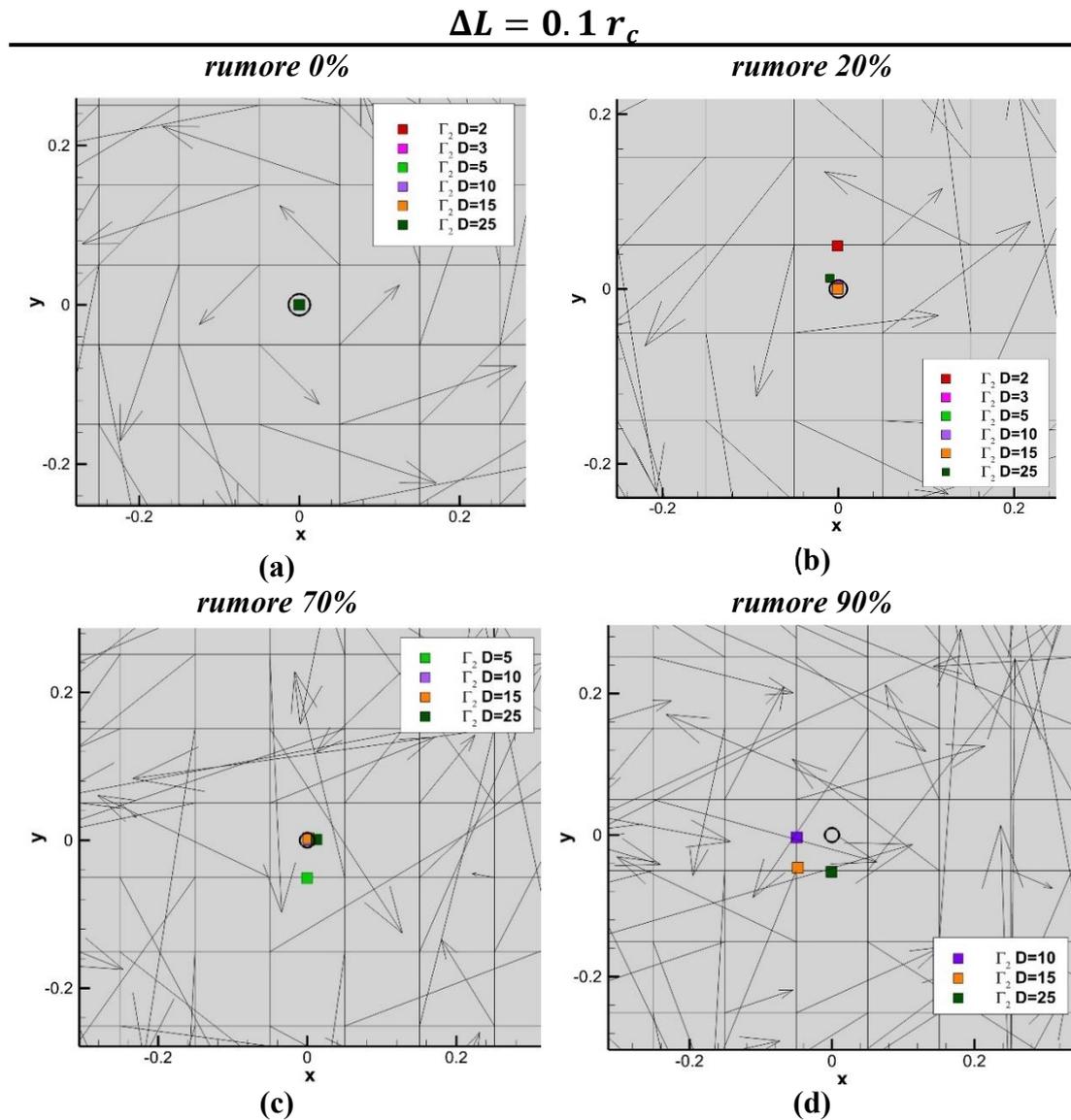


Figura 20: Campi di velocità e centri valutati con il criterio  $\Gamma_2$  e con diversi domini  $D$  per rumore allo 0% (a), 20% (b), 70% (c) e 90% (d).

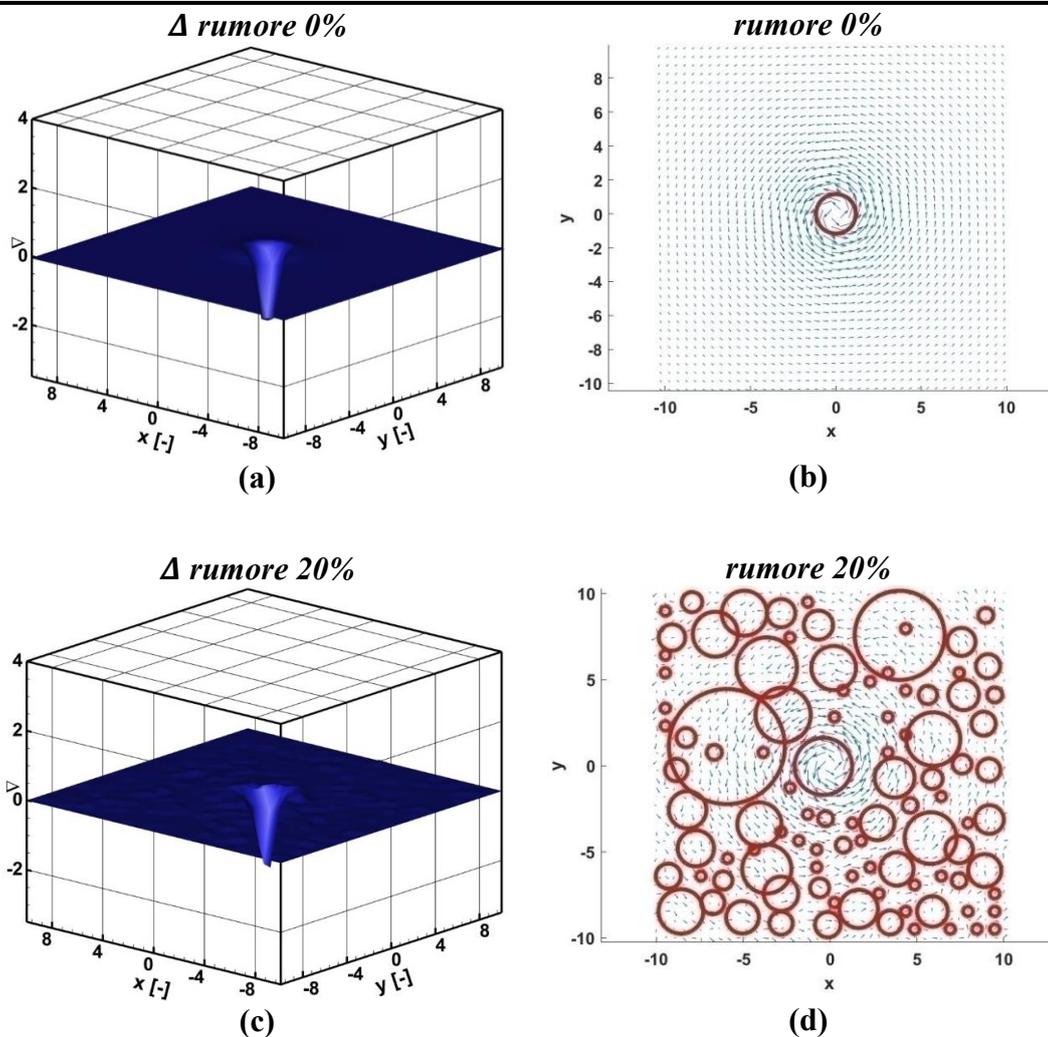
Dalle immagini è ben evidente che per qualsiasi livello di rumore e per qualsiasi dominio  $D$  il centro, essendo gli errori inferiori al 50%, cade all'interno della cella che contiene il centro teorico  $(0,0)$  o al più sul suo bordo.

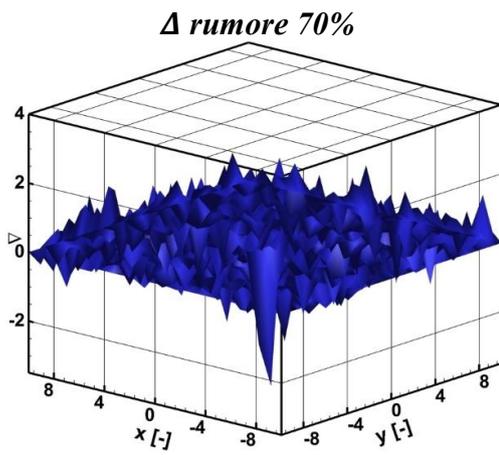
### 6.2.2 Metodi $\Delta$ e $Q$

Passiamo ora all'analisi del metodo  $\Delta$  e del metodo  $Q$ . Scegliamo come livello di soglia quello utilizzato nel caso senza rumore così da poter effettuare un confronto. Differentemente dal caso senza rumore le zone individuate dai metodi  $\Delta$  e  $Q$  ora non sono più coincidenti.

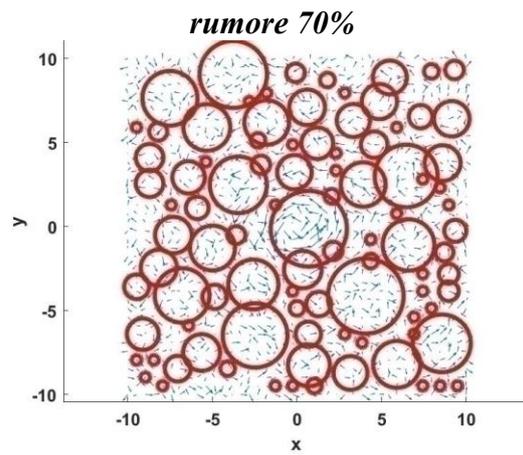
Di seguito si riportano gli andamenti delle funzioni  $\Delta$  e le relative individuazioni per risoluzione  $\Delta L/r_c = 0.5$  (Figura 21) e  $\Delta L/r_c = 0.1$  (Figura 22). Il comportamento della funzione  $Q$  è simile con la differenza che vanno considerati i picchi positivi della funzione e non quelli negativi. Inoltre, le individuazioni compiute dai due metodi all'aumentare del rumore non sono più coincidenti come nel caso senza rumore.

#### ***Zone $\Delta < 0$ e funzione $\Delta$ risoluzione $\Delta L = 0.5 r_c$***

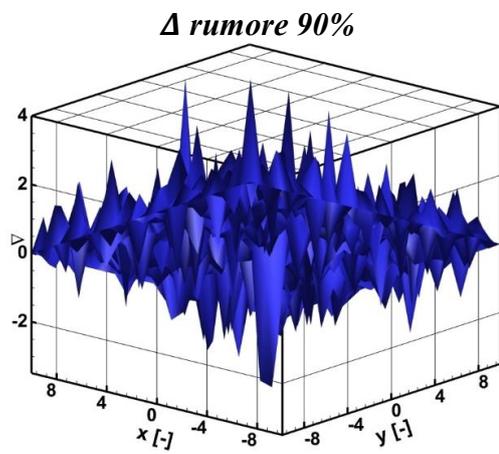




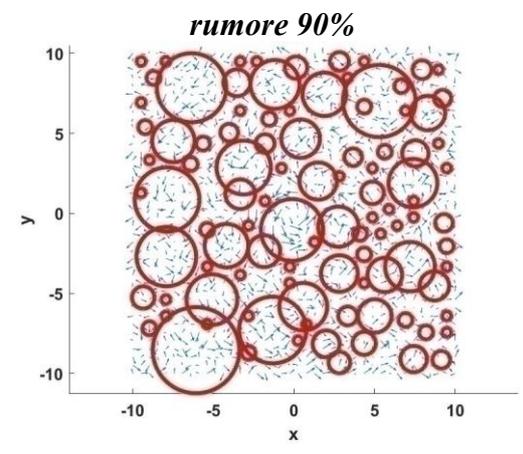
(e)



(f)



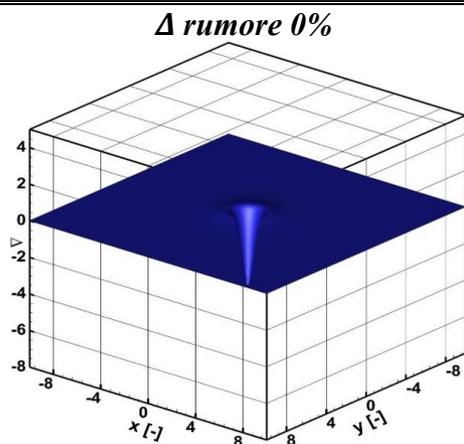
(g)



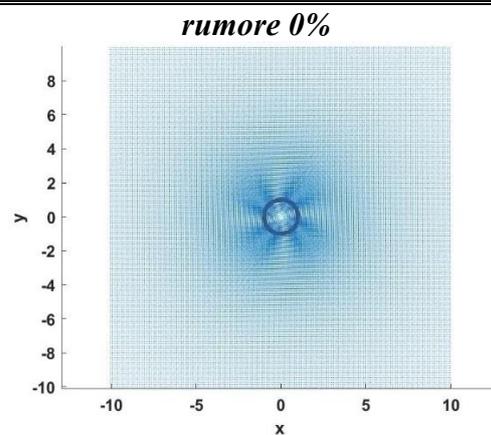
(h)

Figura 21: Risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  andamenti funzione  $\Delta$  e zone individuate  $\Delta < 0$  al variare del rumore.

***Zone  $\Delta < 0$  e funzione  $\Delta$  risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$***



(a)



(b)

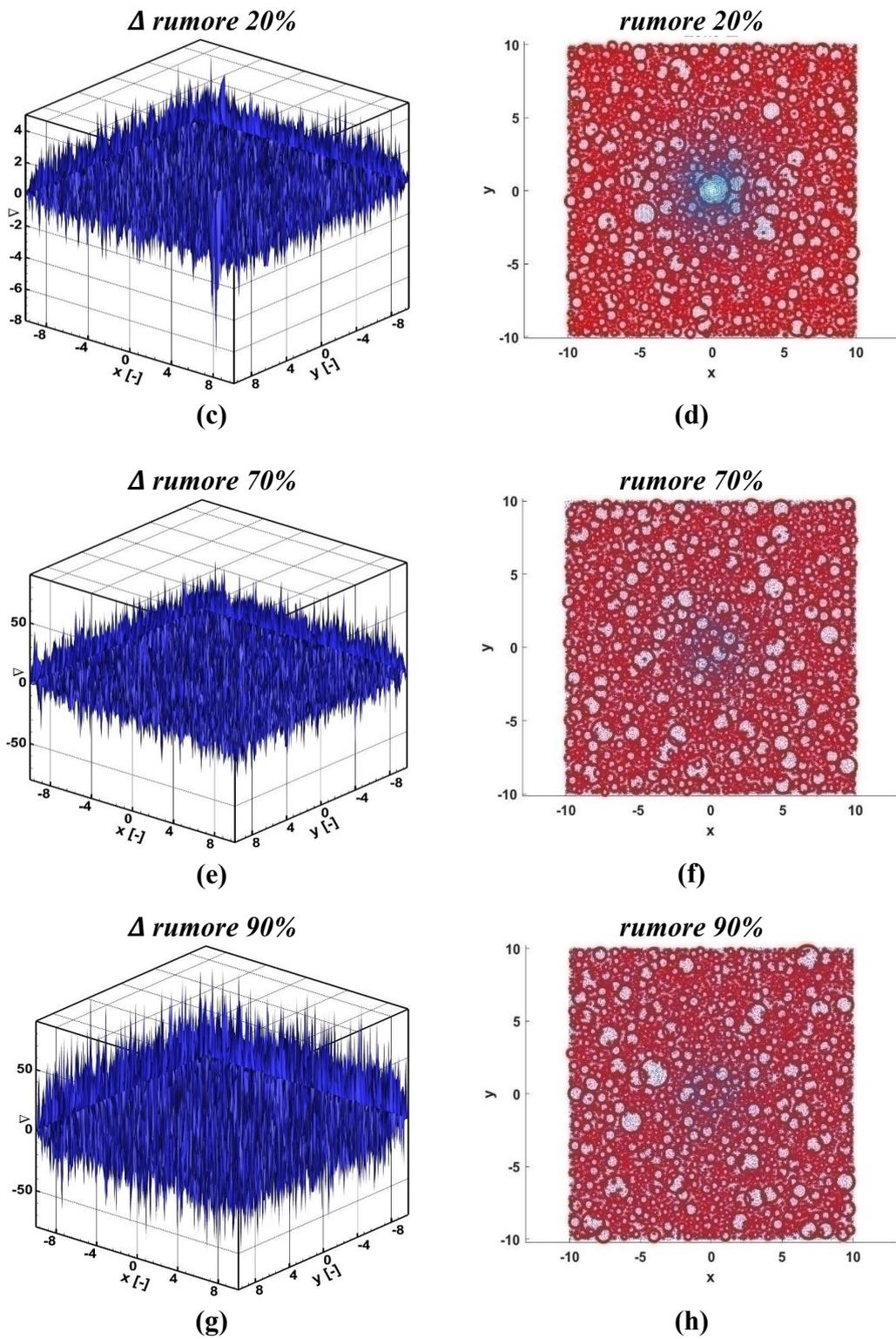


Figura 22: Risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$  andamenti funzione  $\Delta$  e zone individuate  $\Delta < 0$  al variare del rumore.

Si osserva che all'aumentare del rumore le funzioni presentano sempre più oscillazioni. Ciò si verifica perché questi metodi sono basati sul gradiente di velocità

e dunque sul calcolo di derivate che in presenza di rumore generano oscillazioni. Inoltre, si osserva, all'aumentare del rumore un aumento in modulo del minimo di  $\Delta$  e del massimo di  $Q$  come riportato nelle seguenti tabelle (Tabella 16 e Tabella 17).

Tabella 16: Minimi della funzione  $\Delta$  per risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  e  $\Delta L = 0.1 r_c$  al variare del rumore.

<b>min <math>\Delta</math></b>				
<b>Rumore</b>	0%	20%	70%	90%
<b><math>\Delta L = 0.5 r_c</math></b>	-1.958	-2.071	-4.024	-4.046
<b><math>\Delta L = 0.1 r_c</math></b>	-3.882	-10.539	-51.100	-75.137

Tabella 17: Massimi della funzione  $Q$  per risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  e  $\Delta L = 0.1 r_c$  al variare del rumore.

<b>max <math>Q</math></b>				
<b>Rumore</b>	0%	20%	70%	90%
<b><math>\Delta L = 0.5 r_c</math></b>	0.489	0.516	1.001	0.959
<b><math>\Delta L = 0.1 r_c</math></b>	0.971	2.470	12.319	17.730

L'aumento si verifica per tutti i casi eccetto al 90% di rumore con risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$ . Si osserva che a fissato rumore, così come avveniva con il rumore allo 0%, il minimo di  $\Delta$  diminuisce e il massimo di  $Q$  aumenta all'aumentare della risoluzione.

Per quanto riguarda l'individuazione dei vortici si osserva che la soglia zero non è più efficace a causa delle oscillazioni presenti nelle funzioni  $\Delta$  e  $Q$  (Figura 21 e Figura 22). Per cui si potrebbe pensare di variare il livello di soglia per permettere al metodo di individuare da solo il singolo vortice, questo significherebbe analizzare caso per caso le funzioni  $\Delta$  e  $Q$  e scegliere il livello di soglia più opportuno. Per risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  il picco è più evidente rispetto alla risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$ . Per risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$  e rumore al 70% e 90% non si evidenziano, tramite le funzioni  $\Delta$  e  $Q$  (Figura 22), dei particolari picchi per cui seppur si volesse variare il livello di soglia non sarebbe semplice individuare il valore opportuno. Questo differente comportamento tra le due risoluzioni si spiega con la differenza di punti nel campo, ovvero un numero di informazioni minore per risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$ . Entrambi i metodi,  $\Delta$  e  $Q$ , non sono, dunque, in grado da soli di individuare un solo vortice e valutarne le caratteristiche ma è necessario imporre il numero di vortici da valutare o, caso per caso, variare il livello di soglia. Nella nostra analisi imponiamo noti il numero di vortici e ne calcoliamo il centro e le caratteristiche.

Nella Tabella 18 e Tabella 19 sono riportati gli errori al variare del rumore sia del caso di centri non pesati che pesati, rispettivamente per il metodo  $\Delta$  e  $Q$ .

Tabella 18: Errore calcolo del centro non pesato e pesato del vortice per risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  e  $\Delta L = 0.1 r_c$  al variare del rumore, metodo  $\Delta$ .

<b>Metodo <math>\Delta</math></b>				
$\Delta L/r_c$	0.5 non pesati	0.5 pesati	0.1 non pesati	0.1 pesati
<b>Rumore 0%</b>	50%	$7.44 \times 10^{-15} \%$	50%	$3.12 \times 10^{-14}$
<b>Rumore 20%</b>	50%	6.44%	112.37%	43.77%
<b>Rumore 70%</b>	50%	26.94%	181.18%	227.78%
<b>Rumore 90%</b>	50%	47.40%	305.67%	338.57%

Tabella 19: Errore calcolo del centro non pesato e pesato del vortice per risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  e  $\Delta L = 0.1 r_c$  al variare del rumore, metodo  $Q$ .

<b>Metodo <math>Q</math></b>				
$\Delta L/r_c$	0.5 non pesati	0.5 pesati	0.1 non pesati	0.1 pesati
<b>Rumore 0%</b>	50%	$7.44 \times 10^{-15} \%$	50%	$3.12 \times 10^{-14}$
<b>Rumore 20%</b>	50%	5.78%	112.37%	17.92%
<b>Rumore 70%</b>	50%	13.21%	181.18%	197.66%
<b>Rumore 90%</b>	50%	18.72%	5145.54%	5145.54%

Per rumore al 70% e al 90% e risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$  non si ha un miglioramento del centro pesato del vortice rispetto al centro non pesato a differenza della risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$ . Questo si verifica perché andando a pesare nella circonferenza che esso individua un rumore al 70% e al 90% causa numerose oscillazioni che influiscono molto sul calcolo del centro pesato. Questo fenomeno, invece non si verifica per risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  poiché, nelle zone che esso individua, sono presenti molti meno punti e dunque il peso si effettua su meno valori.

Nella Figura 23 sono riportati i centri non pesati (diamanti) e pesati (cerchi) per risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$  per evidenziare questo comportamento.

$$\Delta L = 0.1 r_c \text{ metodi } \Delta \text{ e } Q$$

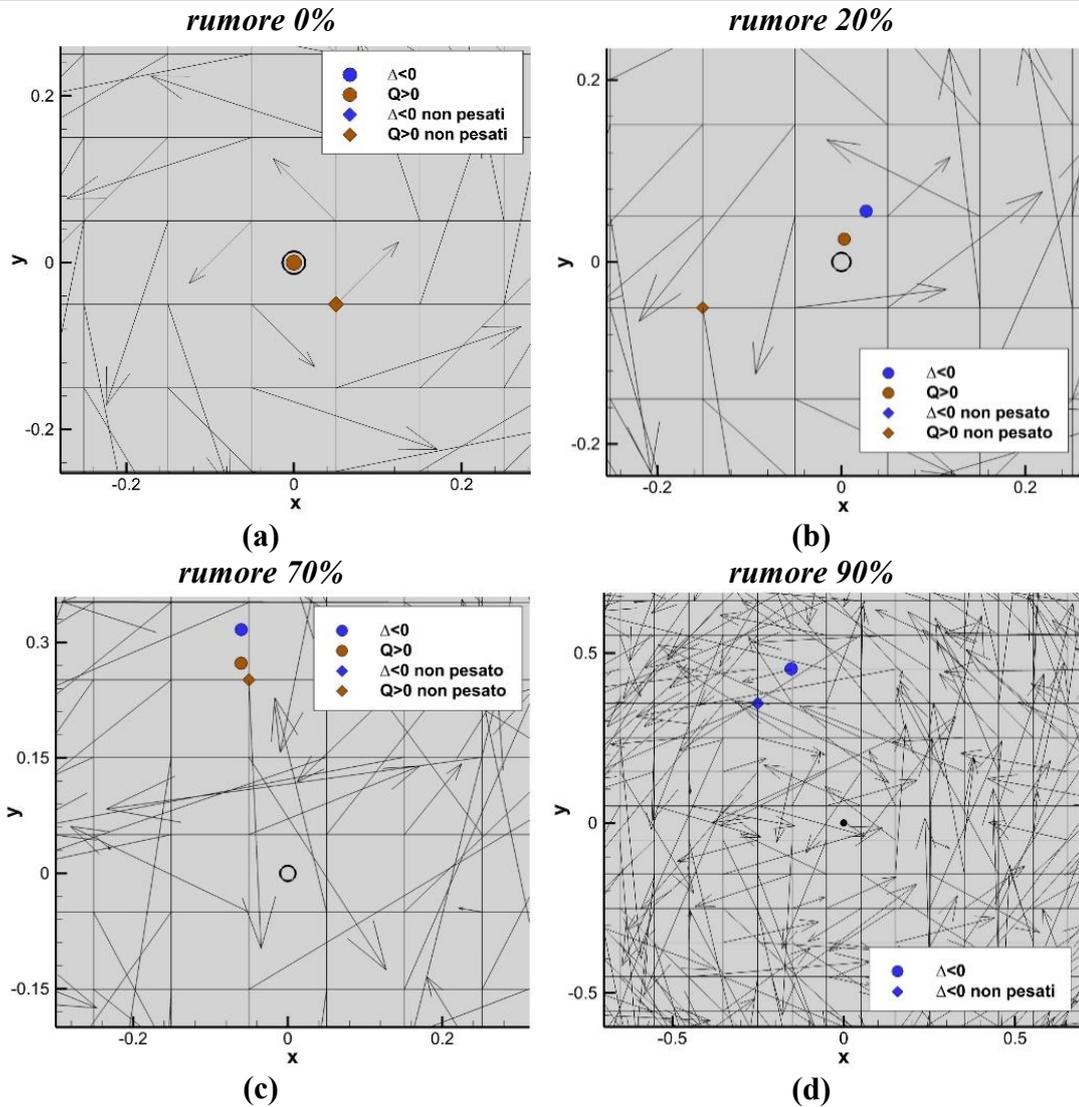


Figura 23: Campi di velocità e centri non pesati (diamanti) e pesati (cerchi) valutati con i criteri  $\Delta$  (blu) e  $Q$  (marrone) per rumore allo 0% (a), 20% (b), 70% (c) e 90% (d). Scale diverse.

Nell'immagine senza rumore (Figura 23 "a") i centri pesati sono coincidenti tra loro e con il centro reale, all'aumentare del rumore si osserva un peggioramento. Al 20% (Figura 23 "b") e al 70% (Figura 23 "c") i centri non pesati per i metodi  $\Delta$  e  $Q$  coincidono perfettamente. Per rumore al 70% pesando i valori si ha un peggioramento come già evidenziato dalla Tabella 18 e Tabella 19. Inoltre, con rumore al 90% il metodo  $Q$  sbaglia completamente mentre, come evidente sia dalla Tabella 18 che dalla Figura 23 "d", il metodo  $\Delta$  presenta un peggioramento del calcolo del centro pesato.

### 6.2.3 Metodi massimo del modulo della vorticità e della circolazione

Passiamo ad analizzare i metodi che individuano i centri come il massimo del modulo della vorticità e della circolazione. In assenza di rumore abbiamo scelto delle soglie pari al 50% del valore massimo di entrambe le funzioni. L'idea è quella di utilizzare le medesime soglie così da poter analizzare come cambia il metodo. Dunque, analizziamo le zone individuate e l'andamento delle funzioni. Scelta la soglia i punti che possono essere vortici possono assumere sia valori positivi che negativi delle funzioni  $\omega_z$  e  $\gamma$  per cui per ogni campo vettoriale, per entrambi i metodi, sono presenti zone positive e negative sebbene, essendo il vortice antiorario, il picco di vorticità e circolazione dovrebbe essere positivo.

Di seguito si riportano le individuazioni compiute con il metodo del massimo del modulo della vorticità (Figura 24, Figura 25, Figura 26 e Figura 27) e le funzioni vorticità (Figura 28 e Figura 29) per entrambe le risoluzioni in analisi e al variare del rumore. Le individuazioni, che si ottengono con il metodo massimo del modulo della circolazione, e le funzioni circolazione presentano un comportamento analogo.

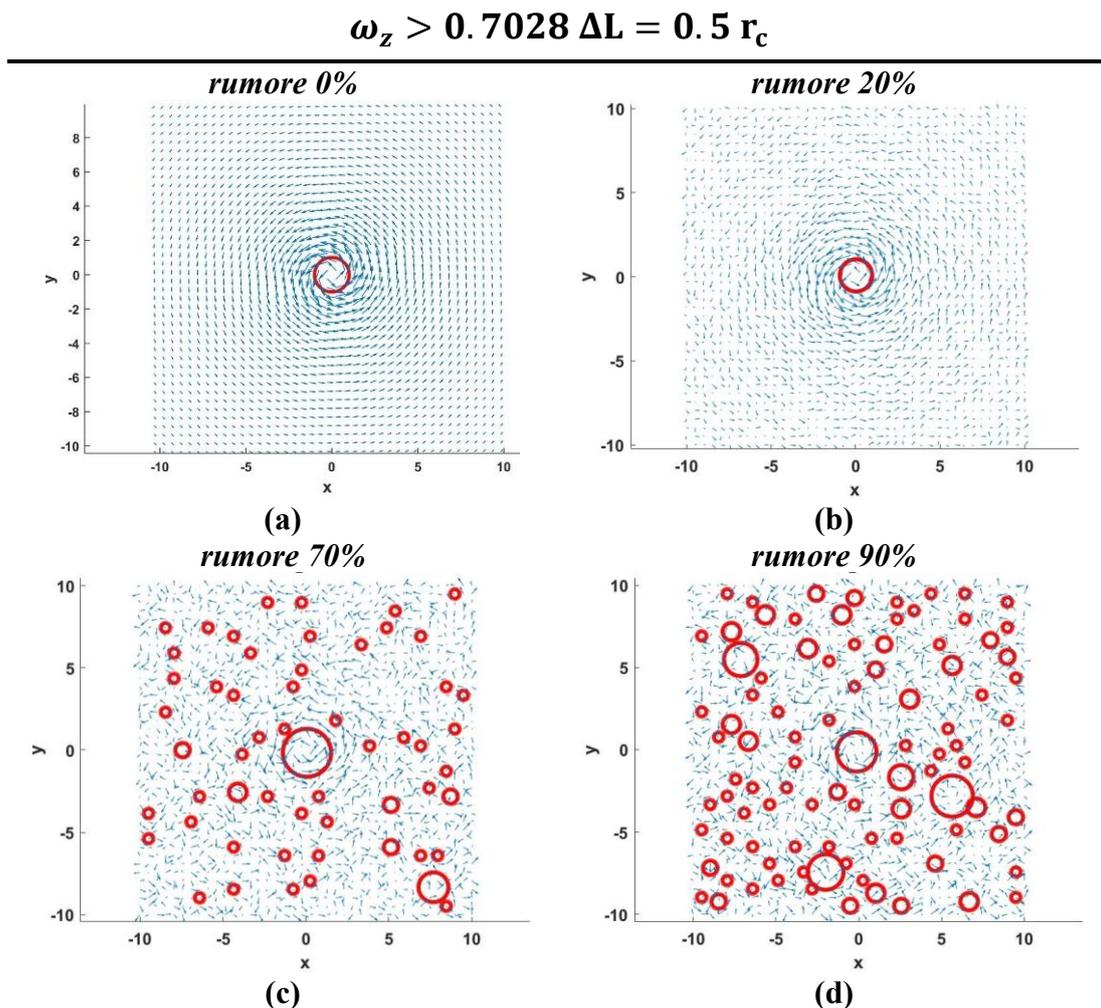


Figura 24: Individuazione vortice metodo  $\max|\omega_z|$  soglia 0.7028 solo picchi positivi risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  rumore 0% (a), 20% (b), 70% (c) e 90% (d).

$$\omega_z < -0.7028 \Delta L = 0.5 r_c$$

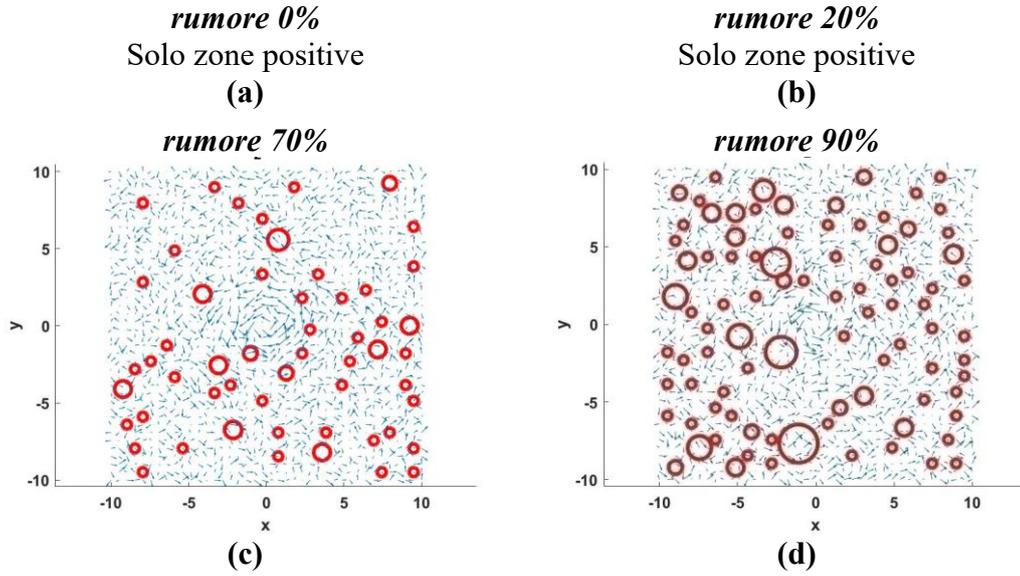


Figura 25: Individuazione vortice metodo  $\max|\omega_z|$  soglia 0.7028 solo picchi negativi risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  rumore 0% (a), 20% (b), 70% (c) e 90% (d).

$$\omega_z > 0.9852 \Delta L = 0.1 r_c$$

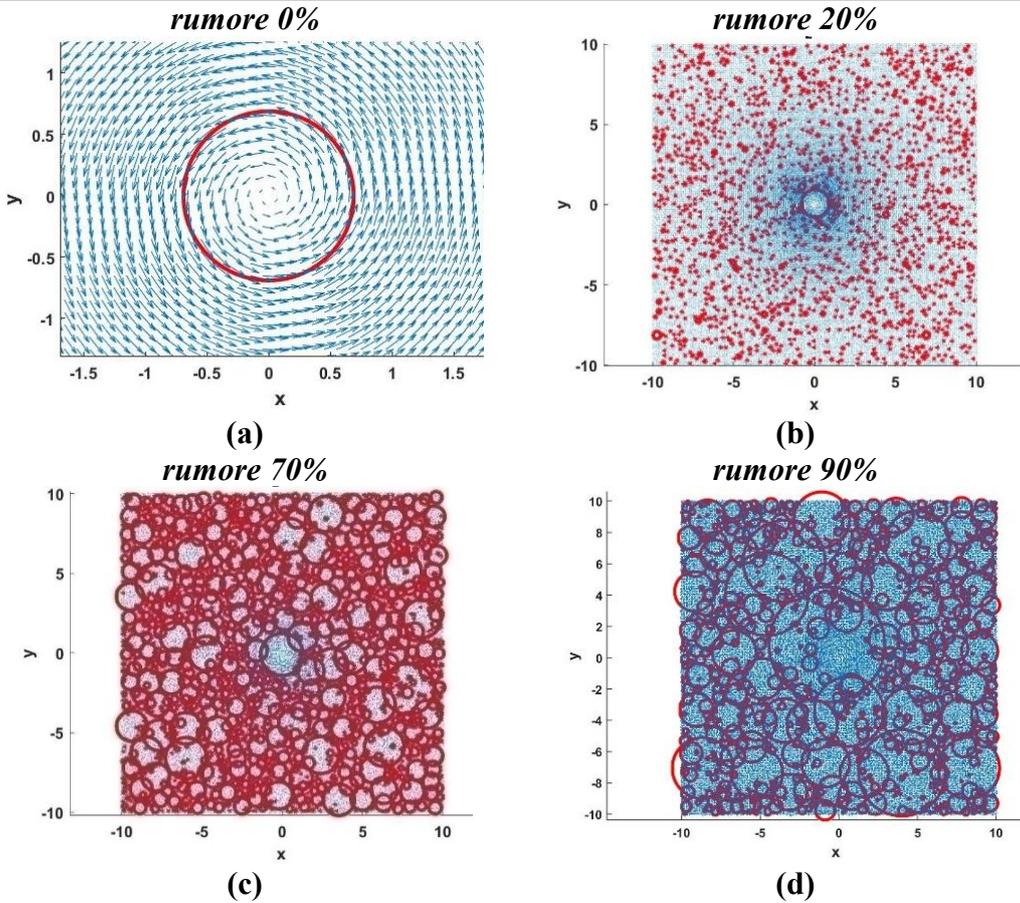


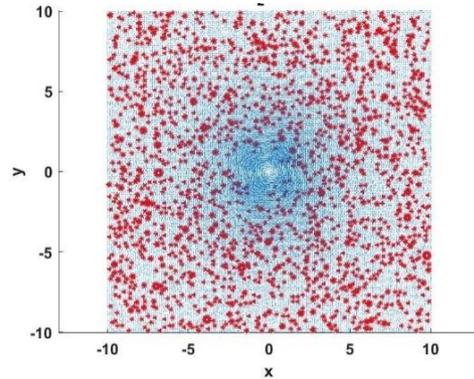
Figura 26: Individuazione vortice metodo  $\max|\omega_z|$  soglia 0.9852 solo picchi positivi risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$  rumore 0% (a), 20% (b), 70% (c) e 90% (d).

$$\omega_z < -0.9852 \Delta L = 0.1 r_c$$

*rumore 0%*

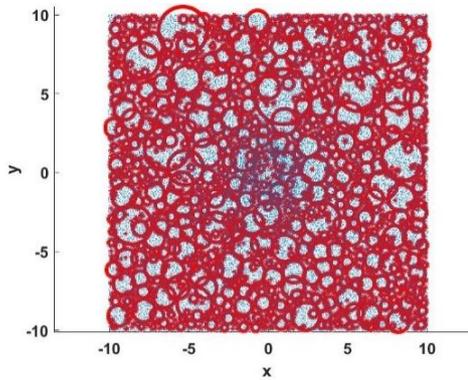
Solo zone positive

*rumore 20%*



(a)

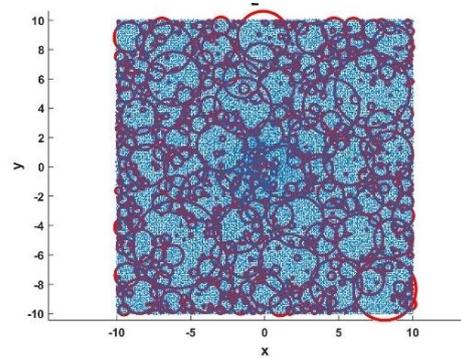
*rumore 70%*



(c)

(b)

*rumore 90%*

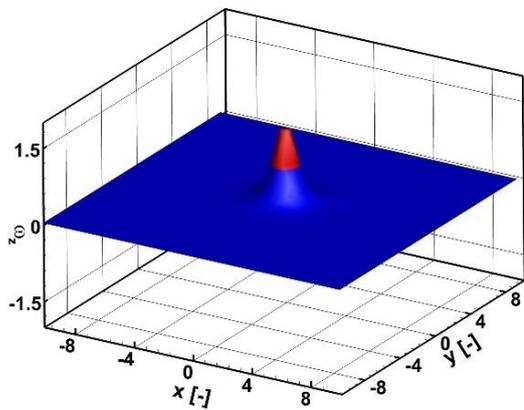


(d)

Figura 27: Individuazione vortice metodo  $\max|\omega_z|$  soglia 0.9852 solo picchi negativi risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$  rumore 0% (a), 20% (b), 70% (c) e 90% (d).

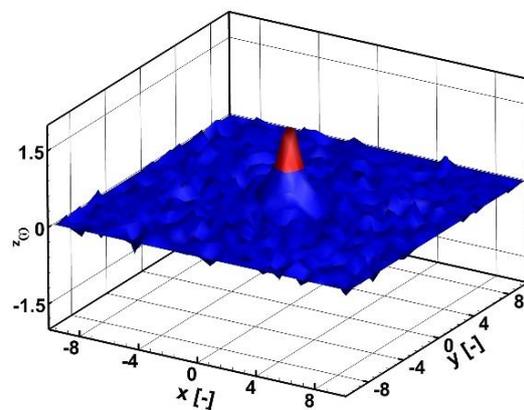
$$\omega_z \text{ risoluzione } \Delta L = 0.5 r_c$$

*rumore 0%*



(a)

*rumore 20%*



(b)

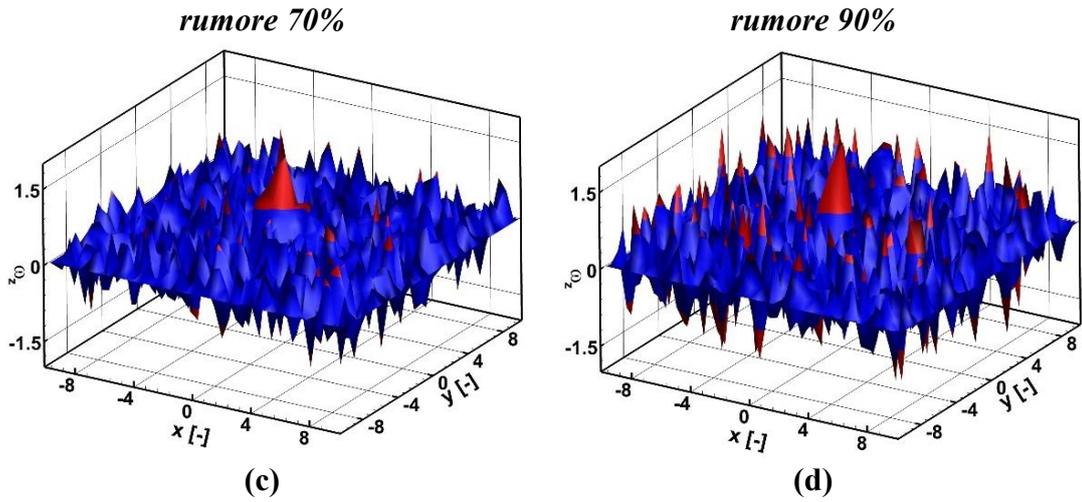


Figura 28: Andamenti funzione  $\omega_z$  per risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  al variare del rumore.

**$\omega_z$  risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$**

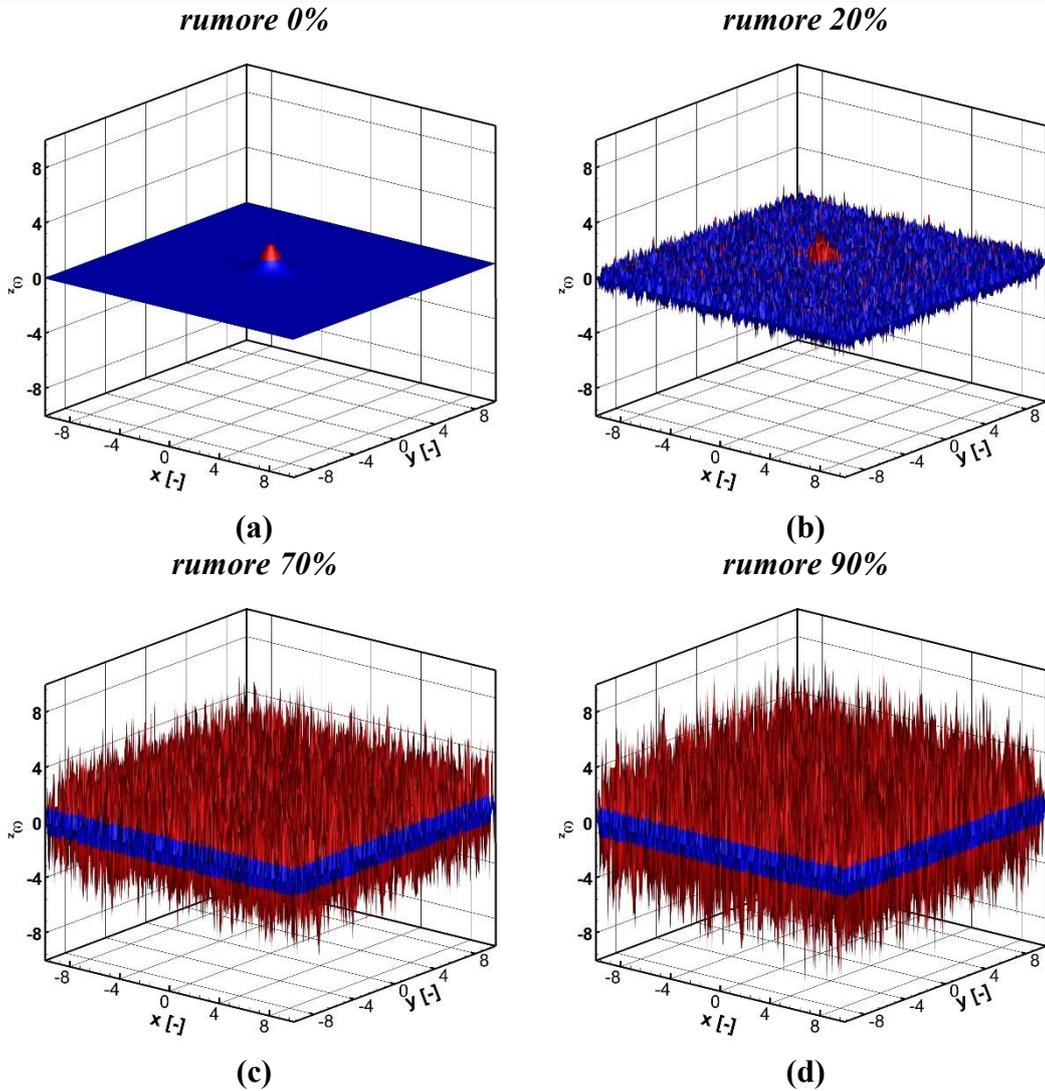


Figura 29: Andamenti funzione  $\omega_z$  per risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$  al variare del rumore.

Nelle funzioni (Figura 28 e Figura 29) le zone rosse sono le zone individuate che presentano valori in modulo maggiori delle soglie scelte. Come ben evidente all'aumentare del rumore vi sono sempre più punti che, in modulo, assumono valori maggiori delle soglie scelte. Dall'andamento della vorticità, e in modo analogo della circolazione, si evidenzia come il picco associato al centro, all'aumentare del rumore, venga inglobato dalle numerose oscillazioni presenti. Questo aspetto è ben evidente soprattutto in caso di risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$  (Figura 29) dove per rumore al 70% e al 90% il picco non è più osservabile. Per risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  (Figura 28) il picco continua ad essere abbastanza evidente anche per rumore al 90%. Questa differenza di andamenti e individuazioni tra le due risoluzioni è legata alla presenza di un numero minore di punti per risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  che comporta un'approssimazione peggiore ma al contempo presenta un'influenza minore dovuta al rumore, come già evidenziato per le funzioni  $\Delta$  e  $Q$ . In ogni caso purtroppo, eccetto nel caso con 20% di rumore e risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  (Figura 24 "b"), la soglia scelta non consente l'individuazione di un singolo vortice. In realtà per rumore al 70% e al 90% con risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$  è del tutto impossibile scegliere un livello di soglia che consenta l'individuazione di un solo vortice, per cui si pensa di non variare la soglia ma di inserire il numero di vortici da individuare.

Impostando il numero di vortici pari ad uno, si calcola il centro. In Tabella 20 e Tabella 21 sono riportati gli errori, rispettivamente per metodo  $\max |\omega_z|$  e  $\max |\gamma|$ , al variare del rumore sia nel caso di centri non pesati che pesati con i relativi valori massimi o minimi delle funzioni.

Tabella 20: Errore calcolo del centro non pesato e pesato del vortice per risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  e  $\Delta L = 0.1 r_c$  al variare del rumore con i relativi massimi o minimi, metodo  $\max |\omega_z|$ .

<b>Metodo <math>\max  \omega_z </math></b>						
<b><math>\Delta L/r_c</math></b>	<b>0.5 non pesati</b>	<b>0.5 pesati</b>	<b><math>\omega_z</math></b>	<b>0.1 non pesati</b>	<b>0.1 pesati</b>	<b><math>\omega_z</math></b>
<b>Rumore 0%</b>	50%	$3.73 \times 10^{-15}$ %	1.406	50%	$4.28 \times 10^{-15}$ %	1.970
<b>Rumore 20%</b>	50%	9.46%	1.445	112.37%	51.66%	3.326
<b>Rumore 70%</b>	50%	19.65%	2.011	181.18%	49.01%	7.335
<b>Rumore 90%</b>	50%	23.63%	2.042	305.67	771.85%	8.958

Tabella 21: Errore calcolo del centro non pesato e pesato del vortice per risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  e  $\Delta L = 0.1 r_c$  al variare del rumore con i relativi massimi o minimi, metodo  $\max|\gamma|$ .

<b>Metodo <math>\max \gamma </math></b>						
$\Delta L/r_c$	0.5 non pesati	0.5 pesati	$\gamma$	0.1 non pesati	0.1 pesati	$\gamma$
<b>Rumore 0%</b>	50%	$1.90 \times 10^{-15}$ %	2.6695	50%	$8.81 \times 10^{-15}$ %	0.136
<b>Rumore 20%</b>	50%	2.12%	2.78595	270.61%	10.60%	0.219
<b>Rumore 70%</b>	50%	34.89%	3.73494	7398.5%	7384.9%	-0.394
<b>Rumore 90%</b>	50%	19.16%	3.96914	4041.7%	4003.3%	0.529

Per risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  si osserva una diminuzione dell'errore del centro pesato rispetto al non pesato sia per il metodo della vorticità che della circolazione. Per risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$  il metodo della vorticità presenta un errore che diminuisce per rumore al 20% e al 70%. Per rumore al 90%, invece, tale errore aumenta perché il peso, che si effettua nella circonferenza che contiene il massimo, avverrà su un numero di valori elevati e con numerose oscillazioni. Per il metodo della circolazione, invece, nel caso di risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$  sebbene l'individuazione che si effettua presenta degli errori nettamente superiori a metà della risoluzione spaziale si ha, in generale per qualsiasi livello di rumore, una diminuzione dell'errore tra il centro non pesato e pesato. Essendo il vortice antiorario i valori di circolazione e vorticità associati al centro devono essere positivi. Per cui oltre all'errore espresso in percentuale un altro campanello di allarme per la valutazione del centro risulta il valore di circolazione e vorticità nel centro stesso. Per risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$ , rumore al 90% e metodo della circolazione si evidenzia un picco negativo il che sottolinea maggiormente l'errore che si sta commettendo.

Nella Figura 30 sono riportati i diversi campi di velocità per risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$  con i centri pesati e non pesati per entrambi i metodi.

$$\Delta L = 0.1 r_c \text{ metodi } \max|\omega_z| \text{ e } \max|\gamma|$$

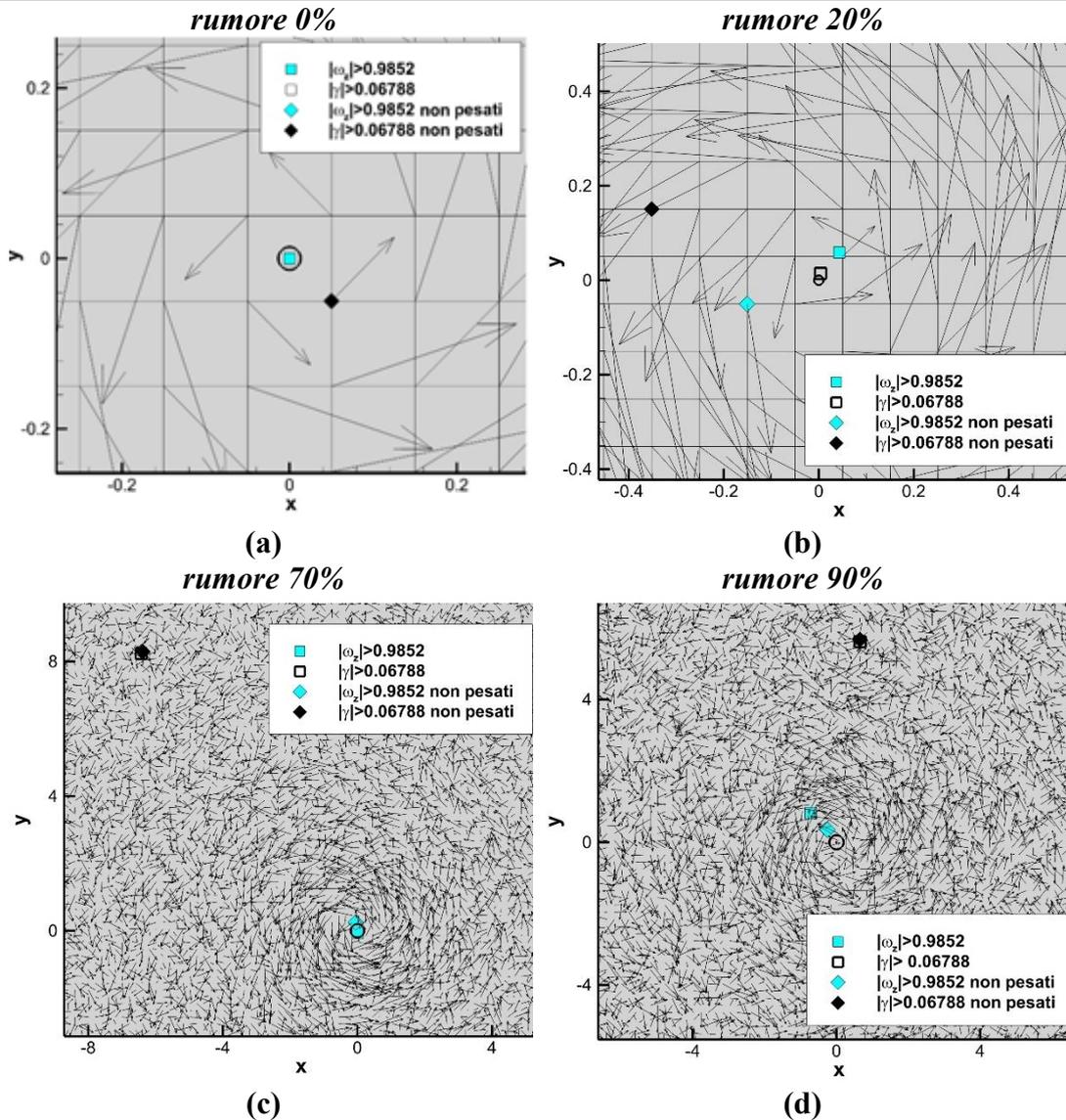


Figura 30: Campi di velocità e centri non pesati (diamanti) e pesati (quadrati) valutati con i criteri  $\max|\omega_z|$  (azzurro) e  $\max|\gamma|$  (nero) per rumore allo 0% (a), 20% (b), 70% (c) e 90% (d). Scale diverse.

Il cerchietto nero è il centro reale in (0,0). Con rumore allo 0% (Figura 30 “a”) entrambi i metodi funzionano perfettamente e i centri non pesati coincidono. Con rumore al 20% (Figura 30 “b”) il centro non pesato con il metodo della circolazione commette un errore maggiore rispetto al metodo della vorticità, invece, avviene l’opposto andando a pesare. Per rumore al 70% (Figura 30 “c”) il metodo della circolazione sbaglia completamente mentre il metodo della vorticità presenta un centro pesato con errore più piccolo del non pesato. Al 90% (Figura 30 “d”) la situazione peggiora ulteriormente, il metodo della circolazione sbaglia completamente mentre il metodo della vorticità presenta un centro pesato con errore maggiore rispetto al non pesato.

### 6.2.4 Confronto tra i metodi

Effettuata l'analisi per tutti i metodi confrontiamo i diversi centri. Consideriamo, per ogni metodo, la miglior individuazione del centro effettuata a prescindere che siano vortici pesati o non pesati. Nella Tabella 22 e Tabella 23 sono riportati gli errori, rispettivamente per risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  e  $\Delta L = 0.1 r_c$ , al variare del rumore e per tutti i metodi analizzati. In rosso sono evidenziati gli errori minori.

Tabella 22: Errore centri risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  al variare del rumore e per i diversi metodi. In rosso sono evidenziati gli errori minori.

$\Delta L = 0.5 r_c$					
Metodi	$\Gamma_2 D = 2$	$\Delta$	$Q$	$\omega_z$	$\gamma$
Rumore 20%	<b>0.514%</b>	6.44%	5.78%	9.46%	2.12%
Rumore 70%	<b>0.570%</b>	26.94%	13.21%	19.65%	34.89%
Rumore 90%	<b>4.970%</b>	47.40%	18.72%	23.63%	19.16%

Per risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  i centri considerati per ogni metodo sono quelli pesati.

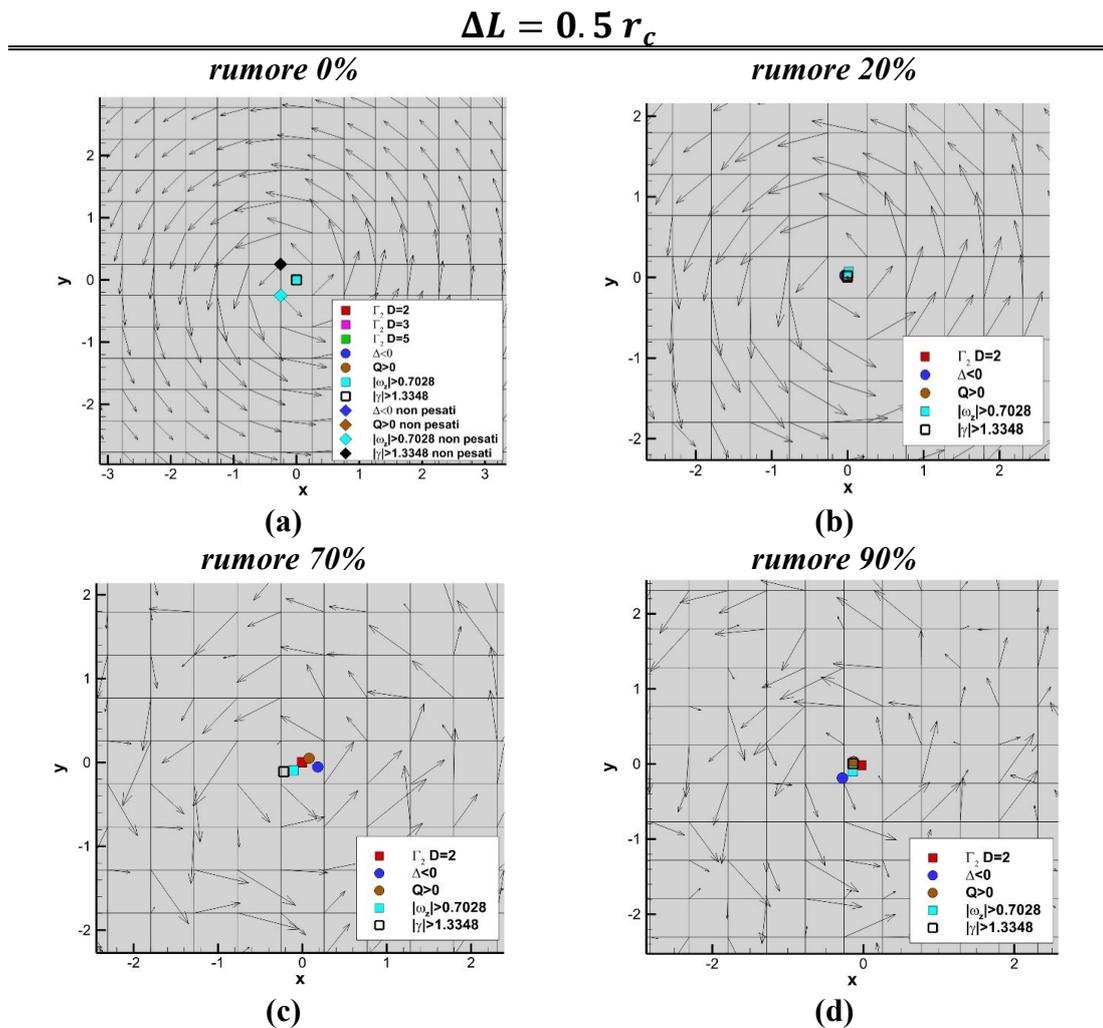


Figura 31: Campi di velocità e centri valutati con i criteri  $\Gamma_2 D = 2$  (rosso),  $\Delta$  (blu),  $Q$  (marrone),  $\max|\omega_z|$  (azzurro) e  $\max|\gamma|$  (nero) per rumore allo 0% (a), 20% (b), 70% (c) e 90% (d). Scale diverse.

Per rumore allo 0% i centri non pesati non coincidono perfettamente. Aumentando il rumore si osserva che l'errore rimane al di sotto del 50% ovvero i centri individuati si trovano all'interno della cella che contiene il centro (0,0).

Tabella 23: Errore centri risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$  al variare del rumore e per i diversi metodi. In rosso sono evidenziati gli errori minori.

$\Delta L = 0.1 r_c$					
Metodi	$\Gamma_2 D=10$	$\Delta$	$Q$	$\omega_z$	$\gamma$
Rumore 20%	<b>0.492%</b>	43.77	17.92	51.66%	10.60%
Rumore 70%	<b>1.500%</b>	181.18%	181.18%	49.01%	7385.0%
Rumore 90%	<b>35.145%</b>	305.67%	5145.5%	305.67%	4003.3%

Per  $\Delta L = 0.1 r_c$  avremo:

- Per il metodo  $\Gamma_2$  i centri pesati,
- Per i metodi  $\Delta$  e  $Q$  i centri non pesati eccetto per rumore al 20%;
- Per il metodo  $\max|\omega_z|$  i centri pesati eccetto per rumore al 90%;
- Per il metodo  $\max|\gamma|$  i centri pesati;

$$\Delta L = 0.1 r_c$$

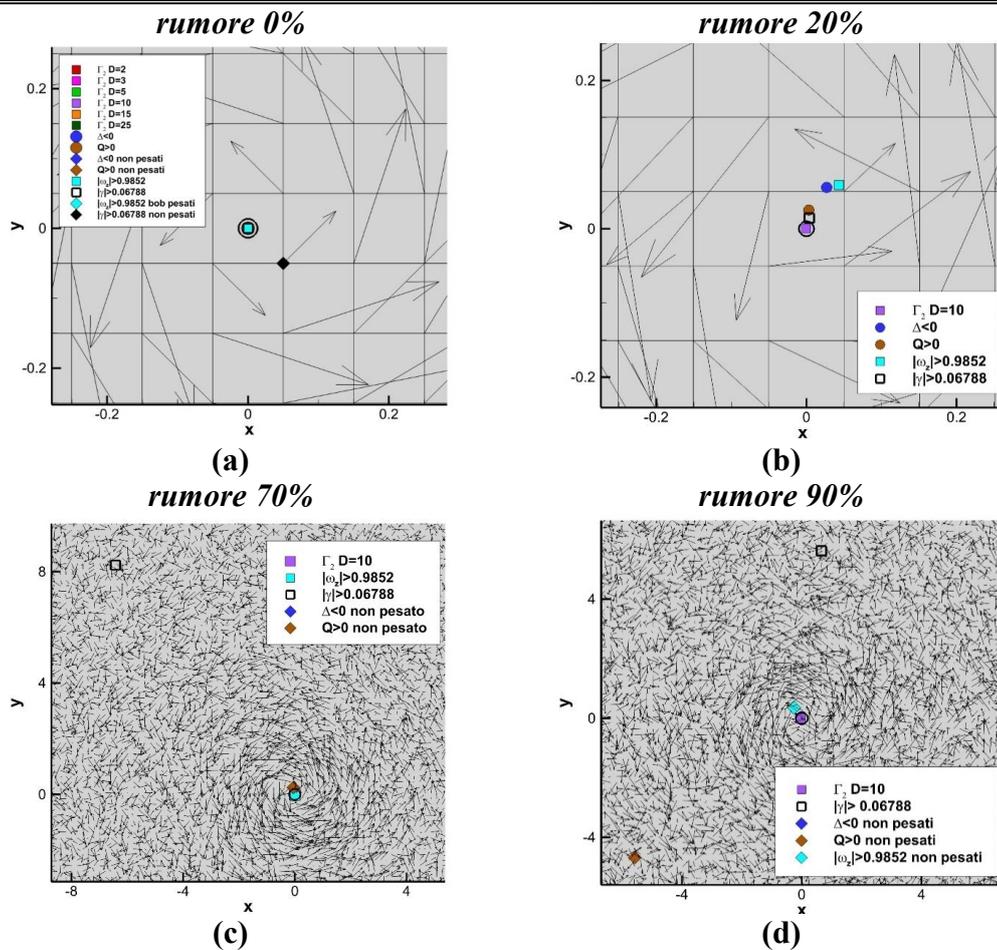
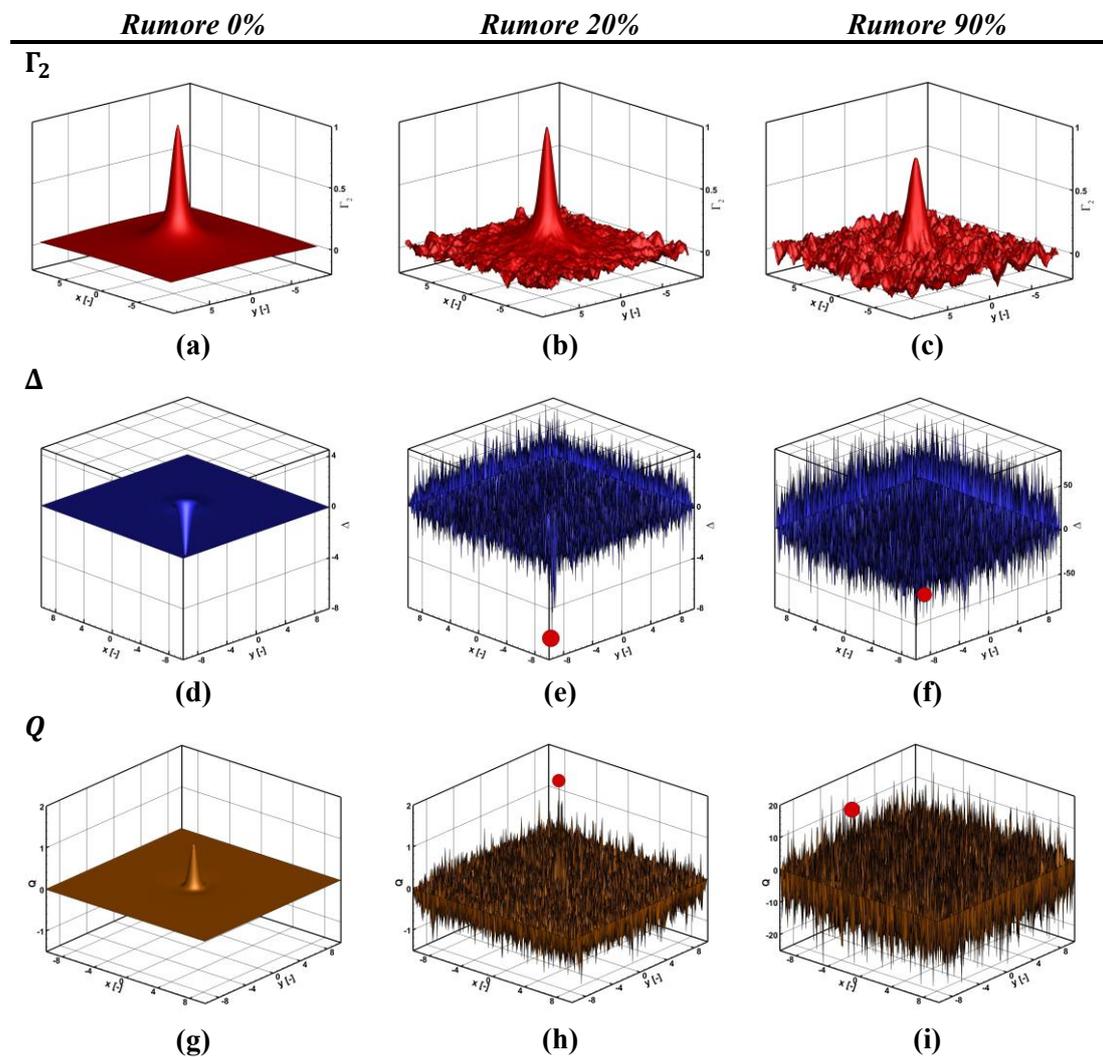


Figura 32: Campi di velocità e centri valutati con i criteri  $\Gamma_2 D = 10$  (viola),  $\Delta$  (blu),  $Q$  (marrone),  $\max|\omega_z|$  (azzurro) e  $\max|\gamma|$  (nero) per rumore allo 0% (a), 20% (b), 70% (c) e 90% (d). Scale diverse.

Per rumore allo 0% non si osservano differenze, gli errori infatti sono così piccoli da far sì che graficamente i centri coincidano. Per rumore al 20% i metodi funzionano ancora bene. Per rumore al 70%, sebbene non sia visibile, il centro con il metodo  $\Gamma_2$   $D = 10$  è il più preciso, ciò è maggiormente evidente con rumore al 90% dove tutti i metodi, eccetto il metodo  $\Gamma_2$ , commettono errori che vanno dalle tre celle (metodi  $\Delta$  e  $\max|\omega_z|$ ) alle quindici celle (metodo  $Q$ ). La Tabella 23 evidenzia con maggior enfasi la maggior precisione del metodo  $\Gamma_2$ .

Per completezza la Figura 33 mostra le funzioni ottenute con i diversi criteri di identificazione per diversi livelli di rumore e per risoluzione  $\Delta L = 0.1 r_c$  al fine di fornire un quadro chiaro della sensibilità dei criteri al rumore



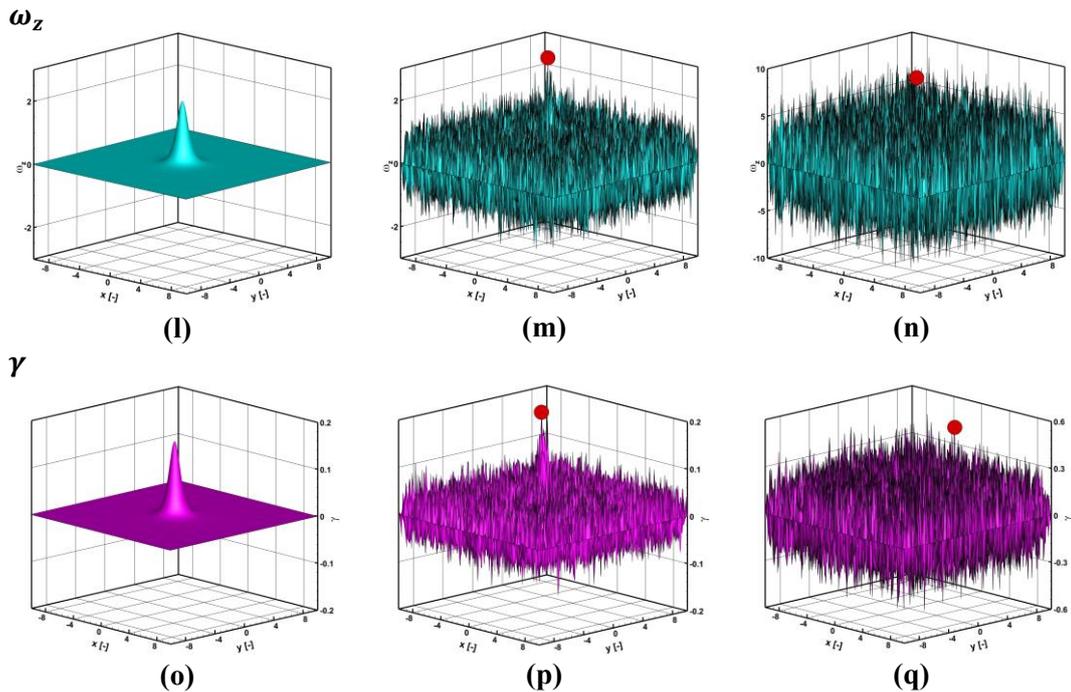


Figura 33: Andamenti funzioni  $\Gamma_2$   $D = 10$ ,  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\omega_z$  e  $\gamma$  al variare del rumore con  $\Delta L = 0.1 r_c$  [26].

In Figura 33 i cerchietti rossi identificano il picco a cui corrisponde il centro del vortice non pesato. Dalle immagini si evidenzia come all'aumentare del rumore tutte le funzioni, eccetto  $\Gamma_2$ , presentano forti oscillazioni che inglobano il picco associato al vortice.

Effettuata l'analisi per tutti i metodi è possibile fare le seguenti affermazioni:

1. In presenza di rumore i metodi  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  non sono in grado di individuare il singolo vortice ma è necessario che l'operatore conosca il numero di vortici presenti e lo indichi diversamente dal metodo  $\Gamma_2$ . L'imposizione del numero di vortici da calcolare, nei casi reali è di difficile applicazione poiché il numero di vortici nelle immagini reali non è noto a priori;
2. I metodi del massimo del modulo della vorticità e della circolazione necessitano, oltre che del numero di vortici, anche di una soglia opportuna che varia caso per caso e che non è sempre di facile individuazione. Diversamente i metodi  $\Gamma_2$ ,  $\Delta$  e  $Q$  presentano soglie stabilite dalla teoria. La scelta di una soglia ottimale nelle immagini reali è di difficile applicazione perché varia per ogni campo di velocità;
3. Le soglie zero per i metodi  $\Delta$  e  $Q$  al variare del rumore non risultano più ottimali, purtroppo non essendo funzioni adimensionali anche la scelta di una soglia diversa da zero comporterebbe un'analisi caso per caso diversamente dal

metodo  $\Gamma_2$  in cui seppur si voglia cambiare il valore di soglia essa al più può raggiungere valore unitario essendo la funzione  $\Gamma_2$  adimensionale;

4. Per i metodi  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  non è detto che passando dal centro non pesato al centro pesato l'errore diminuisca diversamente dal metodo  $\Gamma_2$ ;
5. I metodi  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  presentano andamenti con picchi più evidenti e individuazioni migliori per risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$ . Questa differenza di andamenti e individuazioni tra le due risoluzioni è legata alla presenza di un numero minore di punti per risoluzione  $\Delta L = 0.5 r_c$  che comporterà un'approssimazione peggiore ma al contempo presenterà un'influenza minore dovuta al rumore;
6. I centri valutati con il metodo  $\Gamma_2$  sono quelli che commettono il minor errore;

Da queste informazioni è possibile intuire come il metodo  $\Gamma_2$  risulti molto efficace anche in presenza di rumore. Inoltre, data la soglia prefissata, è in grado autonomamente di individuare quanti vortici sono presenti nel campo vettoriale senza l'ausilio dell'operatore.

### 6.3 Doppio vortice senza rumore

Nell'ambito dello studio di velivoli ad ala fissa o mobile, difficilmente si incontrano vortici isolati e perfettamente circolari come i vortici di Vatistas, spesso le formazioni vorticosose nascono dall'interazione di diversi vortici la cui interazione genera vortici singoli non circolari ma ellittici o vortici multipli che si influenzano tra loro. A tal fine, sono stati generati 54 campi sintetici di velocità posizionando due vortici di Vatistas a diverse distanze e con raggi e intensità variabili e investigando il campo di moto risultante. Le grandezze sono tutte adimensionalizzate rispetto al vortice principale le cui caratteristiche sono indicate con il pedice 1. I campi di velocità presentano una risoluzione  $\Delta x = \Delta y = \Delta L = 0.2 r_1$ . La posizione dei centri è mutuamente influenzata dalla presenza dell'altro vortice per cui il campo risultante non presenta i centri e le caratteristiche pari a quelle inserite dall'operatore. Difatti, si osserva come vortici corotanti tendono a coalescere e dunque ad avvicinarsi, mentre vortici controrotanti a respingersi e quindi ad allontanarsi. Analizzando tutti i 54 casi si evidenzia come solo in 23 casi sono presenti entrambi i vortici nei restanti invece è presente un solo vortice come risultato delle velocità indotte dai due vortici iniziali. In alcuni di questi casi, in cui è presente un solo vortice, si evidenzia solo una deformazione del campo nella posizione precedentemente ricoperta dal vortice o la creazione di un vortice ellittico dovuto all'unione di due vortici corotanti. Si osserva, inoltre, che di questi 23 campi di velocità che individuano due vortici quattro sono corotanti i restanti sono controrotanti. In Appendice A sono mostrati tutti i 54 campi di velocità risultanti. In Tabella 24 sono riportate le caratteristiche dei vortici in termini di posizione relativa, raggio ed intensità insieme al numero di vortici risultanti (#v.).

Tabella 24: Caratteristiche dei due vortici di Vatistas e numero di vortici osservabili (#v) nel campo di moto ottenuto dalla somma dei due vortici.

Casi	vortice 1				vortice 2				#v	
	$x_1$	$y_1$	$r_1$	$\gamma_1$	$x_2$	$y_2$	$r_2$	$\gamma_2$		
$r_2 = r_1$ $\bar{d} < r_1 + r_2$	1	-3	0	1	$2\pi$	-1.5	0	1	$2\pi$	1
	2	-3	0	1	$2\pi$	-1.5	0	1	$4\pi$	1
	3	-3	0	1	$2\pi$	-1.5	0	1	$\pi$	1
	4	-3	0	1	$2\pi$	-1.5	0	1	$-2\pi$	2
	5	-3	0	1	$2\pi$	-1.5	0	1	$-4\pi$	1
	6	-3	0	1	$2\pi$	-1.5	0	1	$-\pi$	1
$r_2 = r_1$ $\bar{d} = r_1 + r_2$	7	-3	0	1	$2\pi$	-1	0	1	$2\pi$	1
	8	-3	0	1	$2\pi$	-1	0	1	$4\pi$	1
	9	-3	0	1	$2\pi$	-1	0	1	$\pi$	1
	10	-3	0	1	$2\pi$	-1	0	1	$-2\pi$	2
	11	-3	0	1	$2\pi$	-1	0	1	$-4\pi$	1
	12	-3	0	1	$2\pi$	-1	0	1	$-\pi$	1
$r_2 = r_1$ $\bar{d} > r_1 + r_2$	13	-3	0	1	$2\pi$	1	0	1	$2\pi$	2
	14	-3	0	1	$2\pi$	1	0	1	$4\pi$	1
	15	-3	0	1	$2\pi$	1	0	1	$\pi$	1
	16	-3	0	1	$2\pi$	1	0	1	$-2\pi$	2
	17	-3	0	1	$2\pi$	1	0	1	$-4\pi$	2
	18	-3	0	1	$2\pi$	1	0	1	$-\pi$	2
$r_2 = 3r_1$ $\bar{d} < r_1 + r_2$	19	-3	0	1	$2\pi$	0.5	0	3	$2\pi$	1
	20	-3	0	1	$2\pi$	0.5	0	3	$4\pi$	1
	21	-3	0	1	$2\pi$	0.5	0	3	$\pi$	1
	22	-3	0	1	$2\pi$	0.5	0	3	$-2\pi$	2
	23	-3	0	1	$2\pi$	0.5	0	3	$-4\pi$	2
	24	-3	0	1	$2\pi$	0.5	0	3	$-\pi$	1
$r_2 = 3r_1$ $\bar{d} = r_1 + r_2$	25	-3	0	1	$2\pi$	1	0	3	$2\pi$	1
	26	-3	0	1	$2\pi$	1	0	3	$4\pi$	1
	27	-3	0	1	$2\pi$	1	0	3	$\pi$	1
	28	-3	0	1	$2\pi$	1	0	3	$-2\pi$	2
	29	-3	0	1	$2\pi$	1	0	3	$-4\pi$	2
	30	-3	0	1	$2\pi$	1	0	3	$-\pi$	1
$r_2 = 3r_1$ $\bar{d} > r_1 + r_2$	31	-3	0	1	$2\pi$	3	0	3	$2\pi$	1
	32	-3	0	1	$2\pi$	3	0	3	$4\pi$	2
	33	-3	0	1	$2\pi$	3	0	3	$\pi$	1
	34	-3	0	1	$2\pi$	3	0	3	$-2\pi$	2
	35	-3	0	1	$2\pi$	3	0	3	$-4\pi$	2
	36	-3	0	1	$2\pi$	3	0	3	$-\pi$	2

$r_2 = 0.5r_1$ $\bar{d} < r_1 + r_2$	37	-3	0	1	$2\pi$	-1.75	0	0.5	$2\pi$	1
	38	-3	0	1	$2\pi$	-1.75	0	0.5	$4\pi$	1
	39	-3	0	1	$2\pi$	-1.75	0	0.5	$\pi$	1
	40	-3	0	1	$2\pi$	-1.75	0	0.5	$-2\pi$	2
	41	-3	0	1	$2\pi$	-1.75	0	0.5	$-4\pi$	1
	42	-3	0	1	$2\pi$	-1.75	0	0.5	$-\pi$	2
$r_2 = 0.5r_1$ $\bar{d} = r_1 + r_2$	43	-3	0	1	$2\pi$	-1.5	0	0.5	$2\pi$	1
	44	-3	0	1	$2\pi$	-1.5	0	0.5	$4\pi$	1
	45	-3	0	1	$2\pi$	-1.5	0	0.5	$\pi$	1
	46	-3	0	1	$2\pi$	-1.5	0	0.5	$-2\pi$	2
	47	-3	0	1	$2\pi$	-1.5	0	0.5	$-4\pi$	1
	48	-3	0	1	$2\pi$	-1.5	0	0.5	$-\pi$	2
$r_2 = 0.5r_1$ $\bar{d} > r_1 + r_2$	49	-3	0	1	$2\pi$	0.5	0	0.5	$2\pi$	2
	50	-3	0	1	$2\pi$	0.5	0	0.5	$4\pi$	1
	51	-3	0	1	$2\pi$	0.5	0	0.5	$\pi$	2
	52	-3	0	1	$2\pi$	0.5	0	0.5	$-2\pi$	2
	53	-3	0	1	$2\pi$	0.5	0	0.5	$-4\pi$	2
	54	-3	0	1	$2\pi$	0.5	0	0.5	$-\pi$	2

Come ben evidente dalla Tabella 24 si fissano la posizione e le caratteristiche del vortice principale, centro in  $(x_1, y_1) = (-3, 0)$  raggio  $r_1 = 1$  [-] e circolazione  $\gamma_1 = 2\pi$ , e si fanno variare le caratteristiche del secondo vortice così da investigare diverse combinazioni:

- Dimensioni relative:
  1.  $r_2 = r_1$ ;
  2.  $r_2 = 3 r_1$ ;
  3.  $r_2 = 0.5 r_1$ ;
- Posizione relativa  
Indicando con  $\bar{d}$  la distanza tra i due vortici ovvero  $\bar{d} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$  si considerano tre diverse posizioni relative:
  1.  $\bar{d} < r_1 + r_2$  (secanti);
  2.  $\bar{d} = r_1 + r_2$  (tangenti);
  3.  $\bar{d} > r_1 + r_2$  (non si toccano);
- Verso di rotazione:
  1. Corotanti;
  2. Controrotanti;

- Intensità di circolazione:

1.  $|\gamma_2| = |\gamma_1|$ ;

2.  $|\gamma_2| = |2 \gamma_1|$ ;

3.  $|\gamma_2| = \left| \frac{\gamma_1}{2} \right|$ ;

Analizziamo come il raggio, la distanza relativa, la circolazione e il verso di rotazione influiscono sull'individuazione dei vortici e sul calcolo del loro centro per tutti i metodi. Differentemente dal singolo vortice, la presenza di un secondo vortice influisce sia sul suo centro che sulle sue caratteristiche. L'influenza sul centro la osserveremo sulla coordinata  $x$  essendo i vortici allineati lungo  $y = 0$ .

### 6.3.1 Metodo $\Gamma_2$

Analizziamo l'individuazione e il calcolo dei centri con il metodo  $\Gamma_2$ . È necessario scegliere il dominio  $D$  con cui analizzare questi campi di velocità. Dall'analisi effettuata sul singolo vortice si è visto che in assenza di rumore il dominio  $D = 2$  è quello che funziona in maniera più efficace. Per cui, tenendo conto dell'analisi effettuata sul singolo vortice con risoluzione  $\Delta L = 0.2 r_c$ , consideriamo due casi, rispettivamente,  $D = 2$  e  $D = 5$ .

I centri così ottenuti non si posizionano nel centro geometrico inserito dall'operatore. Bensì, nel caso di vortici corotanti si osserva un avvicinamento tra i vortici. Quindi quando viene individuato un solo vortice e questo è quello  $(x_1, y_1) = (-3, 0)$ , il centro si sposterà verso destra ( $-->$ ) (Figura 34 "a"), viceversa se viene individuato solo il vortice  $(x_2, y_2)$  questo si sposterà verso sinistra ( $<--$ ) (Figura 34 "c"). Nel caso in cui si individuano entrambi i vortici si evidenzia proprio il loro avvicinamento con uno spostamento di entrambi i vortici ( $>--<$ ) (Figura 34 "e").

Per vortici controrotanti avviene il contrario ovvero i vortici tenderanno ad allontanarsi e il comportamento è opposto al caso di vortici corotanti.

Quanto esposto è ben evidenziato dalla Figura 34 di seguito in cui si riportano sei campi di velocità tre dei quali con vortici corotanti e i restanti con vortici controrotanti. In tutte le immagini le circonferenze in nero stanno a rappresentare il vortice geometrico il cui centro è rappresentato dal cerchio nero.

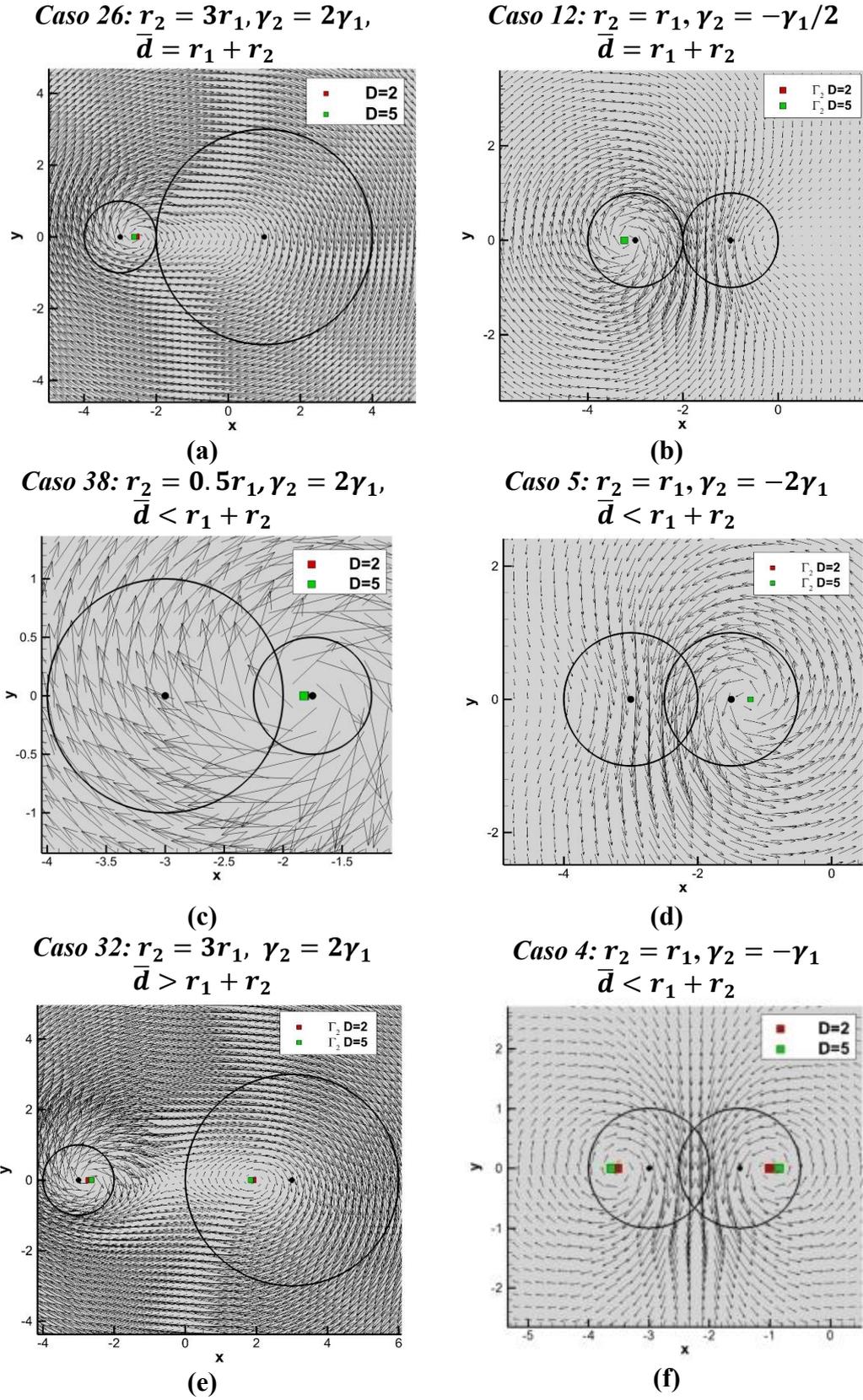


Figura 34: Campi di velocità e centri con metodo  $\Gamma_2$   $D = 2$  e  $D = 5$ . Vortici corotanti con spostamento a destra (solo vortice  $(x_1, y_1)$ ) (a), spostamento a sinistra (solo vortice  $(x_2, y_2)$ ) (c), avvicinamento (entrambi i vortici) (e). Vortici controtanti con spostamento a sinistra (solo vortice  $(x_1, y_1)$ ) (b), spostamento a destra (solo vortice  $(x_2, y_2)$ ) (d), allontanamento (entrambi i vortici) (f).

L'individuazione dei vortici è legata al massimo della funzione  $\Gamma_2$ . L'individuazione e il calcolo del centro a fissato raggio consentono di individuare i seguenti vortici:

- Per  $r_2 = r_1$  la composizione dei vortici ha fornito dei campi di velocità in cui su 6 casi sono visibili due vortici nei restanti 12 un singolo vortice. Il metodo  $\Gamma_2$  è in grado di individuare due vortici laddove presenti. Si individua come primo vortice, sia per vortici corotanti che controrotanti, sempre il vortice che presenta circolazione maggiore;
- Per  $r_2 = 3r_1$  la composizione dei vortici ha fornito dei campi di velocità in cui su 8 casi sono visibili due vortici nei restanti 10 un singolo vortice. Il metodo  $\Gamma_2$  è in grado di individuare due vortici laddove presenti. Il primo vortice individuato è sempre quello più intenso che in questi casi particolari risulterà sempre essere il vortice  $(x_1, y_1)$ ;
- Per  $r_2 = 0.5r_1$  la composizione dei vortici ha fornito dei campi di velocità in cui su 9 casi sono visibili due vortici nei restanti 9 un singolo vortice. Il metodo  $\Gamma_2$  è in grado di individuare due vortici laddove presenti. L'individuazione del primo e del secondo vortice è:
  1. Per  $|\gamma_2| = |\gamma_1|$  come primo vortice individuato quello più piccolo perché meno diffusivo e dunque più intenso ovvero  $(x_2, y_2)$ ;
  2. Per  $|\gamma_2| = |2\gamma_1|$  come primo vortice individuato quello più piccolo e al contempo con circolazione maggiore ovvero  $(x_2, y_2)$ ;
  3. Per  $|\gamma_2| = \left|\frac{\gamma_1}{2}\right|$  come primo vortice individuato nel caso in cui siano controrotanti posti a qualsiasi distanza o corotanti e con  $\bar{d} > r_1 + r_2$  quello con circolazione maggiore ovvero  $(x_1, y_1)$ . Nel caso in cui siano corotanti con  $\bar{d} \leq r_1 + r_2$  si individua un solo vortice il cui centro si posiziona a circa metà dei due;

Dunque, nei 23 casi in cui sono visibili due vortici il metodo  $\Gamma_2$  è in grado di individuarli entrambi, diversamente nei restanti casi essendo presente un solo vortice il criterio  $\Gamma_2$  individua solo quel vortice. Inoltre, si osserva che il metodo  $\Gamma_2$  riesce a considerare l'interazione esistente tra i due vortici e ad individuare il centro del vortice dove i vettori velocità effettivamente si chiudono o al più a mezza cella da esso.

Per qualsiasi raggio è possibile osservare come in caso di vortici corotanti i picchi della funzione  $\Gamma_2$  sono concordi nel caso di vortici controrotanti sono discordi. Infatti, vortici antiorari, circolazione  $\gamma > 0$ , presentano picchi positivi della funzione  $\Gamma_2$ , viceversa vortici orari, circolazione  $\gamma < 0$ , presentano picchi negativi della funzione  $\Gamma_2$ .

Dunque, si hanno 23 campi con doppi vortici e 31 campi con singolo vortice.

Per i 31 campi con singolo vortice si osserva che sia  $D = 2$  che  $D = 5$  consentono un'individuazione ottimale del centro come il punto intorno al quale i vettori velocità si chiudono o al più a mezza cella da esso. Scegliamo però di utilizzare  $D = 2$  poiché richiede tempi di calcolo inferiori. Si osserva però che in caso di vortici non circolari ma ellittici il  $D = 2$  non è più efficace poiché esso individua due vortici anziché uno. Questi casi sono il caso 7 e il caso 45. Nella Figura 35 si riporta come esempio il caso 7, analogamente si comporta il caso 45.

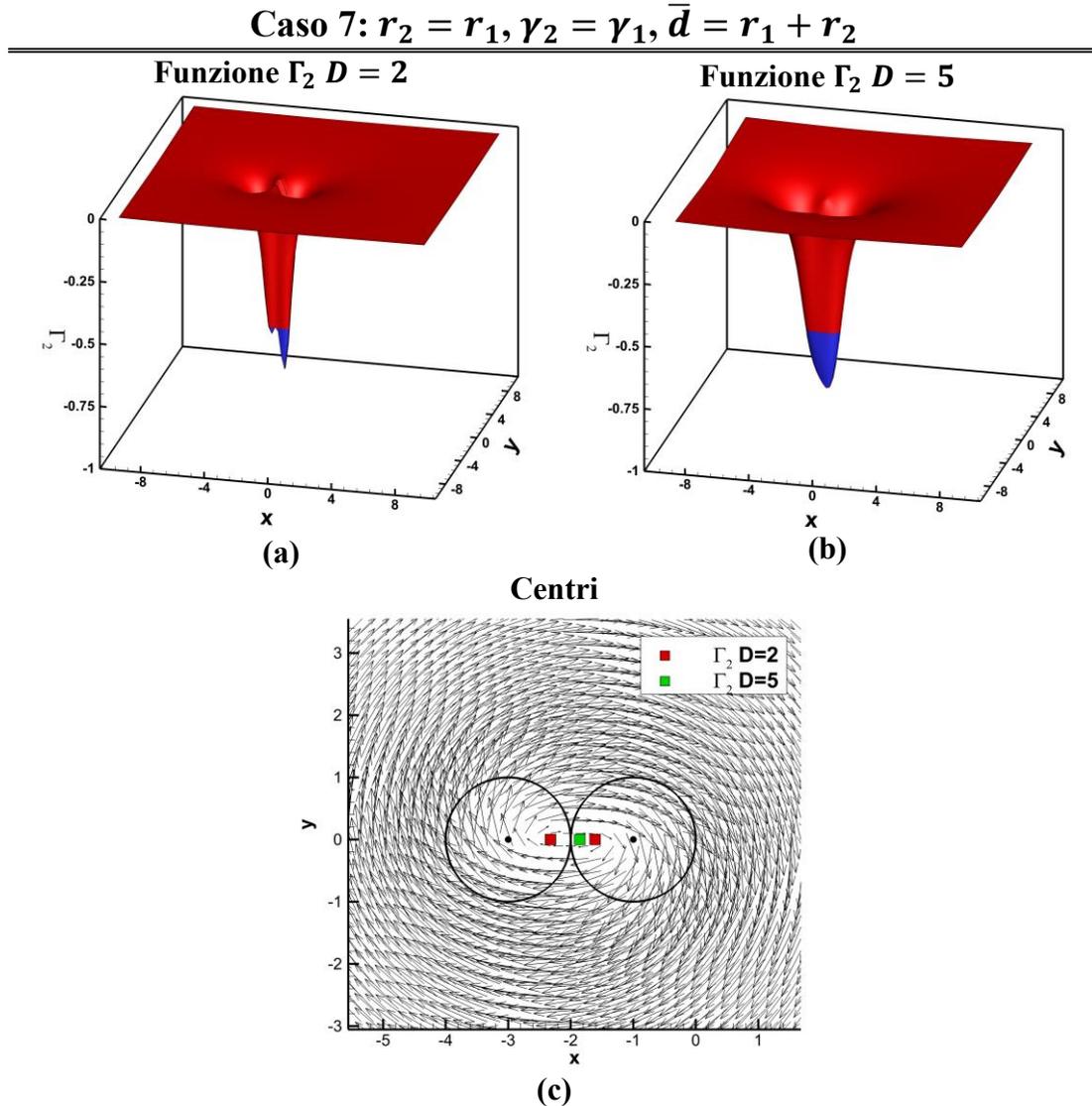


Figura 35: Funzione  $\Gamma_2$   $D = 2$  (a) e  $D = 5$  (b) e relativi centri caso 7.

Dalla Figura 35 si evidenzia come per  $D = 2$  si individuano due vortici perché la soglia  $2/\pi$  individua due picchi della funzione  $\Gamma_2$  evidenziati in blu in Figura 35 “a”, diversamente avviene per dominio  $D = 5$  in cui è presente un solo picco Figura 35 “b”. Questo comporta una diversa individuazione tra i due casi. Dal campo di velocità è evidente la presenza di un solo vortice molto allungato, per cui risulta più efficace il

comportamento del dominio  $D = 5$ . È stato verificato che già a partire dal  $D = 3$  il comportamento è analogo al dominio  $D = 5$ . Dunque, diversamente da quanto visto per singolo vortice perfettamente circolare si osserva che se il vortice è molto allungato il dominio  $D = 2$  non è più efficace ma bisogna scegliere un dominio maggiore.

Nei 23 casi in cui si individuano entrambi i vortici si evidenzia che entrambi i domini sono efficaci eccetto in alcuni casi in cui  $D = 2$  ha un comportamento migliore. Infatti, i centri si posizionano o nel punto in cui i vettori velocità si chiudono o al più a mezza cella da esso. Nella Figura 36 si riportano due casi, caso 35 e caso 10, per evidenziare quanto appena esposto.

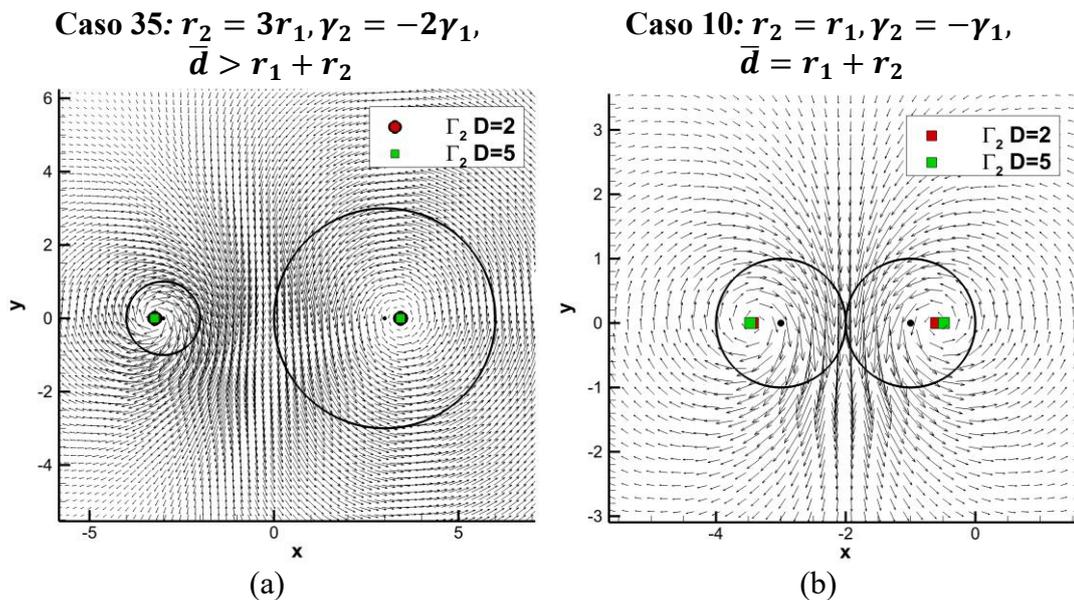


Figura 36: Centri ottenuti con  $D = 2$  e  $D = 5$  (a) caso 35, (b) caso 10.

Nella Figura 36 “a” si presenta un caso in cui i centri individuati con  $D = 2$  e  $D = 5$  coincidono perfettamente, nella Figura 36 “b” si evidenzia invece come ad individuare in maniera più efficace il centro è il  $D = 2$  ma in realtà il centro ottenuto con  $D = 5$  dista al più mezza cella dal dominio  $D = 2$ .

In conclusione, il metodo  $\Gamma_2$  consente di individuare il centro come il punto intorno al quale i vettori velocità si chiudono o al più a mezza cella da esso. Per singolo vortice bisogna prestare attenzione alla sua forma perché in caso di vortici ellittici la migliore individuazione è compiuta dal  $D = 5$ , eccetto in questi casi entrambi i domini funzionano in maniera efficace ma si sceglierà  $D = 2$  per minimizzare i tempi di calcolo.

### 6.3.2 Metodi $\Delta$ e $Q$

Analizziamo il comportamento dei metodi  $\Delta$  e  $Q$  in presenza di due vortici al variare delle condizioni sopra scelte. Scegliamo come livello di soglia quella zero come fatto in precedenza. Le individuazioni effettuate con entrambi i metodi, a fissata immagine, sono perfettamente coincidenti, inoltre anche i centri non pesati e pesati sono

perfettamente coincidenti. Analizziamo questi metodi fissando il raggio e variando i restanti parametri.

1. Per  $r_2 = r_1$  per 9 casi su 18 si individuano entrambi i vortici sebbene di questi 9 casi soltanto 5 evidenziano la presenza di due vortici nel campo di moto. Il primo vortice individuato è sempre quello che presenta circolazione maggiore. In realtà ci sono tre casi in cui il metodo individua più di due vortici. Nel caso 11 e nel caso 12 si individuano tre vortici sebbene nel campo sia evidente un solo vortice. Nel caso 13 si individuano addirittura quattro vortici sebbene nel campo siano evidenti solo due vortici. In questo caso imporremo al metodo di individuare al più due vortici. Nella Figura 37 si considera il caso 13.

### Caso 13: $r_2 = r_1, \gamma_2 = \gamma_1, \bar{d} > r_1 + r_2$

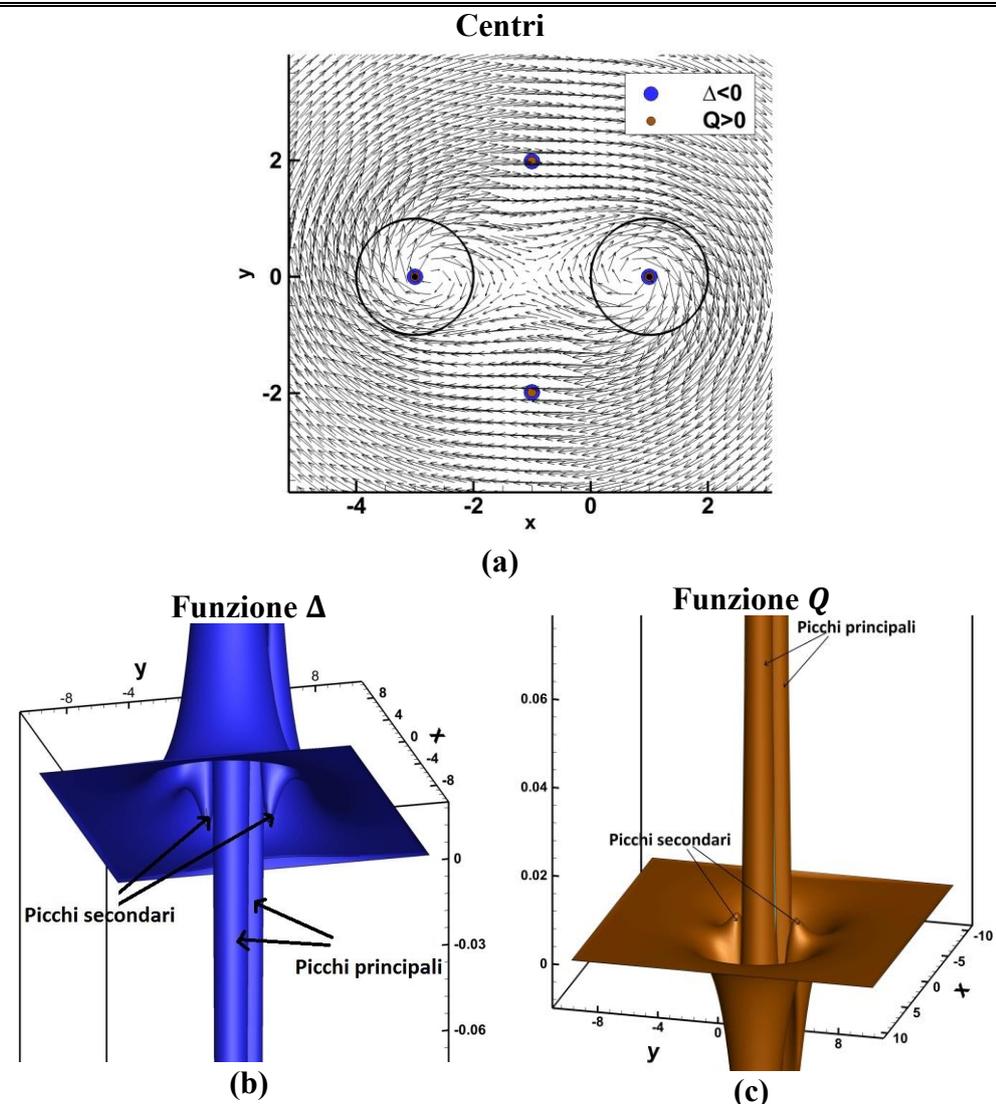


Figura 37: Caso 13 metodi  $\Delta$  e  $Q$  individuano quattro vortici (a). Picchi delle funzioni associate ai quattro vortici (b) (c).

Nella Figura 37 “a” si evidenzia la presenza di due soli vortici sebbene i criteri  $\Delta$  e  $Q$  ne individuano quattro. I due picchi associati ai vortici non presenti nel campo di moto sono molto più piccoli rispetto ai vortici principali ma comunque presenti. Inoltre, i due centri che i metodi individuano correttamente non si posizionano nei punti intorno ai quali i vettori velocità si chiudono ma a circa mezza cella da essi. In realtà scegliendo una soglia non nulla è possibile individuare due soli vortici. Altri casi interessanti sono quelli per cui  $|\gamma_2| = |\gamma_1|$ . Per  $\gamma_2 = \gamma_1$  con  $\bar{d} > r_1 + r_2$  e  $\gamma_2 = -\gamma_1$  con  $\bar{d} \leq r_1 + r_2$  e  $\bar{d} > r_1 + r_2$  si individuano due vortici. Per vortici corotanti con  $\gamma_2 = \gamma_1$   $\bar{d} \leq r_1 + r_2$  (caso 1 e 7) si individua un solo vortice il cui valore corrisponde al valor medio tra i due vortici presenti. In entrambi i casi, il centro non pesato presenta un valore molto vicino al centro geometrico posizionato in  $(x_1, y_1)$ . Osservando infatti le funzioni  $\Delta$  e  $Q$  (Figura 38 “c” e “d”) si osservano due picchi che corrispondono ai due centri geometrici. Dunque, sfruttando una soglia diversa da zero è possibile individuare due vortici in tutti 18 casi e non solo nei 12 casi prima esposti. Tale comportamento è evidenziato dalle immagini di seguito (Figura 38 e Figura 39) che riportano due casi di interesse ovvero il caso 1 analogo al caso 7 e il caso 9 analogo ai casi 2, 3 e 8.

**Caso 1:  $r_2 = r_1, \gamma_2 = \gamma_1, \bar{d} < r_1 + r_2$**

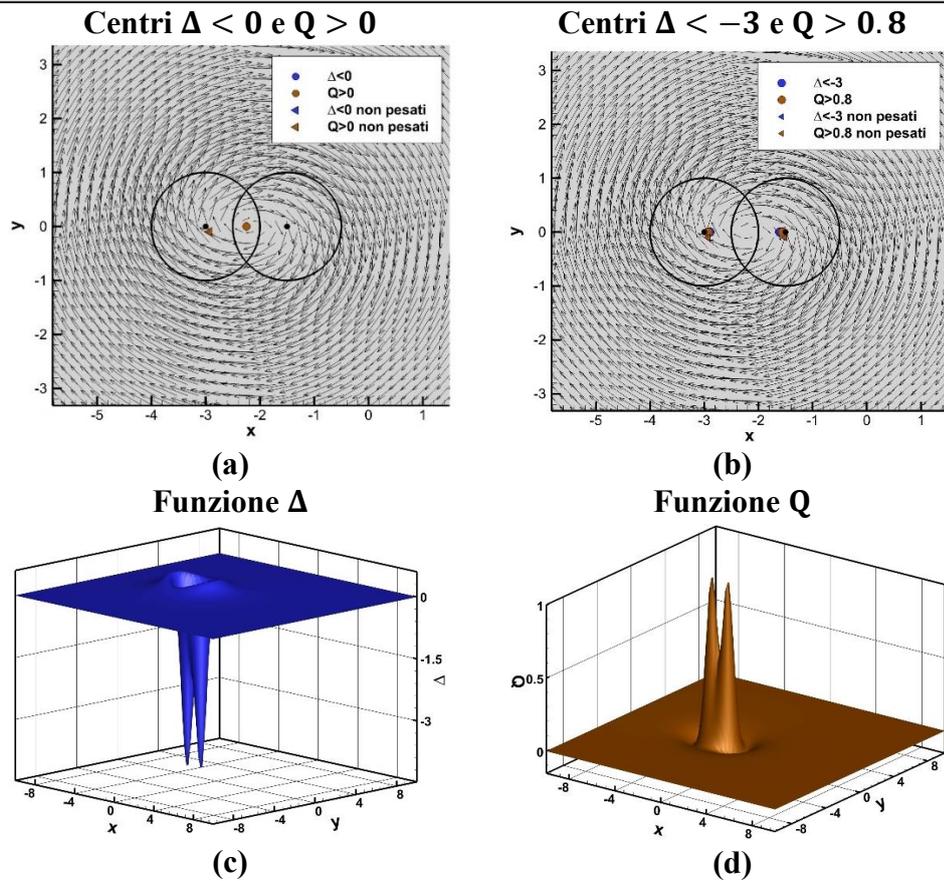


Figura 38: Caso 1 metodi  $\Delta$  e  $Q$  individuazione centri con soglie nulle (centri con i due metodi coincidono perfettamente) (a) e non nulle (i centri con i due metodi non coincidono perfettamente) (b).

Si osserva come i centri ottenuti con i metodi  $\Delta$  e  $Q$  con soglia zero coincidano perfettamente (Figura 38 “a”). Inoltre, il centro pesato individuato si posiziona nel punto in cui i vettori velocità effettivamente si chiudono. Diversamente scegliendo una soglia non nulla (Figura 38 “b”) si evidenzia la presenza di due centri che si posizionano nelle vicinanze del centro geometrico seppur avvicinandosi leggermente tra di loro.

**Caso 9:  $r_2 = r_1, \gamma_2 = \gamma_1/2, \bar{d} = r_1 + r_2$**

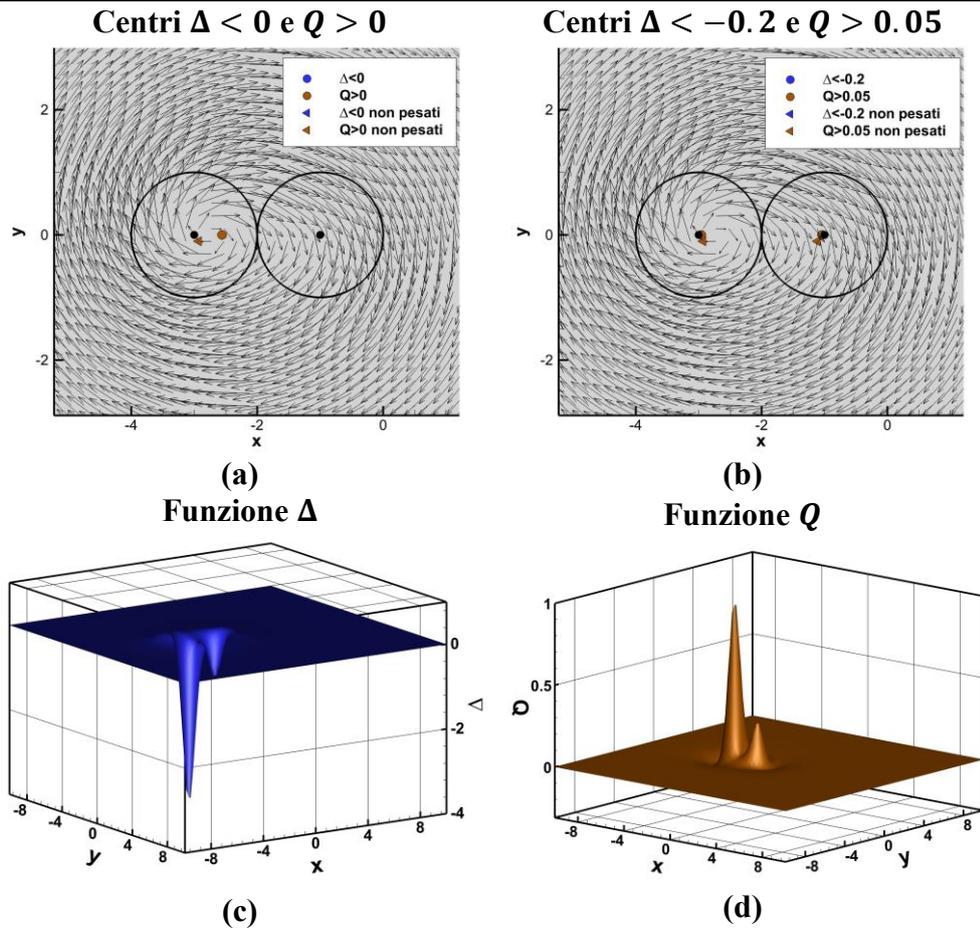


Figura 39: Caso 9 metodi  $\Delta$  e  $Q$  individuazione centri con soglie nulle (centri con i due metodi coincidono perfettamente) (a) e non nulle (i centri con i due metodi coincidono perfettamente) (b).

Nel caso 9 (Figura 39) con soglia nulla si individua il centro del vortice ottenuto dalla somma dei due campi di velocità, con soglia non nulla si individuano entrambi i vortici ma il secondo non è visibile nel campo di velocità.

1. Per  $r_2 = 3r_1$  si individuano due vortici per 17 casi su 18 sebbene in questi 18 casi soltanto 8 evidenziano la presenza di due vortici. L'unico caso in cui si individua un solo vortice è il caso 21 in cui  $\gamma_2 = \gamma_1/2$  che effettivamente nel campo di moto presenta un solo vortice. In tutti i casi il primo vortice

individuato è sempre quello più intenso ovvero  $r_1$ . Si nota, inoltre, che nonostante si scelga una soglia non nulla nel caso 21 verrà sempre individuato un unico vortice;

2. Per  $r_2 = 0.5r_1$  si individuano due vortici per 11 casi su 18 sebbene in questi 11 casi soltanto 5 evidenziano la presenza di due vortici. Il primo vortice individuato è sempre quello più intenso.

In realtà ci sono quattro casi in cui il metodo individua più di due vortici. Nel caso 42, caso 48 e caso 49 si individuano tre vortici sebbene nel campo di moto ne siano presenti soltanto due. Nel caso 51 si individuano addirittura quattro vortici sebbene nel campo di moto ne siano presenti soltanto due. In questo caso imporremo al metodo di individuare al più due vortici. Il comportamento è analogo a quello esposto in Figura 37.

Tre sono i casi in cui si individua un solo vortice sono:

1. caso 37  $\gamma_2 = \gamma_1$   $\bar{d} < r_1 + r_2$  si individua solo il vortice di destra  $(x_2, y_2)$  ovvero il meno diffusivo tra i due;
2. caso 39  $\gamma_2 = \gamma_1/2$   $\bar{d} < r_1 + r_2$  si individua il centro circa pari al valore medio dei due;
3. caso 45  $\gamma_2 = \gamma_1/2$   $\bar{d} = r_1 + r_2$  si individua il centro circa pari al valore medio dei due;

In realtà scegliendo una soglia non nulla si evidenzia la presenza di due vortici anche in questi tre casi. Il comportamento del caso 37 è analogo a quello del caso 9 in Figura 39, così come il comportamento dei casi 39 e 45 è analogo al caso 1 in Figura 38;

Dunque, con soglia zero si individuano due vortici in 37 casi che non necessariamente si posizionano nel centro geometrico o nel punto in cui i vettori velocità si chiudono. In 7 casi si individuano più di due vortici di cui cinque casi in cui si evidenzia la presenza di due vortici nel campo e due casi in cui si evidenzia la presenza di un solo vortice. Inoltre, in 10 casi si individua un solo vortice, in tali casi effettivamente nel campo di velocità è presente un solo vortice. Diversamente, scegliendo soglia non nulla, si individuano due vortici in 53 casi su 54. L'unico caso in cui pur scegliendo una soglia diversa si individua un solo vortice è il caso 21.

Come abbiamo già visto in precedenza, in realtà, nel campo di velocità sono presenti due vortici solo in 23 casi per cui i criteri  $\Delta$  e  $Q$  commettono degli errori ad individuare il vortice anche laddove non è presente.

Valutando la distanza relativa tra i centri individuati, nel caso in cui si individuano due vortici, si evidenzia come vortici corotanti si avvicinano e vortici controrotanti si allontanano. In realtà sono presenti 6 campi di velocità con vortici corotanti in cui essi si allontanano invece di avvicinarsi. I casi in analisi sono 19, 25, 26, 27, 38 e 44. Nella Figura 40 si riporta il comportamento del caso 19 i restanti sono analoghi.

**Caso 19;  $r_2 = 3r_1, \gamma_2 = \gamma_1, \bar{d} < r_1 + r_2$**

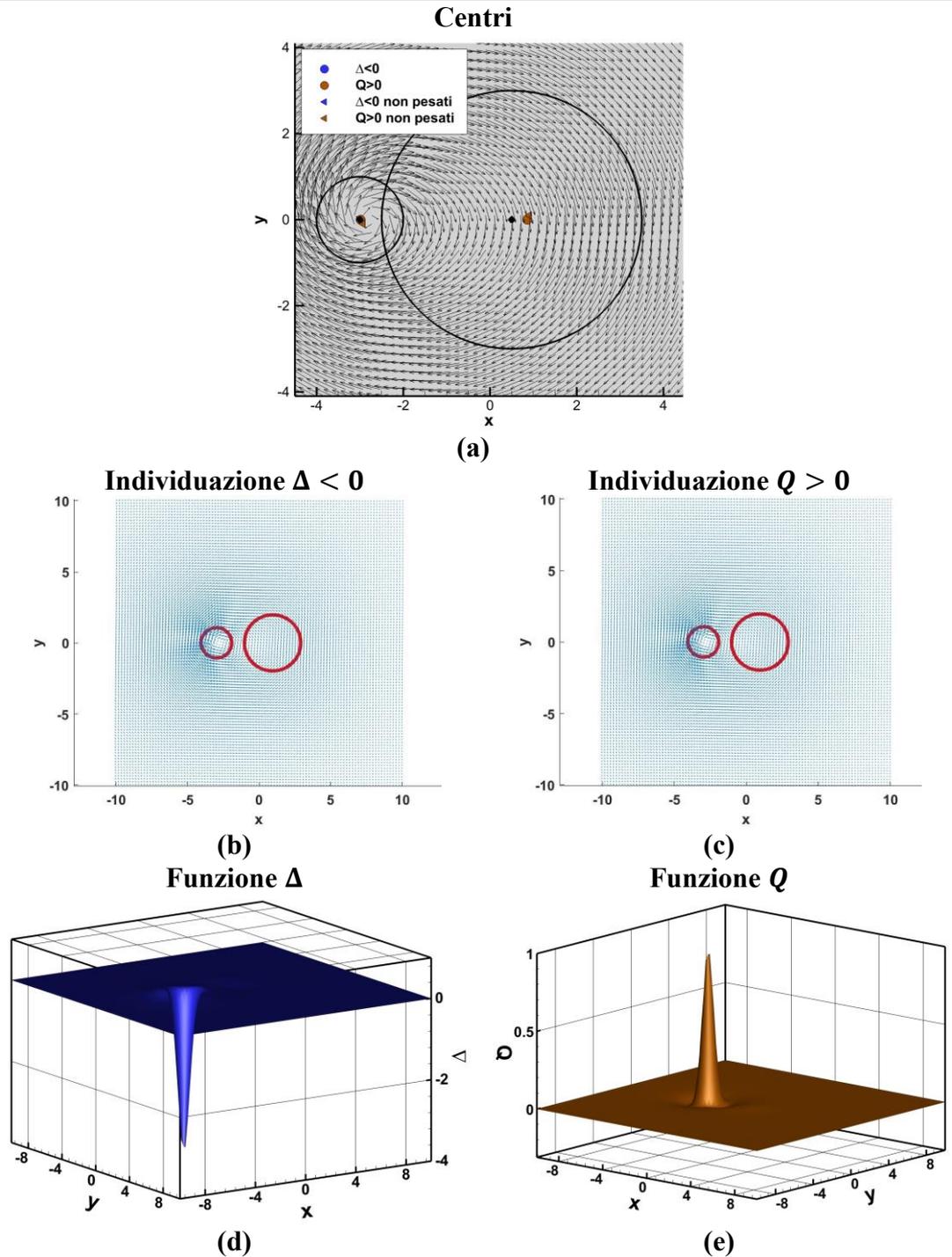


Figura 40: Caso 19 vortici corotanti che si allontanano invece di avvicinarsi. I centri ottenuti con i due metodi coincidono perfettamente (a) così come anche le individuazioni (b,c)

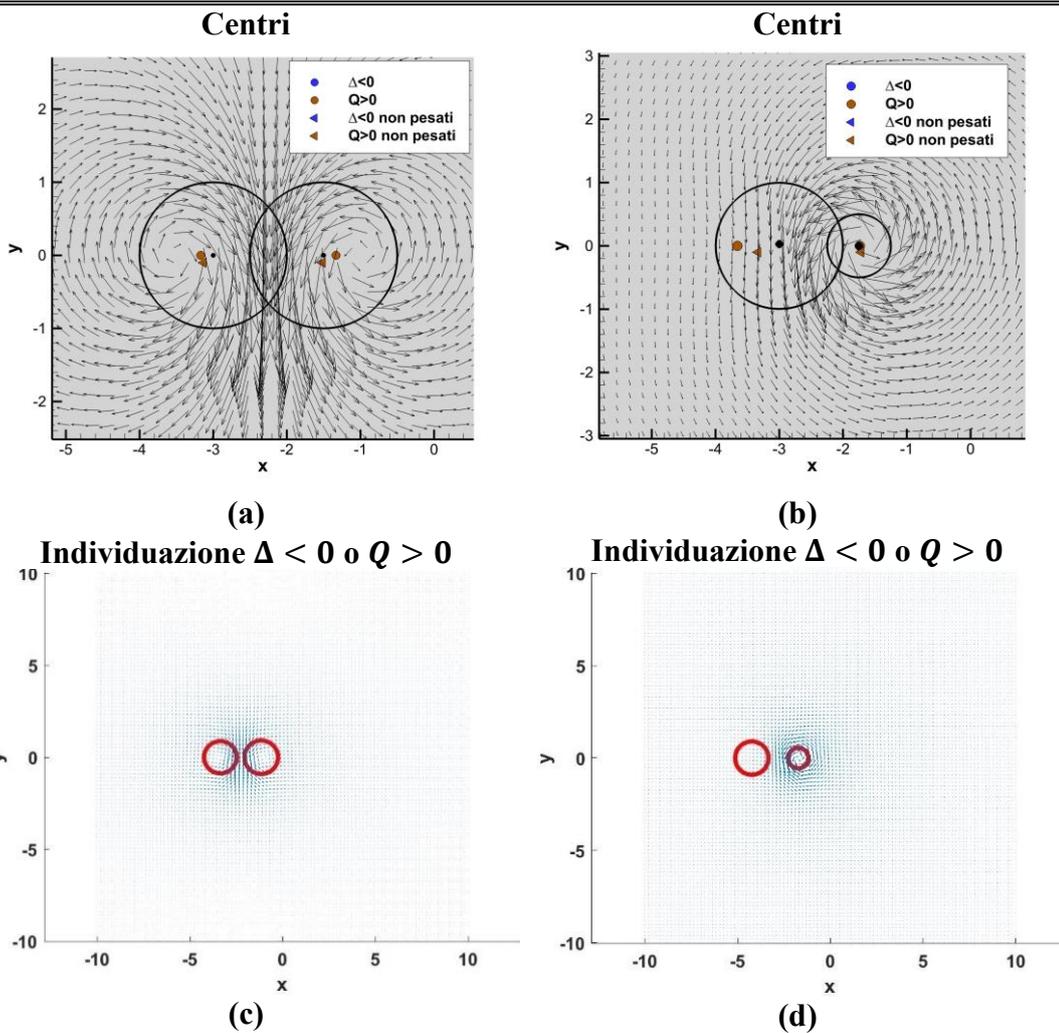
In realtà tale allontanamento è causato dall'individuazione di un vortice che nel campo di moto non è presente perché completamente inglobato dall'altro. Infatti, osservando

le funzioni (Figura 40 “d” ed “e”) è difficile visualizzare il secondo picco perché molto piccolo sebbene sia presente.

Nei restanti casi si ha avvicinamento per vortici corotanti e allontanamento per controrotanti. Di questi casi la distanza relativa supera una cella solo in 21 casi su 54 nei restanti risulta inferiore. Diversamente nei restanti casi i centri si posizionano al più a mezza cella di distanza dai centri geometrici per cui si potranno considerare quasi coincidenti con i centri geometrici stessi. Dunque, tutti i casi controrotanti con  $\bar{d} \leq r_1 + r_2$  e tre casi controrotanti con  $\bar{d} > r_1 + r_2$  (casi 34, 35 e 36) presentano tale comportamento. Sebbene avvenga ciò, anche nei casi in cui si hanno forti spostamenti, i centri non vengono ugualmente individuati nel punto intorno al quale i vettori velocità si chiudono se non nei casi in cui il centro geometrico è già presente in questa cella o quando viene valutato come il valore medio tra i due. Nella Figura 41 si riportano alcuni esempi per visualizzare quanto appena esposto.

**Caso 4:**  $r_2 = r_1, \gamma_2 = -\gamma_1,$   
 $\bar{d} < r_1 + r_2$

**Caso 41:**  $r_2 = 0.5r_1,$   
 $\gamma_1 = -2\gamma_2, \bar{d} < r_1 + r_2$



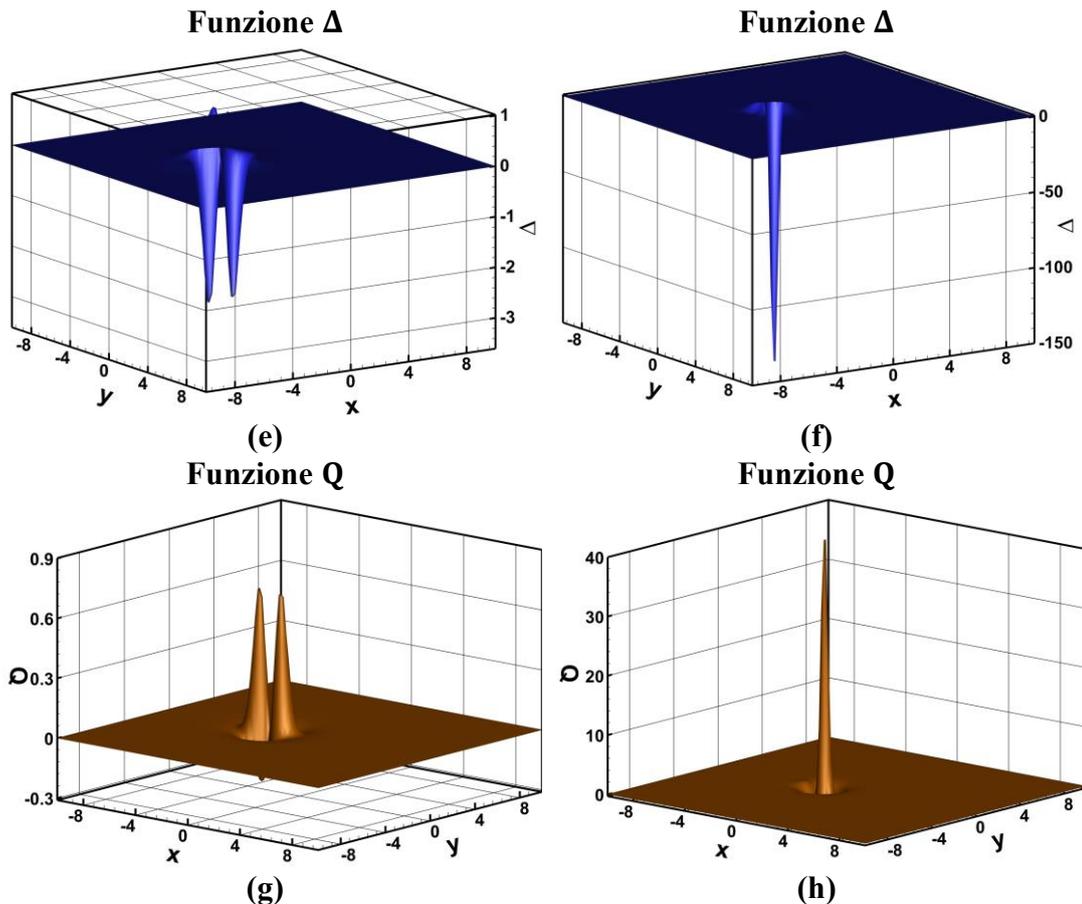


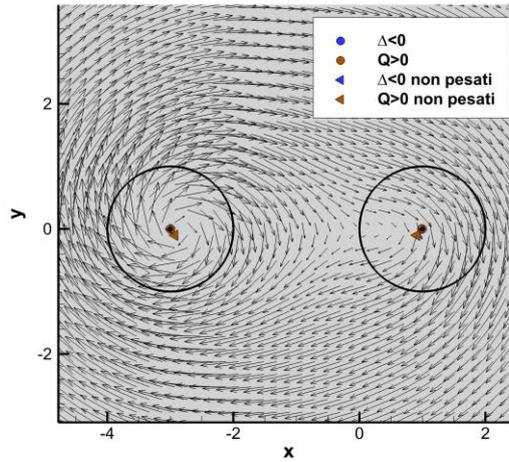
Figura 41: Caso 4 e caso 41 vortici controrotanti che si allontanano. Campo di velocità e centri individuati con i criteri  $\Delta$  e  $Q$  (coincidenti) (a) (b), individuazioni (c) (d) e relative funzioni.

Nel caso 4 (Figura 41 “a”) si evidenzia come i vortici controrotanti si allontanano ma tale allontanamento non è sufficiente per consentire l’individuazione del centro come il punto intorno al quale i vettori velocità si chiudono. Nel caso 41 (Figura 41 “b”), invece, il secondo vortice non è visibile nel campo di moto ma viene ugualmente individuato. Il suo centro si allontana notevolmente dal centro geometrico invece l’altro presenta un centro molto vicino a quello geometrico che non si posiziona ugualmente nel punto intorno al quale i vettori velocità si chiudono. Il secondo picco della funzione è di difficile individuazione perché molto più piccolo rispetto al picco principale.

Dunque, con i criteri  $\Delta$  e  $Q$  si individuano vortici anche laddove non sono presenti nel campo di moto. Visualizzando le funzioni  $\Delta$  e  $Q$  (Figura 40 “d” ed “e” e Figura 41 “f” ed “g”) si evidenzia come i picchi associati a questo secondo vortice non sono visibili. In realtà non è sempre così, ci sono dei casi in cui il secondo picco, pur essendo molto più piccolo del picco associato al vortice osservabile nel campo, è presente e ben evidente. Quanto detto può essere evidenziato dal caso 15 nella Figura 42 in cui, sebbene non siano presenti due vortici nel campo di moto, i metodi ne individuano ugualmente due e i picchi della funzione sono entrambi ben visibili anche se il picco associato al vortice non osservabile nel campo di moto è più piccolo.

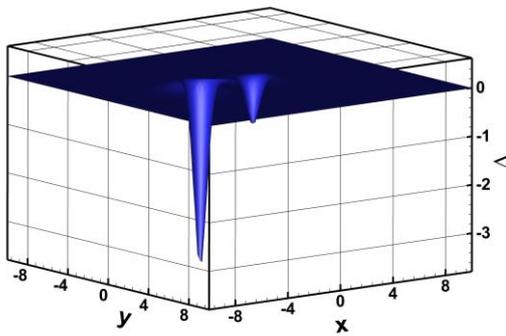
**Caso 15:  $r_2 = r_1, \gamma_2 = \gamma_1/2, \bar{d} > r_1 + r_2$**

**Centri**



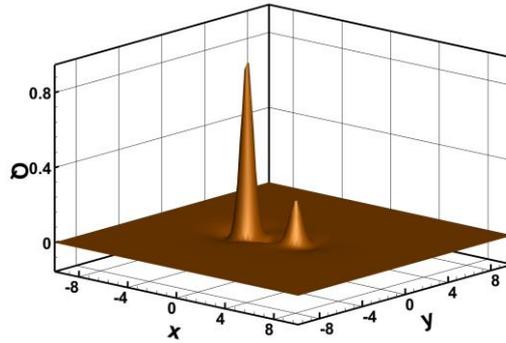
(a)

**Funzione  $\Delta$**



(b)

**Funzione  $Q$**



(c)

Figura 42: Caso 15 centri dei vortici metodi  $\Delta$  e  $Q$  perfettamente coincidenti (a) e funzioni  $\Delta$  (b) e  $Q$  (c).

Dunque, nei casi in cui i metodi individuano due vortici anche se il secondo non è presente quest'ultimo presenterà un picco delle funzioni inferiore. Inoltre, si è evidenziato che in 7 casi su 54 si individuano anche più di due vortici pur non essendo presenti nel campo di moto. Questo evidenzia come per i metodi  $\Delta$  e  $Q$  sia necessario inserire anche in questa fase il numero massimo di vortici da valutare. Inoltre, quando riescono ad individuare il vortice esatto non necessariamente il centro si posiziona nel punto intorno al quale i vettori velocità si chiudono.

**6.3.3 Metodi massimo del modulo della vorticità e della circolazione**

Passiamo all'analisi dei metodi massimo del modulo della vorticità e della circolazione. Per poter individuare la zona in cui è presente un vortice è necessario scegliere una soglia adeguata. Come effettuato per il singolo vortice si analizza l'andamento delle funzioni vorticità e circolazione per tutti i 54 casi e osservando i massimi presenti si sceglie la soglia più opportuna. Vortici antiorari presentano picchi di circolazione e vorticità positivi mentre vortici orari negativi. Una volta scelti i valori

di soglia appropriati si passa all'individuazione del vortice e al calcolo del suo centro. Osserviamo che i centri individuati tendono a posizionarsi maggiormente in punti intorno al quale i vettori velocità non si chiudono e inoltre si individuano vortici anche in zone in cui non c'è alcun vortice. Effettuiamo l'analisi fissando il raggio e variando i restanti parametri.

- Per  $r_2 = r_1$  si individuano due vortici per 16 casi su 18 sebbene di questi 16 casi soltanto 6 evidenziano la presenza di due vortici nel campo di moto. Gli unici due casi in cui si individua un solo vortice sono il caso 2 con  $\gamma_2 = 2\gamma_1$  e il caso 3 con  $\gamma_2 = \gamma_1/2$  entrambi con  $\bar{d} < r_1 + r_2$ , entrambi questi casi presentano nel campo di moto un solo vortice. Il primo vortice individuato è sempre quello che possiede circolazione più elevata infatti ad esso è associato il picco di vorticità e circolazione maggiore.
- Per  $r_2 = 3r_1$  si individuano due vortici per 15 casi su 18 sebbene di questi 15 casi soltanto 8 evidenziano la presenza di due vortici nel campo di moto. Gli unici tre casi in cui si individua un solo vortice sono tutti corotanti con  $\gamma_2 = \gamma_1$   $\bar{d} < r_1 + r_2$ ,  $\gamma_2 = \gamma_1/2$  con  $\bar{d} \leq r_1 + r_2$ , andando ad analizzare il campo di moto si evidenzia la presenza di un solo vortice. Il primo vortice individuato è sempre quello più intenso ovvero  $(x_1, y_1)$  infatti ad esso è associato il picco di vorticità e circolazione maggiore;
- Per  $r_2 = 0.5r_1$  si individuano due vortici per 15 casi su 18 sebbene di questi 15 casi soltanto 9 evidenziano la presenza di due vortici nel campo di moto. Gli unici tre casi in cui si individua un solo vortice sono tutti corotanti con  $\gamma_2 = \gamma_1$   $\bar{d} < r_1 + r_2$ ,  $\gamma_2 = 2\gamma_1$  con  $\bar{d} \leq r_1 + r_2$ , andando ad analizzare il campo di moto si evidenzia la presenza di un solo vortice. Il primo vortice individuato è sempre quello più intenso infatti ad esso è associato il picco di vorticità e circolazione maggiore.

Dunque, in 46 casi si individuano due vortici nel campo di velocità gli unici casi in cui si individua un solo vortice sono 8 e sono effettivamente tutti casi in cui non è visibile nel campo di velocità il secondo vortice. I metodi  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  individuano, dunque, due vortici anche nei campi di velocità in cui in realtà non sono presenti, ricordiamo infatti che solo in 23 campi di velocità sono presenti entrambi i vortici.

Valutando la distanza relativa tra i centri individuati, nel caso in cui si individuano due vortici, si evidenzia come vortici corotanti si avvicinano e vortici controrotanti si allontanano. Tale avvicinamento o allontanamento supera una cella solo in 21 casi su 54 nei restanti risulta inferiore. Inoltre, in questi 21 casi si evidenzia come i centri si discostano dai centri geometrici di almeno mezza cella. Diversamente nei restanti casi i centri si posizionano al più a mezza cella di distanza dai centri geometrici per cui si potranno considerare quasi coincidenti con i centri geometrici stessi. Dunque, tutti i casi controrotanti con  $\bar{d} \leq r_1 + r_2$  e 3 casi corotanti con  $\bar{d} \leq r_1 + r_2$  (caso 20, casi 25 e 26) presentano tale comportamento. Sebbene avvenga ciò, anche nei casi in cui si

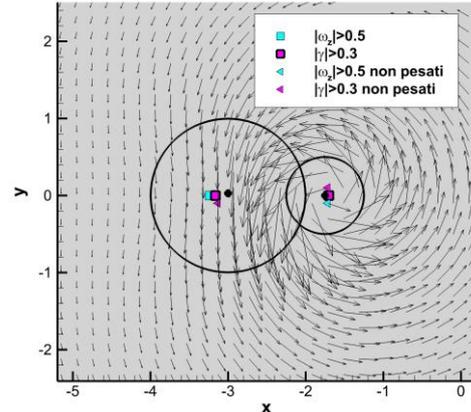
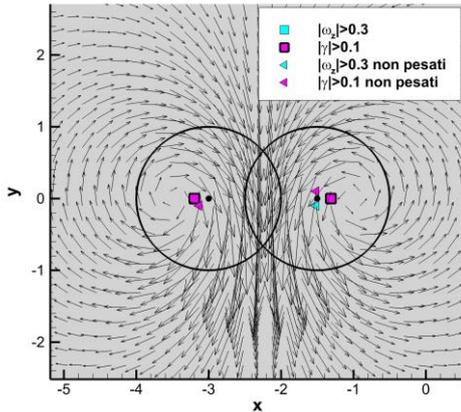
hanno forti spostamenti, i centri non vengono ugualmente individuati nel punto intorno al quale i vettori velocità si chiudono se non nei casi in cui il centro geometrico è già presente in questa cella. In Figura 43 si riportano alcuni esempi per visualizzare quanto appena esposto.

**Caso 4**  $r_2 = r_1$   $\gamma_2 = -\gamma_1$   
 $\bar{d} < r_1 + r_2$

**Caso 41**  $r_2 = 0.5r_1$   $\gamma_2 = -2\gamma_1$   
 $\bar{d} < r_1 + r_2$

**Centri**

**Centri**

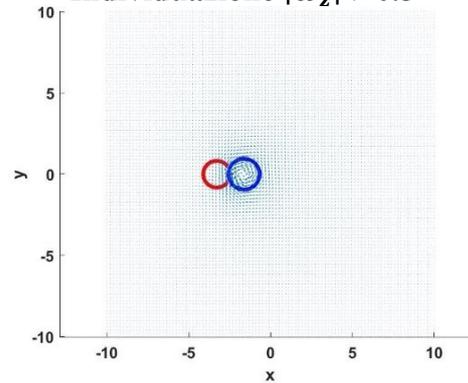
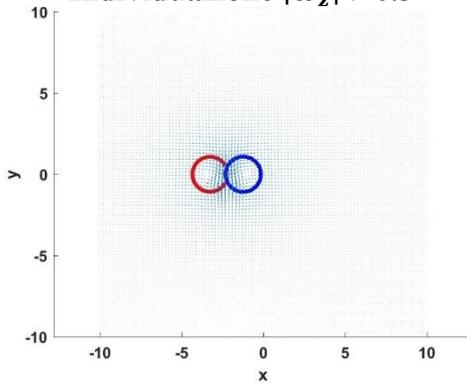


(a)

(b)

**Individuazione  $|\omega_z| > 0.3$**

**Individuazione  $|\omega_z| > 0.5$**

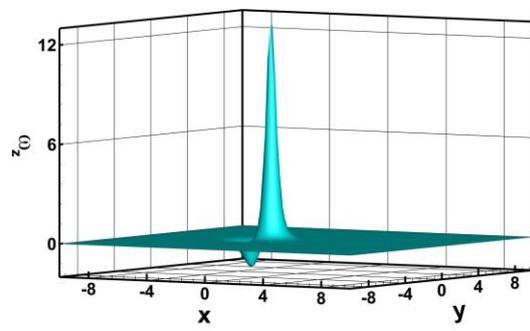
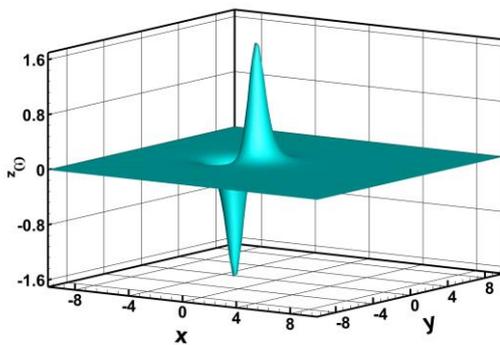


(c)

(d)

**Funzione  $\omega_z$**

**Funzione  $\omega_z$**



(e)

(f)

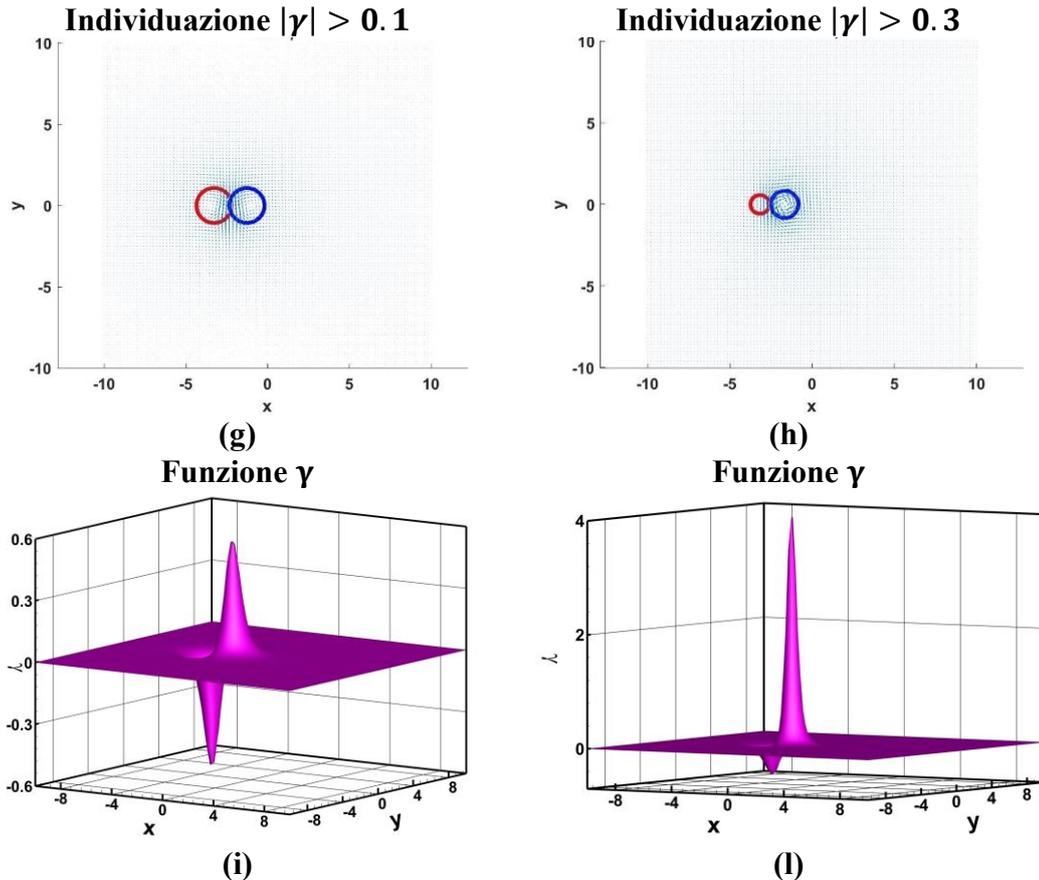


Figura 43: Caso 4 e caso 41 vortici controrotanti che si allontanano. Campo di velocità e centri individuati con i criteri  $\max |\omega_z|$  e  $\max |\gamma|$  (a) (b), individuazioni (c) (d) (g) (h) e relative funzioni (e) (f) (i) (l).

Per vortici controrotanti si hanno due picchi, uno positivo associato al vortice antiorario e uno negativo associato al vortice orario. Per cui il cerchio rosso rappresenta l'individuazione del vortice orario con picco negativo e quella blu del vortice antiorario con picco positivo (Figura 43 “c”, “d”, “g”, “h”). Nel caso 4 (Figura 43 “a”) si evidenzia come i vortici controrotanti si allontanano ma tale allontanamento non consente l'individuazione del centro come il punto intorno al quale i vettori velocità si chiudono. Nel caso 41 (Figura 43 “b”), invece, il secondo vortice non è visibile nel campo di moto ma viene ugualmente individuato. Il suo centro si allontana notevolmente dal centro geometrico invece l'altro presenta un centro molto vicino a quello geometrico che si posiziona a circa mezza cella dal punto intorno al quale i vettori velocità si chiudono, essendo in quella posizione anche il centro geometrico. Le funzioni  $\omega_z$  (Figura 43 “f”) e  $\gamma$  (Figura 43 “l”) evidenziano come il picco associato al vortice non presente nel campo di moto è molto piccolo rispetto a quello associato al vortice realmente presente.

Dunque, nei casi 23 casi in cui i metodi individuano due vortici, sebbene ve ne sia soltanto uno nel campo di velocità, i vortici non presenti hanno picchi delle funzioni inferiori rispetto a quelli del vortice realmente presente. Inoltre, quando riescono ad

individuare il vortice esatto non necessariamente il centro si posiziona nel punto intorno al quale i vettori velocità si chiudono.

#### 6.3.4 Confronto tra i metodi

Analizzando tutti i metodi abbiamo visto il loro diverso comportamento. L'unico metodo che considera l'interazione tra i vortici e determina il centro come il valore intorno al quale i vettori velocità si chiudono è il metodo  $\Gamma_2$  scelto il dominio più opportuno. Gli altri metodi individuano il centro anche laddove non è presente.

Nella Tabella 25 sono presenti il numero di casi in cui ogni metodo individua un solo vortice, due vortici o più vortici mettendoli a confronto con il numero di campi di velocità in cui sono presenti questi vortici.

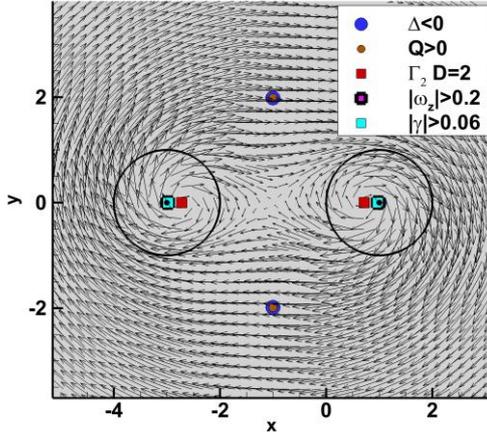
*Tabella 25: Numero di campi di velocità che con ogni metodo individuano un vortice, due vortici o più vortici messo a confronto con il numero di campi di velocità che effettivamente presentano uno o due vortici.*

<b>Numero campi di velocità</b>			
<b>Numero di vortici</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>&gt;2</b>
<b>Presenti</b>	31	23	/
$\Gamma_2$	31	23	/
$\Delta < 0$ e $Q > 0$	10	37	7
$\max \omega_z $ e $\max \gamma $	8	46	/

Dalla Tabella 25 si nota come il metodo  $\Gamma_2$  individua due vortici solo nei casi in cui osservando l'immagine si evidenzia la loro presenza, analogamente individua un solo vortice solo dove esso è presente. Diversamente avviene per i restanti metodi. I metodi  $\Delta$  e  $Q$  individuano un solo vortice in 10 casi, in questi casi effettivamente nel campo di moto è presente un solo vortice. I metodi  $\Delta$  e  $Q$ , però, individuano in 37 casi due vortici di questi casi soltanto 18 presentano due vortici nel campo di moto i restanti solo un vortice. Inoltre, in 7 casi individuano più di due vortici di questi 5 presentano due vortici e 2 un solo vortice. I metodi  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  in 8 casi individuano un solo vortice dove effettivamente è presente un solo vortice nel campo, ma in 46 casi individuano due vortici mentre in realtà solo in 23 sono presenti due vortici negli altri casi soltanto uno. Quanto esposto evidenzia la non correttezza dei criteri  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  poiché essi presentano vortici anche laddove non ve ne sono.

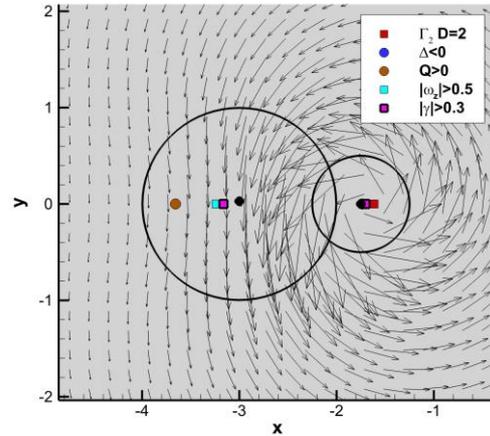
Nella Figura 44 si riportano una serie di campi di velocità per evidenziare quanto appena esposto.

**Caso 13:**  $r_2 = r_1, \gamma_2 = \gamma_1,$   
 $\bar{d} > r_1 + r_2$



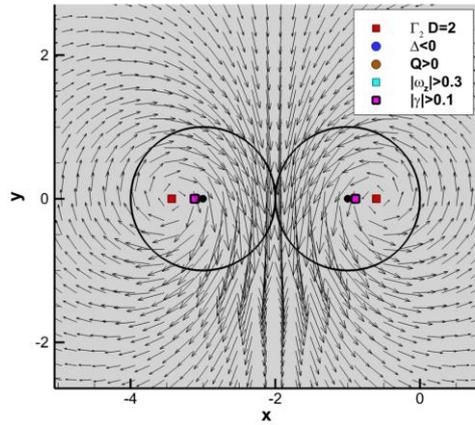
(a)

**Caso 41:**  $r_2 = 0.5r_1,$   
 $\gamma_2 = -2\gamma_1, \bar{d} < r_1 + r_2$



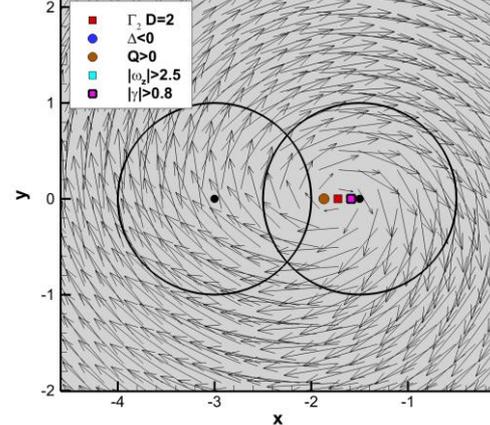
(b)

**Caso 10:**  $r_2 = r_1, \gamma_2 = -2\gamma_1,$   
 $\bar{d} = r_1 + r_2$



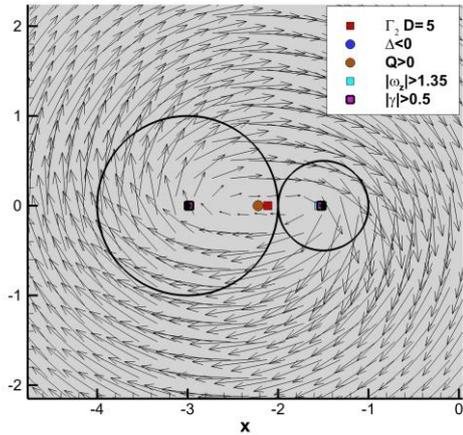
(c)

**Caso 2:**  $r_2 = r_1, \gamma_2 = 2\gamma_1,$   
 $\bar{d} < r_1 + r_2$



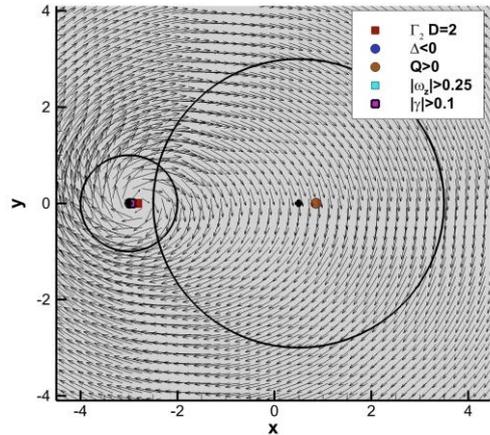
(d)

**Caso 45:**  $r_2 = 0.5r_1,$   
 $\gamma_2 = \gamma_1/2, \bar{d} = r_1 + r_2$



(e)

**Caso 19:**  $r_2 = 3r_1, \gamma_2 = \gamma_1,$   
 $\bar{d} < r_1 + r_2$



(f)

Figura 44: Centri con i metodi  $\Gamma_2 D = 2, \Delta, Q, \max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  Caso 13 (a), Caso 41 (b), Caso 10 (c), Caso 2 (d), Caso 45 (e), Caso 19 (f).

Dalla Figura 44 si osserva che il metodo  $\Gamma_2$  valuta il centro sempre dove i vettori velocità si chiudono, diversamente avviene per i metodi  $\max|\omega_z|$  e  $\min|\gamma|$  e i metodi  $\Delta$  e  $Q$ . Infatti, questi metodi, oltre ad individuare vortici anche laddove non presenti, quando individuano il vortice esatto il suo centro non si posiziona sempre dove i vettori velocità si chiudono. Questo è fortemente evidenziato nel caso 13 (Figura 44 “a”) e nel caso 10 (Figura 44 “c”). In questi due casi i centri  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  che individuano i due vortici presenti nel campo di moto sono praticamente coincidenti tra di loro e molto vicini al centro geometrico. Nel caso 41 (Figura 44 “b”) e nel caso 19 (Figura 44 “f”) i centri che individuano il vortice realmente presente nel campo di moto ottenuti con i criteri  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  si posizionano in corrispondenza del centro geometrico che dista circa mezza cella dal punto in cui i vettori velocità si chiudono. Nel caso 2 (Figura 44 “d”) il centro ottimale è quello ottenuto con il metodo  $\Gamma_2$  ma i restanti distano al più mezza cella. Nel caso 45 (Figura 44 “e”) il metodo  $\Delta$  e  $Q$  (i centri dei due metodi coincidono) individuano il centro in posizione esatta mentre i criteri,  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  individuano due vortici.

Dunque, analizzando tutti i 54 casi è evidente come sia il metodo  $\Gamma_2$  quello che funziona in maniera più efficace poiché individua il numero di vortici esatti e posiziona il centro dove i vettori velocità si chiudono o al più a mezza cella da essi diversamente da quanto avviene per gli altri metodi.

Dunque, è possibile fare la seguente classificazione

- In 7 casi i metodi  $\Delta$  e  $Q$  individuano più di due vortici mentre il metodo  $\Gamma_2$  ne individua uno solo in 2 casi e due in 5 casi. I metodi  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  invece individuano sempre 2 vortici in questi 7 casi. Un esempio è riportato in Figura 44 “a”;
- Il metodo  $\Gamma_2$  individua un solo vortice mentre i metodi  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  li individuano entrambi in 16 casi. Un esempio è riportato in Figura 44 “b”;
- Tutti i metodi individuano entrambi i vortici in 18 casi. Questi sono, ovviamente casi in cui realmente sono presenti due vortici. L’esempio è quello riportato in Figura 44 “c”;
- Tutti i metodi individuano un solo vortice in 4 casi ovvero caso 2 con  $r_2 = r_1$ ,  $\gamma_2 = 2\gamma_1$ ,  $\bar{d} < r_1 + r_2$ , caso 3 con  $r_2 = r_1$ ,  $\gamma_2 = \gamma_1/2$ ,  $\bar{d} < r_1 + r_2$ , caso 21 con  $r_2 = 3r_1$ ,  $\gamma_2 = \gamma_1/2$ ,  $\bar{d} < r_1 + r_2$ , caso 37 con  $r_2 = 0.5r_1$ ,  $\gamma_2 = \gamma_1$ ,  $\bar{d} < r_1 + r_2$ . Si osserva essere tutti casi corotanti con  $\bar{d} < r_1 + r_2$ . Un esempio è riportato in Figura 44 “d”. In realtà scegliendo una soglia per  $\Delta$  e  $Q$  diversa da zero il solo caso in cui per tutti i metodi si individua un solo vortice è il caso 21;
- Il metodo  $\Gamma_2$  e i metodi  $\Delta$  e  $Q$  individuano un solo vortice mentre i metodi  $\max|\omega_z|$  e  $\min|\gamma|$  ne individuano due in 6 casi ovvero caso 1 con  $r_2 = r_1$ ,  $\gamma_2 = \gamma_1$ ,  $\bar{d} < r_1 + r_2$ , 7 con  $r_2 = r_1$ ,  $\gamma_2 = \gamma_1$ ,  $\bar{d} = r_1 + r_2$ , 8 con  $r_2 = r_1$ ,  $\gamma_2 = 2\gamma_1$

$\bar{d} = r_1 + r_2$ , 9 con  $r_2 = r_1$   $\gamma_2 = \gamma_1/2$   $\bar{d} = r_1 + r_2$ , 39 con  $r_2 = 0.5r_1$   $\gamma_2 = \gamma_1/2$   $\bar{d} < r_1 + r_2$ , 45 con  $r_2 = 0.5r_1$   $\gamma_2 = \gamma_1$   $\bar{d} = r_1 + r_2$ . In realtà scegliendo una soglia per  $\Delta$  e  $Q$  diversa da zero anche in questi casi si individuano due vortici. Un esempio è riportato in Figura 44 “e”;

- Il metodo  $\Gamma_2$  e i metodi  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  individuano un solo vortice mentre i metodi  $\Delta$  e  $Q$  ne individuano due in 3 casi ovvero caso 19 con  $r_2 = 3r_1$   $\gamma_2 = \gamma_1$   $\bar{d} < r_1 + r_2$ , 27 con  $r_2 = 3r_1$   $\gamma_2 = \gamma_1/2$   $\bar{d} = r_1 + r_2$ , 38 con  $r_2 = 0.5r_1$   $\gamma_2 = 2\gamma_1$   $\bar{d} < r_1 + r_2$ . Un esempio è riportato in Figura 44 “f”;

## 6.4 Doppio vortice con rumore

Vediamo come inserendo una certa percentuale di rumore si comportano i diversi metodi in presenza di due vortici o di un solo vortice non perfettamente circolare. Il rumore si genera tramite la funzione random di Fortran di ampiezza 1 con oscillazioni base tra  $-0.5$  e  $0.5$ . Si prendono in considerazione soglie di rumore al 20% e al 90% espresse in percentuale della velocità tangenziale massima del vortice principale  $(x_1, y_1)$  ovvero  $\max(\bar{v}_{\theta_1})$ . Faremo vedere come una volta scelto il dominio più opportuno per la funzione  $\Gamma_2$  questo metodo sia in grado di individuare da solo i vortici presenti diversamente dagli altri metodi che necessitano del numero di vortici per lavorare. Analizziamo solo 9 dei 54 campi di velocità. Nella Tabella 26 sono presenti le caratteristiche dei casi che si analizzano al variare del rumore.

Tabella 26: Caratteristiche dei due vortici di Vattistas con diverse percentuali di rumore.

<b>casi</b>	<b><math>r_c</math></b>	<b><math>\gamma</math></b>	<b>Posizione</b>	<b>Rumore%</b>
1	$r_2 = r_1$	$\gamma_2 = \gamma_1$	$\bar{d} < r_1 + r_2$	20
				90
5	$r_2 = r_1$	$\gamma_2 = -2\gamma_1$	$\bar{d} < r_1 + r_2$	20
				90
16	$r_2 = r_1$	$\gamma_2 = -\gamma_1$	$\bar{d} > r_1 + r_2$	20
				50
				90
19	$r_2 = 3r_1$	$\gamma_2 = \gamma_1$	$\bar{d} < r_1 + r_2$	20
				90
23	$r_2 = 3r_1$	$\gamma_2 = -2\gamma_1$	$\bar{d} < r_1 + r_2$	20
				50
				90
26	$r_2 = 3r_1$	$\gamma_2 = 2\gamma_1$	$\bar{d} = r_1 + r_2$	20
				50
				90
38	$r_2 = 0.5r_1$	$\gamma_2 = 2\gamma_1$	$\bar{d} < r_1 + r_2$	20
				90
48	$r_2 = 0.5r_1$	$\gamma_2 = -\gamma_1/2$	$\bar{d} = r_1 + r_2$	20
				90
50	$r_2 = 0.5r_1$	$\gamma_2 = 2\gamma_1$	$\bar{d} = r_1 + r_2$	20
				90

Come fatto nel caso senza rumore analizziamo le individuazioni del vortice con ogni singolo metodo. Per ogni metodo valutiamo, in percentuale della distanza della risoluzione spaziale, l'errore rispetto al centro pesato ottenuto con quel particolare metodo in assenza di rumore. Ovvero:

$$\varepsilon(\%) = \frac{\sqrt{\left(x_{rumore\%} - x_{0\%pesato}\right)^2 + \left(y_{rumore\%} - y_{0\%pesato}\right)^2}}{\frac{\Delta L}{r_1} \sqrt{2}} \%$$

#### 6.4.1 Metodo $\Gamma_2$

Nell'analisi effettuata per i doppi vortici senza rumore abbiamo preso come centro di riferimento il centro valutato con il dominio  $D = 2$  eccetto per casi in cui il vortice è molto ellittico. In realtà il centro ottenuto con  $D = 5$  dista al più mezza cella dal centro  $D = 2$ . In questo caso consideriamo il  $D = 2$  come riferimento non essendo in presenza dei casi 7 e 45 in cui il dominio  $D = 5$  è il più efficace. Per effettuare l'analisi consideriamo diversi domini e valutiamo in percentuale della distanza della risoluzione spaziale l'errore rispetto al centro valutato senza rumore con  $D = 2$ . Analizziamo ogni singolo caso osservando per primi i casi in cui nel campo di velocità senza rumore sono presenti due vortici e successivamente i casi in cui è presente un solo vortice. Nelle tabelle che seguono vengono evidenziati in rosso gli errori minori associati a quei soli domini che individuano il numero di vortici esatti e vengono sottolineati quei valori associati ai domini che individuano un numero superiore di vortici rispetto ai reali esistenti.

#### Caso 16

Allo 0% di rumore i centri valutati con  $D = 2$  e  $D = 5$  coincidono perfettamente. Dunque, è indifferente la scelta tra l'uno o l'altro nel calcolo dell'errore. Il numero di punti contenuti nel raggio di entrambi i vortici è 5 ( $r_1 = r_2 = 5$ ). In Tabella 27 sono riportati gli errori percentuali relativi al caso 48 al variare del dominio e del livello di rumore.

*Tabella 27: Errore percentuale espresso in funzione della distanza della risoluzione spaziale e rispetto al centro valutato con  $\Gamma_2$   $D = 2 \equiv D = 5$  al variare del rumore e per diversi domini per il caso 16.*

<b>Errori caso 16: <math>r_2 = r_1, \gamma_2 = -\gamma_1, \bar{d} &gt; r_1 + r_2</math></b>					
<b>Rumore</b>	<b><math>D = 2</math></b>	<b><math>D = 3</math></b>	<b><math>D = 5</math></b>	<b><math>D = 7</math></b>	<b><math>D = 15</math></b>
20% ( $x_1, y_1$ )	<u>3%</u>	12%	1.38%	14%	159%
20% ( $x_2, y_2$ )	<u>17%</u>	3%	1.03%	27%	154%
50% ( $x_1, y_1$ )	<u>38%</u>	37%	20%	21%	43%

50% ( $x_2, y_2$ )	<u>107%</u>	67%	37%	26%	63%
90% ( $x_1, y_1$ )	<u>50%</u>	52%	52%	35%	Nessuno
90% ( $x_2, y_2$ )	<u>72%</u>	104%	56%	48%	Nessuno

**Caso 16:  $r_2 = r_1, \gamma_2 = -\gamma_1, \bar{d} < r_1 + r_2$**

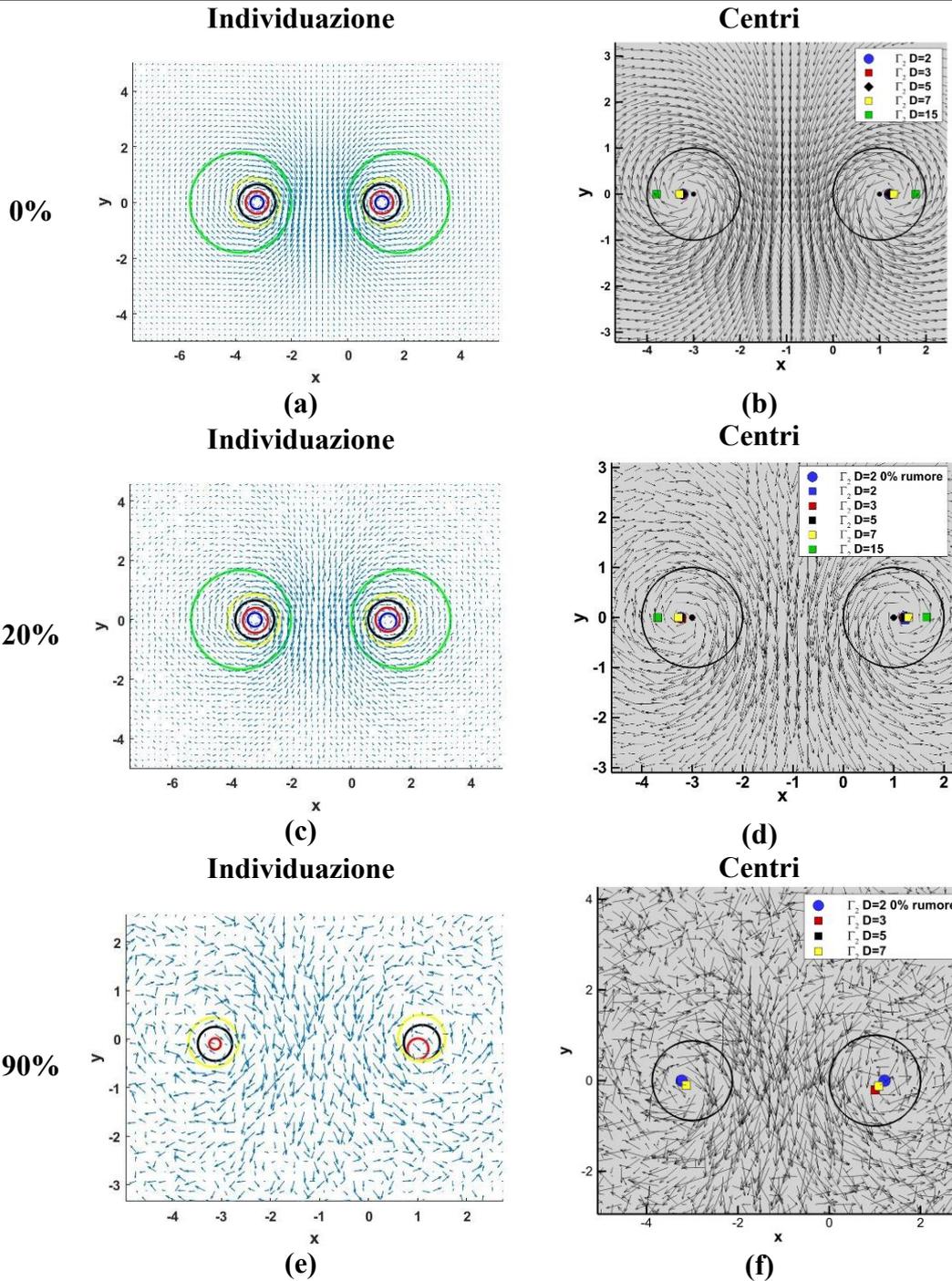


Figura 45: caso 16: zone individuato al variare del rumore e del dominio (a), (c) ed (e) e relativi centri (b), (e) e (f). Cerchio blu  $D = 2$ , rosso  $D = 3$ , nero  $D = 5$ , giallo  $D = 7$ , verde  $D = 15$ .

## Individuazione $D = 2$

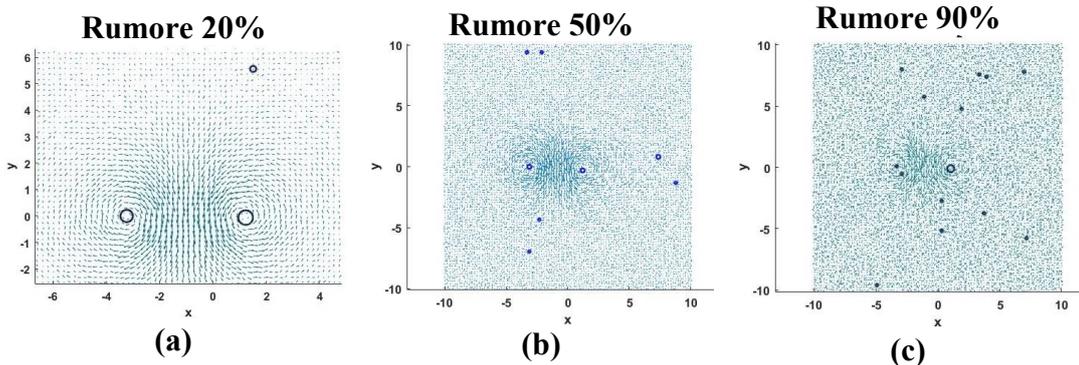


Figura 46: caso 16 individuazione vortici funzione  $\Gamma_2$   $D = 2$ .

Osservando le Figura 45, Figura 46 e la Tabella 27 è possibile fare le seguenti considerazioni.

Al 20% di rumore il dominio  $D = 2$  individua tre vortici (Figura 46 “a”) andandoli ad analizzare si vede che due di essi si posizionano a meno di mezza cella dal centro valutato allo 0%, anzi per il centro  $(x_1, y_1)$  risulta la migliore individuazione possibile, però il criterio non individua da solo i reali vortici esistenti. L’individuazione più efficace è con  $D = 5$  sia per il vortice  $(x_1, y_1)$  che per il vortice  $(x_2, y_2)$  anche se in realtà i centri valutati con  $D = 3$  e  $D = 7$  distano al più un quarto di cella quindi sono anche loro efficaci.

Al 50% di rumore il dominio  $D = 2$  individua otto vortici (Figura 46 “b”) andandoli ad analizzare si vede che due di essi si posizionano in maniera efficace. Il vortice  $(x_1, y_1)$  si posiziona a meno di mezza cella dal centro valutato allo 0% il vortice  $(x_2, y_2)$  a circa una cella. L’individuazione più efficace è con  $D = 5$  per il vortice  $(x_1, y_1)$  e  $D = 7$  per il vortice  $(x_2, y_2)$ . In realtà i centri  $(x_1, y_1)$  valutati con  $D = 3$ ,  $D = 5$ ,  $D = 7$  e  $D = 15$  sono tutti contenuti nella stessa cella. Invece i centri  $(x_2, y_2)$  valutati con  $D = 5$ ,  $D = 7$  distano meno di mezza cella e con  $D = 3$  e  $D = 15$  poco più di mezza cella. Quindi i centri valutati con tutti i domini eccetto  $D = 2$  sono efficaci.

Al 90% di rumore il dominio  $D = 2$  individua quattordici vortici (Figura 46 “c”) andandoli ad analizzare si vede che il vortice  $(x_1, y_1)$  si posiziona a circa mezza cella dal centro valutato allo 0%, mentre il vortice  $(x_2, y_2)$  a poco più di mezza cella. L’individuazione più efficace è con  $D = 7$  sia per il vortice  $(x_1, y_1)$  che per il vortice  $(x_2, y_2)$ . In realtà per il vortice  $(x_1, y_1)$  i centri con  $D = 3$ ,  $D = 5$  e  $D = 7$  praticamente coincidono poiché tutti contenuti in mezza cella, per il vortice  $(x_2, y_2)$  i centri con  $D = 5$  e  $D = 7$  coincidono mentre  $D = 3$  è contenuto nella loro stessa cella (Figura 45 “f”). Per cui le individuazioni effettuate con  $D = 3$ ,  $D = 5$  e  $D = 7$  sono tutte efficaci. Il  $D = 15$  invece non individua alcun vortice nel campo di moto.

Dunque, per tutti i livelli di rumore  $D = 5$  e  $D = 7$  sono efficaci perché al più l'errore è pari a mezza cella. Questo lo si spiega considerando che in entrambi i vortici sono presenti 5 punti nel raggio.

Caso 23

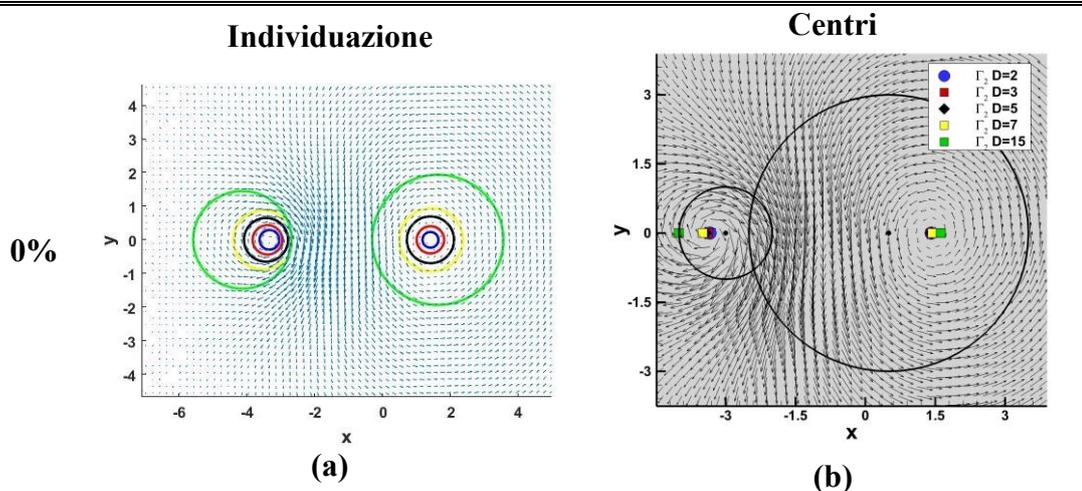
Allo 0% di rumore si considerano i centri valutati con  $D = 2$ . Il numero di punti contenuti nel raggio del vortice  $(x_1, y_1)$  è 5 diversamente il numero di punti contenuti nel raggio del secondo vortice,  $(x_2, y_2)$ , è 14. In Tabella 28 sono riportati gli errori percentuali relativi al caso 23 al variare del dominio e del livello di rumore

Tabella 28: Errore percentuale espresso in funzione della distanza della risoluzione spaziale e rispetto al centro valutato con  $\Gamma_2 D = 2$  al variare del rumore e per diversi domini per il caso 23.

**Errori caso 23:  $r_2 = 3r_1, \gamma_2 = -2\gamma_1, \bar{d} < r_1 + r_2$**

Rumore	$D = 2$	$D = 3$	$D = 5$	$D = 7$	$D = 12$	$D = 15$
20% $(x_1, y_1)$	<u>16%</u>	26%	31%	39%	103%	116%
20% $(x_2, y_2)$	\	81%	72%	30%	52%	83%
50% $(x_1, y_1)$	<u>64%</u>	46%	22%	8%	5%	28%
50% $(x_2, y_2)$	\	\	\	\	45%	5%
90% $(x_1, y_1)$	<u>82%</u>	82%	65%	69%	Nessuno	Nessuno
90% $(x_2, y_2)$	\	\	\	\	Nessuno	Nessuno

**Caso 23:  $r_2 = 3r_1, \gamma_2 = -2\gamma_1, \bar{d} < r_1 + r_2$**



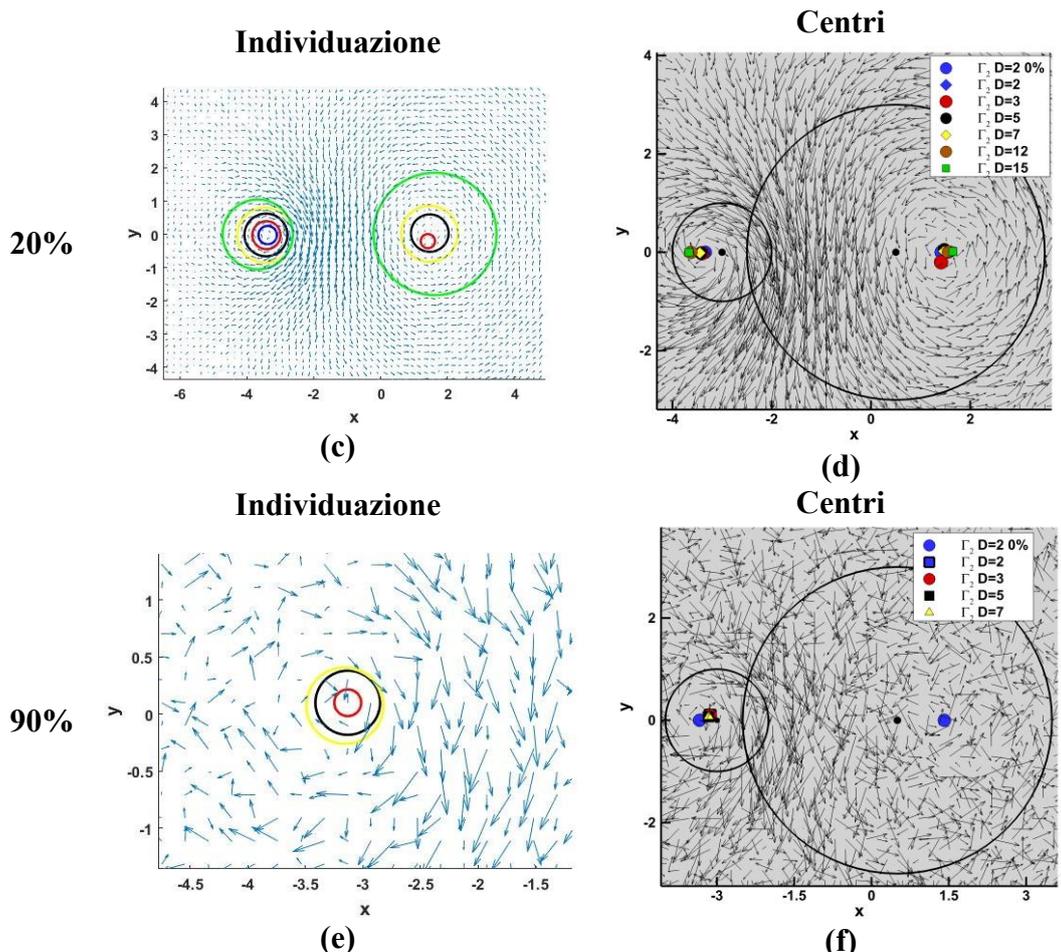


Figura 47: caso 23: zone individuate al variare del rumore e del dominio (a), (c) ed (e) e relativi centri (b), (e) e (f). Cerchio blu  $D = 2$ , rosso  $D = 3$ , nero  $D = 5$ , giallo  $D = 7$ , verde  $D = 15$ .

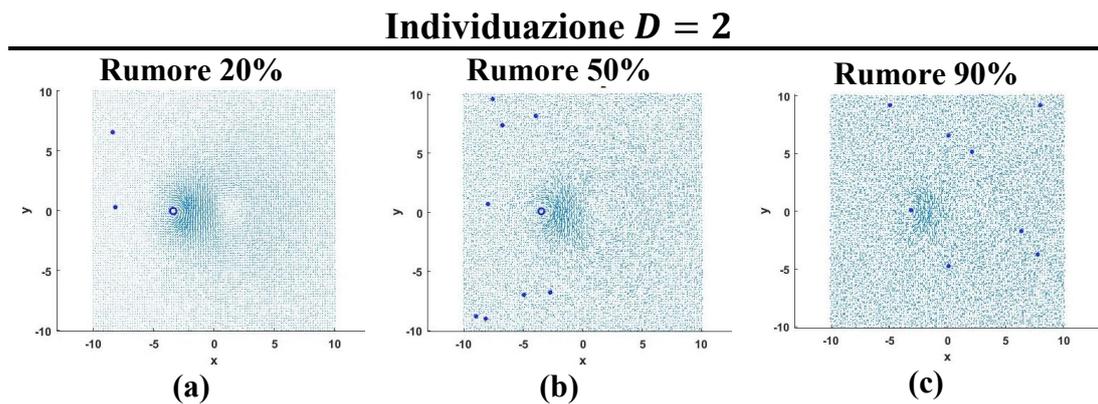


Figura 48: caso 23 individuazione vortici funzione  $\Gamma_2$   $D = 2$ .

Al 20% di rumore il dominio  $D = 2$  individua tre vortici (Figura 48 “a”) andandoli ad analizzare si vede che uno di essi, il vortice  $(x_1, y_1)$ , si posizionano a meno di mezza cella dal centro valutato allo 0% anzi in teoria risulta l’individuazione migliore per quel centro. L’individuazione più efficace è con  $D = 3$  per il vortice  $(x_1, y_1)$  e  $D = 7$  per il vortice  $(x_2, y_2)$ . In realtà per il vortice  $(x_1, y_1)$  gli errori commessi con  $D = 3$ ,

$D = 5$  e  $D = 7$  sono paragonabili infatti i centri sono quasi coincidenti, per  $D = 12$  e  $D = 15$  l'errore diviene di circa una cella, si evidenzia inoltre che all'aumentare del dominio i centri si spostano verso sinistra. Per il vortice  $(x_2, y_2)$  con tutti i domini l'errore è contenuto al di sotto di una cella e si evidenzia come all'aumentare del dominio, eccetto per  $D = 3$ , i centri si spostano verso destra. Il centro  $D = 3$  è l'unico che commette un grande errore sulla coordinata  $y$  del centro  $(x_2, y_2)$  (Figura 47 "d" cerchio rosso). Questo diverso comportamento tra i due centri  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  può essere spiegato con il fatto che nel primo ci sono 5 punti nel raggio e nel secondo 14 punti nel raggio. Dunque, si evidenzia già al 20% come un dominio prossimo al valore dei punti contenuti nel raggio è ottimale.

Al 50% di rumore il dominio  $D = 2$  individua nove vortici (Figura 48 "b") andandoli ad analizzare si vede che uno di essi, il vortice  $(x_1, y_1)$ , si posiziona a poco più di mezza cella dal centro valutato allo 0%. Per il vortice  $(x_1, y_1)$  con  $D = 2, D = 5, D = 7, D = 12$  e  $D = 15$  i centri sono tutti contenuti in mezza cella per cui sono tutti domini che individuano efficacemente il vortice anche se il migliore risulta  $D = 12$ . Diversamente il vortice  $(x_2, y_2)$  si riesce ad individuare solo con valori del dominio  $D = 12$  e  $D = 15$  poiché essi sono prossimi al raggio del vortice stesso. Il centro con minor errore si ha con  $D = 15$  ma anche con  $D = 12$  l'errore sta al di sotto di mezza cella. Dunque, da questa analisi si evidenzia come all'aumentare del rumore per poter individuare il vortice con raggio maggiore è necessario avere un dominio  $D$  prossimo al valore di punti contenuti nel raggio stesso.

Al 90% di rumore il dominio  $D = 2$  individua otto vortici (Figura 48 "c") andandoli ad analizzare si vede che uno di essi, il vortice  $(x_1, y_1)$ , si posiziona a poco più di mezza cella dal centro valutato allo 0%. Dato l'elevato livello di rumore è impossibile individuare il vortice meno intenso ovvero  $(x_2, y_2)$  con qualsiasi dominio. Infatti, l'unico vortice individuato è  $(x_1, y_1)$  con  $D = 3, D = 5$  e  $D = 7$  cioè valori del dominio prossimi al numero di punti contenuti nel raggio. I domini  $D = 12$  e  $D = 15$ , differentemente, non individuano alcun vortice.

Si osserva che all'aumentare del rumore risulta sempre più difficile individuare il vortice meno intenso, infatti al 90% non lo si individua più invece al 50% di rumore si individua a partire dal dominio  $D = 12$  ovvero prossimo al numero di punti contenuti nel raggio. Questo evidenzia come per individuare i vortici sia necessario considerare un dominio  $D$  prossimo al valore del numero di punti contenuti nel raggio del vortice. Purtroppo, con alti livelli di rumore le strutture vorticosi meno intense praticamente scompaiono.

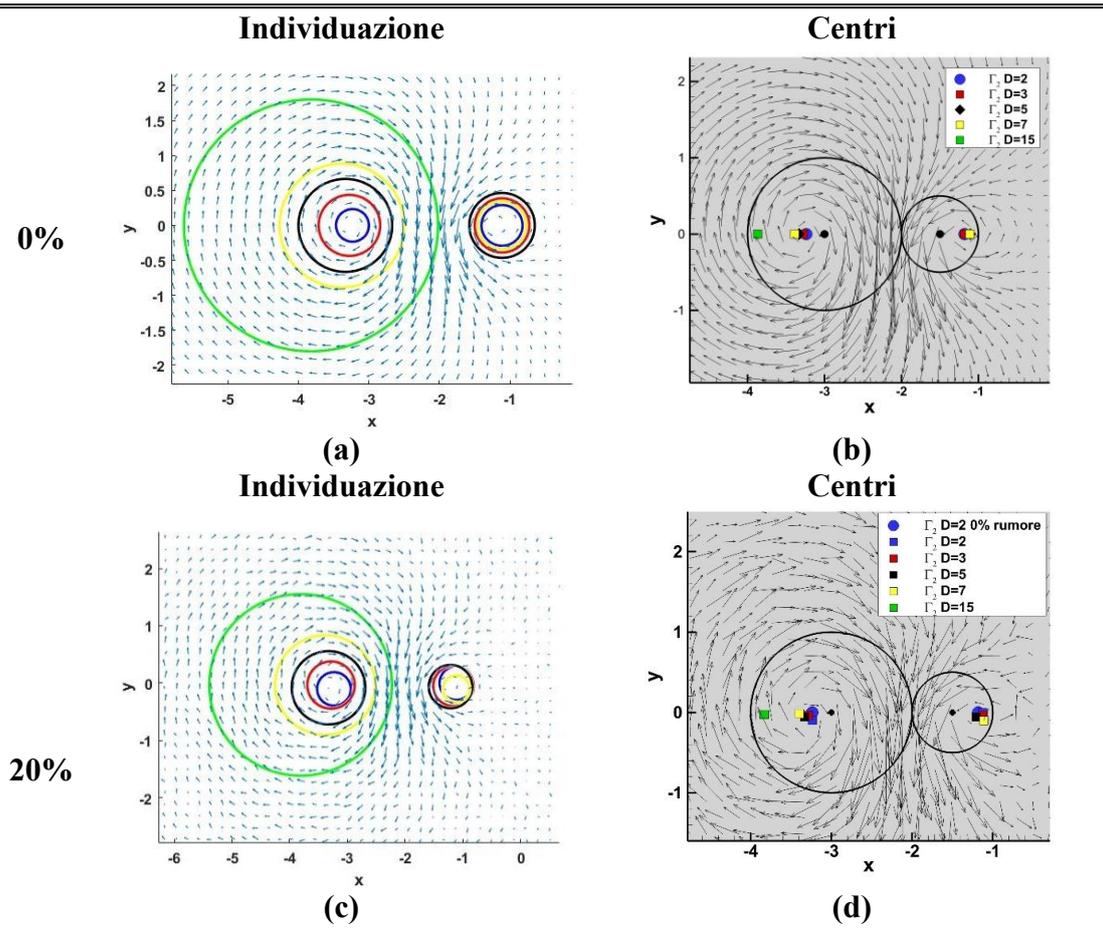
#### Caso 48

Allo 0% di rumore si considerano i centri valutati con  $D = 2$ . Il numero di punti contenuti nel raggio  $r_1$  del vortice  $(x_1, y_1)$  è 5 differentemente il numero di punti contenuti nel secondo raggio  $r_2$  del vortice  $(x_2, y_2)$  è 3. In Tabella 29 sono riportati gli errori percentuali relativi al caso 48 al variare del dominio e del livello di rumore.

Tabella 29: Errore percentuale espresso in funzione della distanza della risoluzione spaziale e rispetto al centro valutato con  $\Gamma_2$   $D = 2$  al variare del rumore e per diversi domini per il caso 48.

<b>Errori caso 48: <math>r_2 = 0.5r_1, \gamma_2 = 2\gamma_1, \bar{d} &lt; r_1 + r_2</math></b>					
<b>Rumore</b>	<b><math>D = 2</math></b>	<b><math>D = 3</math></b>	<b><math>D = 5</math></b>	<b><math>D = 7</math></b>	<b><math>D = 15</math></b>
20% ( $x_1, y_1$ )	<u>35%</u>	22%	39%	56%	211%
20% ( $x_2, y_2$ )	<u>1.81%</u>	14%	34%	36%	\
90% ( $x_1, y_1$ )	Troppi	52%	12%	19%	Nessuno
90% ( $x_2, y_2$ )	Troppi	\	\	\	Nessuno

**Caso 48:  $r_2 = 0.5r_1, \gamma_2 = -\gamma_1/2, \bar{d} = r_1 + r_2$**



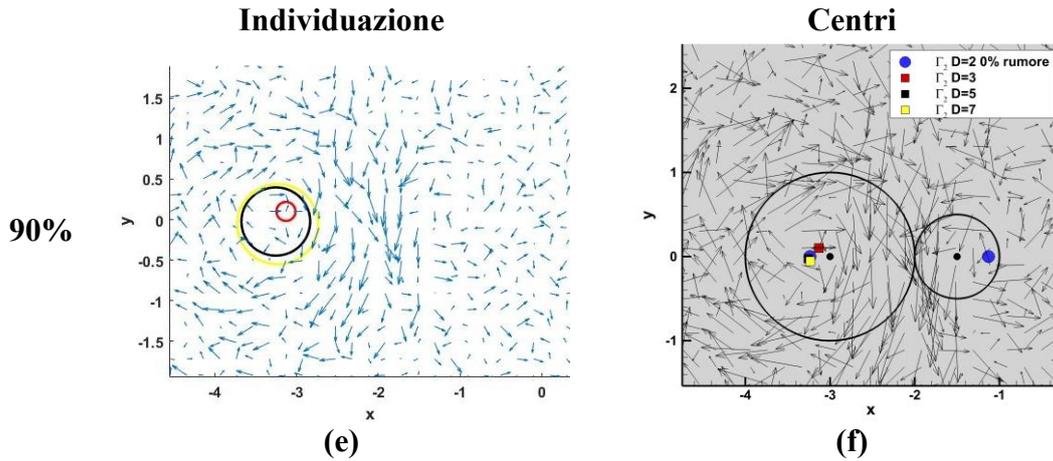


Figura 49: caso 48: zone individuate al variare del rumore e del dominio (a), (c) ed (e) e relativi centri (b), (e) e (f). Cerchio blu  $D = 2$ , rosso  $D = 3$ , nero  $D = 5$ , giallo  $D = 7$ , verde  $D = 15$ .

## Individuazione $D = 2$

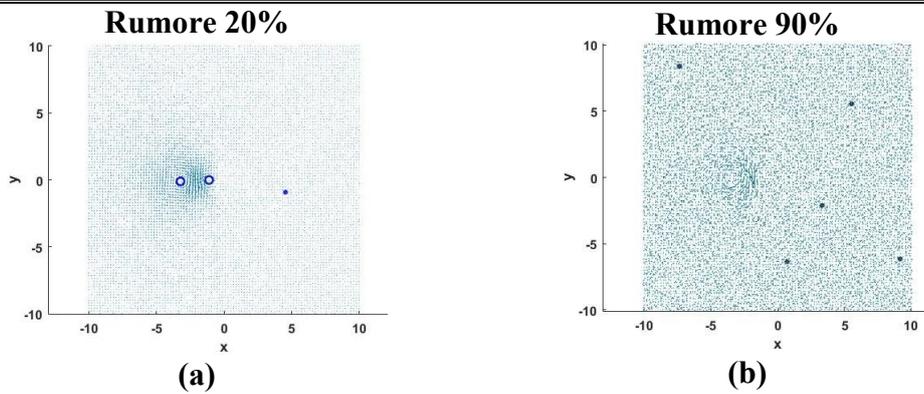


Figura 50: caso 48 individuazione vortici funzione  $\Gamma_2$   $D = 2$ .

Il caso 48 è di particolare interesse già in assenza di rumore. Allo 0%, infatti, è possibile individuare due vortici solo per domini da  $D = 2$  a  $D = 7$  domini superiori consentono di individuare solo il vortice di sinistra ovvero  $(x_1, y_1)$ . Analogo comportamento lo si riscontra per il caso 42 con  $r_2 = 0.5 r_1$   $\gamma_2 = -\gamma_1/2$   $\bar{d} < r_1 + r_2$  con la differenza che già a partire dal  $D = 6$  si individua un solo vortice anziché due. Nella Figura 51 si riporta l'andamento delle funzioni  $\Gamma_2$   $D = 8$  e  $D = 15$  nel caso 48 per evidenziare quanto appena esposto

## Funzione $\Gamma_2$ caso 48 rumore 0%

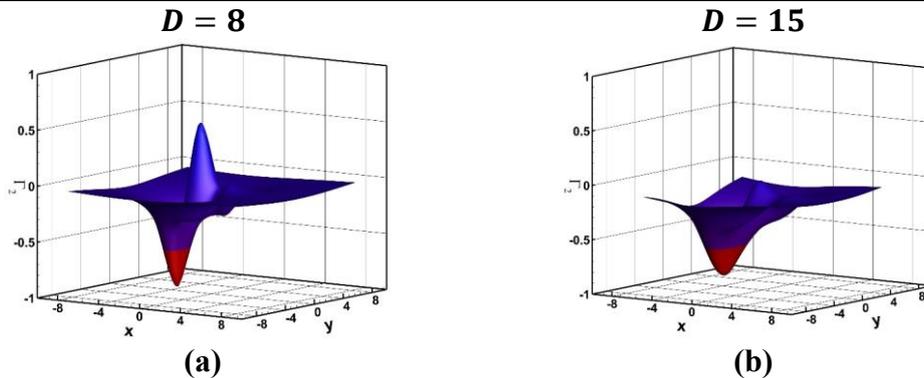


Figura 51: caso 48 rumore 0%, funzioni  $\Gamma_2$   $D = 8$  e  $D = 15$ .

Nelle immagini in rosso è evidenziata la zona che supera la soglia  $\frac{2}{\pi}$ . Si vede come all'aumentare del dominio il secondo picco scompare mentre il picco associato al vortice più intenso si addolcisce.

Al 20% si evidenzia un comportamento analogo al caso con 0% di rumore poiché è possibile individuare entrambi i vortici fino ad un dominio  $D = 7$  commettendo errori al di sotto di mezza cella con  $D = 3$  e  $D = 5$  essendo il numero di punti nel raggio dei due vortici proprio pari a 3 e 5. Infatti, sebbene  $D = 15$  individui un solo vortice il centro che esso individua si discosta di circa due celle dal valore allo 0%. Si osserva inoltre che il  $D = 2$  individua tre vortici (Figura 50 "a") e non più due, scegliendo, però, di individuare solo i primi due vortici si evidenzia come l'errore commesso sul vortice  $(x_2, y_2)$  è il più piccolo di tutti.

Al 90% di rumore il  $D = 2$  individua 5 vortici (Figura 50 "b") e nessuno di essi si avvicina ai vortici realmente presenti. Con i domini  $D = 3, D = 5$  e  $D = 7$  si individua solo il vortice più intenso commettendo il minor errore con  $D = 5$ . In realtà i restanti domini si posizionano nella stessa mezza cella del  $D = 5$ . Nel caso con  $D = 15$  non si individua alcun vortice.

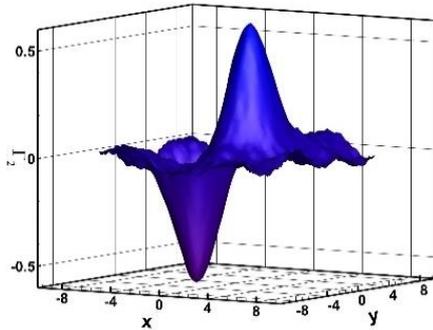
Dunque, il comportamento ottimale lo si ha con  $D = 3, D = 5$  e  $D = 7$  con ogni livello di rumore possedendo i vortici rispettivamente 5 punti, per  $(x_1, y_1)$ , e 3 punti, per  $(x_2, y_2)$ , nel raggio. Sebbene, ad elevati livelli di rumore, il vortice meno intenso,  $(x_2, y_2)$  non si riesce ad individuare.

Osservando quindi questi tre casi si evidenzia come per rumore al 90% e  $D = 15$  non si individua alcun vortice sebbene nel caso 23, senza rumore, sia presente un vortice che possiede 14 punti nel raggio. Purtroppo, un dominio e un livello di rumore così elevati fanno sì che la funzione non raggiunga i valori di soglia desiderati. Infatti, osservando le funzioni  $\Gamma_2$  è possibile evidenziare in tutti i casi due picchi sebbene essi non raggiungano soglia  $\frac{2}{\pi}$ . Inoltre, nel caso 48 la situazione è maggiormente accentuata poiché con  $D = 15$  già allo 0% e al 20% è possibile individuare solo il vortice più

intenso. Nella Figura 52 riportiamo le funzioni  $\Gamma_2$  per  $D = 15$  al 90% nei tre casi sopra analizzati.

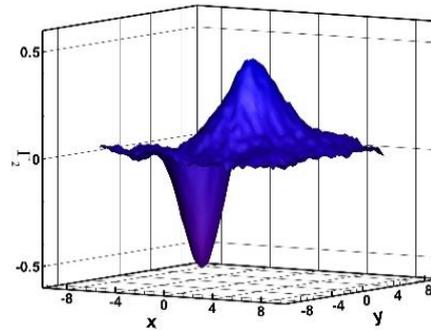
### Funzione $\Gamma_2$ $D = 15$ rumore 90%

**Caso 16:**  $r_2 = r_1, \gamma_2 = -2\gamma_1,$   
 $\bar{d} < r_1 + r_2$



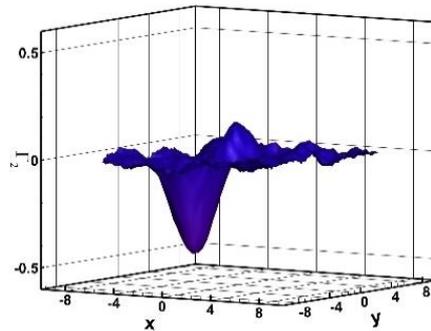
(a)

**Caso 23:**  $r_2 = 3r_1, \gamma_2 = -2\gamma_1, \bar{d} <$   
 $r_1 + r_2$



(b)

**Caso 48:**  $r_2 = 0.5r_1, \gamma_2 = 2\gamma_1,$   
 $\bar{d} < r_1 + r_2$



(c)

Figura 52: Andamenti funzioni  $\Gamma_2$   $D = 15$  caso 16 (a) caso 23 (b) caso 48 (c).

Dunque, concludendo in presenza di due vortici il dominio deve essere pari a circa il valore del numero di punti contenuti nel raggio del vortice che viene individuato ma non necessariamente quel valore, può essere anche leggermente più grande o più piccolo poiché l'individuazione risulta ugualmente efficace.

Analizziamo adesso i casi in cui si evidenzia la presenza di un solo vortice e vediamo come una forma non perfettamente circolare del vortice influisce sulla scelta del dominio da utilizzare. Analizziamo insieme i casi che presentano medesimi punti nel raggio.

#### Caso 38 e Caso 50

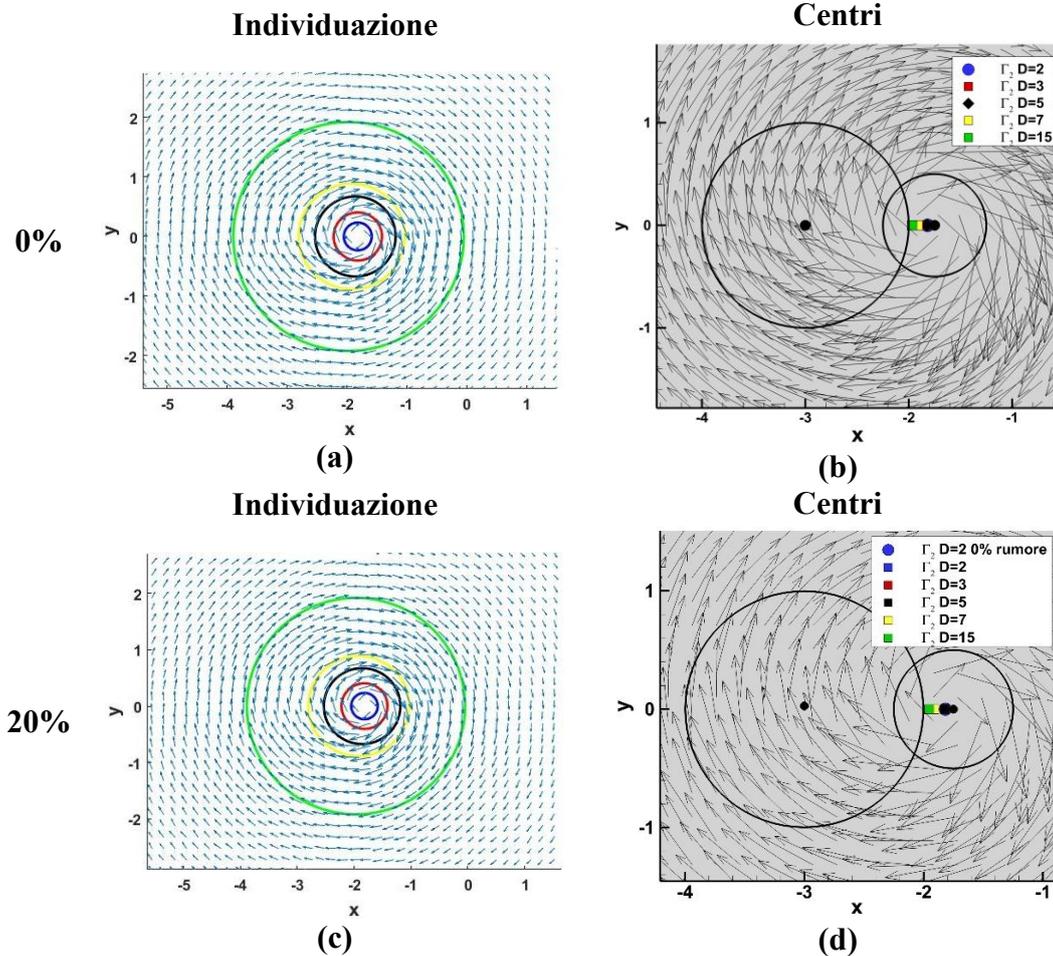
Per primi analizziamo il caso 38 e il caso 50 che presentano un solo vortice con 3 punti nel raggio. Questi sono entrambi casi con  $r_2 = 0.5r_1$ . In Tabella 30 sono riportati gli errori percentuali relativi ai casi 38 e 50 al variare del dominio e del livello di rumore.

Tabella 30: Casi  $r_2 = 0.5r_1$  con singolo vortice che hanno 3 punti nel raggio: errore percentuale espresso in funzione della distanza della risoluzione spaziale e rispetto al centro valutato con  $\Gamma_2 D = 2$  al variare del rumore e per diversi domini.

**Errori casi 38 e 50 singolo vortice con 3 punti nel raggio**

Casi	Rumore%	D				
		2	3	5	7	15
38	20 ( $x_2, y_2$ )	0.10%	0.75%	2.23%	33%	48%
	90 ( $x_2, y_2$ )	17%	1.00%	2.38%	32%	64%
50	20 ( $x_2, y_2$ )	29%	14%	0.22%	3.77%	77%
	90 ( $x_2, y_2$ )	27%	1.49%	0.98%	1.62%	78%

**Caso 38:  $r_2 = 0.5r_1, \gamma_2 = 2\gamma_1, \bar{d} < r_1 + r_2$**



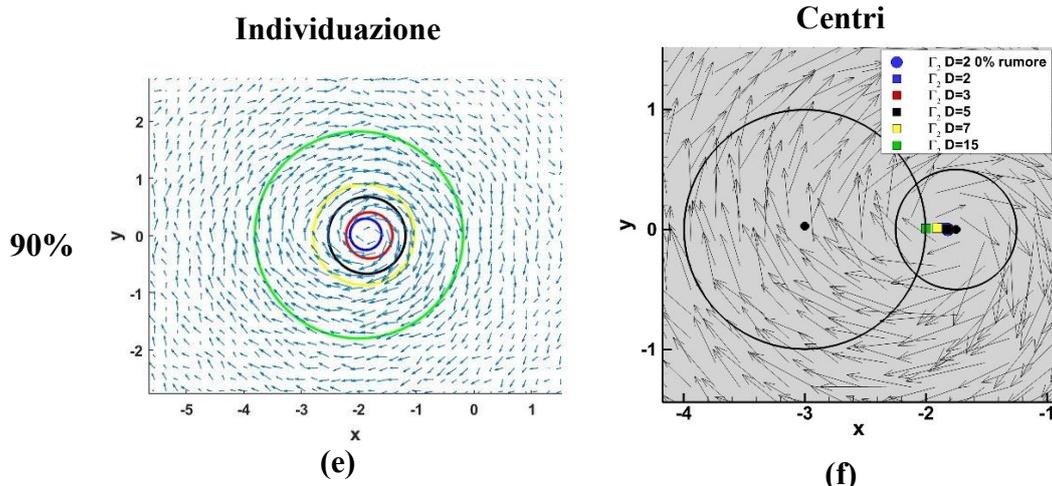


Figura 53: caso 38: zone individuate al variare del rumore e del dominio (a), (c) ed (e) e relativi centri (b), (e) e (f). Cerchio blu  $D = 2$ , rosso  $D = 3$ , nero  $D = 5$ , giallo  $D = 7$ , verde  $D = 15$ .

Nel caso 38 sia al 20% di rumore che al 90% di rumore il vortice viene individuato efficacemente con tutti domini. Si osserva che al 20% di rumore i centri ottenuti con  $D = 2$ ,  $D = 3$  e  $D = 5$  sono praticamente coincidenti invece  $D = 7$  e  $D = 15$  commettono un errore pari a meno di mezza cella. All'aumentare del dominio si osserva come i centri tendono a spostarsi verso sinistra.

Al 90% di rumore  $D = 3$  e  $D = 5$  coincidono quasi perfettamente tra di loro e con il centro valutato con rumore allo 0% anche se l'errore con  $D = 3$  è leggermente inferiore. Per  $D = 2$  e  $D = 7$  i centri sono contenuti nella medesima cella. Per dominio  $D = 15$  si commette un errore di poco superiore a mezza cella. Anche in questo caso all'aumentare del dominio i centri si spostano verso sinistra.

Nel caso 50, dalla Tabella 30, si osserva con il 20% di rumore un errore inferiore con  $D = 5$  ma anche i domini  $D = 2$ ,  $D = 3$  e  $D = 7$  commettono errori insignificanti. Quindi utilizzare tutti questi domini è ottimale. Infatti, stiamo parlando di errori nettamente inferiori a mezza cella. Solo con  $D = 15$  si commette un errore di poco superiore a mezza cella. Analogamente avviene al 90%.

Dunque, si osserva che se il vortice singolo possiede 3 punti nel raggio domini prossimi a quel valore funzionano tutti efficacemente. In realtà scegliendo il dominio pari al numero di punti contenuti nel raggio del vortice stesso gli errori sono contenuti al di sotto di mezza cella. Inoltre, il  $D = 2$  che nella maggior parte dei casi tende ad individuare sempre molti vortici in questo caso, possedendo il vortice 3 punti nel raggio, continua a funzionare in maniera efficace.

### Caso 5 e Caso 19

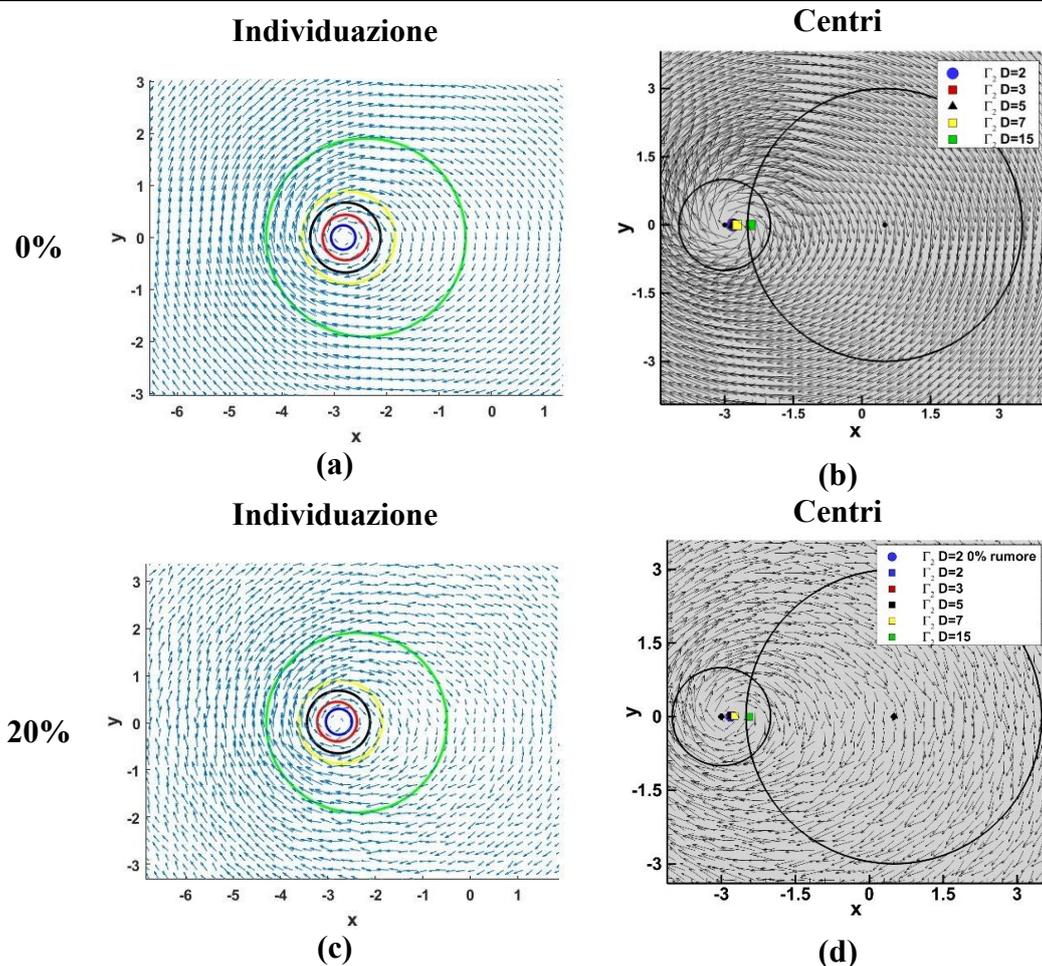
Analizziamo il caso 19 e il caso 5 che presentano un solo vortice con 5 punti nel raggio. In Tabella 31 sono riportati gli errori percentuali relativi ai casi 5 e 19 al variare del dominio e del livello di rumore.

Tabella 31: Caso 5 e caso 19 con singolo vortice con 5 punti nel raggio: errore percentuale espresso in funzione della distanza della risoluzione spaziale e rispetto al centro valutato con  $\Gamma_2$   $D = 2$  al variare del rumore e per diversi domini.

**Errori casi 5 e 19 singolo vortice con 5 punti nel raggio**

Casi	Rumore%	D				
		2	3	5	7	15
19	20 ( $x_1, y_1$ )	14%	10%	11%	30%	136%
	90 ( $x_1, y_1$ )	96%	90%	45%	34%	42%
5	20 ( $x_2, y_2$ )	18%	10%	2%	25%	123%
	90 ( $x_2, y_2$ )	50%	47%	34%	20%	76%

**Caso 19:  $r_2 = 3r_1, \gamma_2 = \gamma_1, \bar{d} < r_1 + r_2$**



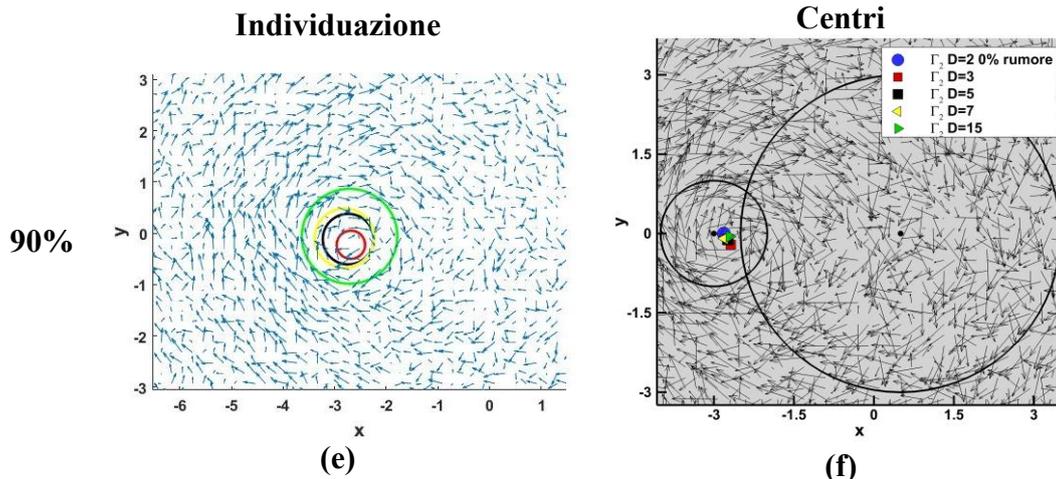


Figura 54: caso 19: zone individuate al variare del rumore e del dominio (a), (c) ed (e) e relativi centri (b), (e) e (f). Cerchio blu  $D = 2$ , rosso  $D = 3$ , nero  $D = 5$ , giallo  $D = 7$ , verde  $D = 15$ .

Dalla Tabella 31 e dalla Figura 54 è possibile fare le seguenti osservazioni sul caso 19.

Al 20% di rumore  $D = 2$ ,  $D = 3$  e  $D = 5$  commettono errori paragonabili, anche se il minore risulta quello con  $D = 3$ . Infatti, si parla di  $1/50$  di cella di differenza tra il  $D = 3$  e  $D = 5$  che praticamente fa sì che i centri siano coincidenti. Anche  $D = 7$  è un dominio ottimale perché si commettono errori pari a circa  $1/4$  di cella. Solo con  $D = 15$  si raggiungono errori superiori ad una cella. Dunque, tutti i domini da  $D = 2$  a  $D = 7$  sono ottimali.

Al 90% di rumore con  $D = 2$  si individuano tre vortici, considerando il primo esso commette un errore pari a circa una cella. Per tutti gli altri domini si individua solo il vortice esistente. Il dominio più efficace è il  $D = 7$  ma in realtà anche il  $D = 5$  e il  $D = 15$  commettono errori inferiori a mezza cella per cui sono efficaci. Con  $D = 3$  si commettono errori pari a meno di una cella ma ugualmente l'individuazione è efficace perché l'errore è molto basso.

Dalla Tabella 31 è possibile fare le seguenti osservazioni sul caso 5.

Al 20% di rumore tutti i domini individuano un solo vortice. Dal  $D = 2$  al  $D = 7$  gli errori sono tutti inferiori o pari ad  $1/4$  di cella per cui le individuazioni sono tutte efficaci sebbene il centro valutato con  $D = 5$  coincide quasi perfettamente con quello allo 0%. Con  $D = 15$  si commette un errore superiore ad una cella.

Dunque, così come per i casi in cui si avevano tre punti nel raggio, anche in questo caso il dominio ottimale è quello prossimo al numero di punti contenuti nel raggio del vortice. In realtà scegliendo il dominio pari al numero di punti contenuti nel raggio del vortice stesso gli errori sono contenuti al di sotto di mezza cella.

### Caso 1 e Caso 26

Analizziamo il caso 1 e il caso 26 che hanno un solo vortice con 7 punti nel raggio.

In Tabella 32 sono riportati gli errori percentuali relativi ai casi 1 e 26 al variare del dominio e del livello di rumore.

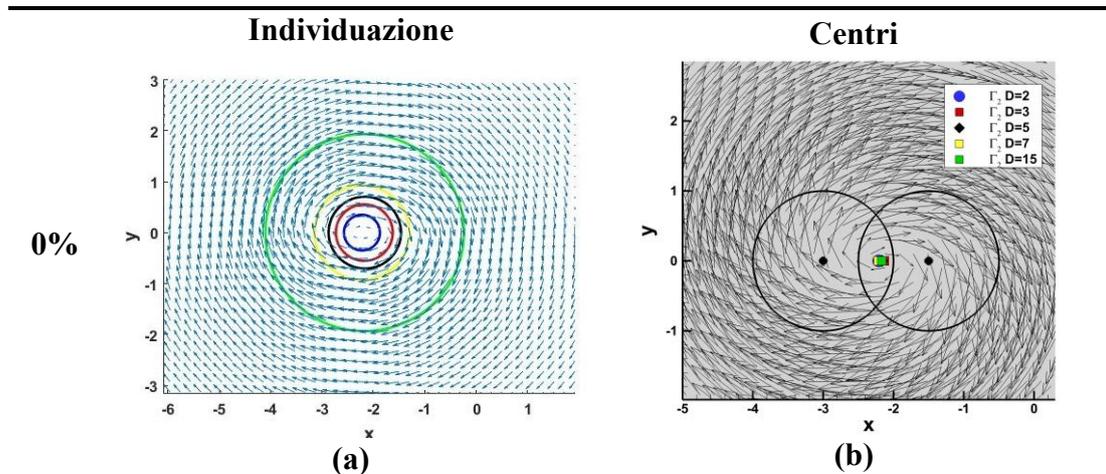
Tabella 32: Caso 1 e caso 26 con singolo vortice e 7 punti nel raggio: errore percentuale espresso in funzione della distanza della risoluzione spaziale e rispetto al centro valutato con  $\Gamma_2$   $D = 2$  al variare del rumore e per diversi domini.

**Errori casi 1 e 26 singolo vortice con 7 punti nel raggio**

Casi	Rumore%	D				
		2	3	5	7	15
1	20 (v.m.) <sup>6</sup>	4%	4%	3%	3%	14%
	90 (v.m.)	Troppi	105%	76%	49%	29%
26	20 ( $x_1, y_1$ )	26%	10%	17%	22%	365%
	50 ( $x_1, y_1$ )	54%	34%	16%	10%	400%
	90 ( $x_1, y_1$ )	Nessuno	Nessuno	40%	33%	109%

Analizzando il caso 1 si osserva che allo 0% di rumore il centro individuato è pari a circa il valore medio dei centri geometrici inseriti. Sebbene il vortice sia leggermente ellittico sia  $D = 2$  che  $D = 5$  funzionano efficacemente infatti l'andamento delle loro velocità tangenziali è praticamente coincidente.

$$\text{Caso 1: } r_2 = r_1, \gamma_2 = \gamma_1, \bar{d} < r_1 + r_2$$



<sup>6</sup> v.m. sta ad indicare valore medio. Cioè il metodo individua un centro che è a circa la metà dei due geometrici.

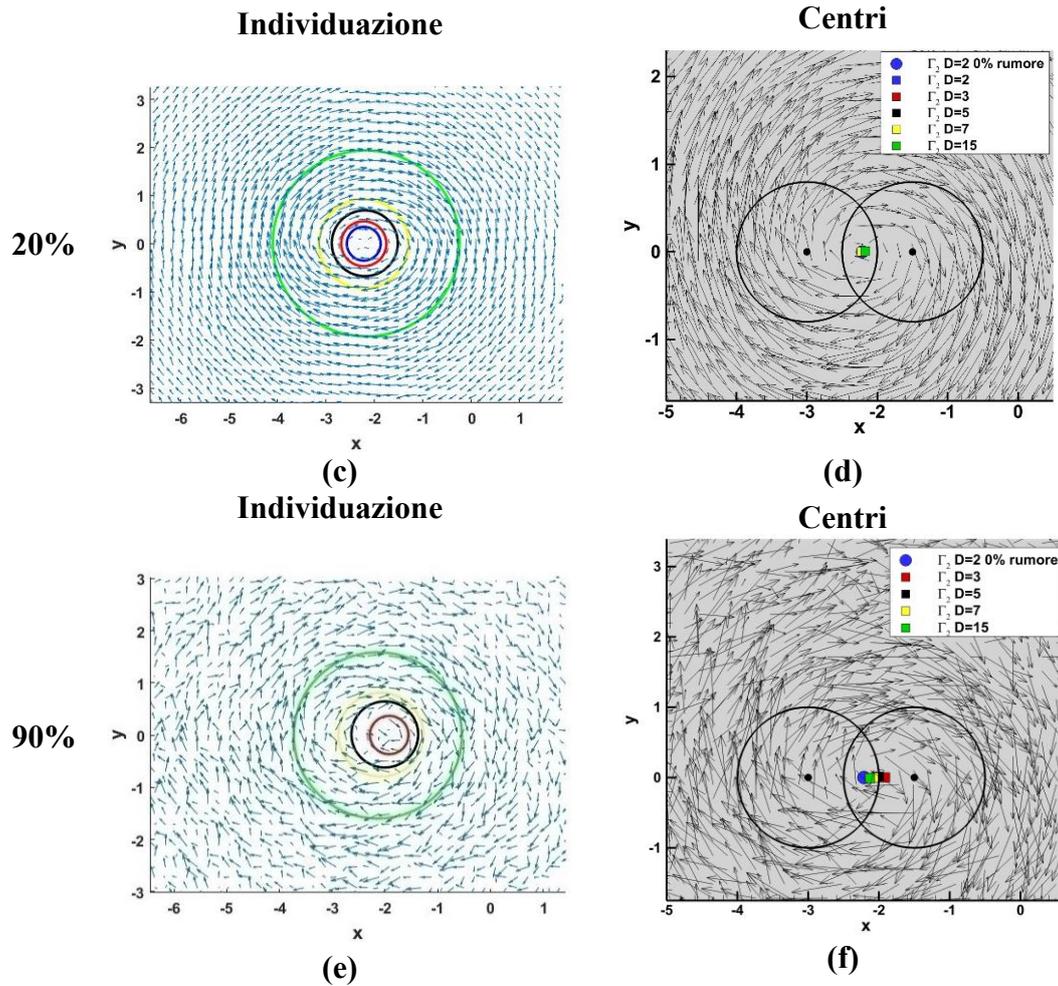


Figura 55: caso 1: zone individuate al variare del rumore e del dominio (a), (c) ed (e) e relativi centri (b), (e) e (f). Cerchio blu  $D = 2$ , rosso  $D = 3$ , nero  $D = 5$ , giallo  $D = 7$ , verde  $D = 15$ .

Al 20% di rumore i centri individuati con  $D = 2$ ,  $D = 3$ ,  $D = 5$  e  $D = 7$  sono praticamente coincidenti tra di loro e con il centro valutato allo 0% di rumore. Anche  $D = 15$  commette un errore molto piccolo che è pari a meno di  $1/6$  di cella. Dunque, tutti i domini funzionano efficacemente.

Al 90% di rumore il  $D = 2$  individua cinque vortici di questi nessuno si posiziona in prossimità del vortice presente. A partire dal  $D = 3$  si individua un solo vortice sebbene con  $D = 3$  si commetta un errore pari a circa una cella. Il dominio più efficace è il dominio  $D = 15$  poiché commette un errore di poco superiore ad  $1/4$  di cella. In realtà anche il  $D = 7$  è molto efficace dato che l'errore è di circa mezza cella. Con  $D = 5$  si commette un errore di poco superiore a mezza cella. Il miglior funzionamento del  $D = 15$  rispetto a tutti gli altri può essere spiegato con il fatto che il vortice individuato non è circolare ma leggermente ellittico, tale comportamento fa sì che domini anche superiori a quelli pari al numero di punti contenuti nel raggio funzionino in maniera più efficace. Ciò non toglie che considerando un dominio pari al numero di punti contenuti nel raggio l'errore risulti ugualmente contenuto ed inferiore a mezza cella.

Analizziamo il caso 26 di cui abbiamo considerato anche un rumore al 50%.

$$\text{Caso 26: } r_2 = 3r_1, \gamma_2 = 2\gamma_1, \bar{d} = r_1 + r_2$$

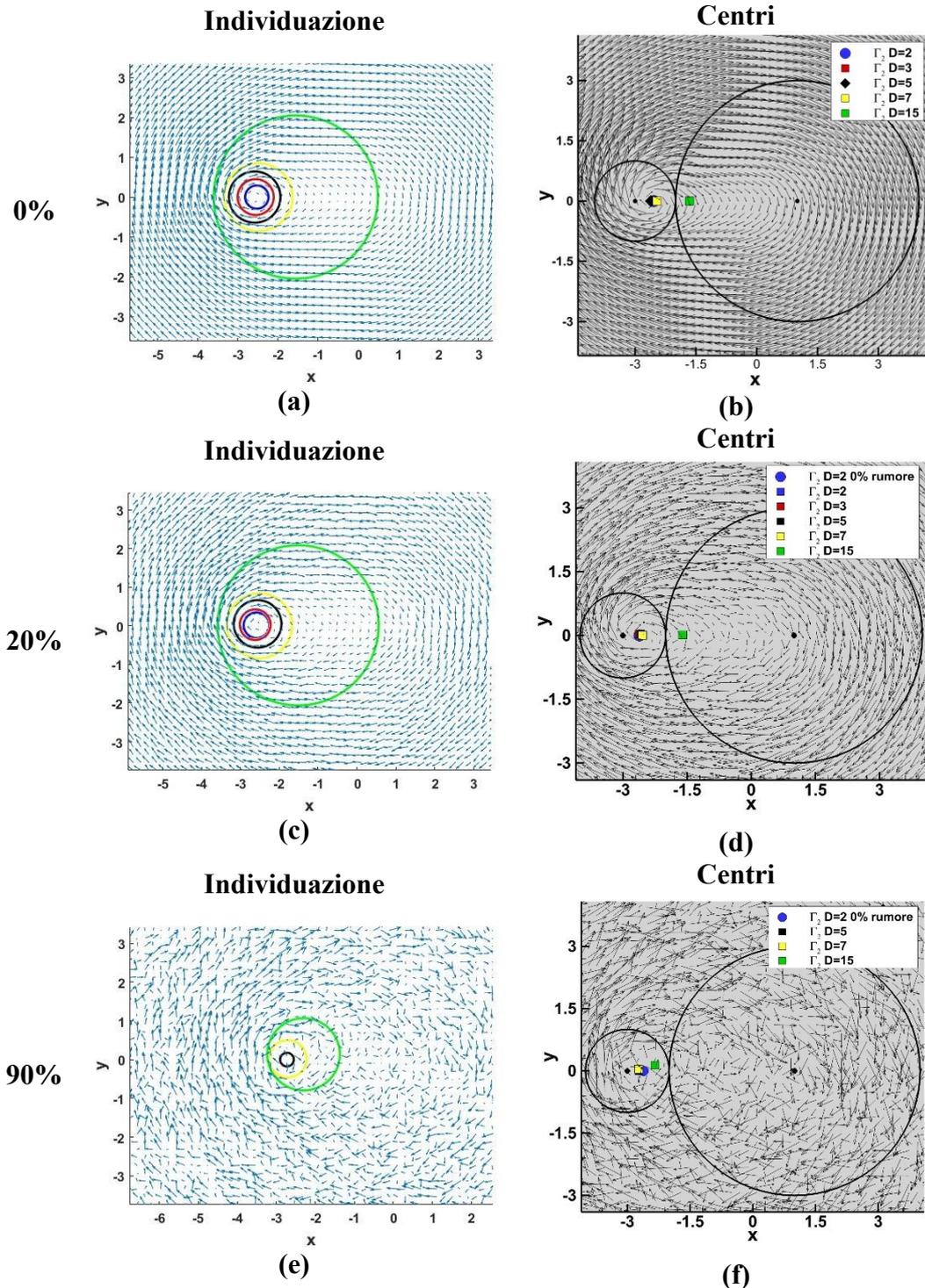


Figura 56: caso 26: zone individuate al variare del rumore e del dominio (a), (c) ed (e) e relativi centri (b), (e) e (f). Cerchio blu  $D = 2$ , rosso  $D = 3$ , nero  $D = 5$ , giallo  $D = 7$ , verde  $D = 15$ .

Nel caso 26 al 20% di rumore tutti i domini presentano un comportamento ottimale eccetto  $D = 15$  (Tabella 32). Infatti, sebbene a commettere il minor errore sia  $D = 3$ , per i restanti domini eccetto  $D = 15$  l'errore è contenuto al di sotto di  $1/4$  di cella per cui sono tutti ugualmente efficaci.

Al 50% di rumore tutti i domini da  $D = 2$  a  $D = 7$  funzionano efficacemente commettendo errori inferiori a mezza cella. Il dominio più efficace è il  $D = 7$  sebbene anche gli altri domini risultano ugualmente efficaci eccetto  $D = 15$  che commette un errore pari a circa quattro celle.

Al 90% di rumore sia con  $D = 2$  che  $D = 3$  non si raggiunge il valore di soglia stabilito. Nella Figura 57 si riporta la funzione  $\Gamma_2$  con  $D = 3$  al variare del rumore, il comportamento è simile per  $D = 2$ . Il picco blu in Figura 57 rappresenta i punti della funzione che superano la soglia  $2/\pi$ .

### Funzione $\Gamma_2$ $D = 3$ caso 26

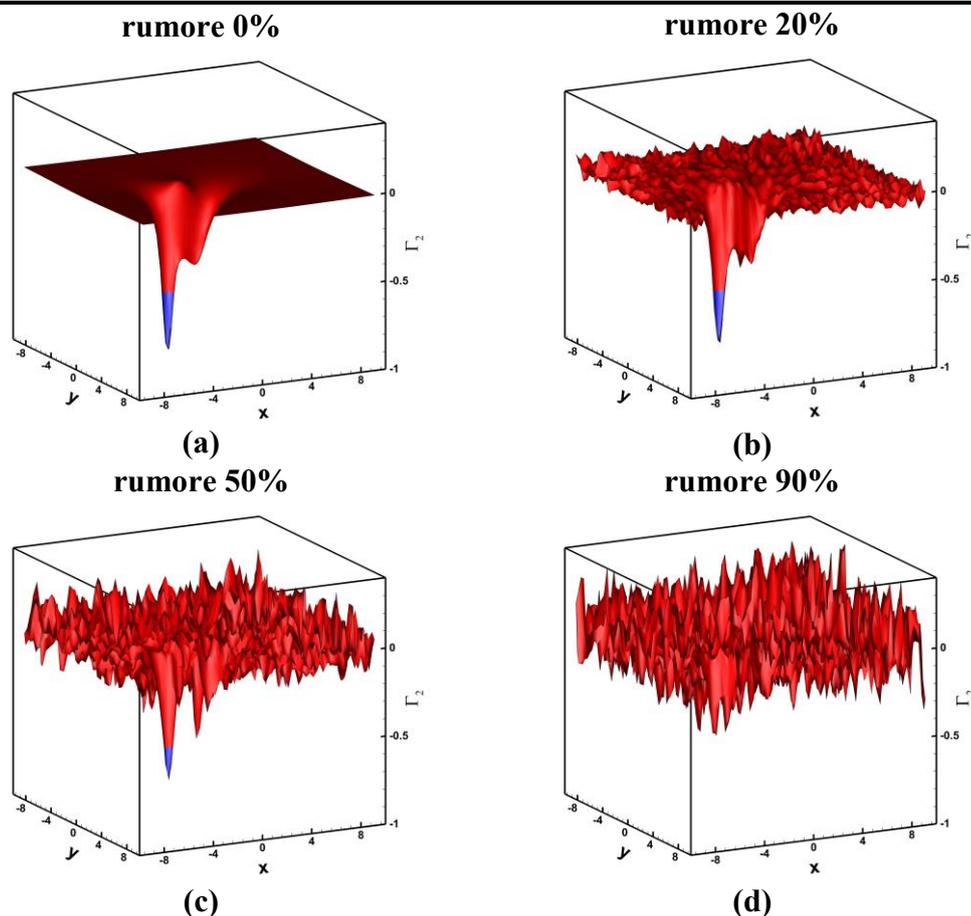


Figura 57: Funzione  $\Gamma_2$   $D = 3$  al variare del rumore per il caso 26.

Sia con  $D = 5$  che  $D = 7$  si commettono errori inferiori a mezza cella, diversamente con  $D = 15$  l'errore raggiunge una cella. In realtà il dominio più efficace è  $D = 7$ .

Dunque, così come per i casi in cui si avevano tre punti o cinque nel raggio, anche in questo caso il dominio ottimale è quello prossimo al numero di punti contenuti nel raggio del vortice. Si osserva inoltre che se il vortice è più schiacciato anche domini elevati (caso 1  $D = 15$ ) risultano efficaci. In realtà scegliendo il dominio pari al numero di punti contenuti nel raggio del vortice stesso gli errori sono contenuti al di sotto di mezza cella.

In conclusione, nei casi in cui il metodo  $\Gamma_2$  riesce ad individuare entrambi i vortici il dominio più efficace è quello prossimo al valore di punti contenuti in ognuno di quei vortici. Invece, nel caso in cui venga individuato un solo vortice questo, essendo stato ottenuto dall'unione di due vortici, presenterà un comportamento leggermente diverso da quello esposto con singolo vortice. Il dominio più efficace non è necessariamente quello pari al numero di punti contenuti nel raggio ma si aggira intorno a quel valore. Però, scegliendo il dominio pari al numero di punti contenuti nel raggio si commette al più un errore pari a mezza cella che non influisce in maniera decisiva sul calcolo delle caratteristiche del vortice stesso.

#### 6.4.2 Metodi $\Delta$ e $Q$

Passiamo ora all'analisi del metodo  $\Delta$  e del metodo  $Q$ . Scegliamo come livello di soglia quello utilizzato nel caso senza rumore così da poter effettuare un confronto. Differentemente dal caso senza rumore le zone individuate dai metodi  $\Delta$  e  $Q$  ora non sono più coincidenti. Prendiamo come riferimento i centri valutati con i metodi  $\Delta$  e  $Q$  senza rumore, che in assenza di rumore sono coincidenti, e valutiamo l'errore che si commette all'aumentare del rumore sia per vortici pesati che non pesati utilizzando i centri pesati con rumore allo 0%.

Sfruttiamo, inoltre, il numero di vortici individuati nel caso senza rumore dando questo valore come input per l'individuazione, nei casi in cui ne individuava quattro imponiamo di individuare solo due vortici. Infatti, differentemente dal metodo  $\Gamma_2$ , in presenza di rumore è necessario conoscere il numero di vortici da determinare poiché l'individuazione effettuata non è efficace. Di seguito riportiamo l'analisi per i diversi casi.

Analizziamo i tre casi con  $r_2 = r_1$ . Di seguito si riporta la Tabella 33 contenente gli errori rispetto ai centri pesati allo 0% di rumore. In nero sono evidenziati i casi in cui gli errori sono minori per vortici non pesati rispetto ai pesati.

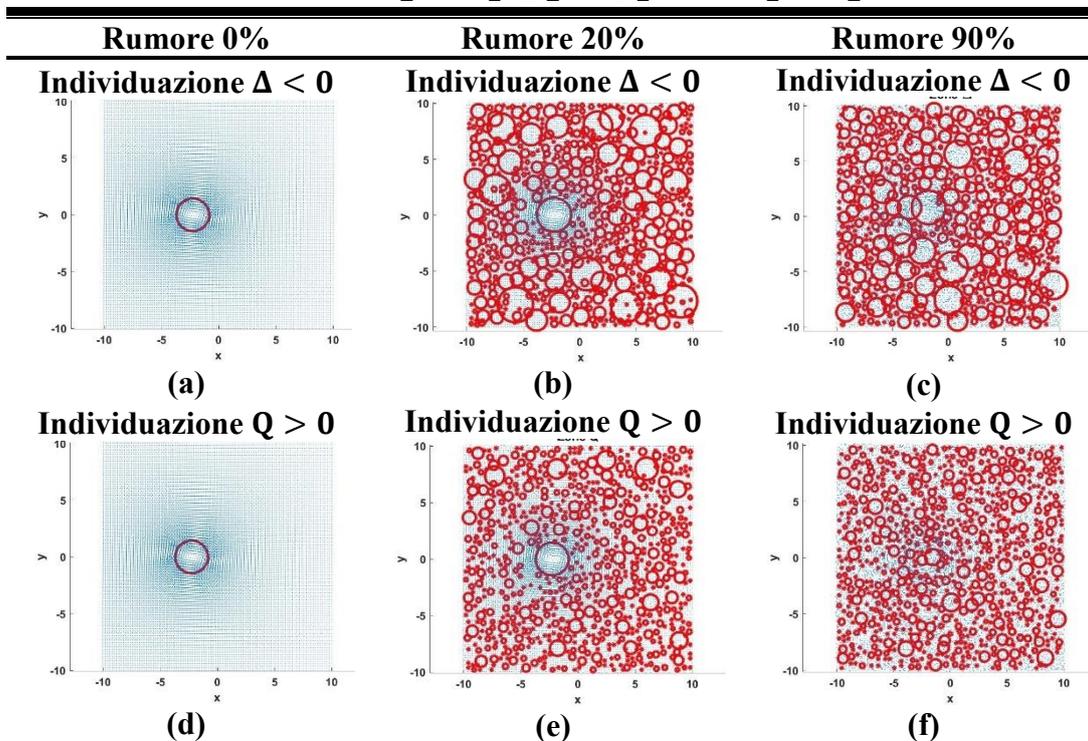
Tabella 33: Casi  $r_2 = r_1$ : errore percentuale al variare del rumore espresso in funzione della distanza della risoluzione spaziale e rispetto al centro valutato con  $\Delta$  e  $Q$  allo 0% di rumore.

<b>Errori casi <math>r_2 = r_1</math></b>						
Casi	Rumore	Pesati		Non pesati		Soglia
		$(x_1, y_1)$	$(x_2, y_2)$	$(x_1, y_1)$	$(x_2, y_2)$	
1	20	5%		216%		$\Delta < 0$
	90	204%		<b>58%</b>		

	20	3%		216%		$Q > 0$
	90	225%		281%		
	20	22%	15%	136%	114%	$\Delta < -3$
	90	1641%	9%	1679%	185%	
	20	29%	50%	136%	114%	$Q > 0.8$
	90	3103%	63%	3100%	112%	
5	20	40%	5%	107%	50%	$\Delta < 0$
	90	2295%	30%	<b>2123%</b>	114%	
	20	54%	3%	107%	50%	$Q > 0$
	90	2123%	22%	<b>1623%</b>	50%	
16	20	11%	6%	45%	52%	$\Delta < 0$
	50	65%	23%	<b>57%</b>	52%	
	90	1797%	3037%	1831%	3084%	
	20	8%	6%	45%	52%	$Q > 0$
	50	65%	20%	146%	52%	
	90	1798%	3084%	1831%	3084%	

Analizziamo nello specifico ogni singolo caso tenendo in considerazione per ogni caso la Tabella 33 con gli errori espressi in percentuale della distanza della risoluzione spaziale.

**Caso 1:  $r_2 = r_1, \gamma_2 = \gamma_1, \bar{d} < r_1 + r_2$**



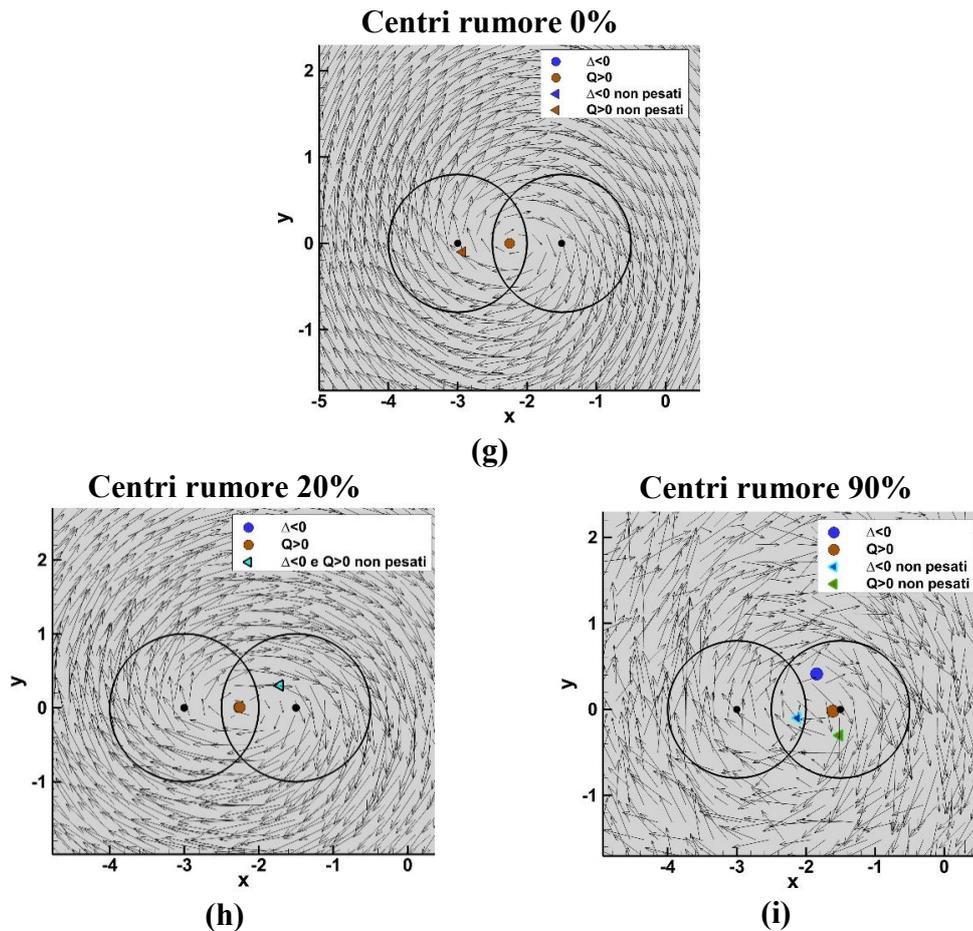


Figura 58: caso 1: zone individuate al variare del rumore metodo  $\Delta < 0$  (a), (b), (c) e metodo  $Q > 0$  (d), (e), (f) e relativi centri (g), (h) e (i).

Nel caso 1 scegliendo soglia zero con lo 0% di rumore si ottiene un solo vortice (Figura 58 “a” e “d”). Dunque, sebbene con rumore sia al 20% che al 90% l’individuazione presenta numerosi vortici ne determiniamo soltanto uno (Figura 58 “b”, “c”, “e” e “f”). Al 20% di rumore si evidenzia una quasi perfetta coincidenza con il centro pesato ottenuto allo 0% essendo l’errore nettamente inferiore ad  $1/4$  di cella per entrambi i metodi (Figura 58 “h”). Si evidenzia inoltre un miglioramento nell’individuazione rispetto al centro non pesato sia per  $\Delta$  che per  $Q$ . Al 90% la situazione si complica. I centri pesati si discostano di circa due celle per entrambi i metodi (Figura 58 “i”). Si osserva però come il centro non pesato ottenuto con il metodo  $\Delta$  disti circa mezza cella dal centro pesato senza rumore, per cui evidentemente il centro non pesato risulta il più efficace per il metodo  $\Delta$ . Differentemente per il metodo  $Q$  l’errore rimane quasi immutato passando dal centro non pesato, con errore poco più di due celle e mezza, al pesato, con errore poco più di due celle.

Nel caso 1 si analizzano i metodi  $\Delta$  e  $Q$  scegliendo una soglia diversa da zero perché allo 0% si è evidenziata la presenza di due picchi. Si scelgono le medesime soglie scelte nel caso senza rumore.

**Caso 1:  $r_2 = r_1, \gamma_2 = \gamma_1, \bar{d} < r_1 + r_2$**

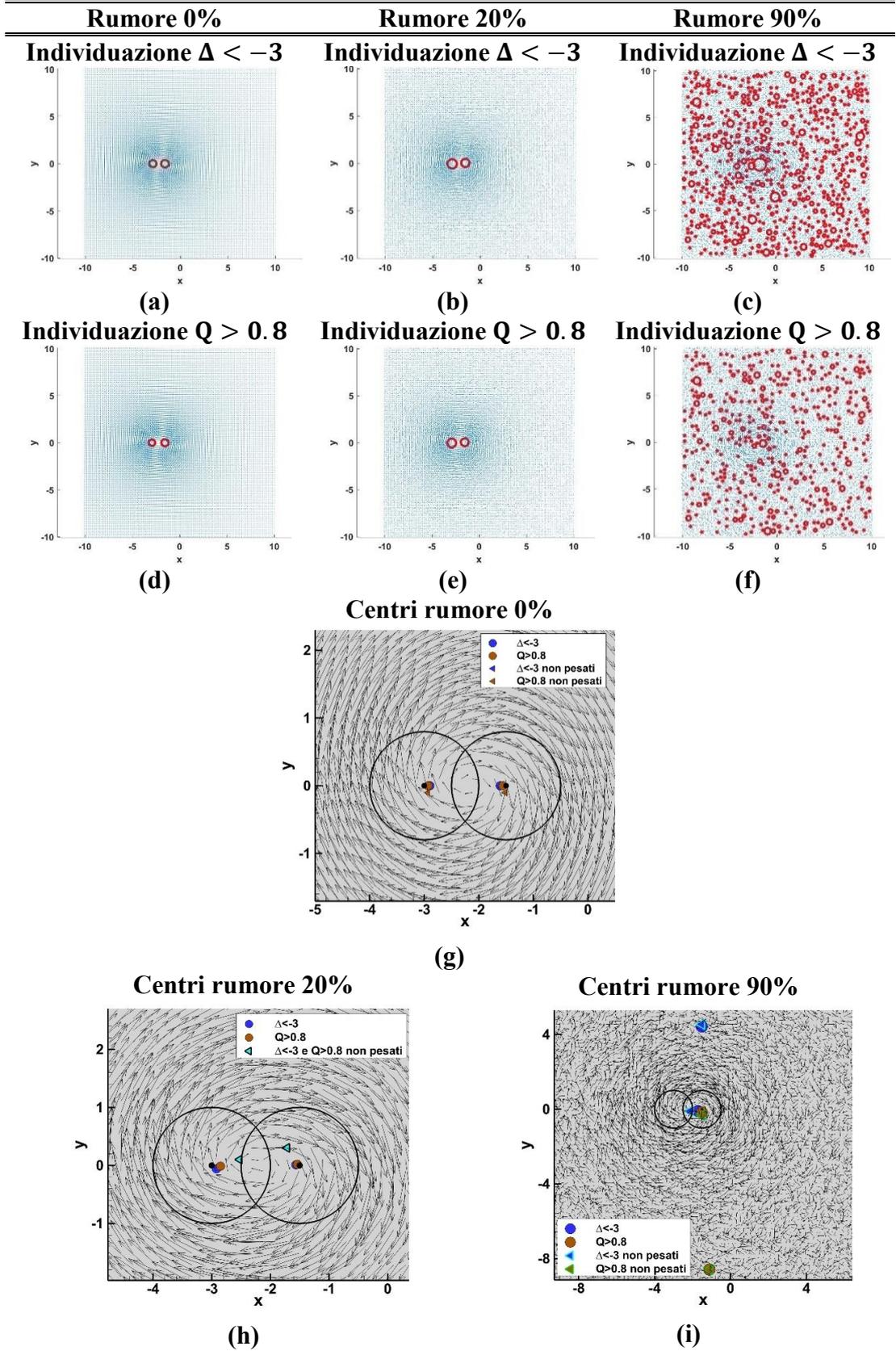
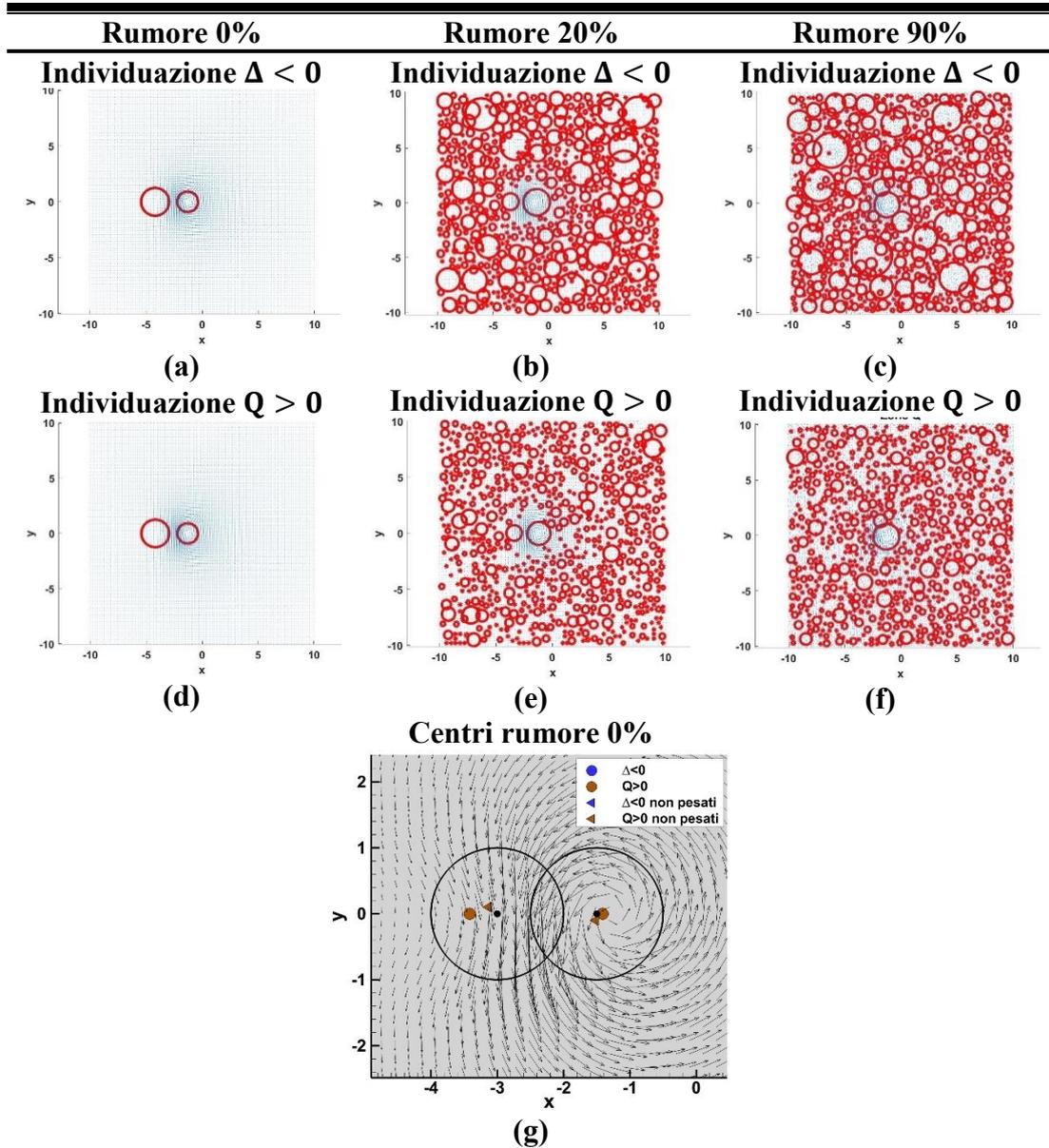


Figura 59: caso 1: zone individuate al variare del rumore metodo  $\Delta < -3$  (a), (b), (c) e metodo  $Q > 0.8$  (d), (e), (f) e relativi centri (g), (h) e (i).

Si evidenzia come al 20% di rumore la soglia scelta è tale da consentire l'individuazione di due soli vortici (Figura 59 "b" ed "e"). Diversamente al 90% di rumore è necessario imporre il numero di vortici da determinare (Figura 59 "c" e "f"). Al 20% di rumore i centri non pesati si discostano per entrambi i metodi di circa una cella, si evidenzia come pesando la situazione migliora e i centri si discostano al più di mezza cella dai centri pesati valutati con rumore allo 0%. Diversamente si evidenzia che sia i vortici pesati che non pesati al 90% di rumore commettono un forte errore sul vortice  $(x_1, y_1)$ , circa 16 celle con il metodo  $\Delta$  e 31 celle con il metodo  $Q$ . Diversamente il vortice  $(x_2, y_2)$  è individuato con efficacia dai centri pesati infatti con il metodo  $\Delta$  coincide praticamente con il centro allo 0% e con il metodo  $Q$  è distante poco più di mezza cella.

**Caso 5:  $r_2 = r_1, \gamma_2 = -2\gamma_1, \bar{d} < r_1 + r_2$**



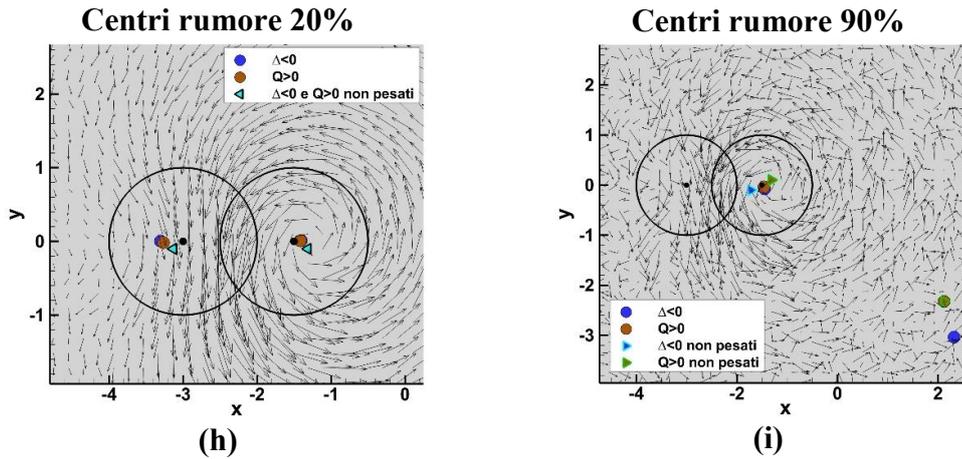
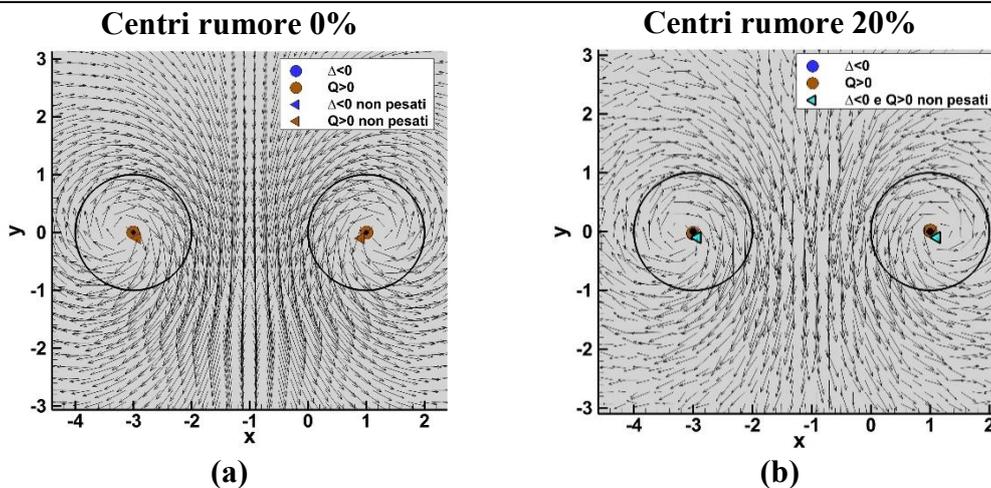


Figura 60: caso 5: zone individuate al variare del rumore metodo  $\Delta < 0$  (a), (b), (c) e metodo  $Q > 0$  (d), (e), (f) e relativi centri (g), (h) e (i).

Nel caso 5 scegliendo soglia zero i metodi  $\Delta$  e  $Q$  individuano due vortici (Figura 60 “a” e “d”), sebbene nel campo di moto ne sia presente soltanto uno. All’aumentare del livello di rumore imponiamo l’individuazione di due soli vortici (Figura 60 “b”, “c”, “e” e “f”). Al 20% di rumore si individuano entrambi i vortici in maniera efficace. I centri pesati per entrambi i metodi nel caso  $(x_1, y_1)$  distano circa mezza cella da quello ottenuto allo 0%, invece il centro  $(x_2, y_2)$  è quasi perfettamente coincidente con quello allo 0%. Al 90% di rumore per entrambi i metodi il vortice  $(x_1, y_1)$  non viene individuato in maniera efficace, diversamente il centro del vortice  $(x_2, y_2)$  presenta un errore minore di mezza cella.

Nelle immagini che seguono vengono visualizzati solo i campi di velocità con i relativi centri poiché il comportamento generale presente nelle immagini con le individuazioni è simile al caso 5.

### Caso 16: $r_2 = r_1, \gamma_2 = -\gamma_1, \bar{d} < r_1 + r_2$



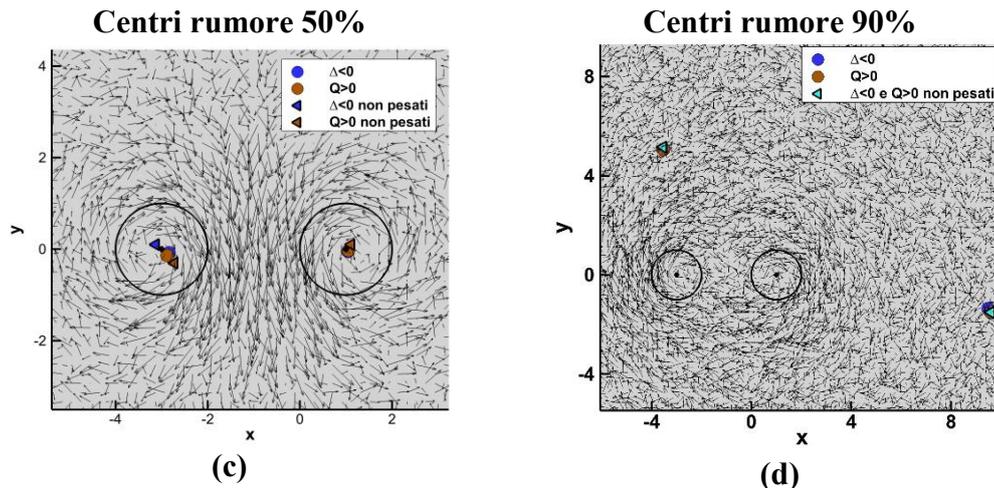


Figura 61: caso 16: centri al variare del rumore metodo  $\Delta < 0$  e metodo  $Q > 0$  pesati (cerchi) e non pesati (triangoli).

Nel caso 16 i metodi allo 0% di rumore individuano due vortici, diversamente avviene al 20%, al 50% e al 90%, nei quali se ne individuano molti di più. Dunque, si impone il calcolo del centro per i soli due vortici presenti. Al 20% di rumore i centri pesati ottenuti coincidono quasi perfettamente con i centri allo 0%. Al 50% di rumore per entrambi i metodi l'errore con il centro pesato rimane al di sotto di mezza cella per il vortice  $(x_2, y_2)$  e supera leggermente la mezza cella per il vortice  $(x_1, y_1)$ . Al 90%, invece, entrambi i metodi commettono errori elevatissimi; per il vortice  $(x_1, y_1)$  gli errori si aggirano intorno alle 18 celle, per il vortice  $(x_2, y_2)$  gli errori si aggirano intorno alle 30 celle (Figura 61 "d").

Analizziamo i tre casi con  $r_2 = 3r_1$ . Di seguito si riporta la Tabella 34 contenente gli errori rispetto ai centri pesati allo 0% di rumore. In nero sono evidenziati i casi in cui gli errori sono minori per vortici non pesati rispetto ai pesati.

Tabella 34: Casi  $r_2 = 3r_1$ : errore percentuale al variare del rumore espresso in funzione della distanza della risoluzione spaziale e rispetto al centro valutato con  $\Delta$  e  $Q$  allo 0% di rumore.

<b><math>r_2 = 3r_1</math></b>						
Casi	Rumore	Pesati		Non pesati		Soglia
		$(x_1, y_1)$	$(x_2, y_2)$	$(x_1, y_1)$	$(x_2, y_2)$	
19	20	9%	2727%	128%	2729%	$\Delta < 0$
	90	848%	1139%	864%	1136%	
	20	4%	2727%	128%	2729%	$Q > 0$
	90	3545%	1153%	3556%	1136%	
23	20	6%	693%	49%	679%	$\Delta < 0$
	50	48%	388%	184%	<b>170%</b>	
	90	2543%	412%	2543%	<b>397%</b>	
	20	6%	693%	49%	<b>677%</b>	$Q > 0$
	50	23%	4009%	184%	4012%	
	90	3205%	407%	3209%	<b>397%</b>	

26	20	15%	158%	65%	170%	$\Delta < 0$
	50	57%	3255%	131%	<b>3235%</b>	
	90	1359%	258%	1360%	327%	
	20	20%	159%	65%	170%	$Q > 0$
	50	396%	3231%	396%	3235%	
	90	1359%	327%	1360%	327%	

Analizziamo nello specifico ogni singolo caso tenendo in considerazione per ogni caso la Tabella 34 con gli errori espressi in percentuale della distanza della risoluzione spaziale.

### Caso 19: $r_2 = 3r_1, \gamma_2 = \gamma_1, \bar{d} < r_1 + r_2$

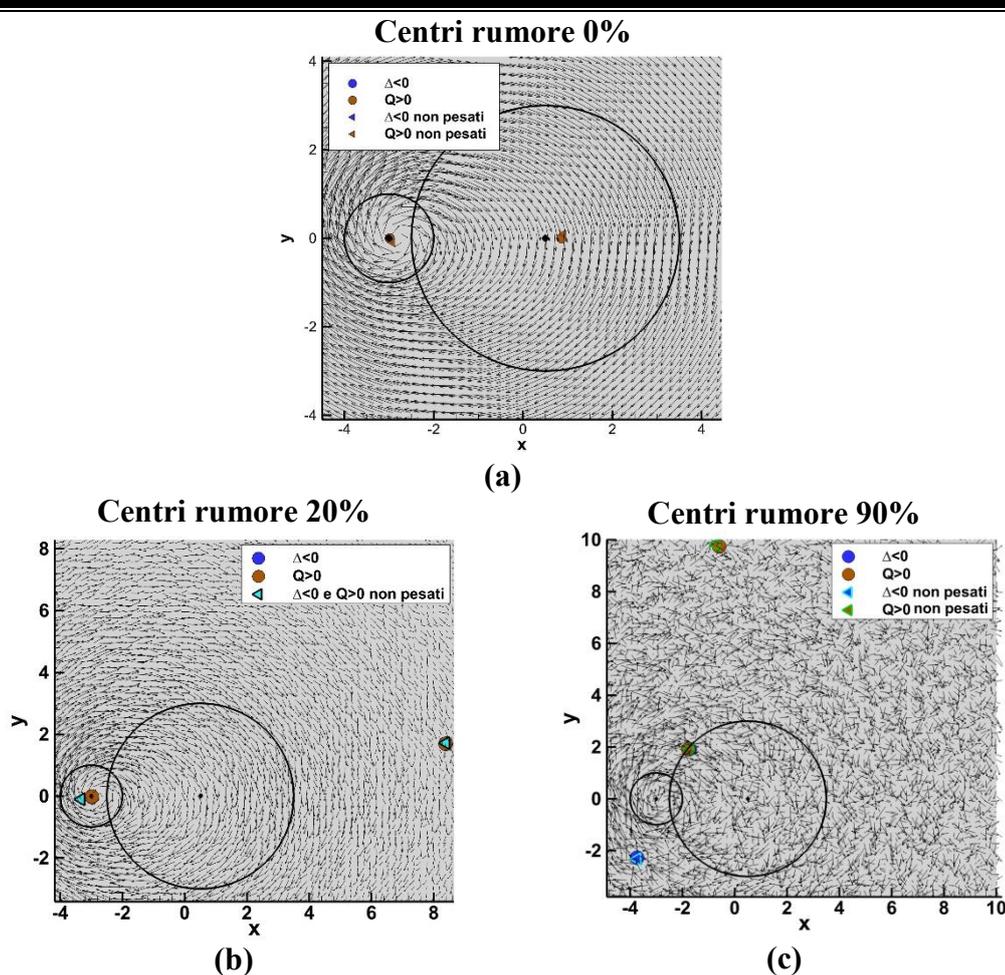


Figura 62: caso 19: centri al variare del rumore metodo  $\Delta < 0$  e metodo  $Q > 0$  pesati (cerchi) e non pesati (triangoli).

Il caso 19 è un caso che allo 0% di rumore presenta vortici corotanti che si allontanano rispetto alla posizione geometrica (Figura 62 “a”) sebbene nel campo sia presente solo il vortice  $(x_1, y_1)$ . Già al 20% di rumore i metodi non sono più in grado di individuare correttamente il vortice  $(x_2, y_2)$ , diversamente il vortice  $(x_1, y_1)$  viene individuato da

entrambi i metodi quasi coincidente con il centro allo 0% (Figura 62 “b”). Al 90%, invece, nessuno dei due vortici viene individuato correttamente, sia dai centri pesati che non pesati, con entrambi i metodi (Figura 62 “c”). Gli errori vanno dalle 8 celle alle 35 celle.

Il comportamento del caso 23 è analogo al caso 19 sebbene nel campo di moto, nel caso 23, sono realmente presenti due vortici. Al 20% di rumore solo il vortice  $(x_1, y_1)$ , viene individuato con efficacia infatti è praticamente coincidente con il centro valutato allo 0%, invece per il vortice  $(x_2, y_2)$  si commettono errori pari a circa 7 celle. Al 50% di rumore il vortice  $(x_1, y_1)$  con entrambi i metodi commette un errore inferiore a mezza cella, diversamente il centro del vortice  $(x_2, y_2)$  presenta errori pari a 4 celle per il metodo  $\Delta$  e 40 celle per il metodo  $Q$ . Al 90%, invece nessuno dei due vortici viene individuato correttamente sia dal metodo  $\Delta$  che  $Q$ . Gli errori per il centro  $(x_1, y_1)$  sono 26 celle, con il metodo  $\Delta$ , e 32, con il metodo  $Q$ . Mentre per il centro  $(x_2, y_2)$  l’errore è di 4 celle per entrambi i metodi.

**Caso 26:  $r_2 = 3r_1, \gamma_2 = 2\gamma_1, \bar{d} = r_1 + r_2$**

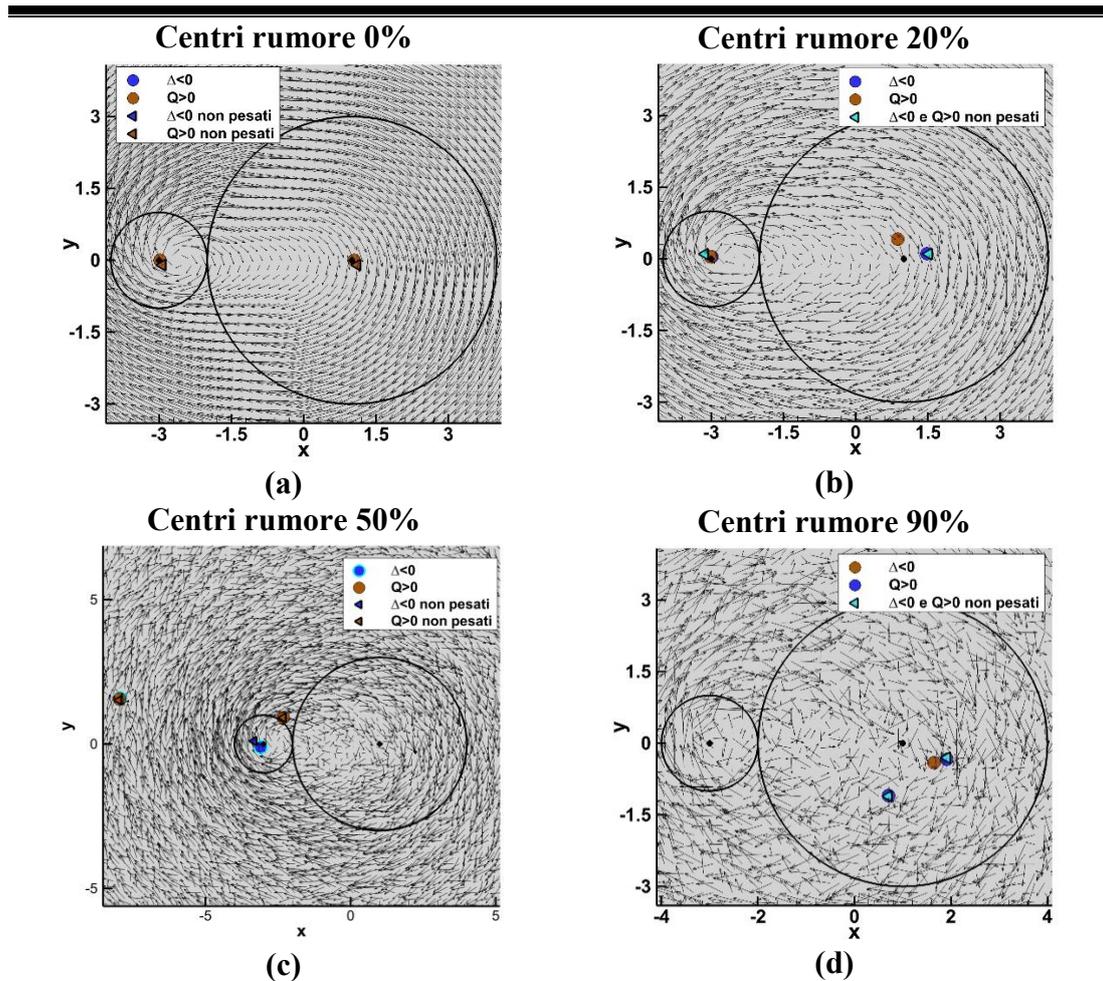


Figura 63: caso 26: centri al variare del rumore metodo  $\Delta < 0$  e metodo  $Q > 0$  pesati (cerchi) e non pesati (triangoli).

Nel caso 26 allo 0% di rumore si individuano due vortici posti nelle vicinanze dei centri geometrici (Figura 63 “a”) sebbene nel campo di moto ne sia presente soltanto uno. Già al 20% è necessario imporre di individuare due soli vortici. Al 20% si commette per il vortice  $(x_2, y_2)$  un errore pari a circa una cella e mezza, diversamente per il vortice  $(x_1, y_1)$  si commettono errori inferiori ad 1/4 di cella per entrambi i metodi (Figura 63 “b”). Al 50% di rumore il metodo  $\Delta$  commette sul vortice  $(x_1, y_1)$  un errore di poco superiore a mezza cella; mentre il metodo  $Q$  commette un errore pari a circa 4 celle (Figura 63 “c”). Per entrambi i metodi il vortice  $(x_2, y_2)$  viene individuato con errori pari a circa 33 celle. Al 90%, invece, si commettono forti errori su entrambi i centri e con entrambi i metodi dunque l’individuazione non è efficace (Figura 63 “d”).

Analizziamo i tre casi con  $r_2 = 0.5r_1$ . Di seguito si riporta la Tabella 35 contenente gli errori rispetto ai centri pesati allo 0% di rumore. In nero sono evidenziati i casi in cui gli errori sono minori per vortici non pesati rispetto ai pesati.

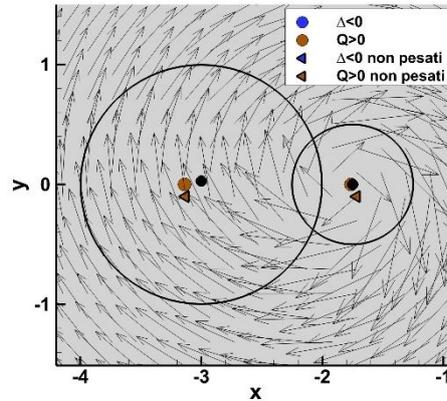
Tabella 35: Casi  $r_2 = 0.5r_1$ : errore percentuale al variare del rumore espresso in funzione della distanza della risoluzione spaziale e rispetto al centro valutato con  $\Delta$  e  $Q$  allo 0% di rumore.

<b><math>r_2 = 0.5r_1</math></b>						
Casi	Rumore	Pesati		Non pesati		Soglia
		$(x_1, y_1)$	$(x_2, y_2)$	$(x_1, y_1)$	$(x_2, y_2)$	
38	20	85%	2%	48%	39%	$\Delta < 0$
	90	67%	21%	114%	39%	
	20	40%	2%	48%	39%	$Q > 0$
	90	43%	14%	114%	39%	
48	20	12%	9%	125%	39%	$\Delta < 0$
	90	2091%	1020%	2015%	966%	
	20	7%	9%	125%	39%	$Q > 0$
	90	954%	1472%	981%	1472%	
50	20	2%	0.76%	43%	36%	$\Delta < 0$
	90	4605%	5%	4543%	78%	
	20	1%	0.78%	43%	36%	$Q > 0$
	90	3271%	5%	3256%	78%	

Analizziamo nello specifico ogni singolo caso tenendo in considerazione per ogni caso la Tabella 35 con gli errori espressi in percentuale della distanza della risoluzione spaziale.

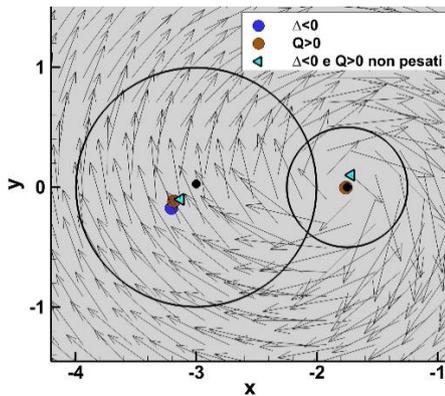
**Caso 38:  $r_2 = 0.5r_1, \gamma_2 = 2\gamma_1, \bar{d} < r_1 + r_2$**

**Centri rumore 0%**



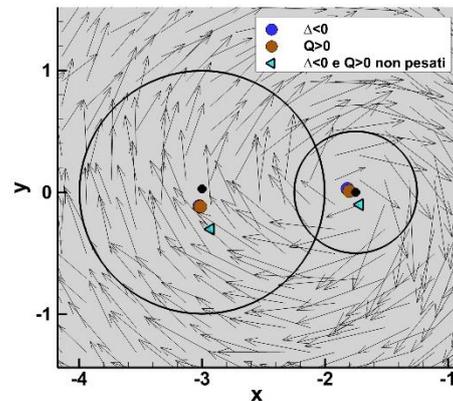
(a)

**Centri rumore 20%**



(b)

**Centri rumore 90%**



(c)

Figura 64: caso 38: centri al variare del rumore metodo  $\Delta < 0$  e metodo  $Q > 0$  pesati (cerchi) e non pesati (triangoli).

Nel caso 38 allo 0% di rumore si individuano due vortici (Figura 64 “a”) per cui all’aumentare del rumore si imporrà di individuare sempre due vortici per poter effettuare un confronto. In realtà nel campo di moto è presente soltanto il vortice  $(x_2, y_2)$ . Al 20% di rumore (Figura 64 “b”) si evidenzia un errore minore con il centro non pesato rispetto a quello pesato sul vortice  $(x_1, y_1)$  per il metodo  $\Delta$ . Tale errore risulta minore di una cella. Per il metodo  $Q$  invece l’errore minore lo si commette con il centro pesato e sarà pari a meno di metà cella. Gli errori sul vortice  $(x_2, y_2)$  invece sono praticamente nulli per cui coincidono perfettamente, con entrambi i metodi, con il centro allo 0%. Al 90% gli errori commessi con i centri pesati con entrambi i metodi sono contenuti e pari al più a poco più di mezza cella.

**Caso 48:  $r_2 = 0.5r_1$ ,  $\gamma_2 = -\gamma_1/2$ ,  $\bar{d} = r_1 + r_2$**

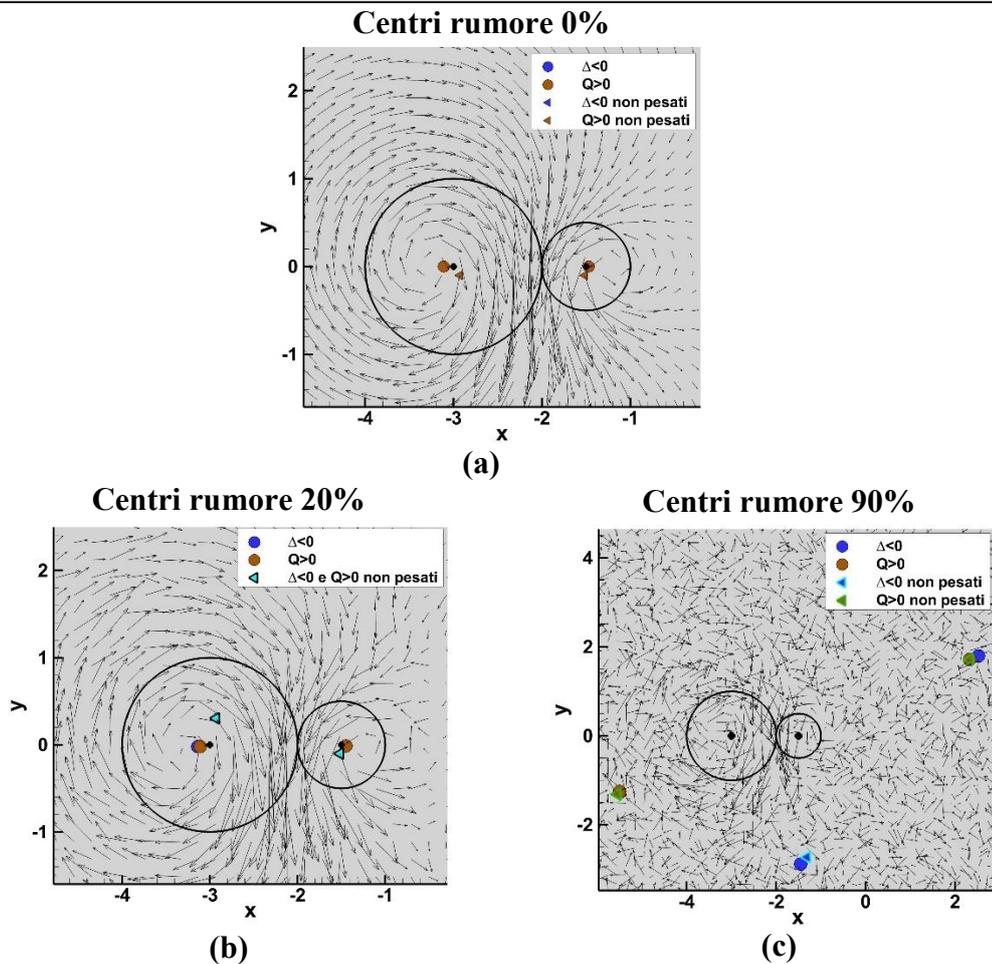


Figura 65: caso 48: centri al variare del rumore metodo  $\Delta < 0$  e metodo  $Q > 0$  pesati (cerchi) e non pesati (triangoli).

Nel caso 48 allo 0% di rumore si individuano due vortici che non si posizionano dove i vettori velocità si chiudono ma nelle vicinanze dei centri geometrici (Figura 65 “a”). In questo caso nel campo di moto sono realmente presenti due vortici controrotanti. Al 20% di rumore si commettono errori piccolissimi inferiori ad 1/4 di cella rispetto ai centri valutati allo 0% per entrambi i centri pesati e con entrambi i metodi (Figura 65 “b”). Differentemente, al 90% di rumore (Figura 65 “c”) si arriva ad errori pari e superiori a dieci celle per entrambi i centri per cui i metodi non sono in grado di individuare correttamente i vortici e di valutarne i centri.

**Caso 50:  $r_2 = 0.5r_1, \gamma_2 = 2\gamma_1, \bar{d} > r_1 + r_2$**

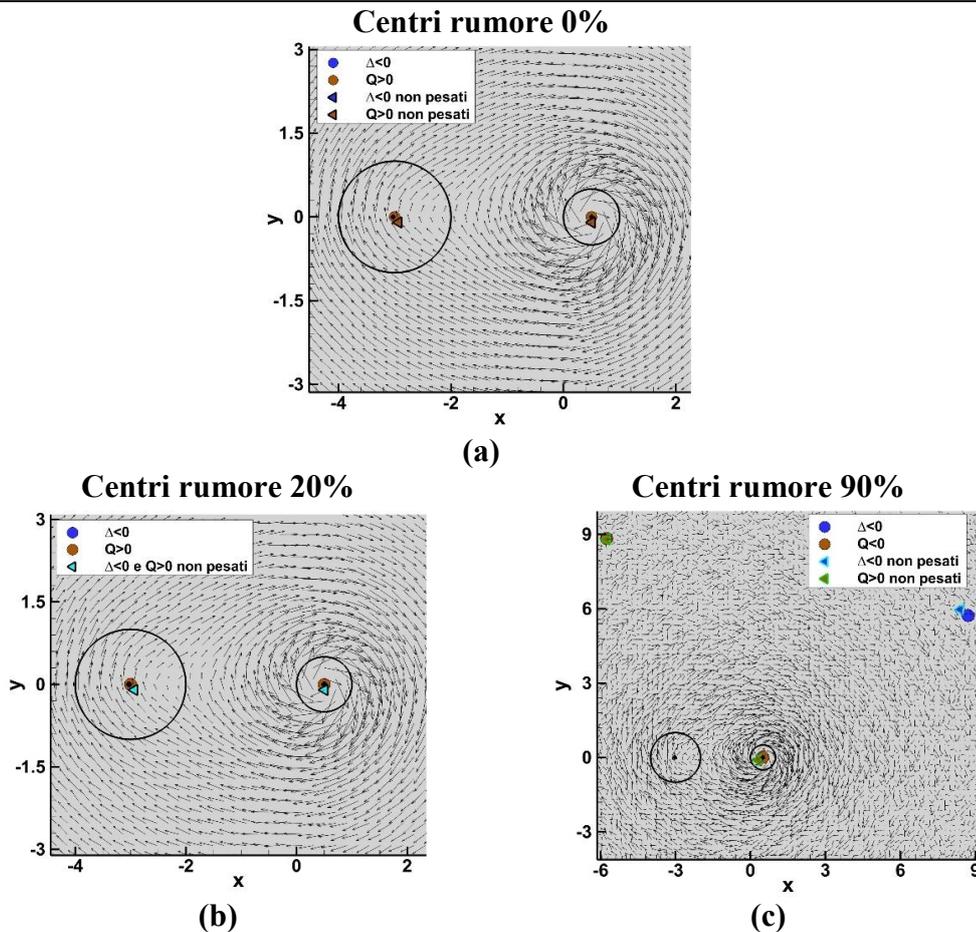


Figura 66: caso 50: centri al variare del rumore metodo  $\Delta < 0$  e metodo  $Q > 0$  pesati (cerchi) e non pesati (triangoli).

Nel caso 50 allo 0% di rumore si individuano due vortici sebbene nel campo di moto ne sia presente soltanto uno  $(x_2, y_2)$  (Figura 66 “a”), dunque per i diversi livelli di rumore si impone di individuare due vortici. Al 20% di rumore si commettono errori piccolissimi, infatti i centri pesati ottenuti con entrambi i metodi coincidono perfettamente con i centri valutati allo 0% (Figura 66 “b”). Differentemente, al 90% di rumore si individua in maniera efficace solo il vortice  $(x_2, y_2)$ , realmente presente, che coinciderà perfettamente con quello valutato allo 0%. Il vortice  $(x_1, y_1)$ , invece, non viene individuato adeguatamente da nessuno dei due metodi.

Dunque, in conclusione i criteri  $\Delta$  e  $Q$  all’aumentare del rumore, già al 20%, non sono in grado di individuare indipendentemente il numero di vortici presenti ma sta all’operatore inserire il numero di vortici adeguato. Inoltre, si osserva che nei casi in cui entrambi i vortici sono visibili (caso 16, caso 23 e caso 48) per rumore al 90% i criteri non sono più in grado di individuare i vortici commettendo errori che vanno dalle 4 alle 30 celle. Invece nei casi in cui nel campo è presente un solo vortice ma i metodi allo 0% ne individuano ugualmente due si evidenzia come questo secondo vortice, inesistente, al 90% di rumore non viene mai individuato con esattezza

differentemente il vortice esistente viene individuato efficacemente (errori inferiori a mezza cella) nei casi 50, 38 e 5 mentre si evidenziano errori che raggiungono anche 35 celle per i casi 19 e 26.

#### 6.4.3 Metodi massimo del modulo della vorticità e della circolazione

Passiamo ora all'analisi del metodo  $\max|\omega_z|$  e del metodo  $\max|\gamma|$ . Scegliamo come livello di soglia quello utilizzato nel caso senza rumore così da poter effettuare un confronto. Prendiamo come riferimento i centri valutati con i metodi  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  senza rumore e valutiamo l'errore che si commette all'aumentare del rumore sia per vortici pesati che non pesati utilizzando i centri pesati con rumore allo 0%. Sfruttiamo, inoltre, il numero di vortici individuati nel caso senza rumore dando questo valore come input per l'individuazione. Infatti, differentemente dal metodo  $\Gamma_2$ , in presenza di rumore è necessario conoscere il numero di vortici da determinare poiché l'individuazione effettuata non è efficace. Dalla Tabella 36, Tabella 37 e Tabella 38 di seguito riportate si evidenzia come, non necessariamente, il centro pesato risulti migliore rispetto al non pesato. Questo è legato alla soglia e alla cattiva individuazione effettuata che causa zone troppo grandi in cui pesando non si evidenzia un miglioramento del centro. Di seguito riportiamo l'analisi per i diversi casi.

Analizziamo i tre casi con  $r_2 = r_1$ . Di seguito si riporta la Tabella 36 contenente gli errori rispetto ai centri pesati allo 0% di rumore. In nero sono evidenziati i casi in cui gli errori sono minori per vortici non pesati rispetto ai pesati

Tabella 36: Casi  $r_2 = r_1$ : errore percentuale al variare del rumore espresso in funzione della distanza della risoluzione spaziale e rispetto al centro valutato con  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  allo 0% di rumore.

<b><math>r_2 = r_1</math></b>						
Casi	Rumore	Pesati		Non pesati		Soglia
		$(x_1, y_1)$	$(x_2, y_2)$	$(x_1, y_1)$	$(x_2, y_2)$	
1	20	13%	16%	147%	113%	$ \omega_z  > 1.8$
	90	1683%	150%	1683%	183%	
	20	55%	5%	80%	46%	$ \gamma  > 0.6$
	90	4223%	66%	4223%	<b>46%</b>	
5	20	18%	33%	162%	36%	$ \omega_z  > 0.3$
	90	2644%	454%	2819%	<b>36%</b>	
	20	22%	15%	125%	36%	$ \gamma  > 0.1$
	90	1710%	588%	1905%	<b>36%</b>	
16	20	26%	1%	47%	51%	$ \omega_z  > 0.3$
	50	63%	21%	148%	51%	
	90	865%	351%	341%	<b>51%</b>	
	20	6%	11%	47%	50%	$ \gamma  > 0.1$
	50	42%	74%	54%	<b>51%</b>	
	90	466%	913%	1518%	<b>51%</b>	

Analizziamo nello specifico ogni singolo caso tenendo in considerazione per ognuno di essi la Tabella 36 con gli errori espressi in percentuale della distanza della risoluzione spaziale.

**Individuazioni caso 1:  $r_2 = r_1, \gamma_2 = \gamma_1, \bar{d} < r_1 + r_2$**

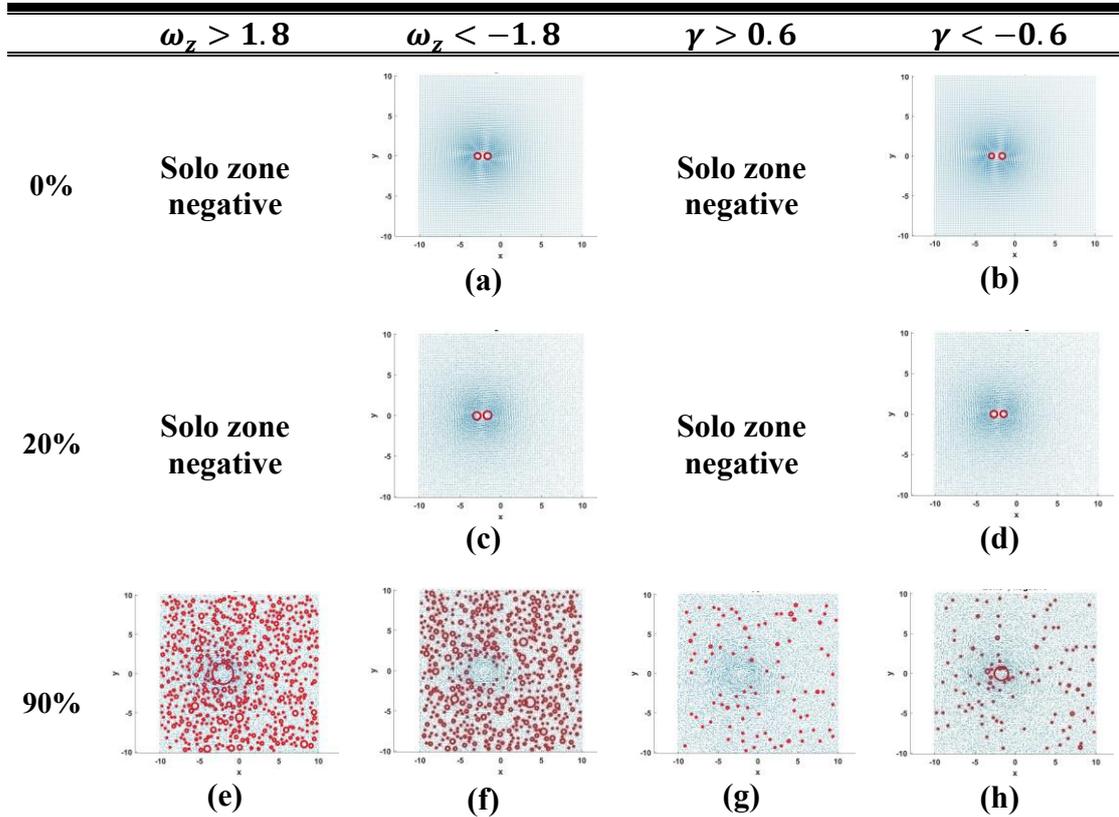
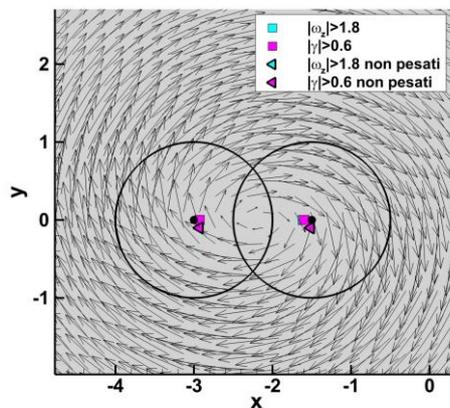


Figura 67: Caso 1: individuazione vortici metodi  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  con soglie 1.8 per la vorticit  e 0.6 per la circolazione.

**Caso 1:  $r_2 = r_1, \gamma_2 = \gamma_1, \bar{d} < r_1 + r_2$**

**Centri rumore 0%**



(a)

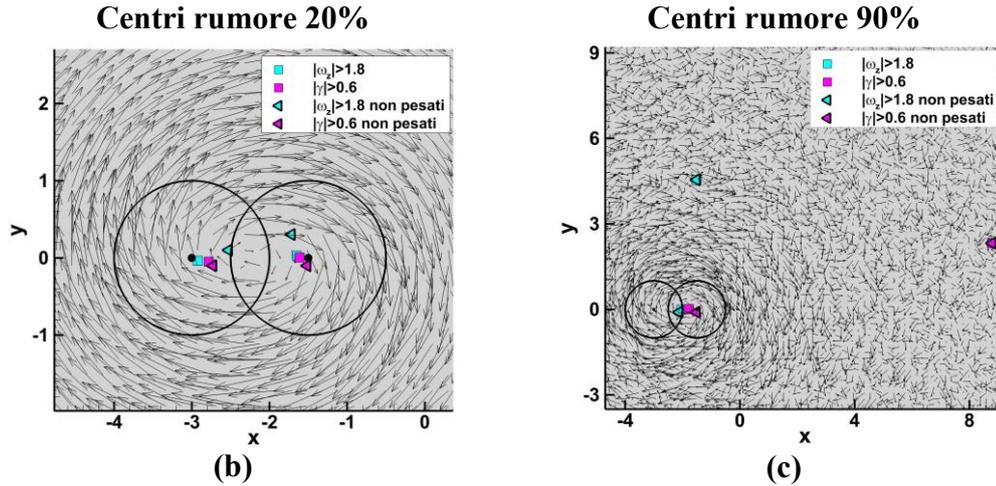
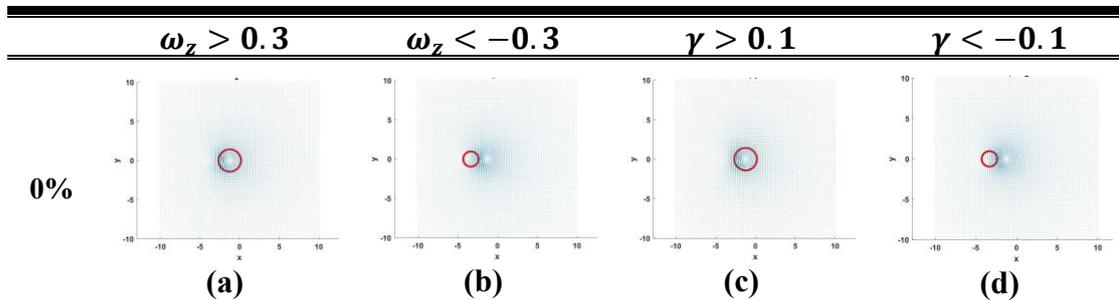


Figura 68: caso 1: centri metodi  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  con soglie 1.8 per la vorticità e 0.6 per la circolazione.

Nel caso 1 in assenza di rumore (Figura 67 “a” e “b”, Figura 68 “a”) si individuano due vortici che si posizionano nelle vicinanze dei centri geometrici sebbene nel campo sia presente un solo vortice. Il comportamento è analogo al 20% di rumore (Figura 67 “c” e “d”). Si osserva (Figura 68 “b”) inoltre che i centri pesati ottenuti con il metodo  $\max|\omega_z|$  commettono un errore inferiore ad 1/4 di cella, diversamente i centri ottenuti con  $\max|\gamma|$  commettono un errore pari a circa mezza cella per il vortice  $(x_1, y_1)$  e coincidono per il vortice  $(x_2, y_2)$ . Al 90% di rumore non si individuano più i soli due vortici ma è necessario inserire il numero di vortici da determinare (Figura 67 “e”, “f”, “g” e “h”). Procedendo in tal senso si evidenzia, con entrambi i metodi, come per il vortice  $(x_1, y_1)$  i centri pesati e non pesati coincidono con errori pari a 17 celle per il metodo  $\max|\omega_z|$  e 42 celle per il criterio  $\max|\gamma|$ . Il vortice  $(x_2, y_2)$  viene individuato con un errore pari a circa una cella e mezza per il metodo  $\max|\omega_z|$  e circa mezza cella per il metodo  $\max|\gamma|$ , in realtà si evidenzia come per quest’ultimo criterio il centro più efficace sia quello non pesato.

### Individuazioni caso 5: $r_2 = r_1, \gamma_2 = -2\gamma_1, \bar{d} < r_1 + r_2$



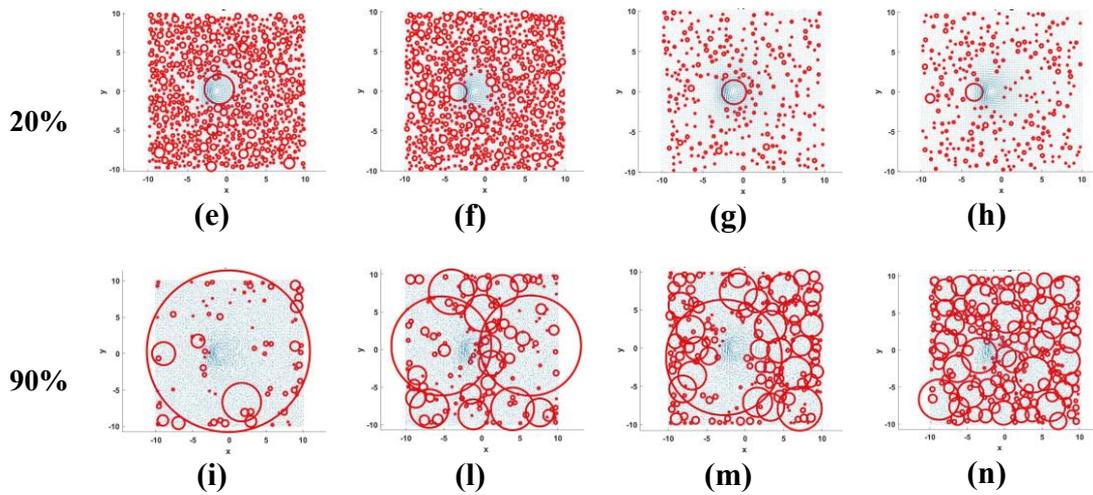


Figura 69: Caso 5: individuazione vortici metodi  $\max |\omega_z|$  e  $\max |\gamma|$  con soglie 0.3 per la vorticit  e 0.1 per la circolazione.

**Caso 5:  $r_2 = r_1, \gamma_2 = -2\gamma_1, \bar{d} < r_1 + r_2$**

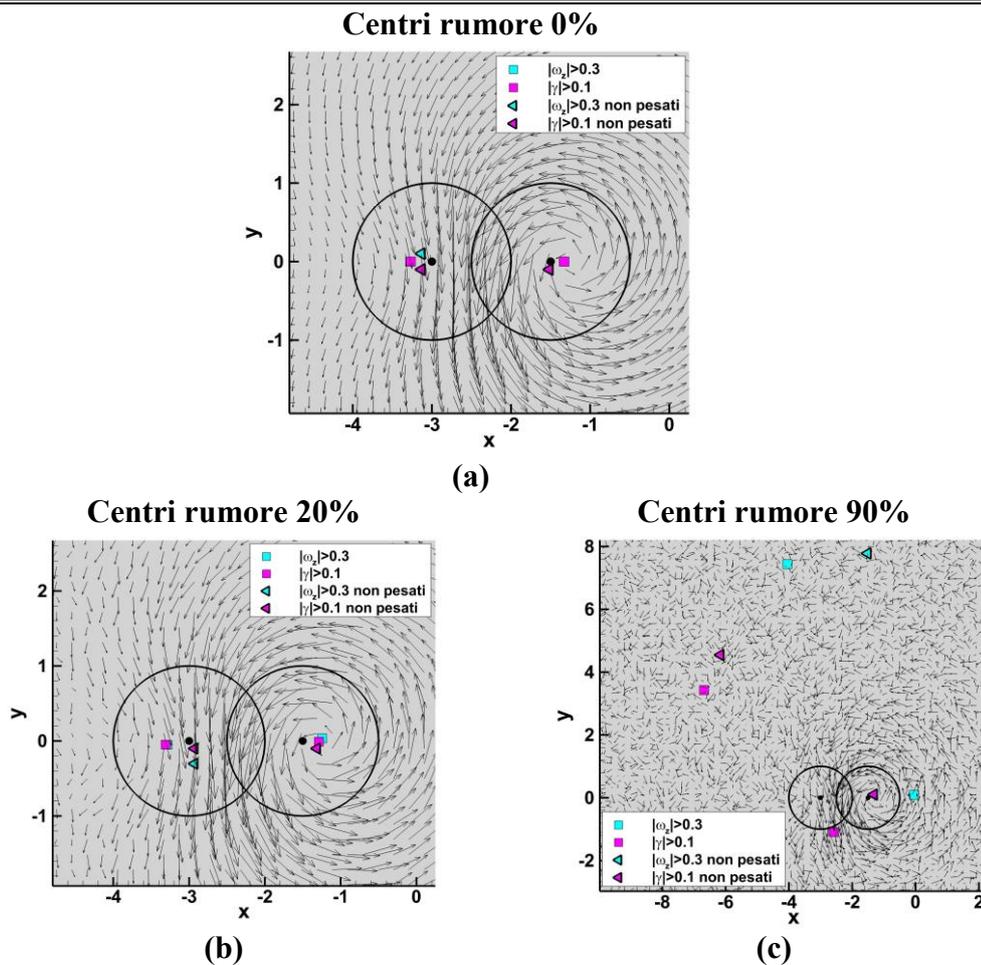


Figura 70: Caso 5: centri metodi  $\max |\omega_z|$  e  $\max |\gamma|$  con soglie 0.3 per la vorticit  e 0.1 per la circolazione.

Nel caso 5 i metodi evidenziano, in assenza di rumore, due vortici controrotanti (Figura 69 “a”, “b”, “c” e “d”, Figura 70 “a”) sebbene nel campo di moto sia presente soltanto il vortice  $(x_2, y_2)$ . Già al 20% di rumore la situazione si complica ed è dunque necessario inserire il numero di vortici da determinare (Figura 69 “e”, “f”, “g” e “h”). Effettuato ciò il calcolo dei centri pesati risulta ottimale, si commettono, infatti, errori inferiori a mezza cella con entrambi i metodi e per entrambi i vortici (Figura 70 “b”). Diversamente, al 90% di rumore gli errori ottenuti sui centri pesati sono elevati per entrambi i vortici, osservando invece i centri non pesati si evidenzia che per entrambi i metodi il comportamento risulta migliorare e si presentano errori inferiori a mezza cella per il solo vortice  $(x_2, y_2)$  (Figura 70 “c”) mentre il vortice  $(x_1, y_1)$  continua a non essere individuato efficacemente. Tale comportamento è legato alla soglia scelta per l’individuazione dei vortici che causa zone troppo ampie (Figura 69 “i”, “l”, “m” e “n”) e dunque un calcolo non ottimale del centro pesato. Inoltre, si osserva che i centri non pesati del vortice  $(x_2, y_2)$  con i due metodi sono perfettamente coincidenti (Figura 70 “b” il triangolino rosa si sovrappone a quello azzurro).

**Caso 16:  $r_2 = r_1, \gamma_2 = -\gamma_1, \bar{d} < r_1 + r_2$**

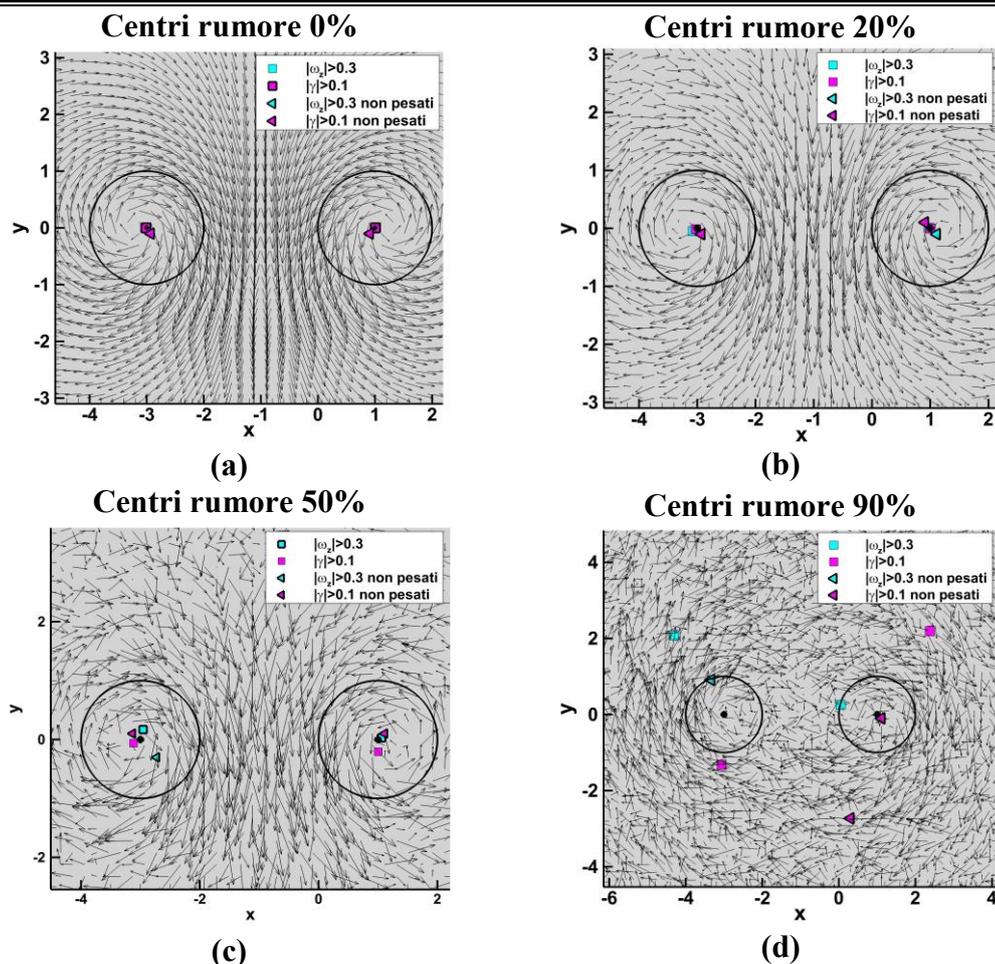


Figura 71: Caso 15: centri metodi  $\max |\omega_z|$  e  $\max |\gamma|$  con soglie 0.3 per la vorticità e 0.1 per la circolazione.

Il comportamento del caso 16 è simile al caso 5 dal punto di vista delle individuazioni poiché i metodi in entrambi campi di velocità individuano due vortici controrotanti. Nel caso 16 sono, però, realmente presenti nel campo di moto due vortici controrotanti, sebbene allo 0% di rumore i centri ottenuti non si posizionano dove i vettori velocità si chiudono (Figura 71 “a”). Al 20%, al 50% e al 90% di rumore vanno inseriti il numero di vortici da determinare. Al 20% il calcolo dei centri è ottimale con errori inferiori o pari ad 1/4 cella (Figura 71 “b”). Al 50% di rumore (Figura 71 “c”) con il metodo  $\max|\omega_z|$  i centri ottimali sono quelli pesati con errori di poco superiori a mezza cella, per il vortice  $(x_1, y_1)$ , e circa pari ad 1/4 di cella, per il vortice  $(x_2, y_2)$ . Con il metodo  $\max|\gamma|$  per il vortice  $(x_1, y_1)$  il centro ottimale è quello pesato con errore di poco inferiore a mezza cella, per il vortice  $(x_2, y_2)$  il centro migliore è quello non pesato con errore pari a circa mezza cella. Al 90% si individua in maniera ottimale solo il vortice  $(x_2, y_2)$  con i centri non pesati commettendo errori pari a circa mezza cella mentre il centro  $(x_1, y_1)$  presenta errori molto elevati. I centri non pesati con i criteri  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  che individuano efficacemente il centro  $(x_2, y_2)$  sono perfettamente coincidenti (Figura 71 “d” il triangolino rosa si sovrappone a quello azzurro).

Analizziamo i tre casi con  $r_2 = 3r_1$ . Di seguito si riporta la Tabella 37 contenente gli errori rispetto ai centri pesati allo 0% di rumore. In nero sono evidenziati i casi in cui gli errori sono minori per vortici non pesati rispetto ai pesati

Tabella 37: Casi  $r_2 = 3r_1$ : errore percentuale al variare del rumore espresso in funzione della distanza della risoluzione spaziale e rispetto al centro valutato con  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  allo 0% di rumore.

<b><math>r_2 = 3r_1</math></b>						
Casi	Rumore	Pesati		Non pesati		Soglia
		$(x_1, y_1)$	$(x_2, y_2)$	$(x_1, y_1)$	$(x_2, y_2)$	
19	20	18%	/	145%	/	$ \omega_z  > 0.25$
	90	765%	/	803%	/	
	20	8%	/	37%	/	$ \gamma  > 0.1$
	90	485%	/	<b>156%</b>	/	
23	20	136%	446%	<b>63%</b>	689%	$ \omega_z  > 0.15$
	50	395%	1018%	<b>165%</b>	<b>978%</b>	
	90	1094%	273%	<b>63%</b>	396%	
	20	11%	118%	60%	370%	$ \gamma  > 0.1$
	50	42%	3291%	117%	3312%	
	90	33%	2816%	60%	3890%	
26	20	670%	2261%	<b>88%</b>	2249%	$ \omega_z  > 0.31$
	50	451%	3162%	<b>156%</b>	3186%	
	90	1230%	2745%	1336%	1964%	
	20	417%	815%	<b>84%</b>	829%	$ \gamma  > 0.11$
	50	34%	3545%	152%	3522%	
	90	1487%	1100%	1040%	1091%	

Analizziamo nello specifico ogni singolo caso tenendo in considerazione per ognuno di essi la Tabella 37 con gli errori espressi in percentuale della distanza della risoluzione spaziale.

**Individuazioni caso 19:  $r_2 = 3r_1, \gamma_2 = \gamma_1, \bar{d} < r_1 + r_2$**

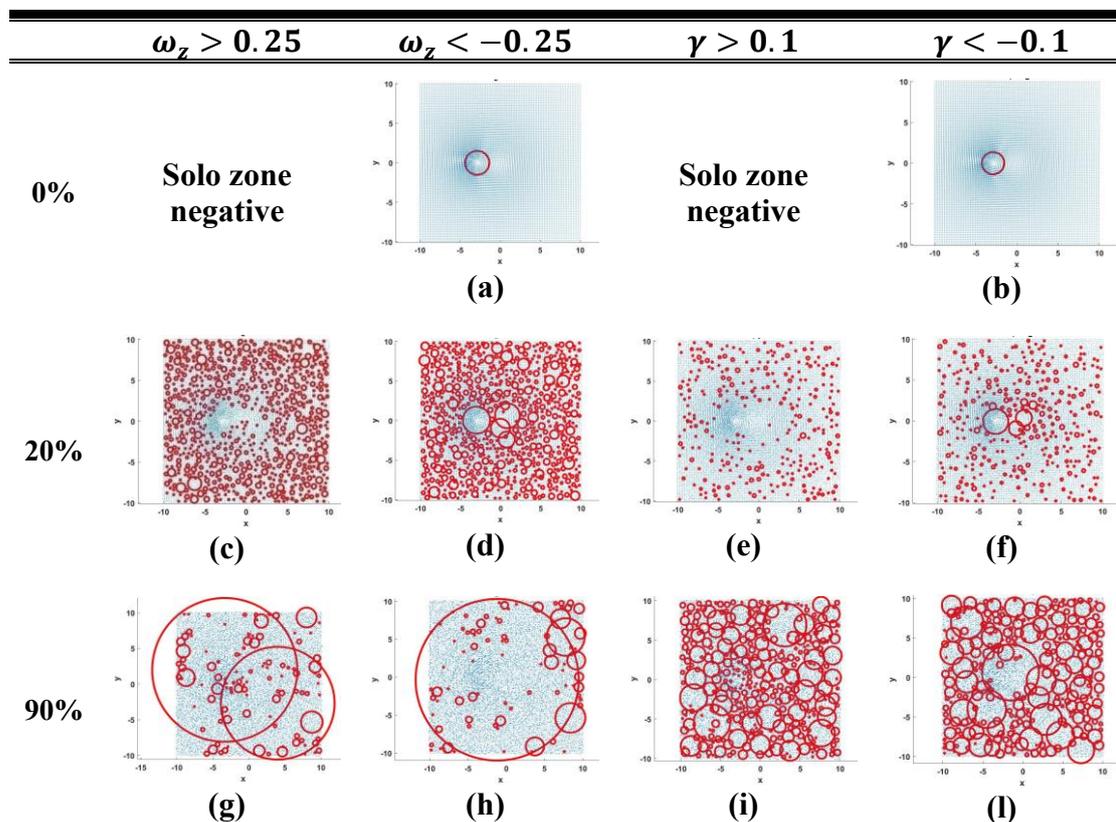
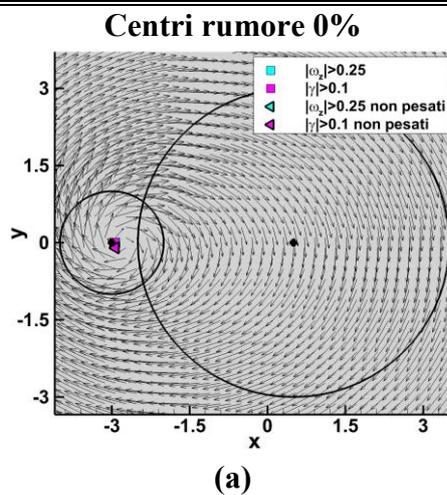


Figura 72: Caso 19: individuazione vortici metodi  $\max |\omega_z|$  e  $\max |\gamma|$  con soglie 0.25 per la vorticit  e 0.1 per la circolazione.

**Caso 19:  $r_2 = 3r_1, \gamma_2 = \gamma_1, \bar{d} < r_1 + r_2$**



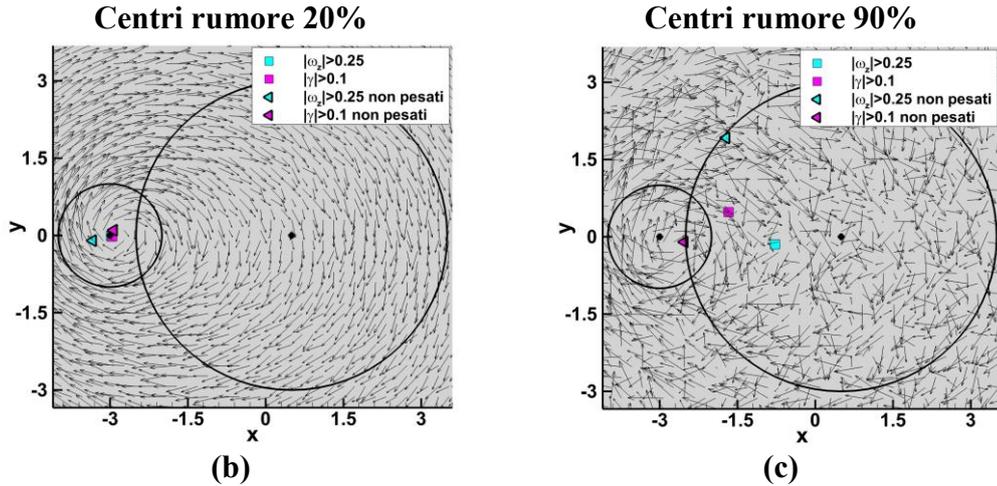
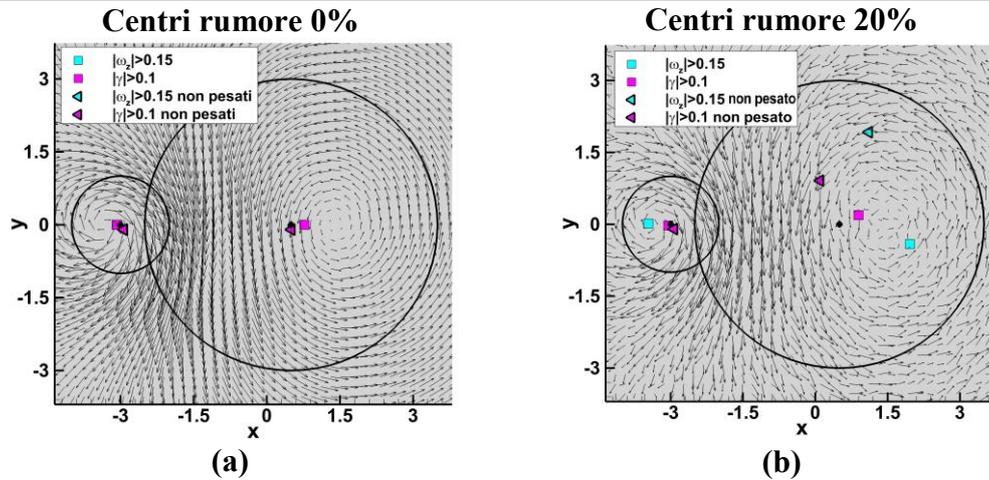


Figura 73: Caso 19: centri metodi  $\max |\omega_z|$  e  $\max |\gamma|$  con soglie 0.25 per la vorticità e 0.1 per la circolazione.

Nel caso 19 si individua in assenza di rumore un solo vortice orario (Figura 72 “a” e “b”) il cui centro si posiziona nelle vicinanze del centro geometrico (Figura 73 “a”). Al 20% e al 90% di rumore si impone l’individuazione di un solo vortice poiché i criteri non sono in grado di individuare il vortice isolato (al 20% Figura 72 “c”, “d”, “e” e “f”, al 90% Figura 72 “g”, “h”, “i” e “l”). Al 20% di rumore gli errori commessi sono inferiori ad 1/4 di cella (Figura 73 “b”) quindi i centri con i due metodi coincidono con quelli ottenuti allo 0%. Al 90% sia per vortici pesati che non pesati con entrambi i metodi il centro individuato presenta errori superiori ad una cella (Figura 73 “c”). Il centro ottenuto con il metodo  $\max |\omega_z|$  commette errori pari a circa 8 celle sia con il centro pesato che non pesato, diversamente con il metodo  $\max |\gamma|$  con il centro non pesato si commette un errore di circa una cella e mezza.

**Caso 23:  $r_2 = 3r_1, \gamma_2 = -2\gamma_1, \bar{d} < r_1 + r_2$**



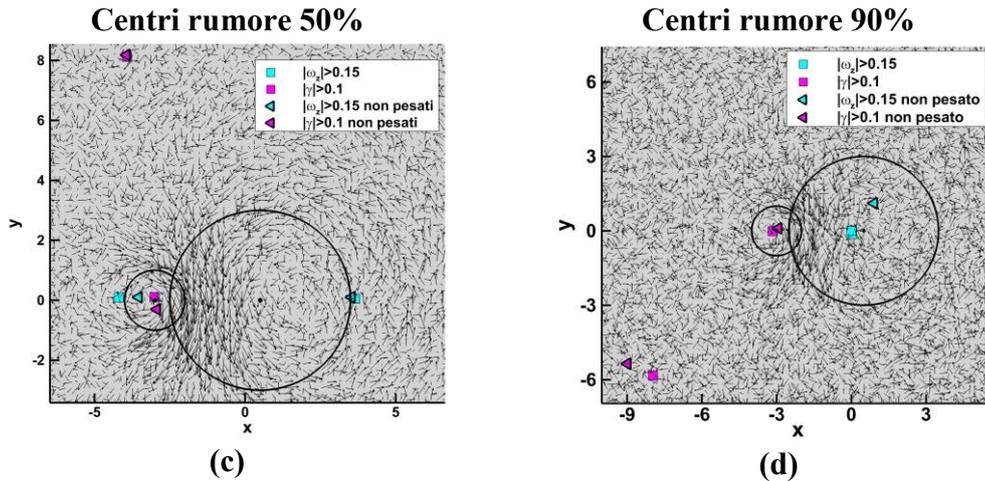


Figura 74: Caso 23: centri metodi  $\max |\omega_z|$  e  $\max |\gamma|$  con soglie 0.25 per la vorticità e 0.1 per la circolazione.

Il caso 23 è simile al caso 5 dal punto di vista delle individuazioni. La forte differenza risiede nel campo di velocità allo 0% nel quale sebbene presenti i due vortici, diversamente dal caso 5, i centri individuati non si posizionano nei punti intorno ai quali i vettori velocità si chiudono (Figura 74 “a”). Al 20% di rumore con il metodo  $\max |\omega_z|$  il centro  $(x_1, y_1)$  viene individuato con maggiore efficacia dal centro non pesato commettendo un errore poco superiore a mezza cella (Figura 74 “b” triangolo azzurro sotto quello rosa). Diversamente con il metodo  $\max |\gamma|$  l’individuazione più efficace è compiuta dal centro pesato con un errore inferiore ad  $1/4$  di cella. Il vortice  $(x_2, y_2)$  viene individuato in maniera più efficace con il centro pesato, inoltre il metodo  $\max |\gamma|$  commette un errore pari a circa 4 celle e mezza mentre il criterio  $\max |\omega_z|$  commette un errore di poco più di una cella. Al 50% di rumore (Figura 74 “c”) con il metodo  $\max |\omega_z|$  si considerano i centri non pesati mentre con il metodo  $\max |\gamma|$  i centri pesati. Si osserva che il vortice  $(x_1, y_1)$  con il metodo della vorticità viene individuato con un errore pari a circa 1 cella e mezza invece con il metodo della circolazione con un errore pari a circa mezza cella. Diversamente entrambi i metodi commettono errori rispettivamente pari a 10 celle e 33 celle sul vortice  $(x_2, y_2)$ . Quindi già al 50% i metodi non sono più in grado di individuare il vortice meno intenso. Al 90%, analogamente al caso con 50% di rumore, si individua efficacemente solo il vortice  $(x_1, y_1)$  (Figura 74 “d”).

**Caso 26:  $r_2 = 3r_1, \gamma_2 = 2\gamma_1, \bar{d} = r_1 + r_2$**

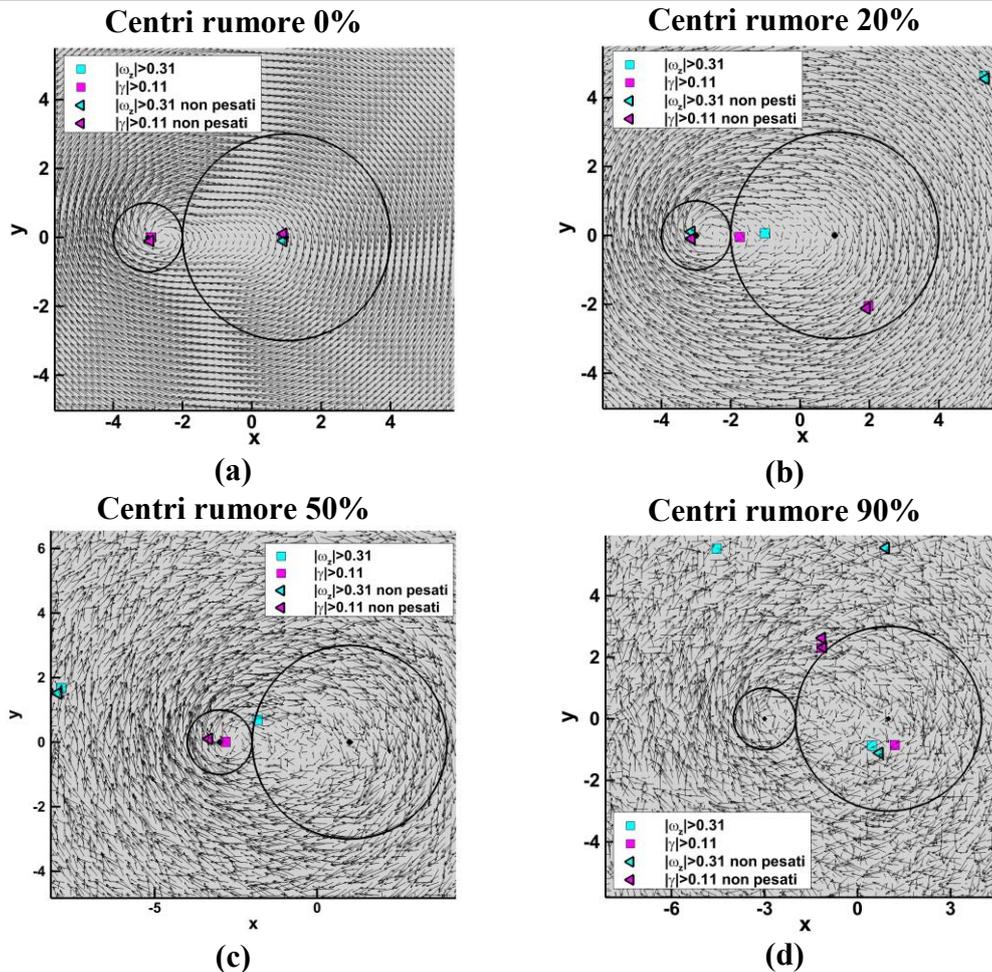


Figura 75: Caso 26: centri metodi  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  con soglie 0.31 per la vorticità e 0.11 per la circolazione.

Nel caso 26 in assenza di rumore si individuano due vortici corotanti per cui l'individuazione è simile al caso 1. In realtà nel campo di moto è presente un solo vortice  $(x_1, y_1)$  il cui centro viene individuato dai metodi in corrispondenza del centro geometrico (Figura 75 "a"). Al 20%, al 50% e al 90% di rumore le individuazioni non sono più efficaci ed è necessario inserire il numero di vortici da determinare. Al 20% l'errore commesso sul vortice  $(x_2, y_2)$  è pari a 22 celle con il metodo  $\max|\omega_z|$  e 8 celle con il metodo  $\max|\gamma|$ , diversamente il vortice  $(x_1, y_1)$  presenta errori di poco superiori a mezza cella se si considerano, per entrambi i metodi, i centri non pesati (Figura 75 "b" i due triangoli sulla sinistra). Al 50% (Figura 75 "c") per il vortice  $(x_2, y_2)$ , con entrambi i metodi, si commettono errori elevati pari a 30 celle, diversamente per il vortice  $(x_1, y_1)$  con il metodo  $\max|\omega_z|$  si commette un errore pari a circa una cella e mezza, considerando il vortice non pesato, e minore di mezza cella con il metodo  $\max|\gamma|$  e il suo centro pesato. Al 90% di rumore gli errori commessi su entrambi i vortici sia per centri pesati che non pesati superano le 10 celle (Figura 75 "d").

Analizziamo i tre casi con  $r_2 = 0.5r_1$ . Di seguito si riporta la Tabella 38 contenente gli errori rispetto ai centri pesati allo 0% di rumore. In nero sono evidenziati i casi in cui gli errori sono minori per vortici non pesati rispetto ai pesati.

Tabella 38: Casi  $r_2 = 0.5r_1$ : errore percentuale al variare del rumore espresso in funzione della distanza della risoluzione spaziale e rispetto al centro valutato con  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  allo 0% di rumore.

<b><math>r_2 = 0.5r_1</math></b>						
Casi	Rumore	Pesati		Non pesati		Soglia
		$(x_1, y_1)$	$(x_2, y_2)$	$(x_1, y_1)$	$(x_2, y_2)$	
38	20	/	0.25%	/	44%	$ \omega_z  > 2.8$
	90	/	8%	/	44%	
	20	/	7%	/	39%	$ \gamma  > 1.2$
	90	/	9%	/	39%	
48	20	4%	7%	119%	43%	$ \omega_z  > 0.5$
	90	1956%	604%	2003%	<b>59%</b>	
	20	6%	4%	113%	39%	$ \gamma  > 0.3$
	90	2585%	76%	2576%	<b>66%</b>	
50	20	5277%	386%	5393%	<b>36%</b>	$ \omega_z  > 0.2$
	90	1063%	190%	4538%	<b>75%</b>	
	20	2%	2%	46%	36%	$ \gamma  > 0.15$
	90	4520%	416%	4547%	<b>36%</b>	

Analizziamo nello specifico ogni singolo caso tenendo in considerazione per ognuno di essi la Tabella 38 con gli errori espressi in percentuale della distanza della risoluzione spaziale.

**Caso 38:  $r_2 = 0.5r_1, \gamma_2 = 2\gamma_1, \bar{d} < r_1 + r_2$**

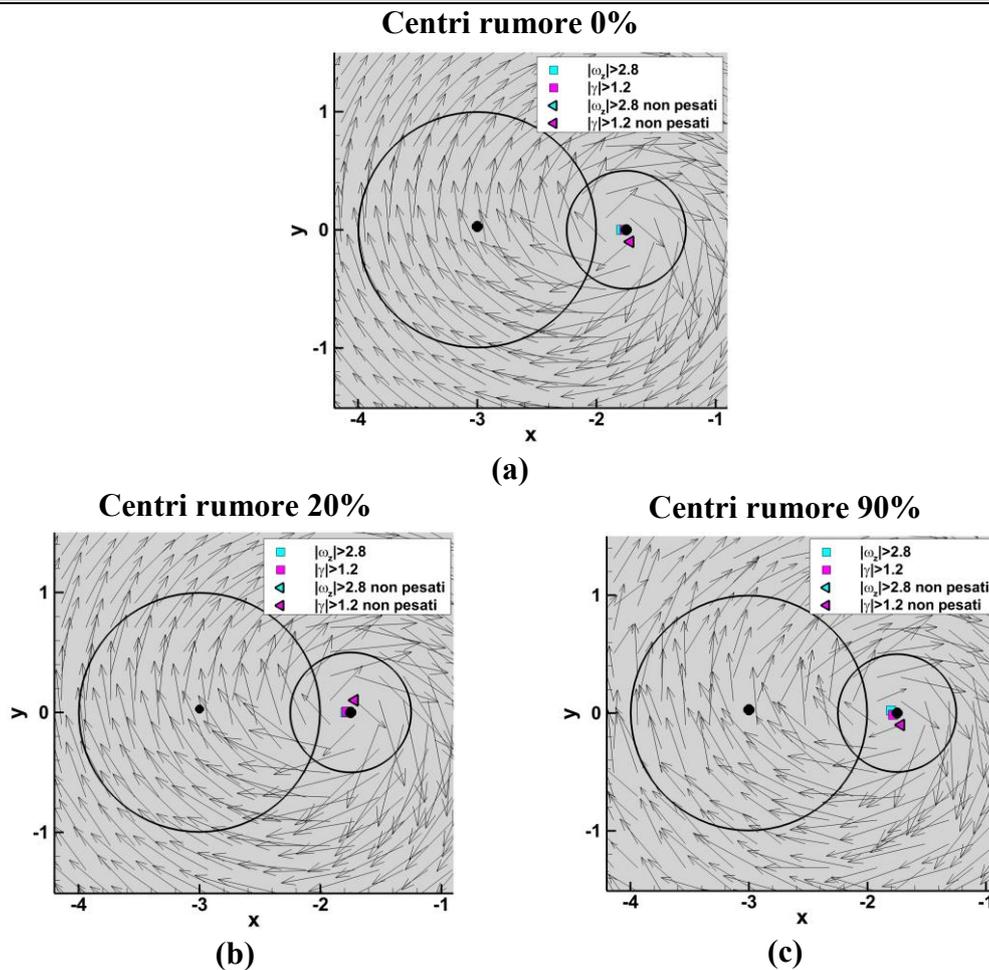


Figura 76: Caso 38: centri metodi  $\max |\omega_z|$  e  $\max |\gamma|$  con soglie 2.8 per la vorticità e 1.2 per la circolazione.

Nel caso 38 allo 0% di rumore i metodi individuano un solo vortice che si posiziona in corrispondenza del centro geometrico che in questo caso corrisponde anche al punto intorno al quale i vettori velocità si chiudono (Figura 76 “a”). All’aumentare del rumore (Figura 76 “b” e “c”) il comportamento continua ad essere ottimale e i centri sono quasi perfettamente coincidenti con quelli ottenuti allo 0%. I campi di velocità, infatti, all’aumentare del rumore non subiscono forti cambiamenti.

**Caso 48:  $r_2 = 0.5r_1$ ,  $\gamma_2 = -\gamma_1/2$ ,  $\bar{d} = r_1 + r_2$**

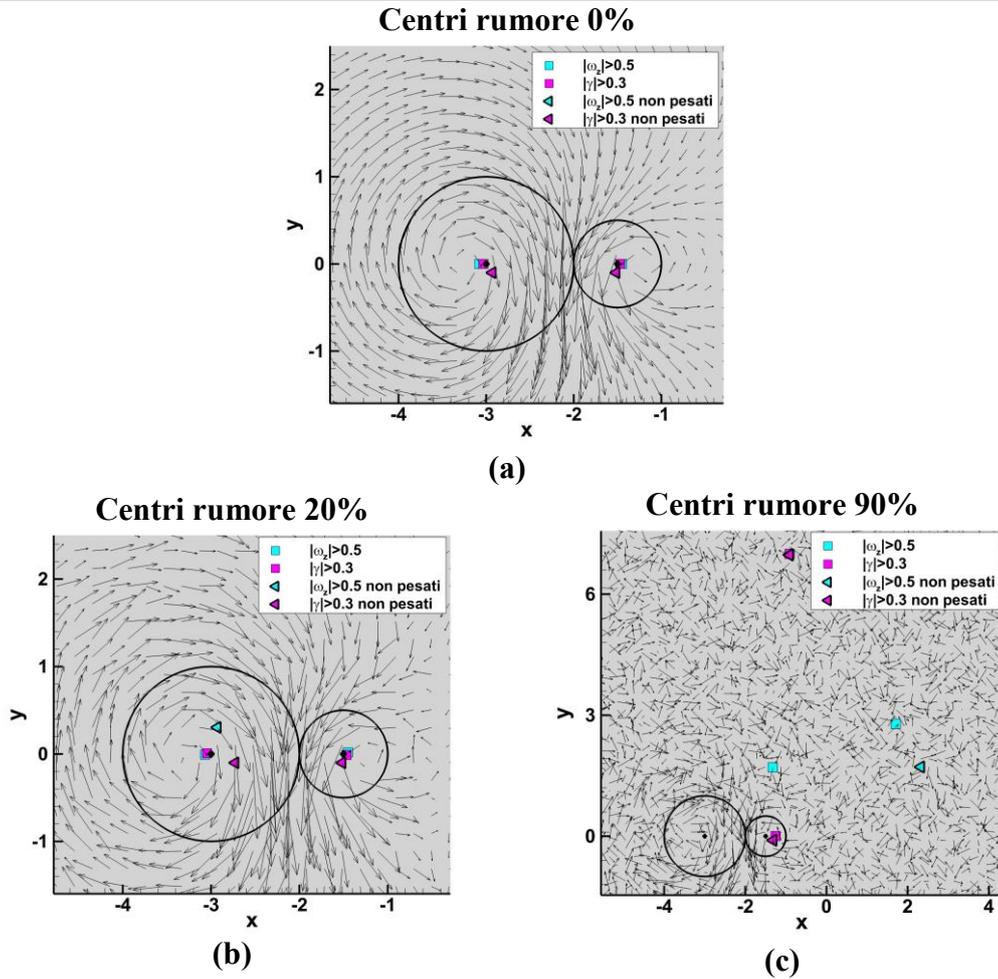


Figura 77: Caso 48: centri metodi  $\max |\omega_z|$  e  $\max |\gamma|$  con soglie 0.5 per la vorticità e 0.3 per la circolazione.

Nel caso 48 si evidenzia la presenza di due vortici controrotanti così come avveniva nel caso 5. Dunque, le individuazioni dei vortici nei due casi sono molto simili. In questo caso, però, rispetto al caso 5 sono realmente presenti due vortici nel campo di moto che allo 0% di rumore si posizionano in prossimità del centro geometrico e non dove i vettori velocità si chiudono (Figura 77 “a”). Al 20% di rumore i centri dei due vortici, ottenuti con entrambi i metodi, sono praticamente coincidenti con quelli allo 0% (Figura 77 “b”). Differentemente, al 90% di rumore sul vortice  $(x_1, y_1)$  si commettono errori di 20 celle con il metodo  $\max |\omega_z|$  e di 26 celle con il metodo  $\max |\gamma|$ . Per vortice  $(x_2, y_2)$  il centro migliore è calcolato con i centri pesati con entrambi i metodi commettendo errori di poco superiori a mezza cella. Un errore maggiore sul centro  $(x_1, y_1)$  rispetto al centro  $(x_2, y_2)$  è legato al fatto che quest’ultimo risulta molto più intenso.

**Caso 50:  $r_2 = 0.5r_1, \gamma_2 = 2\gamma_1, \bar{d} > r_1 + r_2$**

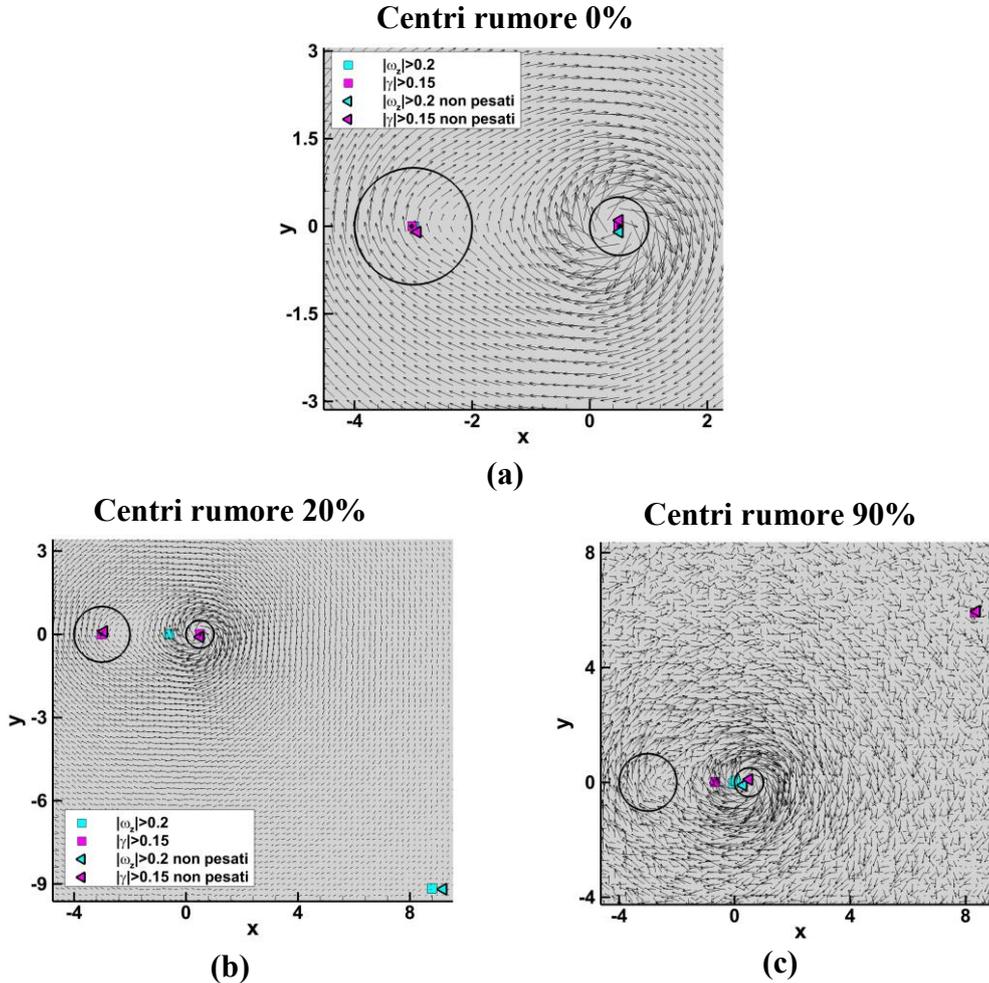


Figura 78: Caso 50: centri metodi  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  con soglie 0.2 per la vorticità e 0.15 per la circolazione.

Nel caso 50 vengono individuati due vortici in assenza di rumore sebbene nel campo di moto ne sia presente soltanto uno. Il centro reale individuato si posiziona in corrispondenza del centro geometrico che in questo caso è vicino al punto intorno al quale i vettori velocità si chiudono (Figura 78 “a”). Al 20% di rumore con il metodo  $\max|\omega_z|$  il vortice  $(x_1, y_1)$  viene individuato a 53 celle di distanza da quello allo 0% invece quello  $(x_2, y_2)$  a meno di mezza cella se si considera il centro non pesato (Figura 78 “b” triangolo azzurro coincidente con quello rosa). Con il metodo  $\max|\gamma|$  entrambi i centri pesati ottenuti coincidono quasi perfettamente con quelli allo 0%. Al 90% di rumore con entrambi i metodi si commettono errori superiori alle 10 celle per il vortice  $(x_1, y_1)$  mentre gli errori sono inferiori ad una cella per il vortice  $(x_2, y_2)$ . Dunque, il vortice realmente esistente viene individuato efficacemente anche con livelli di rumore elevati.

In conclusione, si evidenzia come i metodi  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  scelta come soglia quella analoga al caso senza rumore non sono in grado, già in presenza di un lieve

rumore, di identificare con precisione il numero di vortici presenti ma l'operatore è obbligato ad inserire il numero di vortici desiderati.

Si è evidenziato in alcuni casi un miglior comportamento dei vortici non pesati rispetto ai pesati come già visto nel caso del singolo vortice. Questo comportamento è legato alla soglia scelta per l'individuazione. Difatti, le soglie scelte sono analoghe ai casi senza rumore sebbene andrebbe effettuata un'ulteriore analisi e scelta una soglia più appropriata. Questo causa un'individuazione non ottimale ed un conseguente errore nel peso del centro. Dunque, la scelta della soglia risulta complessa; cambiando caso per caso e cambiando anche in base al livello di rumore presente nel campo di velocità.

Si osserva che nei casi in cui entrambi i vortici sono visibili (caso 16, caso 23 e caso 48) per rumore al 90% i criteri non sono più in grado di individuare entrambi i vortici correttamente. Per i casi 16 e 48 si individua correttamente solo il vortice  $(x_2, y_2)$  commettendo errori pari o poco superiori a mezza cella. Sebbene i due vortici posseggano pari intensità si evidenzia come il vortice  $(x_2, y_2)$  presenta una maggiore distanza dal bordo rispetto al vortice  $(x_1, y_1)$ . Nel caso 50, invece, viene individuato efficacemente solo il centro  $(x_1, y_1)$  con errori vicini a mezza cella, questo si verifica perché tra i due vortici esso è il più intenso. Invece nei casi in cui nel campo è presente un solo vortice ma i metodi allo 0% ne individuano ugualmente due (casi 5, 26, 50) in alcuni si riesce ad individuare con efficacia il vortice realmente esistente ma quello che in assenza di rumore validavano come tale non viene individuato.

L'aspetto su cui bisogna focalizzarsi sui metodi  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  è la questione delle individuazioni. Purtroppo, tali metodi non sono più in grado di definire il numero di vortici presenti nel campo ma sta all'operatore scegliere il numero di vortici da determinare il che li rende molto complessi da utilizzare.

#### 6.4.4 Confronto tra i metodi

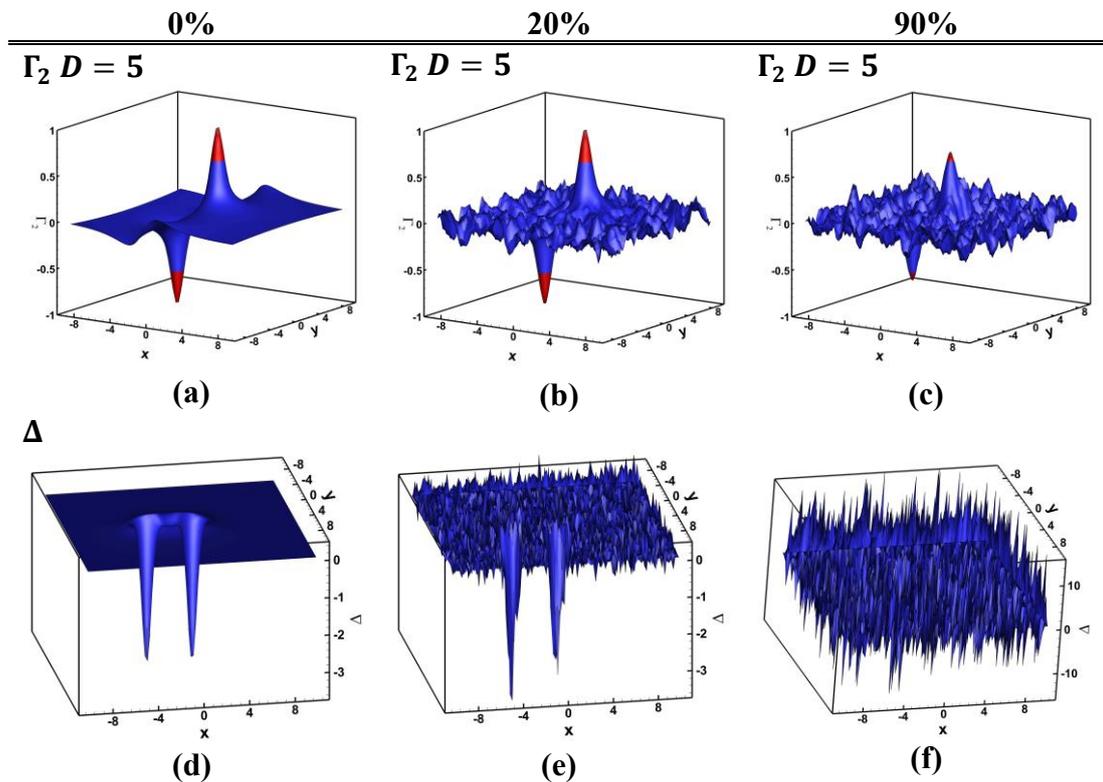
Analizzati i diversi metodi nello specifico e confrontati i centri nel caso con rumore con i loro rispettivi valori in assenza di rumore è possibile effettuare un confronto tra i diversi metodi. Per effettuare tale confronto calcoliamo gli errori per tutti i metodi considerando non più il rispettivo centro valutato allo 0% ma il centro che più efficacemente individua il vortice. Dall'analisi effettuata in assenza di rumore si è visto che in tal senso a funzionare in maniera più efficace è il metodo  $\Gamma_2$  perché è quello che, in tutti i casi, individua il centro come il punto intorno al quale i vettori velocità si chiudono. Dunque, di seguito valutiamo gli errori rispetto al centro pesato ottenuto con il metodo  $\Gamma_2$  allo 0%. La scelta tra dominio  $D = 2$  o  $D = 5$  risulta indifferente nei casi che analizziamo poiché i centri distano al più mezza cella l'uno dall'altro. Dunque, l'errore valutato è:

$$\varepsilon(\%) = \frac{\sqrt{\left(x_{rumore\%} - x_{0\%pesato\Gamma_2}\right)^2 + \left(y_{rumore\%} - y_{0\%pesato\Gamma_2}\right)^2}}{\frac{\Delta L}{r_1} \sqrt{2}} \%$$

Per i metodi  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  scegliamo il centro più efficace tra quello pesato e non pesato a seconda del caso in analisi, poiché come abbiamo già osservato non necessariamente il centro pesato risulta la migliore individuazione. Per il metodo  $\Gamma_2$  scegliamo l'individuazione più efficace tra i domini analizzati in presenza di rumore. Analizziamo tre casi: caso 16 e caso 23 che presentano nel campo di moto due vortici e caso 26 che presenta nel campo di moto un solo vortice.

Caso 16: due vortici  $r_1 = r_2 = 5 pt$

Nel caso 16 tutti i metodi in assenza di rumore individuano due vortici. All'aumentare del rumore il metodo  $\Gamma_2$ , scelto il dominio opportuno, continua ad individuare due vortici mentre i metodi  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  non sono in grado di individuare i due soli vortici data la natura fortemente oscillante delle loro funzioni all'aumentare del rumore (Figura 79). Già al 20% di rumore, per le soglie scelte, i vortici individuati sono molteplici, se si scegliessero delle soglie diverse da quelle considerate allo 0% sarebbe possibile individuare i due soli vortici ma questo vorrebbe dire cambiare le soglie sia al variare del rumore che del campo di velocità stesso. Differentemente al 90% di rumore, e analogamente al 50% di rumore anche se in modo meno accentuato, la scelta di una soglia differente risulta impraticabile poiché è difficile scegliere una soglia tale che vengano individuati due soli vortici.



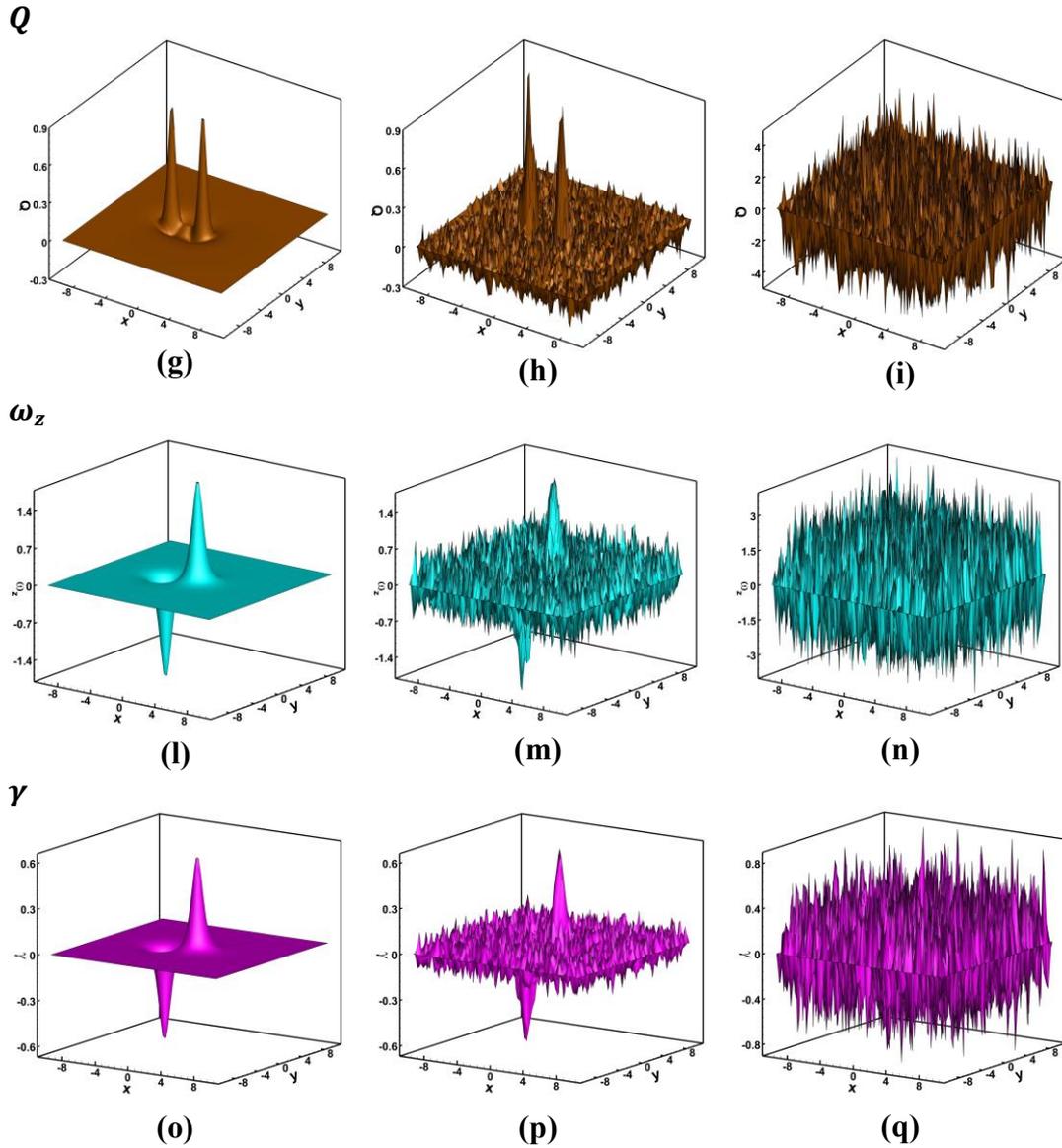


Figura 79: Andamenti funzioni  $\Gamma_2$   $D = 5$ ,  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\omega_z$  e  $\gamma$  al variare del rumore caso 16.

Tabella 39: Errori rispetto al centro valutato allo 0% con il metodo  $\Gamma_2$  al variare del rumore e per i metodi  $\Gamma_2$ ,  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$ , caso 16.

Errori centri caso 16: $r_2 = r_1$ , $\gamma_2 = -\gamma_1$ , $\bar{d} < r_1 + r_2$						
Metodi		$\Gamma_2$ $D=5$	$\Delta < 0$	$Q > 0$	$ \omega_z  > 0.3$	$ \gamma  > 0.1$
0%	$(x_1, y_1)$	0%	82%	82%	79%	79%
	$(x_2, y_2)$	0%	76%	76%	75%	75%
20%	$(x_1, y_1)$	1%	83%	83%	61%	77%
	$(x_2, y_2)$	1%	79%	76%	77%	86%
50%	$(x_1, y_1)$	20%	52%	134%	116%	52%
	$(x_2, y_2)$	37%	53%	59%	58%	53%
90%	$(x_1, y_1)$	52%	1791%	1791%	323%	1580%
	$(x_2, y_2)$	56%	2962%	3009%	57%	57%

Si è considerato per costruire la Tabella 39:

- Per il metodo  $\Gamma_2$  si fa riferimento alla Tabella 27. Per rumore al 20% il dominio  $D = 5$  è il più efficace. Al 50% per il vortice  $(x_1, y_1)$  il dominio più efficace è il  $D = 5$  per il vortice  $(x_2, y_2)$  il dominio  $D = 7$  sebbene scegliendo anche per quest'ultimo il  $D = 5$  l'errore è sempre inferiore a mezza cella. Al 90% di rumore l'individuazione più efficace è compiuta con  $D = 7$  ma si parla di differenze di  $1/4$  di cella con il  $D = 5$ . Per cui si sceglie il dominio  $D = 5$  pari al numero di punti contenuti nel raggio dei due vortici;
- Per i metodi  $\Delta$  e  $Q$  i centri pesati al 20%. Al 50% di rumore si considerano i non pesati per  $\Delta$  e i pesati per  $Q$ , mentre al 90% si considerano i pesati;
- Per il metodo  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  i centri pesati per rumore al 20%. Al 50% i centri pesati per il metodo  $\max|\omega_z|$  e i non pesati per  $\max|\gamma|$ . Al 90% i centri non pesati per entrambi i metodi;

### Centri caso 16: $r_2 = r_1, \gamma_2 = -\gamma_1, \bar{d} < r_1 + r_2$

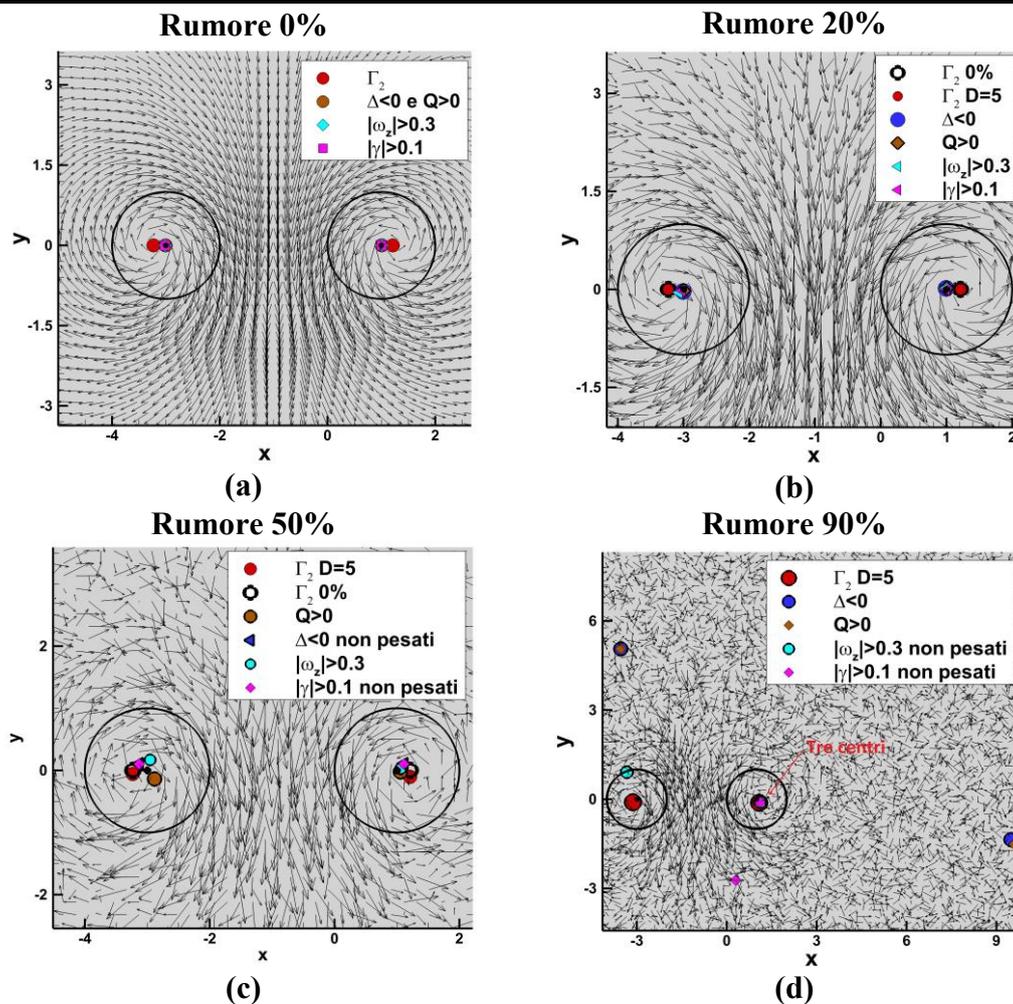


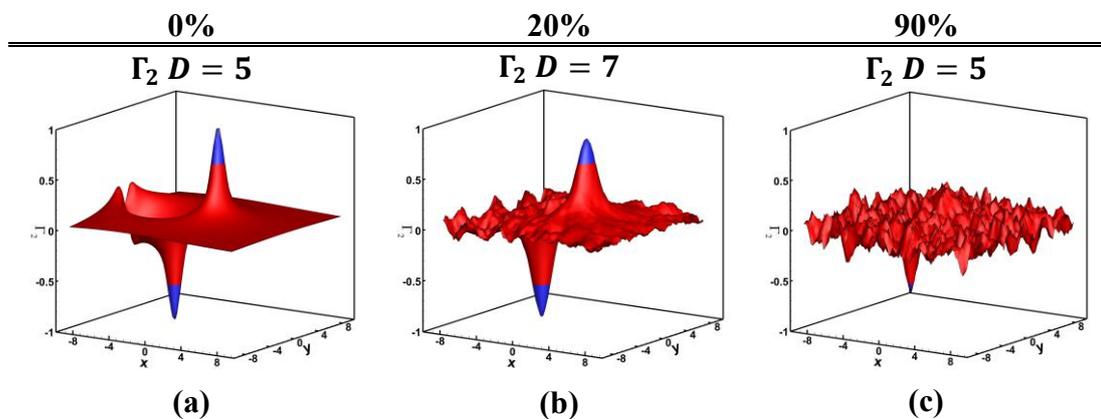
Figura 80: Centri caso 16 al variare del rumore con metodi  $\Gamma_2$ ,  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\max|\omega_z|$ ,  $\max|\gamma|$ .

Sia dalla Tabella 39 sia dalla Figura 80 è possibile evidenziare quanto segue:

- Allo 0% di rumore il metodo  $\Gamma_2$  individua i centri laddove il vettore velocità si chiudono (Figura 80 “a”). Diversamente, i restanti metodi sono coincidenti con il centro geometrico stesso. Infatti, essi distano dal centro valutato con  $\Gamma_2$  circa una cella (Tabella 39 0% di rumore);
- Al 20% di rumore osservando la Figura 80 “b” e la Tabella 39 si evidenzia come tutti i metodi presentano un comportamento ottimale ovvero il medesimo comportamento che possedevano allo 0%;
- Al 50% di rumore la Figura 80 “c” e la Tabella 39 evidenziano come il criterio che commette il minor errore sia  $\Gamma_2$  mentre nei restanti casi l’errore si aggira intorno ad una cella. Le individuazioni compiute sono tutte efficaci;
- Al 90% di rumore il metodo  $\Gamma_2$  è l’unico in grado di individuare efficacemente entrambi i vortici con errori pari a circa mezza cella. I metodi  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  commettono errori elevati sul vortice  $(x_1, y_1)$  ma errori pari a mezza cella sul vortice  $(x_2, y_2)$  (Figura 80 “d” tre centri praticamente coincidenti). I metodi  $\Delta$  e  $Q$  determinano i centri anche a 30 celle di distanza;

Caso 23: due vortici  $r_1 = 5 \text{ pt}$  e  $r_2 = 14 \text{ pt}$

Nel caso 23 in assenza di rumore tutti i metodi individuano entrambi i vortici. Con il metodo  $\Gamma_2$ , fino ad un rumore pari al 50%, scegliendo il dominio opportuno è possibile individuare due vortici, al 90% invece si individua solo il vortice più intenso poiché la struttura del vortice meno intenso, dato l’elevato rumore, scompare (Figura 81). Differentemente per i metodi  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  è necessario imporre il numero di vortici da determinare data la natura oscillante delle funzioni. Al 20% di rumore si potrebbe scegliere una soglia diversa da zero per poter individuare univocamente un solo vortice, poiché il picco associato al secondo vortice viene inglobato dalle numerose oscillazioni (Figura 81 20%). Diversamente al 90%, e analogamente al 50% sebbene in modo meno accentuato, è impossibile scegliere una soglia che identifichi i due soli vortici poiché i picchi sono inglobati nelle numerose oscillazioni.



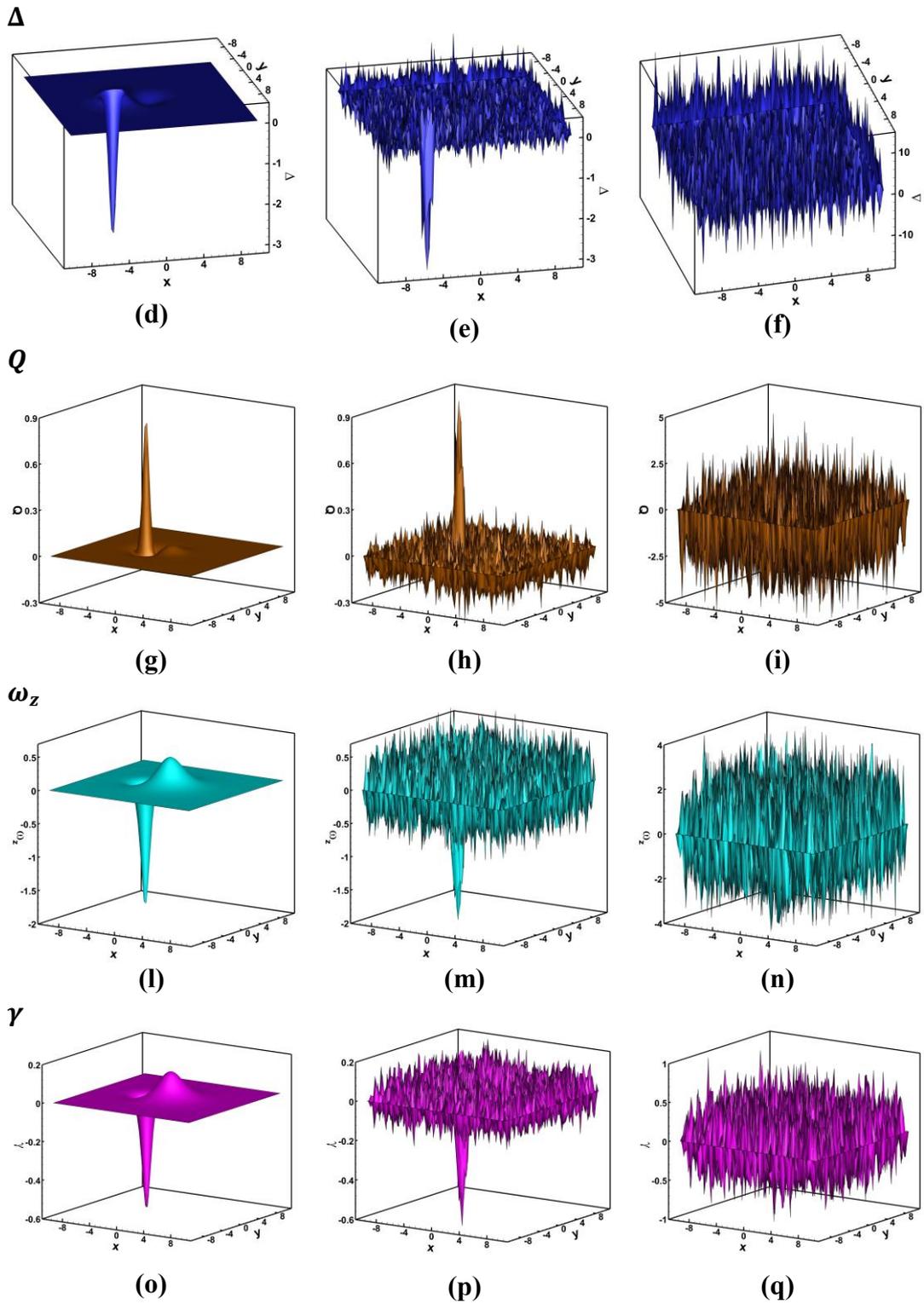


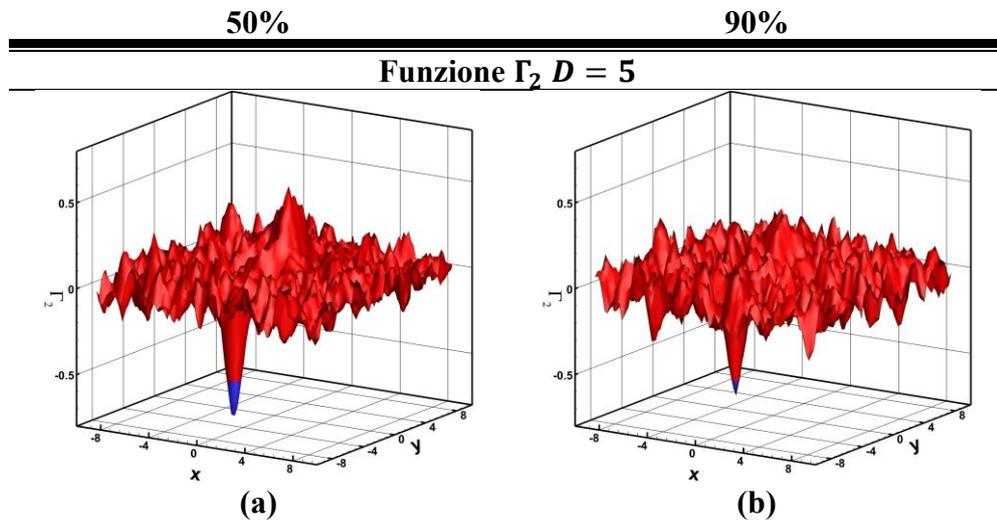
Figura 81: Andamenti funzioni  $\Gamma_2$ ,  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\omega_z$  e  $\gamma$  al variare del rumore caso 23.

Tabella 40: Errori rispetto al centro valutato allo 0% con il metodo  $\Gamma_2$  al variare del rumore e per i metodi analizzati caso 23.

<b>Errori centri caso 23: <math>r_2 = 3r_1, \gamma_2 = -2\gamma_1, \bar{d} &lt; r_1 + r_2</math></b>						
<b>Metodi</b>		$\Gamma_2$	$\Delta < 0$	$Q > 0$	$ \omega_z  > 0.15$	$ \gamma  > 0.1$
0%	$(x_1, y_1)$	0%	110	110	92%	96%
	$(x_2, y_2)$	0%	118%	118%	227%	280%
20%	$(x_1, y_1)$	39%	116%	116%	45%	102%
	$(x_2, y_2)$	30%	703%	703%	243%	195%
50%	$(x_1, y_1)$	28%	79%	79%	78%	123%
	$(x_2, y_2)$	5%	271%	4092%	751%	3436%
90%	$(x_1, y_1)$	65%	2443%	3305%	149%	67%
	$(x_2, y_2)$	\	444%	440%	431%	2833%

Si è considerato per costruire la Tabella 40:

- Per il metodo  $\Gamma_2$  si prendono i centri pesati. Facendo riferimento alla Tabella 28 si può affermare quanto segue. Al 20% di rumore l'errore minore sul vortice  $(x_1, y_1)$  è commesso con  $D = 3$  e su  $(x_2, y_2)$  con  $D = 7$ , si sceglie la combinazione tale che la somma degli errori sui due vortici sia minima ovvero  $D = 7$ . Al 50% di rumore si osserva che solo con  $D = 12$  e  $D = 15$  è possibile individuare entrambi i vortici altrimenti si individuerebbe soltanto il vortice  $(x_1, y_1)$  con 5 punti nel raggio. Dunque, al 50% si sceglie il dominio  $D = 15$  prossimo al numero di punti presenti nel raggio del vortice  $(x_2, y_2)$ , ovvero 14, così da individuare entrambi i vortici. Al 90% di rumore, invece, con  $D = 12$  e  $D = 15$  non si individua alcun vortice e con  $D = 3, D = 5$  e  $D = 7$  si individua solo il vortice  $(x_1, y_1)$  che possiede 5 punti nel raggio. Si sceglie in questo caso  $D = 5$  anche se l'errore commesso con  $D = 7$  è paragonabile. Si osserva dalla Figura 82 l'andamento delle funzioni  $\Gamma_2$   $D = 5$  e  $D = 15$  con rumore al 50% e al 90% per evidenziare come vengono individuati i vortici.



## Funzione $\Gamma_2$ $D = 15$

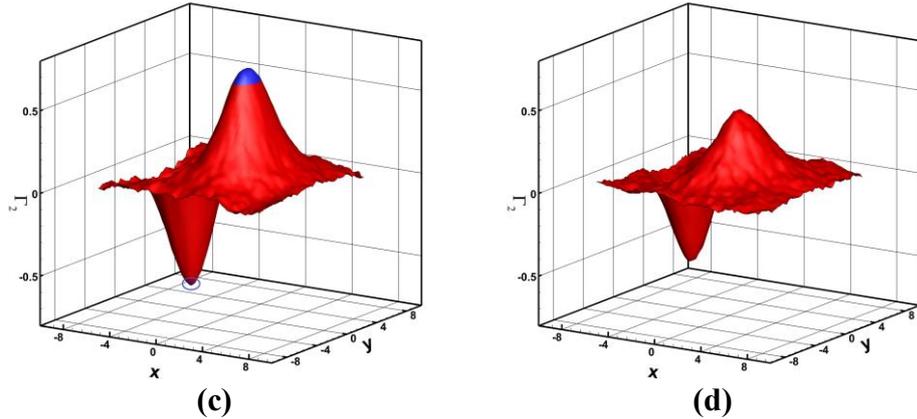
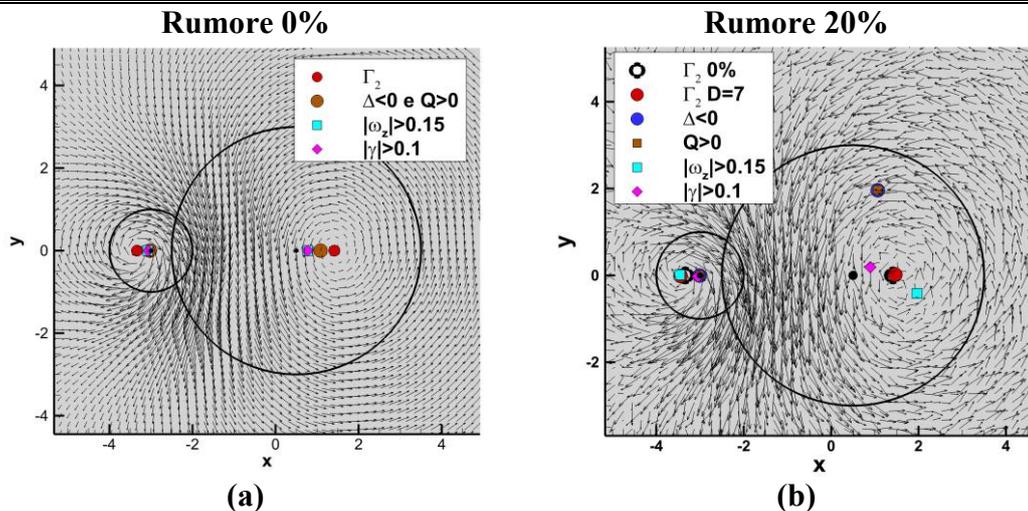


Figura 82: Funzioni  $\Gamma_2$   $D = 5$  e  $D = 15$  con rumore al 50% e al 90%.

In blu si evidenziano i punti che superano la soglia  $2/\pi$ . Con  $D = 5$  con entrambi i livelli di rumore si individua solo il vortice  $(x_1, y_1)$  (Figura 82 “a” e “b”). Nella Figura 82 “c” il picco associato al vortice  $(x_1, y_1)$  non è ben evidente ma anche in quel caso si supera la soglia. Differentemente al 90%, come evidenziato dalla Figura 82 “d”, non si raggiunge mai la soglia stabilita. Il comportamento di  $D = 7$  è analogo a quello di  $D = 5$  e il comportamento della funzione  $D = 12$  è analogo a quello di  $D = 15$ . Per rumori elevati, 90%, il vortice  $(x_2, y_2)$  scompare completamente dal campo di moto essendo poco intenso;

- Per i metodi  $\Delta$  e  $Q$  i centri pesati al 20% e al 90% e i centri non pesati al 50%;
- Per il metodo  $\max|\omega_z|$  i centri pesati al 20% e non pesati al 50% e al 90% di rumore;
- Per il metodo  $\max|\gamma|$  i centri pesati sia al 20% che al 50% che al 90% di rumore;

### Centri caso 23: $r_2 = 3r_1, \gamma_2 = -2\gamma_1, \bar{d} < r_1 + r_2$



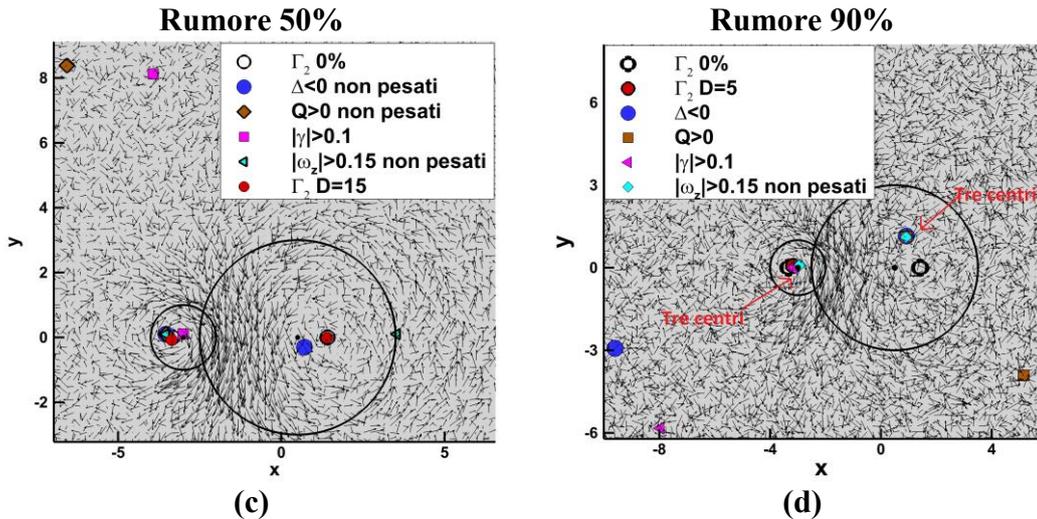


Figura 83: Centri caso 23 al variare del rumore con metodi  $\Gamma_2$ ,  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\max|\omega_z|$ ,  $\max|\gamma|$ .

Sia dalla Tabella 40 sia dalla Figura 83 è possibile evidenziare quanto segue:

- Allo 0% di rumore tutti i metodi individuano due centri. Il metodo  $\Gamma_2$  individua i centri laddove i vettori velocità si chiudono (Figura 83 “a”). Diversamente, i restanti metodi non si posizionano dove i vettori velocità si chiudono. Per il vortice  $(x_1, y_1)$  i centri con tutti i quattro metodi si posizionano in prossimità del centro geometrico ad una distanza pari a circa una cella dal centro valutato con il metodo  $\Gamma_2$ . Per il vortice  $(x_2, y_2)$  i centri non si posizionano né dove i vettori velocità si chiudono né dove è presente il centro geometrico. Per i metodi  $\Delta$  e  $Q$ , i cui centri sono coincidenti, la distanza dal centro valutato con  $\Gamma_2$  è poco più di una cella, invece con i metodi  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  i centri si posizionano a più di due celle di distanza da quelli valutati con  $\Gamma_2$ ;
- Al 20% solo il metodo  $\Gamma_2$  individua due soli vortici i restanti metodi ne individuano molteplici. Con il metodo  $\Gamma_2$  entrambi i centri valutati distano meno di mezza cella da quello ottenuto allo 0% (Figura 83 “b”). Con i restanti metodi invece la situazione si complica. Il centro  $(x_1, y_1)$  viene individuato con un errore inferiore a mezza cella dal metodo massimo del modulo della vorticità diversamente i restanti metodi individuano il centro in prossimità di quello geometrico commettendo errori pari a circa una cella. Il vortice  $(x_2, y_2)$ , invece, già al 20% di rumore non viene validato con efficacia dai metodi legati al gradiente di velocità infatti si commettono errori che vanno dalle 2 celle alle 7 celle. Inoltre, i centri valutati con  $\Delta$  e  $Q$  sono praticamente coincidenti. Dunque, solo il metodo  $\Gamma_2$  è in grado di valutare correttamente entrambi i vortici;
- Al 50% (Figura 83 “c”) utilizzando  $D = 15$  il metodo  $\Gamma_2$  individua due vortici, il centro  $(x_1, y_1)$  dista circa 1/4 di cella, mentre il centro  $(x_2, y_2)$  è praticamente coincidente con quello valutato allo 0%. I restanti metodi

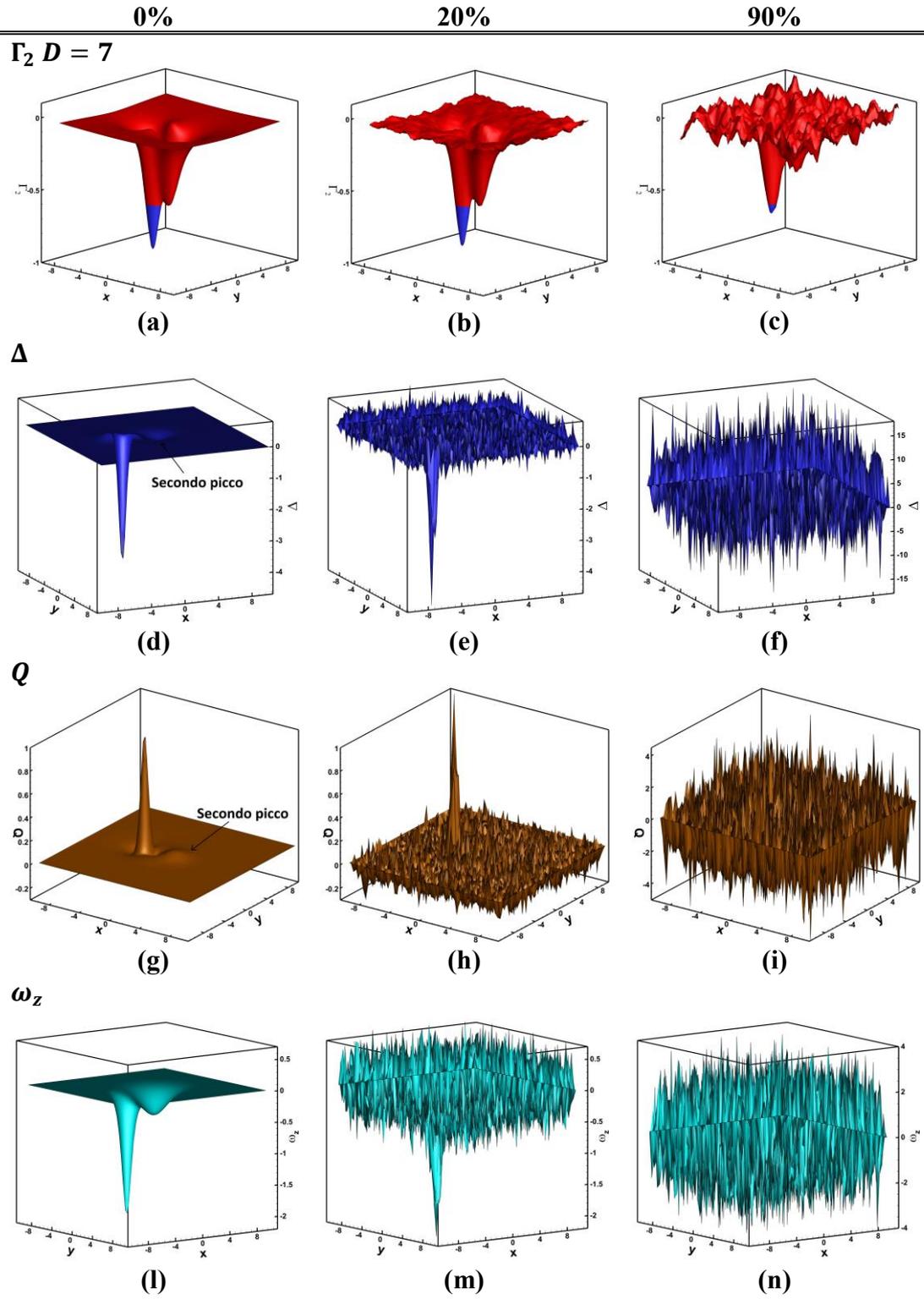
individuano molteplici vortici se ne selezionano soltanto due. I centri  $(x_1, y_1)$  con i metodi  $\Delta$ ,  $Q$  e  $\max|\omega_z|$  sono praticamente coincidenti con errore pari a circa  $3/4$  di cella mentre il metodo  $\max|\gamma|$  individua il centro ad una distanza di circa una cella. Diversamente il centro  $(x_2, y_2)$  non viene identificato con efficacia da nessuno dei metodi eccetto  $\Gamma_2$ . Dunque,  $\Gamma_2$  è l'unico metodo che riesce a valutare correttamente entrambi i vortici mentre i restanti valutano correttamente solo  $(x_1, y_1)$ ;

- Al 90% di rumore (Figura 83 “d”) il metodo  $\Gamma_2$  individua un solo vortice commettendo un errore di poco superiore a mezza cella. Diversamente gli altri metodi individuano molteplici vortici, imponiamo dunque di valutarne due. Il vortice  $(x_1, y_1)$  viene individuato con efficacia dai metodi  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  con errori rispettivamente pari ad una cella e mezza e poco più di una cella, nella Figura 83 “d” sono vicinissimi al centro valutato con  $\Gamma_2$ . Diversamente i metodi  $\Delta$  e  $Q$  commettono errori pari a 25 e 33 celle rispettivamente. Il vortice  $(x_2, y_2)$  invece non viene validato con efficacia da nessun metodo inoltre si osserva che i centri valutati con  $\Delta$ ,  $Q$  e  $\max|\omega_z|$  sono quasi coincidenti;

Dunque, il comportamento del metodo  $\Gamma_2$  è conservativo poiché esso individua i vortici solo laddove presenti commettendo errori contenuti, diversamente gli altri metodi individuano vortici anche dove non presenti.

Caso 26: singolo vortice  $r_1 = 7 \text{ pt}$

Nel caso 26 in assenza di rumore, il metodo  $\Gamma_2$  individua un solo vortice mentre i restanti metodi ne individuano due come evidenziato dalla Figura 84. Nel campo vettoriale è presente, però, un solo vortice poiché è stato costruito sommando due vortici corotanti che sono andati ad unirsi. In realtà, nella funzione  $\Gamma_2$  si evidenzia la presenza di un secondo picco che però non raggiunge la soglia stabilita e dunque non può essere validato come vortice. Tale secondo picco mette in evidenza il modo in cui il campo è stato costruito, ovvero come somma di due vortici. All'aumentare del rumore il metodo  $\Gamma_2$ , scelto il dominio opportuno, continua ad individuare un solo vortice mentre i metodi  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  ne individuano molteplici e non più soltanto due. Al 20% di rumore se si scegliessero delle soglie diverse da quelle considerate allo 0% sarebbe possibile individuare un solo vortice e non più due come avveniva in assenza di rumore. Differentemente al 90% di rumore, e analogamente al 50% di rumore anche se in modo meno accentuato, la scelta di una soglia differente risulta impraticabile poiché è difficile scegliere una soglia tale che venga individuato un solo vortice.



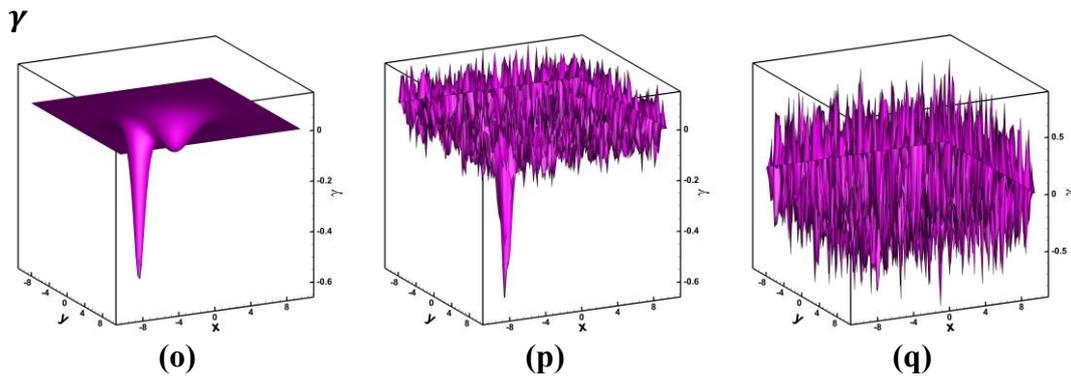


Figura 84: Andamenti funzioni  $\Gamma_2$   $D = 7$ ,  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\omega_z$  e  $\gamma$  al variare del rumore caso 26.

Poiché nel campo di velocità è presente un solo vortice nelle successive analisi prendiamo in considerazione solo il primo vortice che tutti i metodi individuano.

Tabella 41: Errori rispetto al centro valutato allo 0% con il metodo  $\Gamma_2$  al variare del rumore e per i metodi analizzati caso 26.

**Errori centri caso 26:  $r_2 = 3r_1$ ,  $\gamma_2 = 2\gamma_1$ ,  $\bar{d} = r_1 + r_2$**

Metodi		$\Gamma_2$	$\Delta < 0$	$Q > 0$	$ \omega_z  > 0.31$	$ \gamma  > 0.11$
0%	$(x_1, y_1)$	0%	129%	129%	103%	107%
20%	$(x_1, y_1)$	22%	133%	142%	187%	187%
50%	$(x_1, y_1)$	10%	176%	337%	257%	74%
90%	$(x_1, y_1)$	33%	1236%	1237%	1238%	978%

Si è considerato per costruire la Tabella 41:

- Per  $\Gamma_2$  si prendono i centri pesati. Facendo riferimento alla Tabella 32 si può affermare quanto segue. Al 20% di rumore l'errore minore è commesso con  $D = 3$  ma in realtà tutti i domini da  $D = 2$  a  $D = 7$  sono efficaci. Al 50% di rumore il minor errore è commesso con  $D = 7$  ma anche in questo caso i domini da  $D = 2$  a  $D = 7$  sono efficaci. Al 90% di rumore, invece, per  $D = 2$  e  $D = 3$  non si individua alcun vortice ma bisogna arrivare al  $D = 5$ , cioè un valore prossimo al numero di punti contenuti nel raggio ( $r_1 = 7$ ). Il dominio più efficace è  $D = 7$ . Dunque, scegliamo per qualsiasi livello di rumore il  $D = 7$  pari al numero di punti contenuti nel raggio ma anche  $D = 5$  è efficace;
- Per i metodi  $\Delta$  e  $Q$  i centri pesati al 20%, al 50% e al 90% di rumore;
- Per il metodo  $\max|\omega_z|$  i centri non pesati al 20%, al 50% e al 90% di rumore;
- Per il metodo  $\max|\gamma|$  i centri non pesati sia al 20% che al 90% mentre i centri pesati al 50% di rumore;

**Centri caso 26:  $r_2 = 3r_1, \gamma_2 = 2\gamma_1, \bar{d} = r_1 + r_2$**

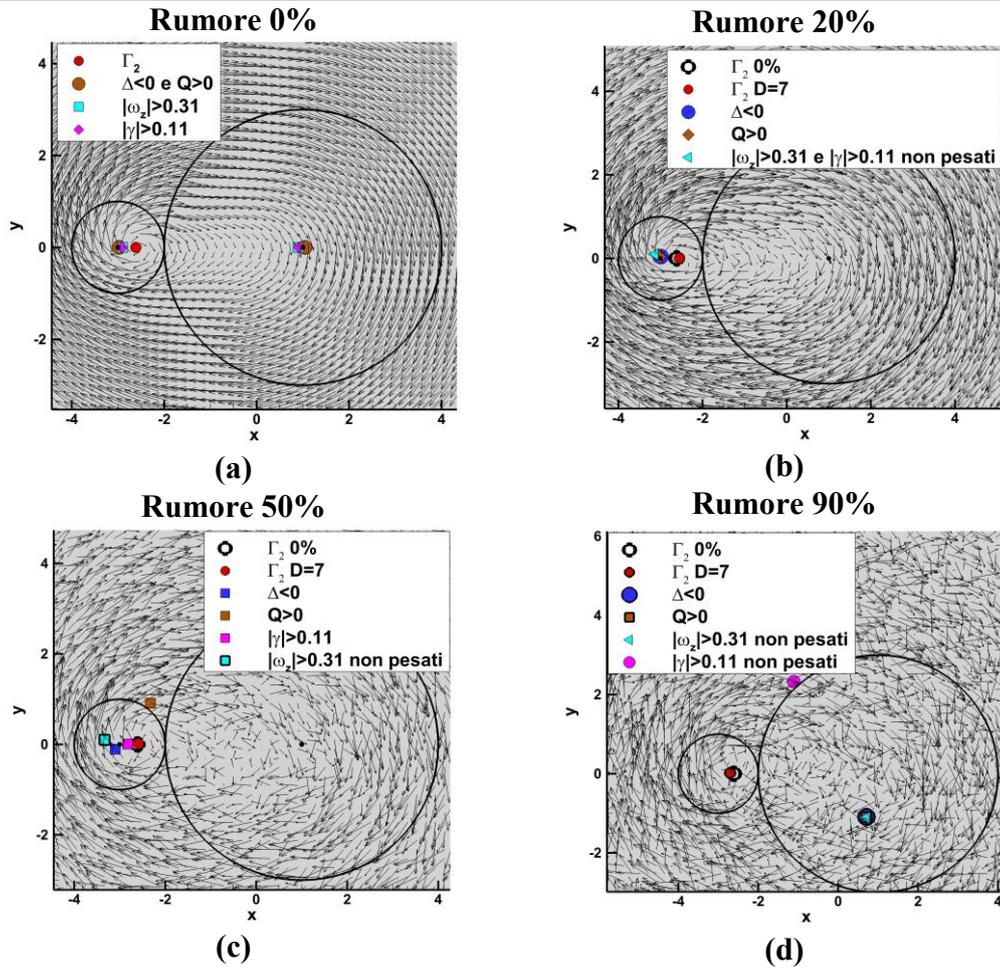


Figura 85: Centri caso 26 al variare del rumore con metodi  $\Gamma_2$ ,  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\max|\omega_2|$ ,  $\max|\gamma|$ .

Sia dalla Tabella 41 sia dalla Figura 85 è possibile evidenziare quanto segue:

- Allo 0% di rumore il metodo  $\Gamma_2$  individua un solo vortice con qualsiasi dominio mentre gli altri metodi individuano due vortici. Nel campo di moto è presente, in realtà, solo il vortice individuato dal metodo  $\Gamma_2$ , il cui centro si posiziona nel punto intorno al quale i vettori velocità si chiudono (Figura 85 “a”). Diversamente il centro del vortice  $(x_1, y_1)$ , realmente esistente, i restanti metodi lo posizionano in prossimità del centro geometrico ad una distanza di circa una cella da quello individuato con il metodo  $\Gamma_2$ ;
- Al 20% di rumore il metodo  $\Gamma_2$  continua ad individuare un solo vortice mentre i restanti metodi con le soglie scelte ne individuano molteplici. Consideriamo solo il primo vortice individuato da tutti i metodi ovvero quello a cui si associa il massimo o il minimo della funzione a seconda del metodo in analisi. Si osserva che, considerate le migliori individuazioni, i centri ottenuti con i metodi  $\Delta$  e  $Q$  distano quasi una cella e mezza dal centro allo 0% invece quelli

ottenuti con  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$ , entrambi non pesati e coincidenti, distano quasi due celle dal centro allo 0% (Figura 85 “b”). Il centro valutato con il metodo  $\Gamma_2$  è il più preciso poiché dista meno di 1/4 di cella;

- Al 50% di rumore il metodo  $\Gamma_2$  continua ad individuare un solo vortice mentre i restanti metodi con le soglie scelte ne individuano molteplici. Consideriamo solo il primo vortice individuato da tutti i metodi. Il centro viene individuato con maggior efficacia dal metodo  $\Gamma_2$  con un errore inferiore ad 1/4 di cella (Figura 85 “c”). Il metodo  $\max|\gamma|$  individua il centro commettendo un errore pari a circa 3/4 di cella, i restanti metodi commettono errori che vanno da una cella e mezza a tre celle. Sebbene il metodo  $\max|\gamma|$  sia in grado di individuare in modo ottimale il centro del vortice purtroppo non è in grado di quantificare il numero di vortici presenti diversamente dal metodo  $\Gamma_2$ ;
- Al 90% di rumore il metodo  $\Gamma_2$  continua ad individuare un solo vortice mentre i restanti metodi con le soglie scelte ne individuano molteplici. Consideriamo solo il primo vortice individuato da tutti i metodi. Il centro viene individuato con efficacia solo dal metodo  $\Gamma_2$  con un errore inferiore a mezza cella, diversamente i restanti metodi commettono errori che vanno dalle 10 celle ( $\max|\gamma|$ ) alle 12 celle ( $\Delta$ ,  $Q$  e  $\max|\omega_z|$ ) (Figura 85 “d”). i centri individuati con  $\Delta$ ,  $Q$  e  $\max|\omega_z|$  sono quasi perfettamente coincidenti. Dunque, solo  $\Gamma_2$  è in grado di individuare un solo vortice e di calcolarne il centro con efficacia;

Tenendo conto delle analisi effettuate in tutti i casi vi sono degli aspetti da tenere in considerazione:

1. In presenza di rumore i metodi  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  non sono in grado di individuare i vortici ma è necessario che l'operatore conosca il numero di vortici presenti e lo indichi diversamente dal metodo  $\Gamma_2$ . L'imposizione del numero di vortici da calcolare, nei casi reali, è di difficile applicazione poiché il numero di vortici nelle immagini reali non è noto a priori;
2. I metodi del massimo del modulo della vorticità e della circolazione necessitano, oltre che del numero di vortici, anche di una soglia opportuna che varia caso per caso e che non è sempre di facile individuazione. Diversamente i metodi  $\Gamma_2$ ,  $Q$  e  $\Delta$  presentano soglie stabilite dalla teoria. La scelta di una soglia ottimale nelle immagini reali è di difficile applicazione perché varia per ogni campo di velocità;
3. Le soglie zero per i metodi  $\Delta$  e  $Q$  al variare del rumore non risultano più ottimali, purtroppo non essendo funzioni adimensionali anche la scelta di una soglia diversa da zero comporterebbe un'analisi caso per caso diversamente dal metodo  $\Gamma_2$  in cui seppur si voglia cambiare il valore di soglia essa al più può raggiungere valore unitario essendo la funzione  $\Gamma_2$  adimensionale;
4. Per i metodi  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\max|\omega_z|$  e  $\max|\gamma|$  non è detto che passando dal centro non pesato al centro pesato l'errore diminuisca diversamente dal metodo  $\Gamma_2$ ;

5. Il dominio  $D$  ottimale per calcolare la funzione  $\Gamma_2$  con cui individuare i vortici deve essere all'incirca pari al valore del numero di punti contenuti nel vortice stesso;
6. Il metodo  $\Gamma_2$  in presenza di forti rumori è in grado di identificare solo i vortici coerenti ovvero la cui struttura non è stata completamente distrutta dal rumore. Dunque, esso riduce l'individuazione dei vortici presenti all'aumentare del rumore mentre i restanti metodi ne aumentano l'individuazione e calcolano i centri in posizioni completamente errate;

#### 6.4.5 Andamento velocità tangenziali

Nelle analisi effettuate si è visto come valutando gli errori in funzione del centro ottenuto con il metodo  $\Gamma_2$  allo 0% di rumore ci sono errori prossimi ad 1/4 di cella, a 1/2 di cella e a 1 cella. Alla luce di ciò è necessario comprendere come varia l'andamento delle velocità tangenziale al variare dei diversi errori presenti. Si prende in considerazione il vortice  $(x_1, y_1)$  relativo al caso 23.

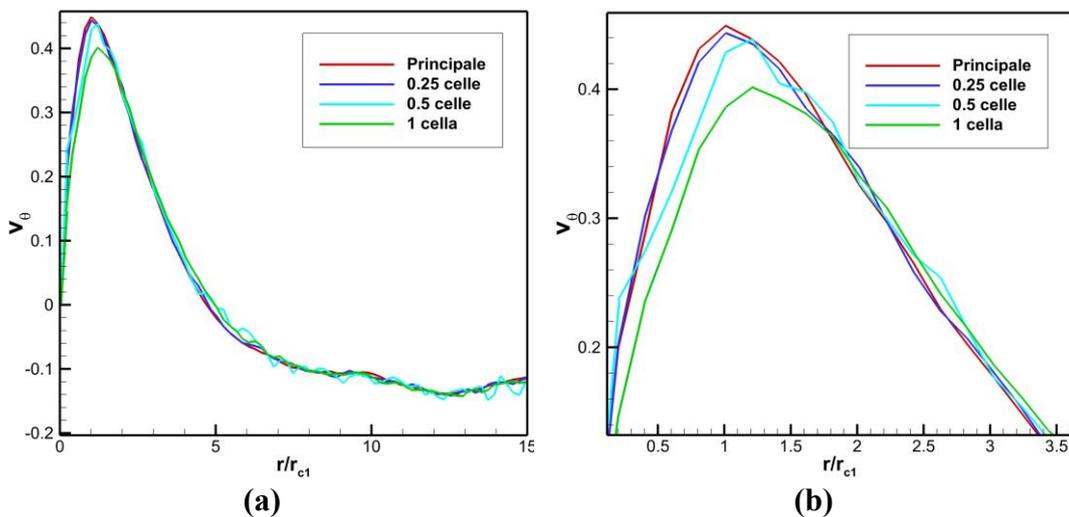


Figura 86: Andamento velocità tangenziale per diversi errori 0.25 celle, 0.5 celle e 1 cella (a) e zoom di tale andamento (b).

Nella legenda in Figura 86 si intende per:

- Principale: il vortice  $(x_1, y_1)$  allo 0% di rumore ottenuto con  $D = 2$ ;
- Errore 0.25 celle: il vortice  $(x_1, y_1)$  al 20% di rumore ottenuto con  $D = 3$ ;
- Errore 0.5 celle: il vortice  $(x_1, y_1)$  al 50% di rumore ottenuto con  $D = 3$ ;
- Errore 1 cella: il vortice  $(x_1, y_1)$  al 20% di rumore ottenuto con  $D = 12$ ;

Si evidenzia dalla Figura 86 come all'aumentare dell'errore commesso l'andamento si allontana da quello ottenuto allo 0% di rumore. È possibile quantificare tale comportamento considerando gli errori commessi sulla velocità tangenziale massima

e sul raggio del vortice. In assenza di rumore  $\max(v_{\theta_1}) = 0.449218 [-]$  mentre  $r_{c_1} = 1.0101 [-]$ , si valutano gli errori percentuali come di seguito:

$$\varepsilon(\max(v_{\theta}))\% = \left| \frac{\max(v_{\theta}) - 0.449218}{0.449218} \right| \%$$

$$\varepsilon(r_c)\% = \left| \frac{r_c - 1.0101}{1.0101} \right| \%$$

*Tabella 42: Errori percentuali del raggio del vortice e della velocità tangenziale massima al variare dell'errore commesso nel calcolare il centro del vortice.*

<b>Distanza</b>	0.25 celle	0.5 celle	1 cella
<b><i>err</i>(<math>r_c</math>)%</b>	0%	20%	20%
<b><i>err</i>(<math>\max(\bar{v}_{\theta})</math>)%</b>	1.2%	2.5%	11%

I dati sulla velocità tangenziale massima, presenti in Tabella 42, indicano un errore trascurabile sia per errori pari a 0.25 celle che per errori pari a 0.5 celle, invece divengono più significativi per errori pari ad una cella ma rimangono ugualmente contenuti.

# 7 identificazione dei vortici nella scia del rotore

In questo capitolo si analizzano i vortici di estremità che si staccano dalle pale del rotore di un elicottero utilizzando i diversi criteri di identificazione dei vortici. Si pone particolare attenzione sul metodo  $\Gamma_2$  e si osserva come solo questo metodo sia in grado di ottenere una distribuzione dei centri dei vortici concentrata nella zona dello shear layer.

I vortici di estremità sono stati misurati nella zona immediatamente sotto il disco del rotore per poi allontanarsi verticalmente fino ad un raggio di distanza. Per le misure il sistema di riferimento è stato fissato al centro del mozzo del rotore. L'asse  $z$  coincide con l'asse di rotazione ed è diretto verso l'alto, l'asse  $x$  è diretto lungo la pala e complanare al piano di misura PIV e l'asse  $y$  è normale al piano  $xz$  e diretto verso l'interno del foglio (Figura 87).

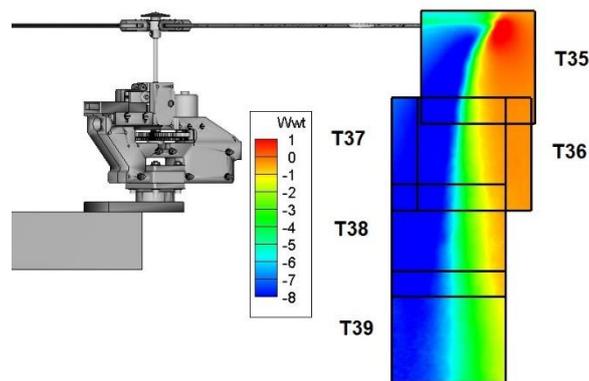


Figura 87 : Posizione delle zone di misura PIV e sistema di riferimento adottato [22].

Tabella 43: Set di dati e parametri da settare per l'analisi delle immagini PIV contenenti i vortici nella scia del rotore.

		<b>T35</b>	<b>T36</b>	<b>T37</b>	<b>T38</b>	<b>T39</b>
<b><math>x/R</math></b>	da	0.76	0.76	0.68	0.68	0.68
	a	1.08	1.08	1.00	1.00	1.00
<b><math>z/R</math></b>	da	0.042	-0.21	-0.21	-0.54	-0.71
	a	-0.28	-0.53	-0.53	-0.78	-1.03
<b><math>D</math></b>		10	10	10	10	10
<b>Soglia <math>\Gamma_2</math></b>		$2/\pi$	$2/\pi$	$2/\pi$	$2/\pi$	$2/\pi$
<b>Soglia <math>\Delta</math></b>		0	0	0	0	0
<b>Soglia <math>Q</math></b>		0	0	0	0	0

<b>Numero massimo vortici</b>	3	3	3	3	3
<b>Raggio massimo [m]</b>	0.015	0.015	0.01	0.008	0.008

Per procedere all'analisi è necessario settare i parametri principali per l'avvio del software. I casi riportati in Tabella 43 e mostrati in Figura 87, si riferiscono a regioni riprese a diverse distanze dal disco del rotore e quindi caratterizzate da campi di moto molto diversi tra loro. Il campo di velocità nelle immediate vicinanze del rotore è caratterizzato dalla velocità discendente indotta dalle pale e dai vortici di estremità, allontanandosi la diffusione dei vortici e le loro interazioni rendono il campo di moto più turbolento e caotico con la presenza di molteplici strutture vorticosi. Questo ha guidato la scelta di impostare parametri diversi a seconda delle tipologie di flusso.

Si osserva che l'unico parametro che cambia è il raggio massimo all'interno del quale ricercare il picco della velocità tangenziale. Ciò viene fatto poiché in presenza di una zona turbolenta, caratterizzata da molteplici vortici, si rischia di individuare il massimo della velocità tangenziale legato ad un altro vortice.

Effettuata la scelta dei parametri si passa all'analisi dei centri ponendo particolare attenzione su due casi:

- Campo di moto a ridosso del disco del rotore caratterizzato dal passaggio pala nell'immagine PIV;
- Campo di moto alla distanza di circa 1 R dal disco del rotore, dove i vortici di estremità cominciano ad interagire tra loro generando un flusso turbolento;

## 7.1 Passaggio pala

Un aspetto tipico che va analizzato nel caso di misurazioni su rotori o anche eliche e mulini a vento risulta il passaggio della pala nell'area di misurazione. La presenza della pala nelle immagini PIV è causa di forti riflessioni che, se non adeguatamente trattate, inducono un gran numero di vettori spuri che come abbiamo visto influenzano grandemente la correttezza dei metodi basati sul gradiente di velocità e del massimo della vorticità e della circolazione. Ci sono tecniche di mascheramento che consentono la rimozione del corpo dall'immagine PIV ma richiedono complessi software di riconoscimento degli oggetti e molto tempo all'operatore per scegliere corretti valori di soglia. Dunque, partendo da questo presupposto, vediamo come i diversi metodi di individuazione del centro del vortice si comportano quando l'immagine PIV è influenzata da un passaggio pala (Figura 88 "a").

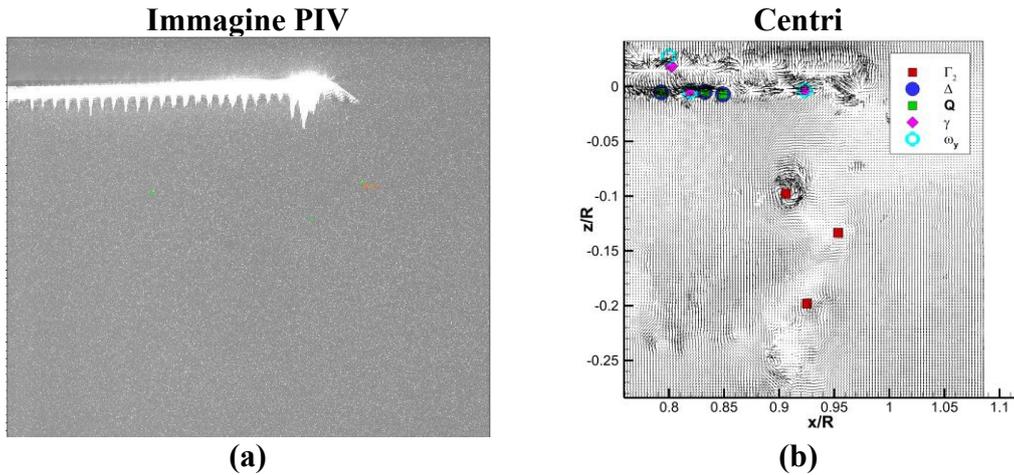
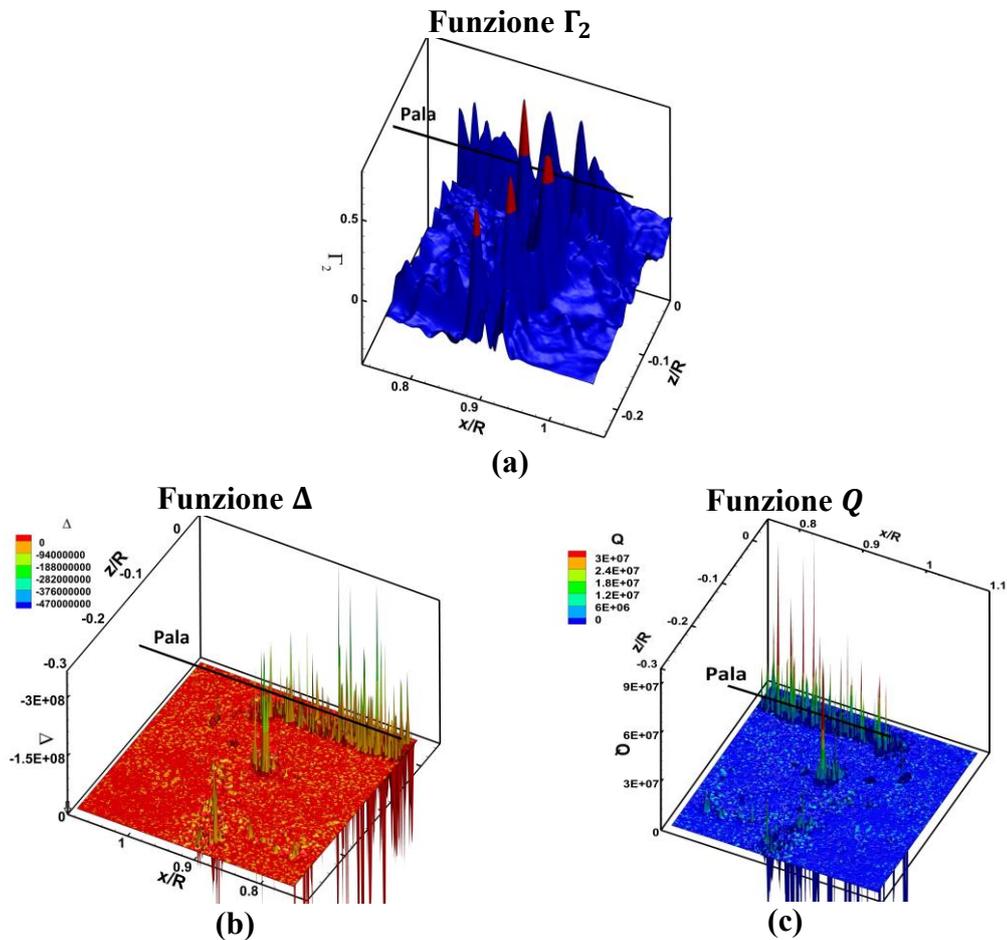


Figura 88: Immagine PIV caratterizzata dal passaggio pala (a) e campo di velocità con i centri valutati con i metodi  $\Gamma_2$ ,  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\max|\omega_y|$  e  $\max|\gamma|$  (b) [26].

Come ben evidenziato dalla Figura 88 “b” si evince come i metodi  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\max|\omega_y|$  e  $\max|\gamma|$  individuano i vortici laddove è presente il passaggio pala, diversamente il metodo  $\Gamma_2$  è in grado di identificare i vortici di estremità e calcolarne il relativo centro. Dunque, vettori spuri generati dalla presenza del passaggio pala invalidano l’applicazione dei metodi basati sul gradiente di velocità. L’aspetto è fortemente evidenziato anche dall’andamento delle funzioni  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\omega_y$ ,  $\gamma$  e  $\Gamma_2$  (Figura 89).



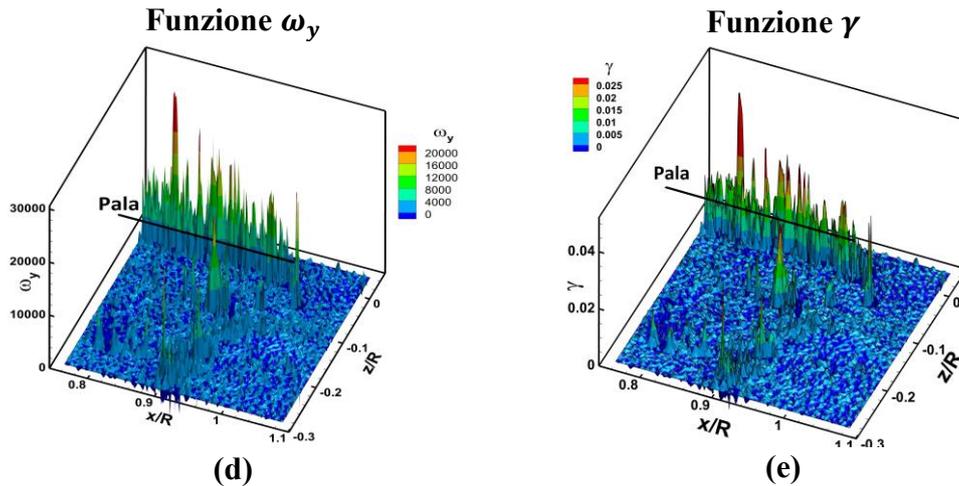


Figura 89: Funzioni  $\Gamma_2$   $D = 10$  (a),  $\Delta$  (b),  $Q$  (c),  $\omega_y$  (d) e  $\gamma$  (e) per il campo di velocità con il passaggio pala.

Si evidenzia come tutte le funzioni presentano dei forti picchi nella zona del passaggio pala ma come questi picchi siano importanti per tutti i metodi eccetto il metodo  $\Gamma_2$ . I picchi della funzione  $\Gamma_2$  che individuano il passaggio pala non raggiungono mai il valore di soglia prestabilito per cui non possono essere validati come vortici. Inoltre, si evidenzia la presenza, nella funzione  $\Gamma_2$ , di quattro zone che superano la soglia stabilita a  $2/\pi$  sebbene nell'immagine che presenta i centri ne siano presenti solo tre (Figura 88 "b"). Questo è legato all'imposizione effettuata di dover individuare al più tre vortici che sono effettivamente quelli che presentano picchi maggiori. In realtà anche nelle restanti funzioni sono ben evidenti i picchi associati ai reali centri, essi purtroppo sono minori rispetto ai picchi associati al passaggio pala per cui non possono essere validati come vortici se si impone di calcolarne soltanto tre.

## 7.2 Regione con flusso turbolento

Si considerino quelle regioni che presentano un elevato livello di turbolenza generato dall'interazione tra i vortici di estremità.

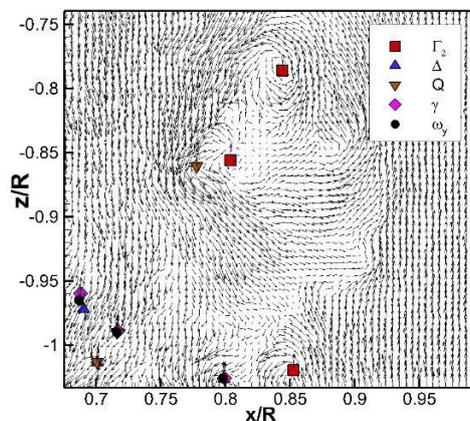


Figura 90: Campo di velocità con relativi centri valutati con i metodi  $\Gamma_2$ ,  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\max|\omega_y|$  e  $\max|\gamma|$ .

Si seleziona un'immagine posta ad una distanza di circa un raggio a valle del disco del rotore (immagine T39) e si analizza come i differenti metodi di individuazione si comportano (Figura 90).

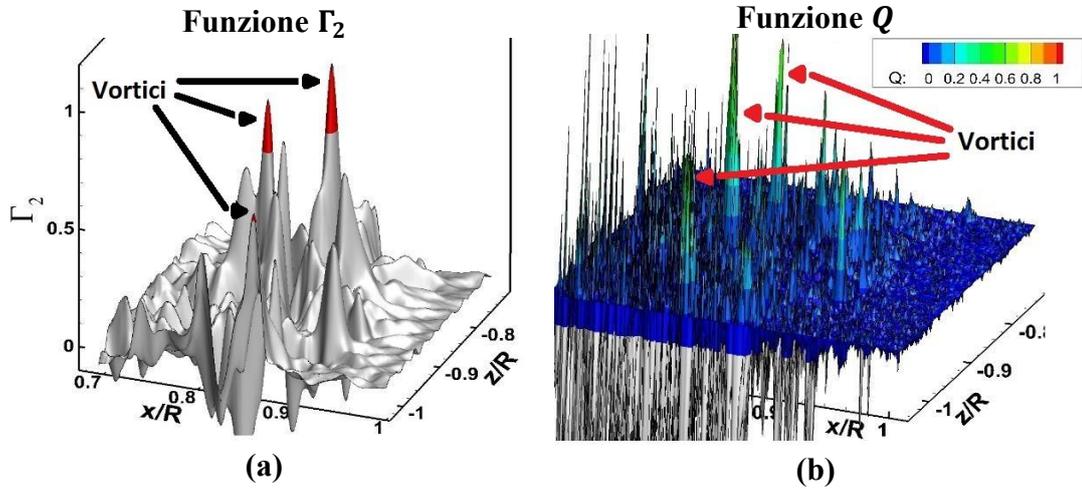
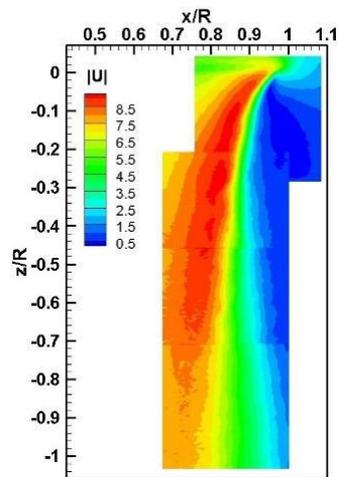


Figura 91: Funzioni  $\Gamma_2$   $D = 10$  (a) e  $Q$  (b) per il campo di velocità turbolento.

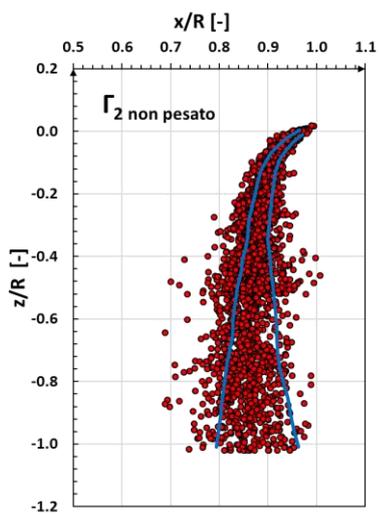
Sebbene i metodi  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\max|\omega_y|$  e  $\max|\gamma|$  presentano dei picchi in corrispondenza della posizione dei vortici individuati dal metodo  $\Gamma_2$  non riescono a validarli come tali perché sono superati in intensità da picchi spuri. Questo è evidenziato nella funzione  $Q$  (Figura 91 “b”), analogamente in tutte le altre, in cui i tre picchi associati ai vortici sono inglobati in picchi molto più elevati, tagliati all’interno dell’immagine. Diversamente, la funzione  $\Gamma_2$  presenta tre picchi ben evidenti che superano la soglia  $2/\pi$  (in rosso in Figura 91). Nella Figura 90 sono rappresentati i centri dei vortici con i diversi metodi, da questa si evidenzia come la maggior parte dei centri (ovvero dei picchi delle funzioni) per i diversi metodi, eccetto il metodo  $\Gamma_2$ , si posizionano in basso a sinistra nel campo di moto.

### 7.3 Distribuzione vortici di estremità

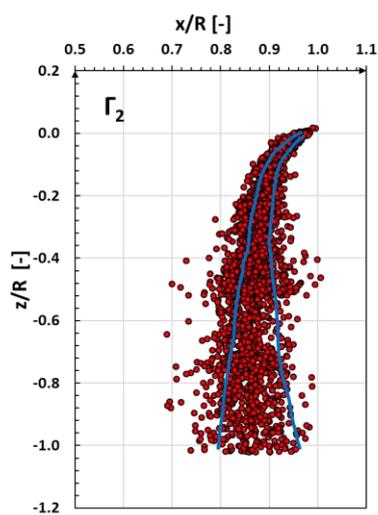
Analizzando tutte le immagini istantanee è possibile tracciare l’andamento dei centri dei vortici di estremità utilizzando i diversi metodi di individuazione (Figura 92).



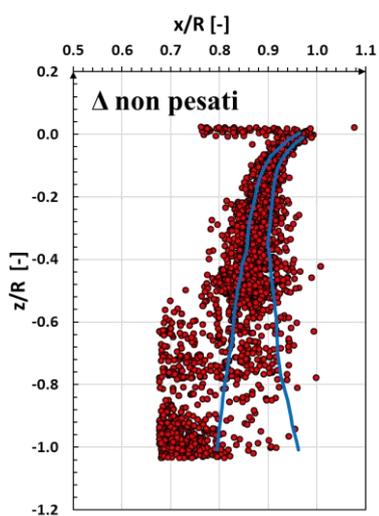
(a)



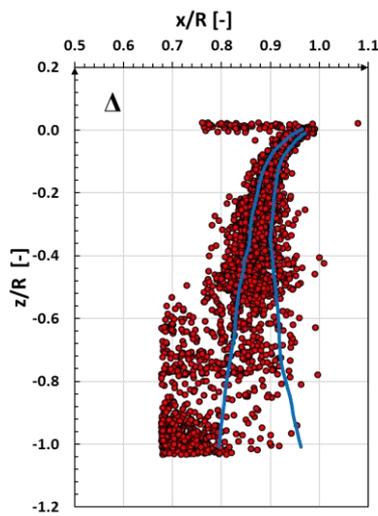
(b)



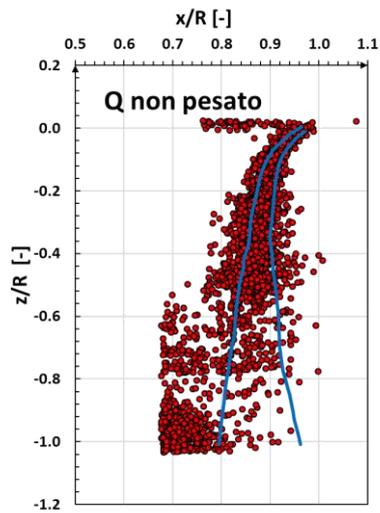
(c)



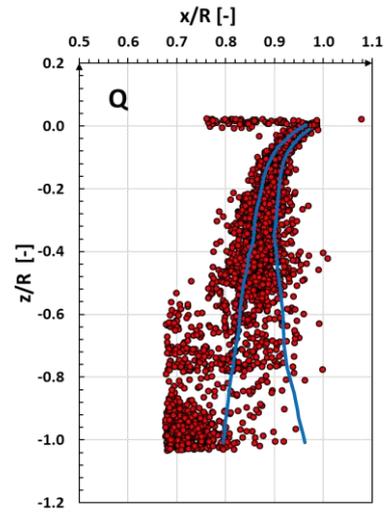
(d)



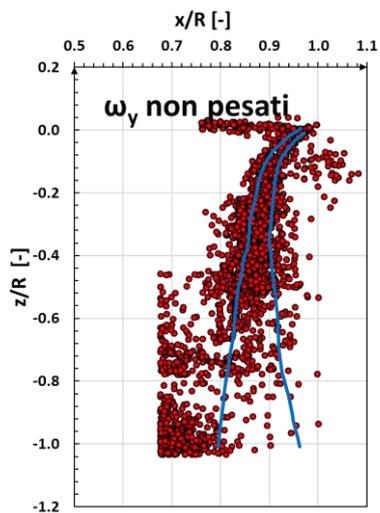
(e)



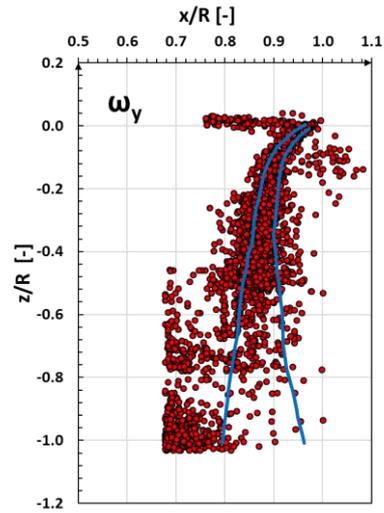
(f)



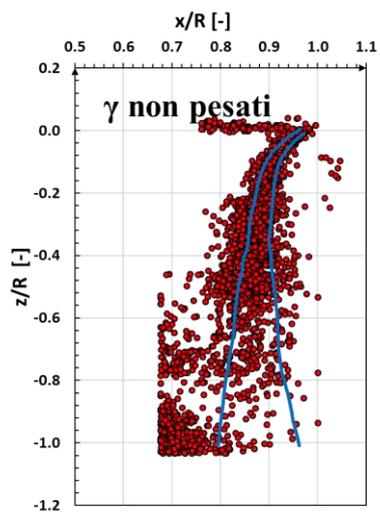
(g)



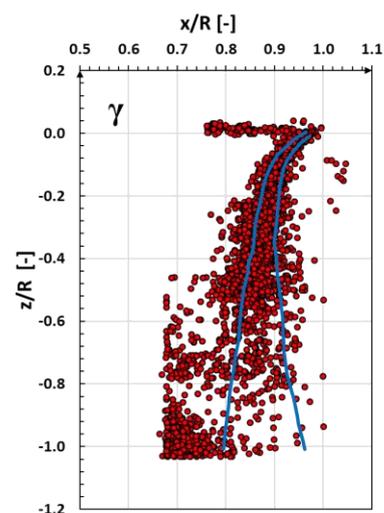
(h)



(i)



(l)



(m)

Figura 92: Velocità media di downwash (a) centri dei vortici di estremità calcolati con i metodi  $\Gamma_2$  non pesati (b),  $\Gamma_2$  pesati (c),  $\Delta$  non pesati (d),  $\Delta$  pesati (e),  $Q$  non pesati (f),  $Q$  pesati (g),  $\max|\omega_y|$  non pesati (h),  $\max|\omega_y|$  pesati (i),  $\max|\gamma|$  non pesati (l),  $\max|\gamma|$  pesati (m) [26].

La Figura 92 “a” mostra la velocità media di downwash del rotore da cui si ricava lo shear layer ovvero la regione tra la velocità interna alla scia del rotore e l’aria esterna indisturbata. Le immagini in Figura 92 mostrano gli andamenti dei centri pesati e non pesati per ogni metodo tenendo come riferimento lo shear layer. Si osserva come gli andamenti ottenuti a fissato metodo e con centri pesati e non pesati risultano molto simili tra di loro. Confrontando, invece, gli andamenti ottenuti con i diversi metodi è ben evidente come sia il metodo  $\Gamma_2$  il più robusto e affidabile. Tre sono gli aspetti che ci consentono di affermare ciò:

1. La distribuzione dei centri dei vortici ottenuta con il metodo  $\Gamma_2$  non presenta centri in corrispondenza del passaggio pala  $z/R = 0$ ;
2. La distribuzione ottenuta con il metodo  $\Gamma_2$  presenta centri confinati nel contorno dello shear layer;
3. La distribuzione ottenuta con il metodo  $\Gamma_2$  non presenta centri nell’angolo in basso a sinistra al di fuori dello shear layer;

# 8 Conclusioni

In funzione del mio obiettivo, ovvero proporre un metodo ingegneristico in grado di identificare e caratterizzare le strutture vorticose, si è studiata la teoria dei metodi per l'identificazione dei vortici attraverso la letteratura. La bontà di alcuni di questi metodi, quali  $\Gamma_2$ ,  $\Delta$ ,  $Q$ , massimo del modulo della vorticità e massimo del modulo della circolazione, è stata testata tramite immagini sintetiche e reali sfruttando un codice di calcolo appositamente creato in Matlab.

Le immagini sintetiche sono state generate in modo tale da cercare di ricalcare caratteristiche reali come la presenza di vettori spuri, introducendo un certo livello di rumore, e la presenza di più vortici all'interno di un campo.

Nel caso di immagini sintetiche con singolo vortice si sono considerate diverse risoluzioni  $\Delta L/r_c = [0.5, 0.2, 0.1, 0.05]$ . Per ognuna di esse si è fatto variare il dominio di calcolo della funzione  $\Gamma_2$  ( $D = 2, D = 3, D = 5, D = 6, D = 7$  e  $D = 10$ ) osservando che i centri ottenuti con i diversi domini funzionano tutti efficacemente ma il dominio  $D = 2$  è il più conveniente poiché, a fissata risoluzione, è quello che commette un errore minore inoltre è anche quello che presenta minor tempo di calcolo. Analogamente anche gli altri metodi individuano con efficacia i vortici. I centri così individuati, con tutti i metodi, sono quasi perfettamente coincidenti tra di loro e con il centro geometrico. Infatti, osservando, a fissata risoluzione, l'andamento delle velocità tangenziali si evidenzia una perfetta coincidenza degli andamenti con tutti i metodi. Differentemente all'aumentare della risoluzione spaziale l'andamento della velocità tangenziale risulta sempre più vicino alla curva teorica, il che mette in evidenza come una migliore risoluzione consenta di caratterizzare in modo più efficiente i vortici.

Successivamente si analizza il singolo vortice di Vatistas con risoluzione  $\Delta L/r_c = 0.5$  e  $\Delta L/r_c = 0.1$  con livello di rumore pari al 20%, al 70% e al 90% della velocità tangenziale massima. Per entrambe le risoluzioni si fa variare il dominio di calcolo della funzione  $\Gamma_2$  e si osserva che il dominio più efficace è quello pari al numero di punti contenuti nel raggio del vortice, rispettivamente 2 e 10 punti per le risoluzioni scelte, poiché grazie ad esso si individua un solo vortice e il centro ottenuto è quello che presenta il minor errore. Differentemente i metodi  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\max|\omega|$  e  $\max|\gamma|$  individuano molteplici vortici anche laddove non presenti. Imponendo di individuare un solo vortice si evidenzia come all'aumentare del rumore commettono errori sempre più significativi e come sia il metodo  $\Gamma_2$  quello più efficace.

Poiché nelle immagini reali difficilmente si incontra un singolo vortice perfettamente circolare sono stati generati 54 campi di velocità posizionando due vortici di Vatistas a diverse distanze e con raggi e intensità variabili. Analizzandoli si evidenzia come in 23 casi siano presenti doppi vortici e in 31 casi un solo vortice non perfettamente circolare. Si effettua uno studio dei 54 casi, in assenza di rumore, con il metodo  $\Gamma_2$  con  $D = 2$  e  $D = 5$ . Si osserva che per singoli vortici il funzionamento ottimale è garantito dal  $D = 2$  eccetto per due casi che presentano vortici fortemente ellittici. In tali casi il

$D = 5$  funziona in maniera più efficace. In presenza di due vortici il funzionamento ottimale è garantito dal  $D = 2$  sebbene il dominio  $D = 5$  o coincide con il  $D = 2$  o dista al più mezza cella. I restanti metodi invece individuano vortici anche laddove non presenti nel campo di moto. Inoltre, solo il metodo  $\Gamma_2$  consente, sempre, di valutare i centri laddove i vettori velocità si chiudono. Quindi si evidenzia un funzionamento ottimale del metodo  $\Gamma_2$  già in assenza di rumore.

Per effettuare l'analisi in presenza di rumore si sono scelti 9 casi tra i 54 analizzati in assenza di rumore. Analizzando questi casi variando il dominio di calcolo  $D$  della funzione  $\Gamma_2$  si è visto che nei casi in cui sono presenti entrambi i vortici il dominio più efficace è quello prossimo al valore dei punti contenuti in ognuno di quei vortici. Invece, nel caso in cui sia presente un solo vortice l'analisi effettuata sul singolo vortice continua a valere ma con alcune restrizioni; ovvero il dominio  $D$ , che consente di individuare il vortice con maggiore efficacia, non è più quello pari al numero di punti contenuti nel raggio ma è prossimo a quel valore. Malgrado ciò, scegliendo il dominio  $D$  pari al numero di punti contenuti nel raggio l'errore risulta sempre contenuto. L'influenza del rumore, poi, determina forti oscillazioni nelle funzioni  $\Delta$ ,  $Q$ , vorticità e circolazione che non sono più in grado di identificare i vortici in maniera univoca ma sta all'operatore indicare il numero di vortici da determinare. Pur facendo ciò, per elevati livelli di rumore, tali metodi commettono errori molto alti rispetto al metodo  $\Gamma_2$ . Dunque, sia nell'individuazione che nel calcolo dei centri il metodo  $\Gamma_2$  funziona in maniera più efficace.

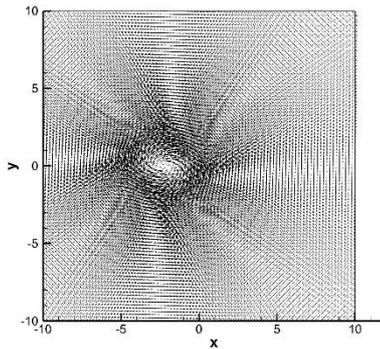
A seguito di questa prima analisi, tenendo conto dei problemi riscontrati, si sono analizzate una serie di immagini reali riguardanti i vortici di estremità che si staccano dalle pale del rotore di un elicottero. Si pone particolare attenzione su due casi: un campo di moto caratterizzato dal passaggio pala nell'immagine PIV e un campo di moto in cui i vortici interagendo generano un flusso turbolento. Dall'analisi del primo campo si evidenzia come solo il metodo  $\Gamma_2$  sia in grado di individuare i vortici dove presenti, diversamente i restanti metodi individuano i vortici in corrispondenza del passaggio pala data la presenza di numerosi vettori spuri. Anche nel campo di moto turbolento si ha un comportamento ottimale del metodo  $\Gamma_2$  rispetto ai restanti i cui centri vanno a posizionarsi in basso a sinistra nell'immagine. Alla luce di quanto visto in questi due casi analizzando la distribuzione dei vortici e con i metodi  $\Delta$ ,  $Q$ ,  $\max|\omega_y|$  e  $\max|\gamma|$  si evidenziano numerosi vortici nella zona del passaggio pala e per flusso turbolento una concentrazione di vortici nelle immagini in basso a sinistra. Diversamente, ciò non si verifica con il metodo  $\Gamma_2$ , infatti la distribuzione dei centri dei vortici risulta confinata nel contorno dello shear layer.

Alla luce di tali valutazioni, si può affermare che il metodo  $\Gamma_2$ , tra tutti quelli analizzati, è quello più adeguato e sicuro per individuare la presenza di vortici in campi di moto ottenuti da misure PIV. Ciò ha quindi permesso di sviluppare presso il CIRA un'interfaccia grafica che consente di individuare e caratterizzare i vortici utilizzando il solo metodo  $\Gamma_2$ .

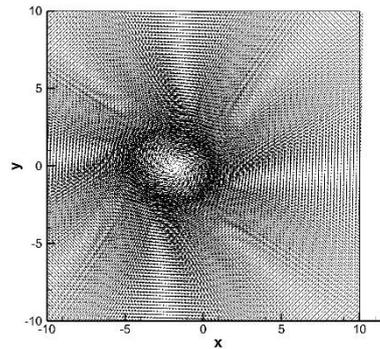
# Appendice A

Nella seguente appendice sono riportati tutti i 54 campi di velocità ottenuti dalla composizione di due vortici di Vatisas.

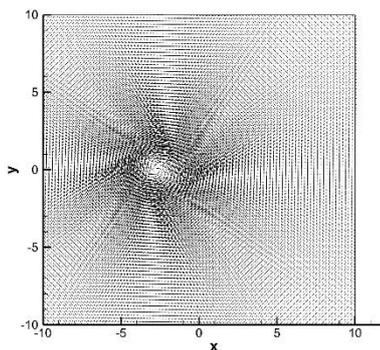
Caso 1



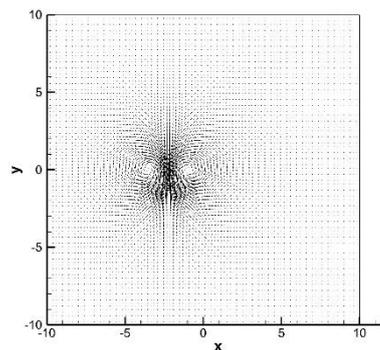
Caso 2



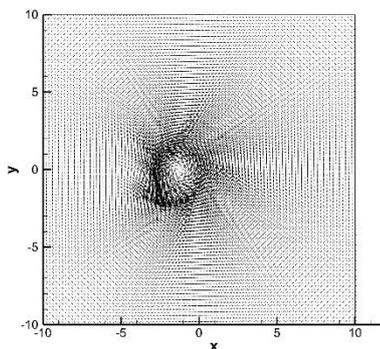
Caso 3



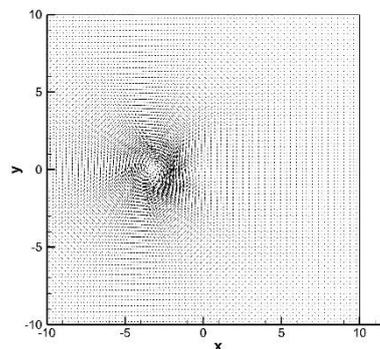
Caso 4



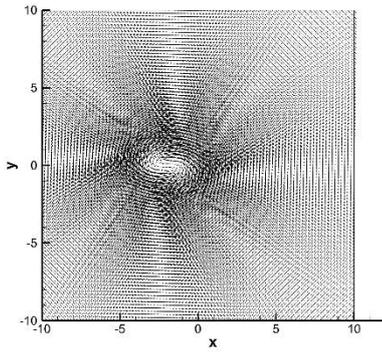
Caso 5



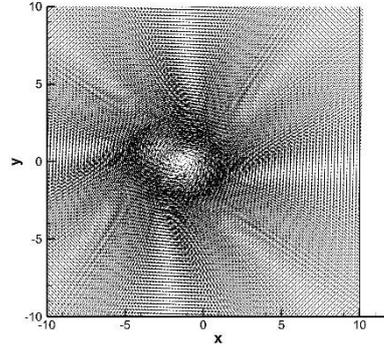
Caso 6



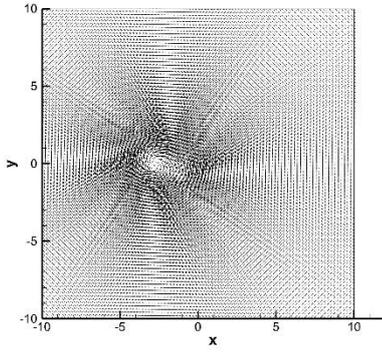
Caso 7



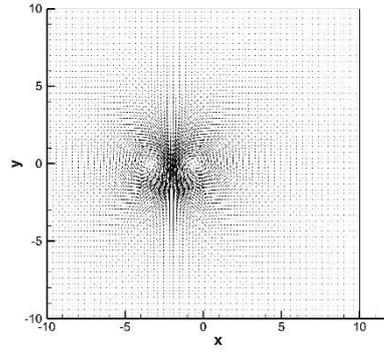
Caso 8



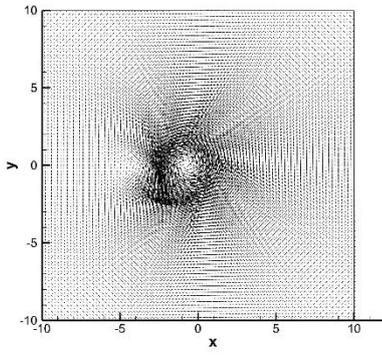
Caso 9



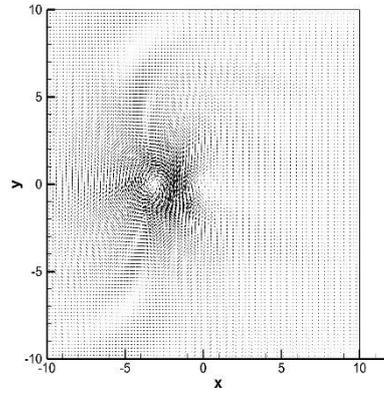
Caso 10



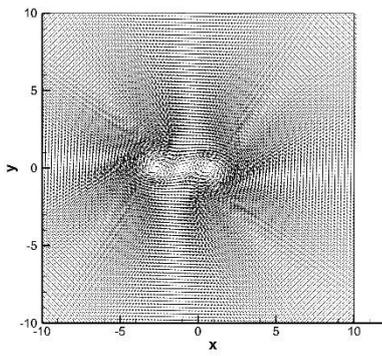
Caso 11



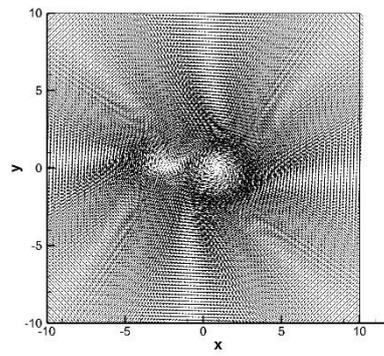
Caso 12



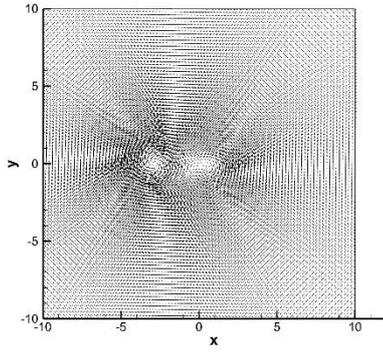
Caso 13



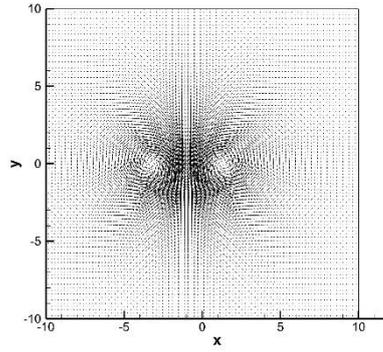
Caso 14



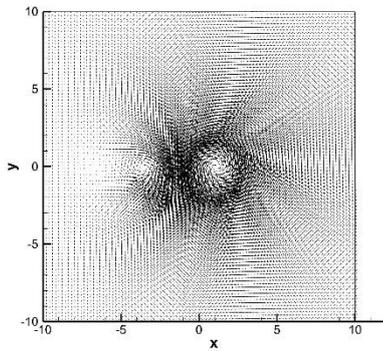
Caso 15



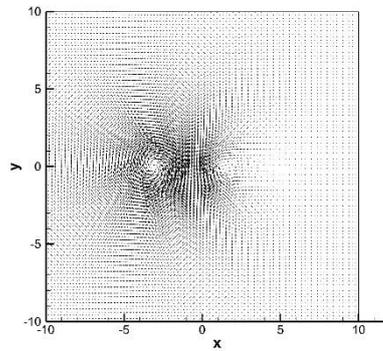
Caso 16



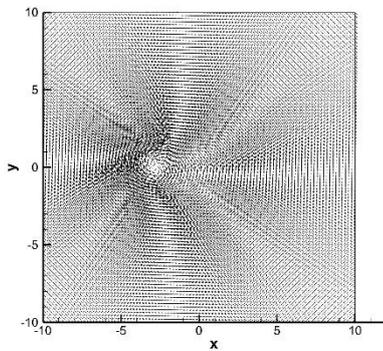
Caso 17



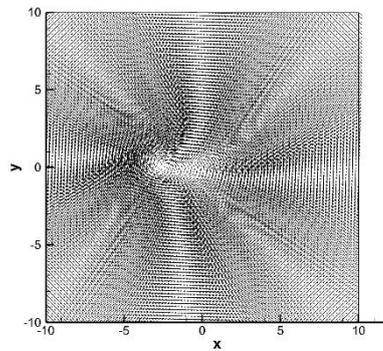
Caso 18



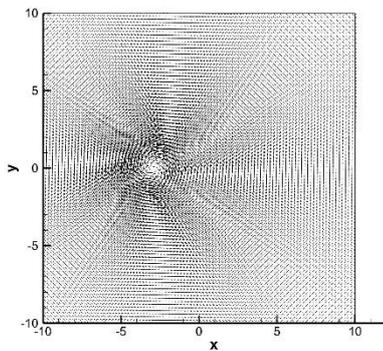
Caso 19



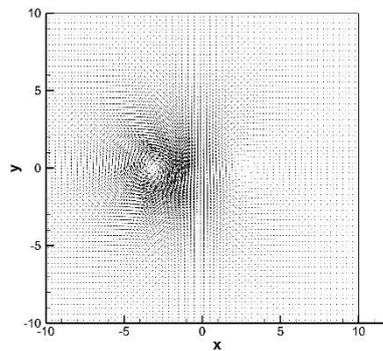
Caso 20



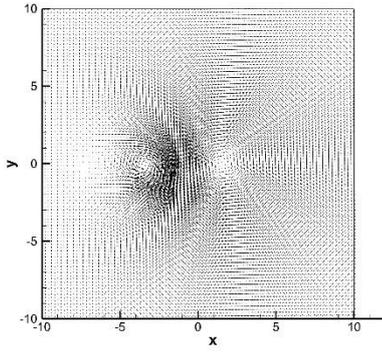
Caso 21



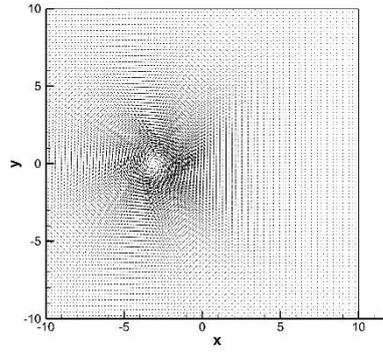
Caso 22



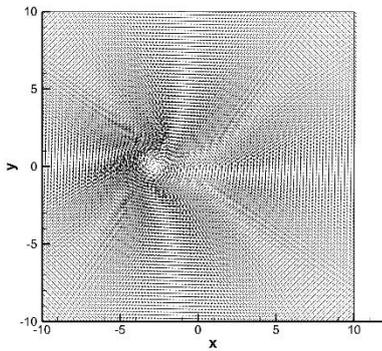
Caso 23



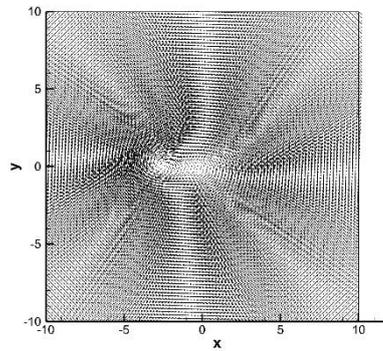
Caso 24



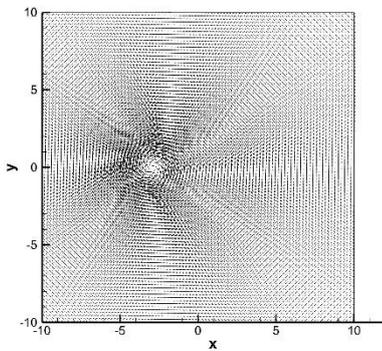
Caso 25



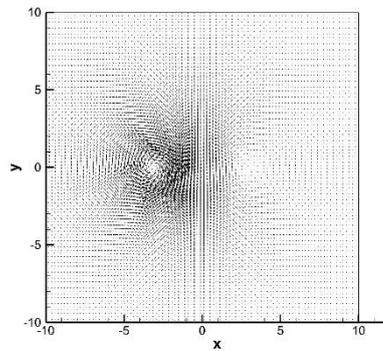
Caso 26



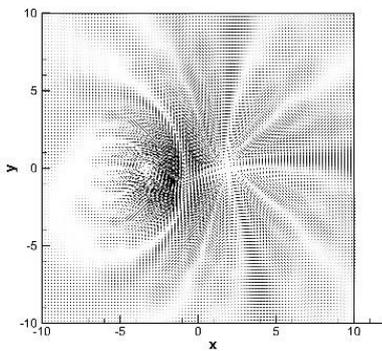
Caso 27



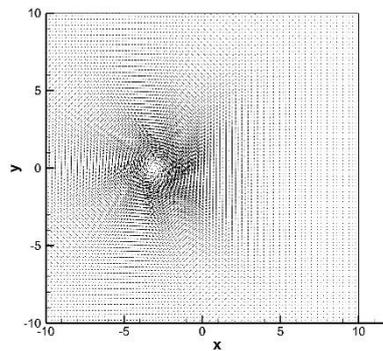
Caso 28



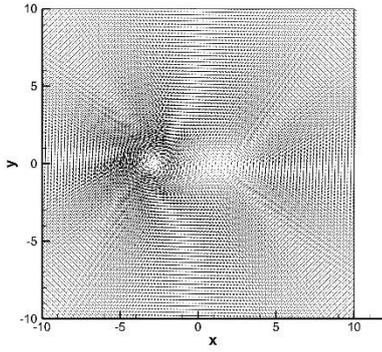
Caso 29



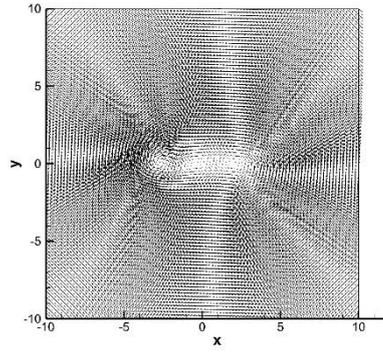
Caso 30



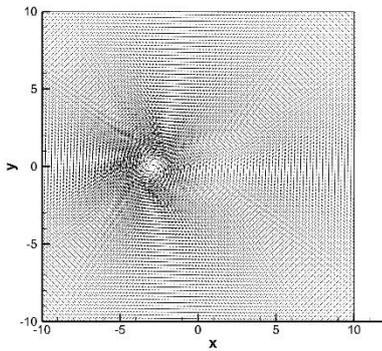
Caso 31



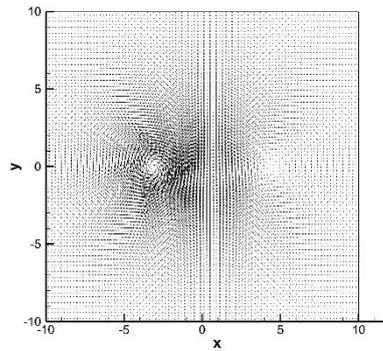
Caso 32



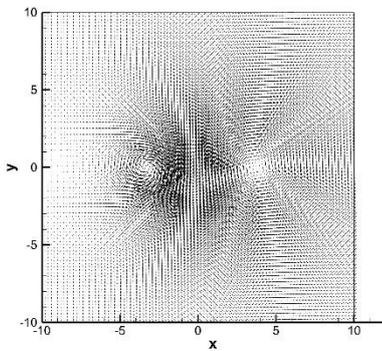
Caso 33



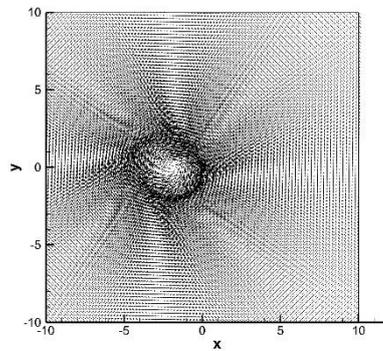
Caso 34



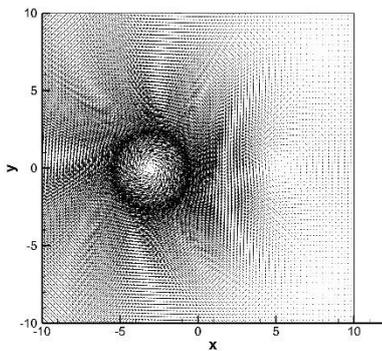
Caso 35



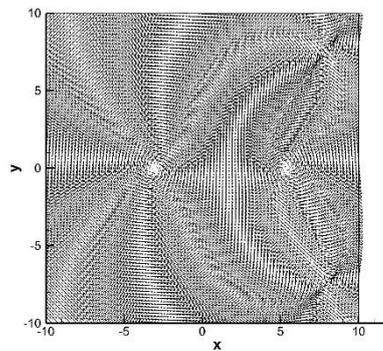
Caso 37



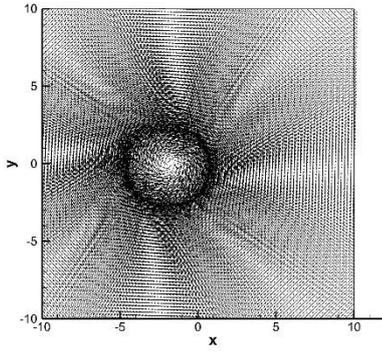
Caso 36



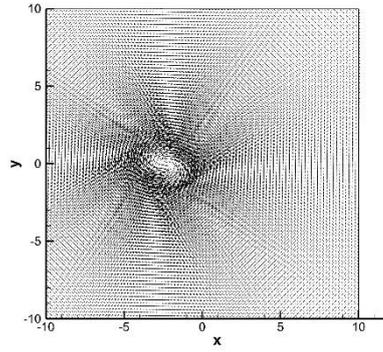
Caso 36 bis



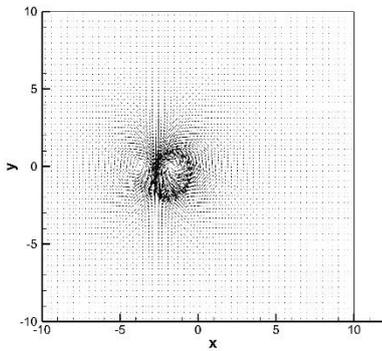
Caso 38



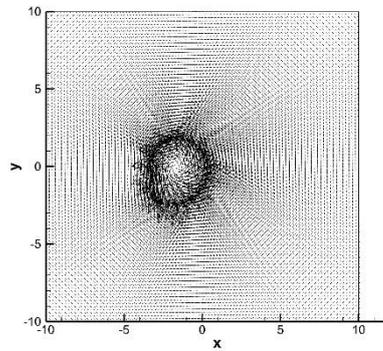
Caso 39



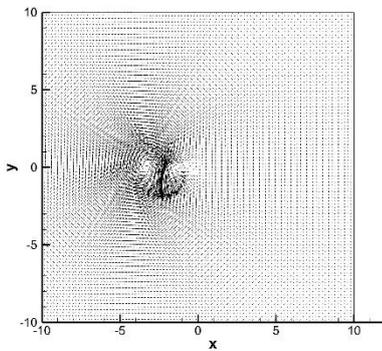
Caso 40



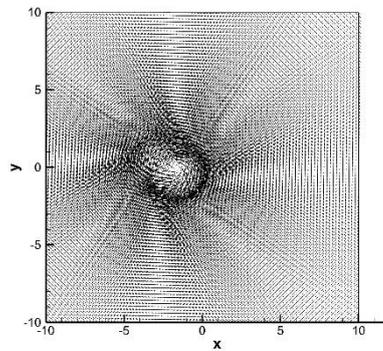
Caso 41



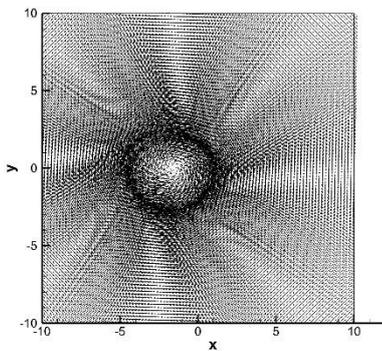
Caso 42



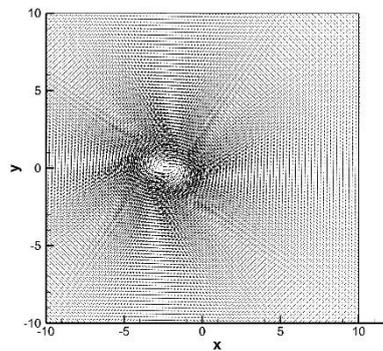
Caso 43



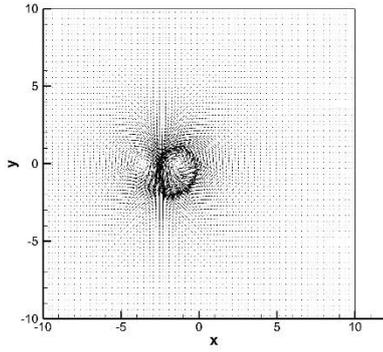
Caso 44



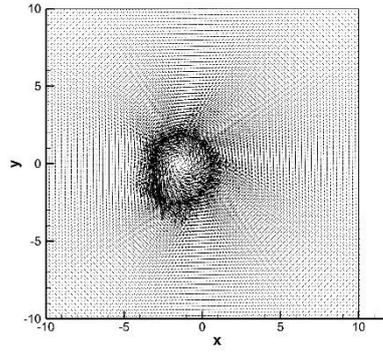
Caso 45



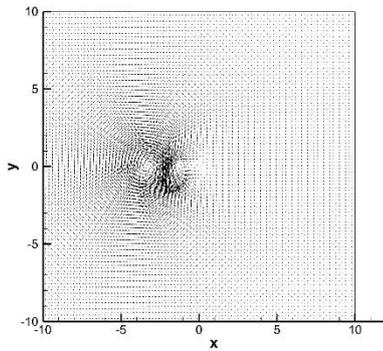
Caso 46



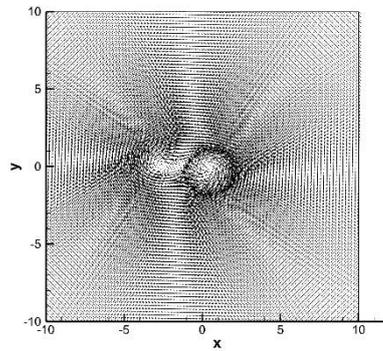
Caso 47



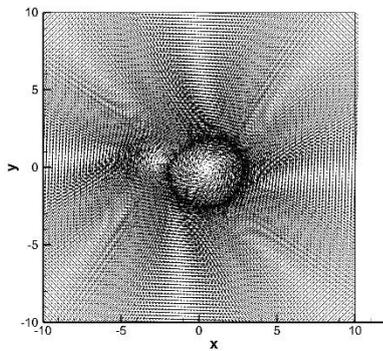
Caso 48



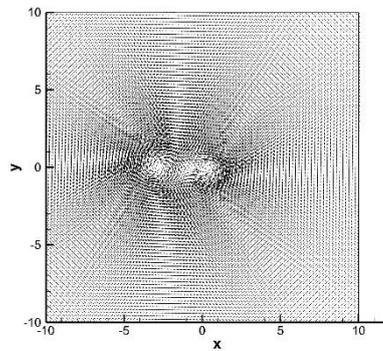
Caso 49



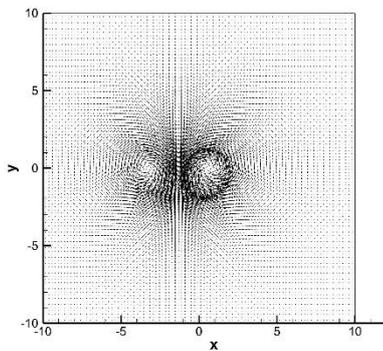
Caso 50



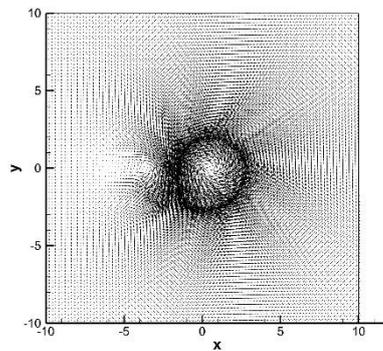
Caso 51



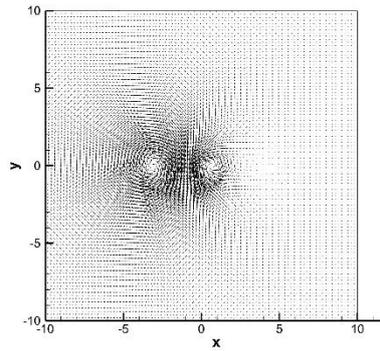
Caso 52



Caso 53



## Caso 54



Per il caso 36 sono presenti due immagini che rappresentano lo stesso campo di velocità. Però nel secondo campo è stata scelta una formattazione dei vettori in modo tale da evidenziare anche il secondo vortice presente.

# Bibliografia

- [1] H. Vollmers, «Detection of vortices and quantitative evaluation of their main parameters from experimental velocity data.,» *Meas. Sci. Technol.* 12, pp. 1199-1207, 2001.
- [2] V. Kolar, «Vortex Identification: New requirements and limitation,» *Journal of Heat and Fluid Flow*, 2007.
- [3] S. Robinson, «Coherent motion in turbulent boundary layer,» *Annual Review of Fluid Mechanics*, p. 23:601–639, 1991.
- [4] J. C. R. Hunt, A. A. Wray e P. Moin, «Eddies, Streams, and Convergence Zones in turbulent Flow.,» *Center for Turbulence Research Report*, pp. 193-208, 1988.
- [5] U. Dallmann, «Topological structures of three-dimensional flow separation,» *DFVLR-IB Report No. 221-82A07*, 1983.
- [6] H. Vollmers, H. P. Kreplin e H. Meier, «Separation and vertical type flow around a prolate spheroid – Evaluation of relevant parameters.,» *In: Proc. of the AGARD Symposium on Aerodynamics of Vortical Type Flows in Three Dimensions, Rotterdam, AGARDCP-342*, pp. 14-1–14-14, 1983.
- [7] M. Chong, «A general classification of three-dimensional flow fields,» *Phys. Fluids A2*, pp. 765-777, 1990.
- [8] M. Michard e T. Favelier, «Développement d'un critère d'identification de structures tourbillonnaires adapté aux mesures de vitesse par PIV,» in *9<sup>o</sup> Congrès Francophone de Vélocimétrie Laser*, Bruxelles, 14-17 Sept. 2004..
- [9] M. Michard, «Identification et suivi de tourbillons-Application à des mesures PIV phasées,» in *Congrès Francophone de Techniques Laser*, 2008.
- [10] P. Chakraborty e S. Balachandar, «On the relationships between local vortex identification schemes,» in *J. Fluid Mech.*, vol. 535,, 2005, p. pp. 189–214.
- [11] J. Zhou, R. Adrian, S. Balachandar e T. M. Kendall, «Mechanisms for generating coherent packets of hairpin vortices,» *J. Fluid Mechanics*, pp. 387,353-396, 1999.
- [12] J. Jeong e F. Hussain, «On the identification of vortex,» *Journal Fluid Mechanism*, pp. 285, 69-94, 1995.

- [13] M. Jesus, C. Dopazo e L. Valino, «Dynamics of velocity gradient invariants in turbulence: Restricted Euler and linear diffusion models,» *Physics of Fluids*, vol. 10, n. 8, 1998.
- [14] L. Graftieaux, M. Michard e N. Grosjean, «Combining PIV, POD and vortex identification algorithms for the study of unsteady turbulent swirling flows,» *Meas. Sci. Technol.* 12, p. 1422–1429, 2001.
- [15] M. J. Bhagwat e J. G. Leishman, «Generalized viscous vortex model for application to free-vortex wake and,» University of Maryland, Gennaio 2002.
- [16] W. J. M. Rankie, «Manual of applied mechanics,» in *C. Griffen Co., London*, 1858.
- [17] M. P. Scully, «Computation of Helicopter Rotor Wake Geometry and Its Influence on Rotor Harmonic Airloads,» *MIT Aeroelastic and Structures Research Laboratory, ASRL TR 178-1*, 1975.
- [18] H. Lamb, in *Hydrodynamics, 6° ed.*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1932.
- [19] C. W. Oseen, «Uber Wirbelbewegung in einer reinendenflussigkeit,» in *Ark. J. Mat. Astrom. Fys., Vol. 7*, 192, pp. 14-21.
- [20] G. H. Vatistas, «New model for intense self-similar vortices,» *Journal of propulsion and power*, vol. 14, n. 4, pp. 462-469, April 1998.
- [21] H. B. Squire, «The growth of a vortex in Turbolent Flow. The Aeronautical Quarterly,16,» pp. 302-306, 1965.
- [22] R. E. Nargi, «Caratterizzazione sperimentale di un modello di elicottero quadripala.,» 2016/2017.
- [23] F. De Gregorio, A. Visingardi e R. E. Nargi, «Investigation of a helicopter model rotor wake interacting with a cylindrical sling load,» 2018.
- [24] R. E. Nargi, F. De Gregorio, R. Camussi e A. Visingardi, «Helicopter model rotor wake characterization in the presence of sling loads,» in *19th International Symposium on the Application of Laser and Imaging Techniques to Fluid Mechanics*, 2018.
- [25] P. Martin, G. Pugliese, J. Leishman e S. Anderson, «Stereoscopic PIV measurement in the wake of a hovering rotor.,» in *56th American Helicopter Society Annual Forum*, Virginia Beach, VA, USA, Maggio 2-4 2000.

- [26] M. Coletta, F. De Gregorio, A. Visingardi e G. Iuso, «PIV data: Vortex Detection and Characterization,» in *13th International Symposium on Particle Image Velocimetry – ISPIV 2019*, Munich, Germany, 2019.